数 学 年 刊 A 辑
2024, 45(2):215–228
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2024.0015

Radford Hopf 代数的 McKay 矩阵*

曹刘峰[1] 陈惠香[2] 李立斌[2]

提要 作者首先考虑了 Radford Hopf 代数 $H_{m,n}$ 在 Green 环意义下张量不可分解模 $V := M(2,0)$ 所得到的 McKay 矩阵 W_V. 接着确定了 W_V 的特征多项式, 并且对 W_V 的每一个特征值都构造了特征向量. 最后, 作者研究了部分特征值的代数重数和几何重数.

关键词 Hopf 代数, McKay 矩阵, 特征值, 特征向量
MR (2000) 主题分类 16T05, 15A18, 11B39
中图法分类 O187.2
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2024)02-0215-14

§1 引 言

McKay 矩阵的思想最早可以追溯至 McKay 在文 [1] 中的观点. 在 McKay 结果基础上, Steinberg 在文 [2] 中给出了任意有限群 G 群代数 $\mathbb{C}G$ 有关 McKay 矩阵的一些结论. 在文 [3] 中, Grinberg 等考虑了特征为 p 的代数闭域 F 上有限群 G 对应的群代数 FG 的 McKay 矩阵. Witherspoon 研究了有限维半单, 几乎余半单, 几乎余交换 Hopf 代数的 McKay 矩阵 (见 [4]). 在文 [5] 中, Benkart 等通过研究量子群 $u_q(sl_2)$, q 为奇数阶单位根, 指出 McKay 矩阵可以决定 Markov 链. Benkart 等在文 [6] 中考虑了 Grothendieck 环意义下有限维 Hopf 代数的 McKay 矩阵. 他们给出了有限维 Hopf 代数的 McKay 矩阵, 矩阵的特征值, 特征向量的一般性结果. 作为例子, 他们研究了 Taft 代数量子偶的 McKay 矩阵 (张量一个 2 维不可分解模), 并且得到了许多有趣的结果. 受文 [6] 的启发, 曹刘峰等在文 [7-8] 中推广并研究了有限表示型 Hopf 代数在 Green 环意义下的 McKay 矩阵.

令 H 为复数域 $\mathbb{C}$ 上的有限表示型 Hopf 代数. Green 环 $r(H)$ (见 [9]) 是由有限维 H-模 V 的同构类模去关系 $[M\oplus V]=[M]+[V]$ 生成的阿贝尔群. $r(H)$ 的乘法结构由 H- 模的张量积给出, 即 $[M][V]=[M\otimes V]$. 这样 $r(H)$ 是一个具有单位元 $[\mathbb{C}]$ 的结合环, 其中 $\mathbb{C}$ 是平凡 H- 模. 注意到 $r(H)$ 有一组 $\mathbb{Z}$- 基 $\{[V]\mid V\in \mathrm{ind}(H)\}$, 其中 $\mathrm{ind}(H)$ 表示所有有限维不可分解 H- 模同构类构成的集合. 假设 $M_1, M_2, \cdots, M_m$ 是在同构意义下所有的有限

本文 2022 年 8 月 1 日收到, 2024 年 4 月 20 日收到修改稿.
[1]盐城工学院数理学院, 江苏 盐城 224000. E-mail: 1204719495@qq.com
[2]扬州大学数学科学学院, 江苏 扬州 225000. E-mail: hxchen@yzu.edu.cn; lbli@yzu.edu.cn
*本文受到国家自然科学基金 (No. 12071412, No. 12371041) 和江苏省研究生科研创新计划 (No. KYCX22-3448) 的资助.

维不可分解 H- 模. 张量不可分解模 V 得到的 McKay 矩阵 W_V 是一个 $m\times m$ 的矩阵, 且 (i,j) 项 $W_{ij}=[M_i\otimes V:M_j]$, 表示 $[M_i\otimes V]$ 表达成 $r(H)$ 基元 $\mathbb{Z}$ 线性组合时 $[M_j]$ 的系数.

本文中, 我们考虑 Radford Hopf 代数 $H_{m,n}$ 张量不可分解 $H_{m,n}$- 模 $V=M(2,0)$ 在 Green 环意义下的 McKay 矩阵 W_V, 其中 $[V]$ 所代表的同构类是 Green 环 $r(H_{m,n})$ 的生成元之一. 利用广义 Fibonacci 数列的根, 我们计算了 W_V 的特征多项式. 再次利用广义 Fibonacci 数列的根, 我们对 W_V 的每个特征值构造了特征向量. 此外, 我们研究了部分特征值的代数重数和几何重数.

本文结构如下: 在第 2 节中, 我们回忆了一些基本定义和结果, 并为文章的后续内容做准备. 在第 3 节, 我们确定了张量 2 维不可分解 $H_{m,n}$- 模 $V=M(2,0)$ 的 McKay 矩阵 W_V. 并且我们考虑了 W_V 的特征多项式, 特征值和特征向量. 在第 4 节中, 我们确定了部分特征值的代数重数和几何重数.

§2 预备知识

通篇, 符号 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ 分别表示整数环, 实数域和复数域. 以下全文, 我们的讨论均在 $\mathbb{C}$ 上. 除非特别声明, 所有的代数, Hopf 代数和模都定义在 $\mathbb{C}$ 上, 所有的模均为左模且为有限维; dim 表示 $\dim_{\mathbb{C}}$. 在本节中, 我们首先回顾 Radford Hopf 代数 $H_{m,n}$ 的定义, 互不同构的不可分解 $H_{m,n}$- 模的分类及其 Clebsch-Gordan 公式. 接着我们介绍在文 [10] 中被研究的广义 Fibonacci 数列的一些结果, 其在之后的研究中将有用.

令 G 是由 g 生成的 mn $(n>1)$ 阶的循环群. 假设 V_i 是一个 1 维的 $\mathbb{C}G$- 模, 使得 g 在 V_i 上的作用为纯量倍 ω^i, 其中 ω 是 mn 次的本原单位根, 则 $\{V_i\mid i\in\mathbb{Z}_{mn}\}$ 构成互不同构的单 $\mathbb{C}G$- 模的完全集. 令 χ 为 $V_{m(n-1)}$ 对应的 $\mathbb{C}$- 线性特征. 即 $\chi(g)=\omega^{m(n-1)}=\omega^{-m}$. χ 的阶数为 n, 且 V_m 的 $\mathbb{C}$- 线性特征为 χ^{-1}.

作为代数, Radford Hopf 代数 $H_{m,n}$ 是由元素 g 和 y 满足如下关系生成的:

$$g^{mn}=1,\quad yg=\chi(g)gy=\omega^{-m}gy,\quad y^n=g^n-1.$$

余乘 Δ, 余单位 ε 和反极元 S 分别如下:

$$\begin{aligned}&\Delta(g)=g\otimes g, &&\varepsilon(g)=1,\quad S(g)=g^{-1},\\&\Delta(y)=y\otimes g+1\otimes y, &&\varepsilon(y)=0,\quad S(y)=-yg^{-1}.\end{aligned}$$

易知 $\dim(H_{m,n})=mn^2$, 且 $H_{m,n}$ 有一组 $\mathbb{C}$- 基 $\{y^ig^j|0\leqslant i\leqslant n-1,0\leqslant j\leqslant mn-1\}$. 特别地, 如果 $m=1$, 则 Radford Hopf 代数 $H_{1,n}$ 恰为 n^2- 维 Taft Hopf 代数 (见 [11]).

令 V 是一个 $\mathbb{C}G$- 模, 且 x 是一个变量. 对任意非负整数 k, 令 $x^kV=\{x^kv\mid v\in V\}$ 是对任意 $u,v\in V$ 和 $\lambda\in\mathbb{C}$ 满足定义 $x^ku+x^kv=x^k(u+v)$ 和 $\lambda(x^kv)=x^k(\lambda v)$ 的一个

$\mathbb{C}$- 向量空间. 则 x^kV 是一个 $\mathbb{C}G$- 模且 G- 作用为

$$h(x^kv)=\chi^{-1}(h)x^khv,$$

其中 $h\in G$ 且 $v\in V$.

记 Ω_0 为 $\mathbb{Z}_{mn}$ 中被 m 整除的元素构成的子集合, 子集 Ω_1 为 Ω_0 的补集. 令 φ 是 $\mathbb{Z}_{mn}$ 上由 $V_{\chi^{-1}}\otimes V_i\cong V_{\varphi(i)}$ 所决定的置换, 其中 $V_{\chi^{-1}}$ 即为特征 χ^{-1} 对应的单 $\mathbb{C}G$- 模 V_m. 容易验证, 对任意的 $i\in\mathbb{Z}_{mn}$, 有 $\varphi(i)=m+i$. 令 $\langle\varphi\rangle$ 是由置换 φ 生成的对称群 S_{mn} 的子群, 则 $\langle\varphi\rangle$ 可以作用在指标集 $\mathbb{Z}_{mn}$ 上, 且在该作用下指标集 $\mathbb{Z}_{mn}$ 划分为 m 个互不相同的 $\langle\varphi\rangle$- 轨道 $[0],[1],\cdots,[m-1]$, 其中对任意的 $0\leqslant i\leqslant m-1$, $[i]=\{i,m+i,\cdots,(n-1)m+i\}$. 并且 $\Omega_0=[0]$ 及 $\Omega_1=[1]\cup[2]\cup\cdots\cup[m-1]$. 特别地, 如果 $m=1$, 则 $\Omega_0=\mathbb{Z}_{mn}$.

对任意 $i\in\Omega_0$ 以及 $1\leqslant l\leqslant n$, 令 $M(l,i):=V_i\oplus xV_i\oplus\cdots\oplus x^{l-1}V_i$, 则 $M(l,i)$ 是一个 $H_{m,n}$- 模:

$$h\cdot(x^kv):=\chi^{-k}(h)x^k(h\cdot v),\quad 0\leqslant k\leqslant l-1,$$
$$y\cdot(x^kv)=\begin{cases}x^{k+1}v, & 0\leqslant k\leqslant l-2,\\ 0, & k=l-1,\end{cases}$$

对任意 $h\in\mathbb{C}G$ 和 $v\in V_i$.

对任意 $j\in\Omega_1$, 记 $P_j:=V_j\oplus xV_j\oplus\cdots\oplus x^{n-1}V_j$, 则 P_j 是一个 $H_{m,n}$- 模:

$$h\cdot(x^kv):=\chi^{-k}(h)x^k(h\cdot v),\quad 0\leqslant k\leqslant n-1,$$
$$y\cdot(x^kv)=\begin{cases}x^{k+1}v, & 0\leqslant k\leqslant n-2,\\ (g^n-1)\cdot v, & k=n-1,\end{cases}$$

对任意 $h\in\mathbb{C}G$ 和 $v\in V_j$. 对任意 $j,j'\in\Omega_1$, 由文 [12, 定理 2.9], 有作为 $H_{m,n}$- 模 $P_j\cong P_{j'}$ 当且仅当 $[j]=[j']$. 令 $P_{[j]}$ 为 P_j 同构类的代表元. 王志华等证明了集合 $\{M(l,i),P_{[j]}\mid i\in\Omega_0,1\leqslant l\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m-1\}$ 在同构意义下构成了不可分解 $H_{m,n}$- 模的完全集 (见 [12, 命题 2.4, 2.8 和定理 2.9], [13, 定理 2.5]).

根据文 [12, 命题 3.5 和 4.1], 有

(1) 令 $1\leqslant l\leqslant l'\leqslant n$ 且 $l+l'\leqslant n$, 则

$$M(l,i)\otimes M(l',i')\cong M(l',i')\otimes M(l,i)\cong\bigoplus_{k=0}^{l-1}M(l+l'-1-2k,i+i'+mk).$$

(2) 令 $1\leqslant l\leqslant l'\leqslant n$ 且 $l+l'>n$, 则

$$M(l,i)\otimes M(l',i')\cong M(l',i')\otimes M(l,i)\cong$$
$$\Big(\bigoplus_{k=0}^{l+l'-1-n}M(n,i+i'+mk)\Big)\oplus\Big(\bigoplus_{k=l+l'-n}^{l-1}M(l+l'-1-2k,i+i'+mk)\Big).$$

(3) 令 $i\in\Omega_0$ 且 $1\leqslant j\leqslant m-1$, 则

$$M(l,i)\otimes P_{[j]}\cong P_{[j]}\otimes M(l,i)\cong lP_{[j]}.$$

令 $V=M(2,0)$. 则由上述讨论, 我们有如下引理.

引理 2.1 令 $i\in\Omega_0$, $1\leqslant l\leqslant n-1$ 及 $1\leqslant j\leqslant m-1$, 则

(1) $M(1,i)\otimes V\cong M(2,i)$;

(2) $M(l,i)\otimes V\cong M(l+1,i)\oplus M(l-1,i+m)$;

(3) $M(n,i)\otimes V\cong M(n,i)\oplus M(n,i+m)$;

(4) $P_{[j]}\otimes V\cong 2P_{[j]}$.

余下全文, 除非特别说明, 总令 $\eta=\cos\frac{\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{n}=\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{n}}$ 为一个 $\mathbb{C}$ 中的 $2n$ 次的本原单位根, 则 $\eta^2=\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}}$ 是 $\mathbb{C}$ 中的一个 n 次本原单位根.

二元多项式代数 $\mathbb{C}[y,z]$ 中的广义 Fibonacci 数列 $F_n(y,z)$ 定义如下:

$$F_0(y,z)=0,\quad F_1(y,z)=1,\quad F_{s+2}(y,z)=zF_{s+1}(y,z)-yF_s(y,z). \tag{2.1}$$

对 $s\geqslant 0$. 由文 [14], 有

$$F_s(y,z)=\sum_{k=0}^{[\frac{s-1}{2}]}(-1)^k\binom{s-1-k}{k}y^kz^{s-1-2k},$$

其中 $[\frac{s-1}{2}]$ 表示不大于 $\frac{s-1}{2}$ 的最大整数. 李立斌和张印火在文 [10] 中计算了如下方程组在 $\mathbb{C}$ 中的解:

$$\begin{cases}y^n-1=0,\\(z-y-1)F_n(y,z)=0.\end{cases} \tag{2.2}$$

他们证明了对任意 $n\geqslant 2$, 方程组 (2.2) 有 n^2-n+1 个不同解:

$$\Phi=\{(1,2)\}\cup\{(\omega_k,\sigma_{k,r})\,|\,0\leqslant k\leqslant n-1,1\leqslant r\leqslant n-1\},$$

其中 $\omega_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}=\eta^{2k}$ 是一个 $\mathbb{C}$ 中的 n 次单位根, $\sigma_{k,r}=2\eta^k\cos\frac{r\pi}{n}$, $1\leqslant r\leqslant n-1$ (见 [10, 引理 4.4]). 这样, 对 $1\leqslant r\leqslant n-1$, 有

$$\sigma_{k,r}=2\eta^k\cos\frac{r\pi}{n}=\eta^k(\eta^r+\eta^{-r}).$$

特别地, 如果 $1\leqslant k=r\leqslant n-1$, 有

$$\sigma_{k,k}=\eta^k(\eta^k+\eta^{-k})=1+\eta^{2k}.$$

综上所述, 我们有如下结论.

引理 2.2 对任意 $0\leqslant k\leqslant n-1$, 广义 Fibonacci 数列 $F_n(\omega_k,z)=0$ 有如下 $n-1$ 个不同的解:

$$\sigma_{k,r}=2\eta^k\cos\frac{r\pi}{n},$$

其中 $1 \leqslant r \leqslant n-1$. 特别地, 当 $1 \leqslant k = r \leqslant n-1$, 有

$$\sigma_{k,k} = \eta^k(\eta^k + \eta^{-k}) = 1 + \eta^{2k}.$$

§3　$M(2,0)$ 对应的 McKay 矩阵

在本节中, 我们确定了张量不可分解 $H_{m,n}$- 模 $V = M(2,0)$ 对应的 McKay 矩阵 W_V, 并且利用 (2.1) 所给出的广义 Fibonacci 数列 $F_n(y,z)$ 来研究 McKay 矩阵 W_V. 此外, 我们计算了 W_V 的特征多项式, 并且讨论了 W_V 的特征值和特征向量.

令 $T := \{(l,i) \mid 1 \leqslant l \leqslant n, 0 \leqslant i \leqslant n-1\} \bigcup \{[j] \mid 1 \leqslant j \leqslant m-1\}$. 定义指标集 T 上的顺序如下:

$$\begin{aligned}
&(l,i) < [j], \quad \forall 1 \leqslant l \leqslant n, \quad 0 \leqslant i \leqslant n-1, \quad 1 \leqslant j \leqslant m-1,\\
&(l,i) < (l',i') \Leftrightarrow l < l', \quad \text{或 } l = l' \text{ 且 } i < i',\\
&\ [j] < [j'] \Leftrightarrow j < j'.
\end{aligned}$$

张量不可分解 $H_{m,n}$- 模 V 得到的 McKay 矩阵 $W_V = (W_{pq})$ 是一个 $(n^2+m-1) \times (n^2+m-1)$ 矩阵, $p, q \in T$, 其中 (p,q)- 项如下给出:

$$\begin{aligned}
W_{(l,i)(l',i')} &= [M(l,i) \otimes V : M(l',i')],\\
W_{(l,i)[j]} &= [M(l,i) \otimes V : P_{[j]}] = 0,\\
W_{[j](l,i)} &= [P_{[j]} \otimes V : M(l,i)] = 0,\\
W_{[j][j']} &= [P_{[j]} \otimes V : P_{[j']}].
\end{aligned}$$

令 I_s $(1 \leqslant s \in \mathbb{Z})$ 为 $s \times s$ 单位阵, 且 $n \times n$ 矩阵 Z 和 U 分别定义如下:

$$Z = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1\\
1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0
\end{pmatrix} \quad \text{且} \quad U = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & \ddots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 1\\
1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix}.$$

如此, 按 T 中顺序, 我们有如下结论.

命题 3.1 McKay 矩阵 $W := W_V$ 可以表示成如下分块矩阵:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_n & 0 & & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ Z & 0 & \mathrm{I}_n & & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z & 0 & \mathrm{I}_n & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & Z & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \mathrm{I}_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & Z & 0 & \mathrm{I}_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \cdots & 0 & U & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \cdots & 0 & 0 & 2\mathrm{I}_{m-1} \end{pmatrix}.$$

证 由引理 2.1 可得. 证毕.

注意到命题 3.1 中给出的矩阵 Z 是一个 $n\times n$ 循环矩阵. 关于 Z, 我们有如下基本结论.

引理 3.1 存在 $n\times n$ 可逆矩阵 Q 对角化 Z, 即

$$Q^{-1}ZQ = D := \mathrm{diag}\{1, \eta^2, \eta^4, \cdots, \eta^{2(n-1)}\},$$

其中

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \eta^2 & \eta^4 & \cdots & \eta^{2(n-1)} \\ 1 & \eta^4 & \eta^8 & \cdots & \eta^{4(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \eta^{-2} & \eta^{-4} & \cdots & \eta^{-2(n-1)} \end{pmatrix}.$$

证 可直接证明. 此处省略过程.

因为 $U = \mathrm{I}_n + Z$, 所以 $Q^{-1}UQ = E := \mathrm{diag}\{2, 1+\eta^2, \cdots, 1+\eta^{2(n-1)}\}$. 令 $Y := \mathrm{diag}\{\underbrace{Q, \cdots, Q}_{n\text{ copies}}, \mathrm{I}_{m-1}\}$, 则

$$W' = Y^{-1}WY = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_n & 0 & & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ D & 0 & \mathrm{I}_n & & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 & \mathrm{I}_n & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & D & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \mathrm{I}_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & D & 0 & \mathrm{I}_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \cdots & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \cdots & 0 & 0 & 2\mathrm{I}_{m-1} \end{pmatrix}.$$

这样 W 和 W' 相似, 因此它们有相同的特征多项式. 为了确定 W' 的特征多项式, 对 $s \geqslant 0$, 在 $\mathbb{Z}[\lambda]$ 上我们定义如下 $n \times n$ 对角矩阵列 $G_s(D,\lambda)$:

$$G_0(D,\lambda)=0, \quad G_1(D,\lambda)=\mathrm{I}_n, \quad G_{s+2}(D,\lambda)=\lambda G_{s+1}(D,\lambda)-DG_s(D,\lambda), \quad s \geqslant 0. \tag{3.1}$$

为了简便, 记 $G_s(D,\lambda)$ 为 G_s. 接下来, 我们将计算 W (W') 的特征多项式.

定理 3.1 W 的特征多项式 $\rho_n(\lambda)$ 为

$$\begin{aligned}\rho_n(\lambda)&=(\lambda-2)^{m-1}\Big(\prod_{0\leqslant k\leqslant n-1}(\lambda-\sigma_{k,k})\Big)\Big(\prod_{\substack{0\leqslant k\leqslant n-1\\1\leqslant r\leqslant n-1}}(\lambda-\sigma_{k,r})\Big)\\&=(\lambda-2)^{m}\Big(\prod_{1\leqslant k\leqslant n-1}(\lambda-(1+\eta^{2k}))\Big)\Big(\prod_{\substack{0\leqslant k\leqslant n-1\\1\leqslant r\leqslant n-1}}(\lambda-\eta^k(\eta^r+\eta^{-r}))\Big).\end{aligned}$$

证 定义 $P \in M_{n^2+m-1}(\mathbb{Z}[\lambda])$ 如下:

$$\begin{pmatrix} G_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\ G_2 & G_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\ G_3 & G_2 & G_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ G_{n-2} & G_{n-3} & G_{n-4} & \cdots & G_1 & 0 & 0 & 0\\ G_{n-1} & G_{n-2} & G_{n-3} & \cdots & G_2 & G_1 & 0 & 0\\ (\lambda\mathrm{I}_n-E)G_{n-1} & (\lambda\mathrm{I}_n-E)G_{n-2} & (\lambda\mathrm{I}_n-E)G_{n-3} & \cdots & (\lambda\mathrm{I}_n-E)G_2 & \lambda\mathrm{I}_n-E & G_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \mathrm{I}_{m-1}\end{pmatrix}.$$

根据直接计算, 得

$$P(\lambda\mathrm{I}_{n^2+m-1}-W')=\begin{pmatrix} G_2 & -\mathrm{I}_n & 0 & & \cdots & 0 & 0 & 0\\ G_3 & 0 & -\mathrm{I}_n & & \cdots & 0 & 0 & 0\\ G_4 & 0 & 0 & -\mathrm{I}_n & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -\mathrm{I}_n & \vdots & \vdots\\ G_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\mathrm{I}_n & 0\\ (\lambda\mathrm{I}_n-E)G_n & 0 & 0 & & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (\lambda-2)\mathrm{I}_{m-1}\end{pmatrix}.$$

矩阵 $P(\lambda\mathrm{I}_{n^2+m-1}-W')$ 可以被写成如下分块矩阵:

$$\begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & 2\mathrm{I}_{m-1}\end{pmatrix},$$

其中

$$A=\begin{pmatrix} G_2 & -\mathrm{I}_n & 0 & & \cdots & 0 & 0 \\ G_3 & 0 & -\mathrm{I}_n & & \cdots & 0 & 0 \\ G_4 & 0 & 0 & -\mathrm{I}_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -\mathrm{I}_n & \vdots \\ G_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\mathrm{I}_n \\ (\lambda\mathrm{I}_n-E)G_n & 0 & 0 & & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

想要计算 W' 的特征多项式 ($P(\lambda\mathrm{I}_{n^2+m-1}-W')$ 的行列式), 只需要计算 A 的行列式. 注意到矩阵 $P\in\mathbb{Z}^{n^2+m-1}$ 是一个行列式为 1 的下三角矩阵. 因此

$$\det(P(\lambda\mathrm{I}_{n^2+m-1}-W'))=(\lambda-2)^{m-1}\det((\lambda\mathrm{I}_n-E)G_n(D,\lambda)).$$

由引理 2.2 和 $G_s(D,\lambda)$ 的定义, 可以看出

$$(\lambda\mathrm{I}_n-E)G_n(D,\lambda)=\mathrm{diag}\Big\{(\lambda-\sigma_{k,k})\prod_{1\leqslant r\leqslant n-1}(\lambda-\sigma_{k,r})\Big\},$$

其中 k 跑遍 $\{0,1,\cdots,n-1\}$. 因此 W 的特征多项式为

$$\begin{aligned}\rho_n(\lambda):&=\det(P(\lambda\mathrm{I}_{n^2+m-1}-W'))=(\lambda-2)^{m-1}\Big(\prod_{0\leqslant k\leqslant n-1}(\lambda-\sigma_{k,k})\Big)\Big(\prod_{\substack{0\leqslant k\leqslant n-1\\1\leqslant r\leqslant n-1}}(\lambda-\sigma_{k,r})\Big)\\&=(\lambda-2)^m\Big(\prod_{1\leqslant k\leqslant n-1}(\lambda-(1+\eta^{2k}))\Big)\Big(\prod_{\substack{0\leqslant k\leqslant n-1\\1\leqslant r\leqslant n-1}}(\lambda-\eta^k(\eta^r+\eta^{-r}))\Big).\end{aligned}$$

证毕.

接下来, 利用引理 2.2, 我们将更清楚地刻画 W 的特征多项式 $\rho_n(\lambda)$, 这将帮助我们确定 W 的每个特征值的代数重数.

定理 3.2 W 的特征多项式 $\rho_n(\lambda)$ 如下:

$$\rho_n(\lambda)=\begin{cases}(\lambda-2)^m\Big(\prod\limits_{1\leqslant k\leqslant n-1}(\lambda-\sigma_{k,k})^2\Big)\Big(\prod\limits_{0\leqslant k\leqslant n-1}\prod\limits_{1\leqslant r\neq k\leqslant n-1}(\lambda-\sigma_{k,r})\Big), & n\text{ 为奇数},\\(\lambda-2)^m\lambda^{n+1}\Big(\prod\limits_{1\leqslant k\neq\frac{n}{2}\leqslant n-1}(\lambda-\sigma_{k,k})^2\Big)\Big(\prod\limits_{\substack{0\leqslant k\leqslant n-1\\1\leqslant r\neq k\leqslant n-1\\r\neq\frac{n}{2}}}(\lambda-\sigma_{k,r})\Big), & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

证 我们断言对任意固定的 $2\leqslant n\in\mathbb{Z}$, 以及任意的 $0\leqslant k,k'\leqslant n-1$, $1\leqslant r,r'\leqslant n-1$ 且 $r,r'\neq\frac{n}{2}$, 有 $\sigma_{k,r}=\sigma_{k',r'}$ 当且仅当 $k=k'$ 且 $r=r'$. 事实上, 充分性是显然的. 现在假设 $\sigma_{k,r}=\sigma_{k',r'}$, 则

$$2\eta^k\cos\frac{r\pi}{n}=2\eta^{k'}\cos\frac{r'\pi}{n},\quad 即\ \eta^{k-k'}=\frac{\cos\frac{r'\pi}{n}}{\cos\frac{r\pi}{n}}.$$

注意到 $(\eta^{k-k'})^{2n}=1$, 且 $\cos\frac{r\pi}{n},\cos\frac{r'\pi}{n}\in\mathbb{R}$. 因此 $(\frac{\cos\frac{r'\pi}{n}}{\cos\frac{r\pi}{n}})^{2n}=1$, 于是 $\frac{\cos\frac{r'\pi}{n}}{\cos\frac{r\pi}{n}}=1$ 或 $\frac{\cos\frac{r'\pi}{n}}{\cos\frac{r\pi}{n}}=-1$. 如果 $\frac{\cos\frac{r'\pi}{n}}{\cos\frac{r\pi}{n}}=-1$, 则 $\eta^{k-k'}=-1$, 这与 η 是一个 $2n$ 次本原单位根以及 $0\leqslant k,k'\leqslant n-1$ 矛盾. 因此 $\frac{\cos\frac{r'\pi}{n}}{\cos\frac{r\pi}{n}}=1$ 且 $\eta^{k-k'}=1$. 这样, 由于 $0\leqslant k,k'\leqslant n-1$, $1\leqslant r,r'\leqslant n-1$ 且 η 是一个 $2n$ 次本原单位根, 得 $k=k'$ 且 $r=r'$. 这样, 断言得证.

根据定理 3.1, 有 $\rho_n(\lambda)=(\lambda-2)^{m-1}\Big(\prod\limits_{0\leqslant k\leqslant n-1}(\lambda-\sigma_{k,k})\Big)\Big(\prod\limits_{\substack{0\leqslant k\leqslant n-1\\ 1\leqslant r\leqslant n-1}}(\lambda-\sigma_{k,r})\Big)$. 因为 $\sigma_{0,0}=2$ 且对于任意 $1\leqslant k\leqslant n-1$, 有 $\sigma_{k,k}=1+\eta^{2k}$, 所以 $\rho_n(\lambda)$ 可以写成如下形式:

$$\rho_n(\lambda)=(\lambda-2)^m\Big(\prod_{1\leqslant k\leqslant n-1}(\lambda-\sigma_{k,k})^2\Big)\Big(\prod_{0\leqslant k\leqslant n-1}\ \prod_{1\leqslant r\neq k\leqslant n-1}(\lambda-\sigma_{k,r})\Big).\tag{3.2}$$

如果 n 是奇数, 根据上述断言, 可知对 $0\leqslant k\leqslant n-1$ 和 $1\leqslant r\leqslant n-1$, 有 $\sigma_{k,r}$ 互不相同. 因此此时 $\rho_n(\lambda)$ 与 (3.2) 中所给出的表达式一致. 如果 n 是偶数, 对所有 $0\leqslant k\leqslant n-1$, 有 $\sigma_{k,\frac{n}{2}}=0$. 因此 (3.2) 可以写成如下形式:

$$\rho_n(\lambda)=(\lambda-2)^m\lambda^{n+1}\Big(\prod_{1\leqslant k\neq\frac{n}{2}\leqslant n-1}(\lambda-\sigma_{k,k})^2\Big)\Big(\prod_{0\leqslant k\leqslant n-1}\ \prod_{\substack{1\leqslant r\neq k\leqslant n-1\\ r\neq\frac{n}{2}}}(\lambda-\sigma_{k,r})\Big).$$

根据上述断言, 易知当 $0\leqslant k\leqslant n-1$ 及 $1\leqslant r\neq\frac{n}{2}\leqslant n-1$ 时, $\sigma_{k,r}$ 互不相同且不为零. 因此此时,

$$\begin{aligned}\rho_n(\lambda)&=(\lambda-2)^m\lambda^{n+1}\Big(\prod_{1\leqslant k\neq\frac{n}{2}\leqslant n-1}(\lambda-\sigma_{k,k})^2\Big)\Big(\prod_{1\leqslant r\neq\frac{n}{2}\leqslant n-1}(\lambda-\sigma_{\frac{n}{2},r})\Big)\\&\quad\Big(\prod_{0\leqslant k\leqslant\frac{n}{2}-1}\ \prod_{\substack{1\leqslant r\neq k\leqslant n-1\\ r\neq\frac{n}{2}}}(\lambda-\sigma_{k,r})\Big)\Big(\prod_{\frac{n}{2}+1\leqslant k\leqslant n-1}\ \prod_{\substack{1\leqslant r\neq k\leqslant n-1\\ r\neq\frac{n}{2}}}(\lambda-\sigma_{k,r})\Big)\\&=(\lambda-2)^m\lambda^{n+1}\Big(\prod_{1\leqslant k\neq\frac{n}{2}\leqslant n-1}(\lambda-\sigma_{k,k})^2\Big)\Big(\prod_{\substack{0\leqslant k\leqslant n-1\\ 1\leqslant r\neq k\leqslant n-1\\ r\neq\frac{n}{2}}}(\lambda-\sigma_{k,r})\Big).\end{aligned}$$

证毕.

推论 3.1 下述结论成立.

(1) 假设 n 为奇数, 则 $\rho_n(\lambda)$ 有 n^2-n+1 个互不相同的根 $\{2\}\cup\{\sigma_{k,r}\mid 0\leqslant k\leqslant n-1,1\leqslant r\leqslant n-1\}$. 并且, 对每个 $1\leqslant k\leqslant n-1$, 特征值 $\sigma_{k,k}$ 的代数重数为 2, 特征值 2 的代数重数为 m, 并且其余特征值的代数重数均为 1.

(2) 假设 n 为偶数, 则 $\rho_n(\lambda)$ 有 n^2-2n+2 个互不相同的根 $\{2\}\cup\{0\}\cup\{\sigma_{k,r}\mid 0\leqslant k\leqslant n-1,1\leqslant r\neq\frac{n}{2}\leqslant n-1\}$. 并且, 特征值 0 的代数重数为 $n+1$, 对每个 $1\leqslant k\neq\frac{n}{2}\leqslant n-1$, 特征值 $\sigma_{k,k}$ 的代数重数为 2, 特征值 2 的代数重数为 m, 且其余特征值的代数重数均为 1.

证 由定理 3.2 可证.

接下来, 利用广义 Fibonacci 数列 $F_n(y,z)$ 的根, 对 W 的每个特征值, 我们构造部分特征向量. 令 $\mathbf{1}=[1,\ 1,\ \cdots,\ 1]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{Z}^n$, $\cdots$, $\boldsymbol{n}=[n,\ n,\ \cdots,\ n]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{Z}^n$, $\boldsymbol{w_1}=[1,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{Z}^{m-1}$, $\boldsymbol{w_2}=[0,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{Z}^{m-1}$, $\cdots$, $\boldsymbol{w_{m-1}}=[0,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 1]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{Z}^{m-1}$ 以及 $\mathbf{0}=[0,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{Z}^{m-1}$. 则我们有下面的定理.

定理 3.3 向量 $\boldsymbol{v_i}=[\mathbf{1}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{2}^{\mathrm{T}},\ \cdots,\ \boldsymbol{n}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{w_i}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{Z}^{n^2+m-1}$ $(i=1,2,\cdots,m-1)$ 和 $\boldsymbol{v_0}=[\mathbf{1}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{2}^{\mathrm{T}},\ \cdots,\ \boldsymbol{n}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{Z}^{n^2+m-1}$ 是 W 特征值 2 的线性无关的特征向量. 并且, 集合 $\{\boldsymbol{v_0},\boldsymbol{v_1},\cdots,\boldsymbol{v_{m-1}}\}$ 构成了 W 特征值 2 的特征空间的一组 $\mathbb{C}$- 基.

证 容易看出 $\boldsymbol{v_0},\boldsymbol{v_1},\cdots,\boldsymbol{v_{m-2}},\boldsymbol{v_{m-1}}$ 在 $\mathbb{C}$ 上是线性无关的. 现在我们证明 $\boldsymbol{v_1}$ 是 W 特征值 2 的一个特征向量. 事实上, 容易看出当 $1\leqslant k\leqslant n$ 时, 有 $Z\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}$. 因此

$$W\boldsymbol{v_1}=W\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{2}\\ \vdots\\ \boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{w_1}\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{2}\\ \vdots\\ \boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{w_1}\end{bmatrix}=2\boldsymbol{v_1}.$$

类似地, 可以验证当 $i=0,2,3,\cdots,m-1$ 时, 有 $W\boldsymbol{v_i}=2\boldsymbol{v_i}$. 注意到 2 的代数重数为 m. 所以第二个结论成立.

注 3.1 定理 3.3 表明 2 的几何重数也为 m.

根据引理 3.1, 当 $0\leqslant k\leqslant n-1$ 时, 向量 $\boldsymbol{v_1^k}:=[1,\ \eta^{2k},\ \eta^{4k},\cdots,\ \eta^{2(n-1)}]^{\mathrm{T}}$ 是 Z 特征值 η^{2k} 的一个特征向量. 令 $\boldsymbol{v_{t,k,r}}=F_t(\eta^{2k},\eta^k(\eta^r+\eta^{-r}))\boldsymbol{v_1^k}$, 其中 $0\leqslant k\leqslant n-1$, $1\leqslant r\leqslant n-1$ 且 $F_t(\eta^{2k},\eta^k(\eta^r+\eta^{-r}))$ 为 (2.1) 方式定义的广义 Fibonacci 数列. 以下全文, 除特别说明, 令 $\mathbf{0}=[0,\ 0,\ \cdots,\ 0]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{Z}^{m-1}$ 且 $\overline{\mathbf{0}}=[0,\ 0,\ \cdots,\ 0]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{Z}^n$, 则我们有如下定理.

定理 3.4 当 $0\leqslant k\leqslant n-1$ 和 $1\leqslant r\neq\frac{n}{2}\leqslant n-1$ 时, 向量 $\boldsymbol{v_{k,r}}=[\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{1,k,r}}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{2,k,r}}^{\mathrm{T}},\cdots,\ \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n,k,r}}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 是 W 特征值 $\sigma_{k,r}=\eta^k(\eta^r+\eta^{-r})$ 的一个特征向量 (此时, $\sigma_{k,r}\neq 0$).

证 我们证明下列结果成立:

$$\boldsymbol{v_{2,k,r}}=\sigma_{k,r}\boldsymbol{v_{1,k,r}},$$

$$Z\boldsymbol{v_{t-2,k,r}}+\mathrm{I}_n\boldsymbol{v_{t,k,r}}=\sigma_{k,r}\boldsymbol{v_{t-1,k,r}},\quad 3\leqslant t\leqslant n,$$

$$U\boldsymbol{v_{n,k,r}}=\sigma_{k,r}\boldsymbol{v_{n,k,r}}.$$

事实上, $\boldsymbol{v_{2,k,r}}=F_2(\eta^{2k},\eta^k(\eta^r+\eta^{-r}))\boldsymbol{v_{1,k,r}}=\eta^k(\eta^r+\eta^{-r})\boldsymbol{v_{1,k,r}}=\sigma_{k,r}\boldsymbol{v_{1,k,r}}$. 此外,

当 $3\leqslant t\leqslant n$ 时, 有

$$\begin{aligned}\sigma_{k,r}\boldsymbol{v}_{t-1,k,r}-Z\boldsymbol{v}_{t-2,k,r}&=\eta^k(\eta^r+\eta^{-r})F_{t-1}(\eta^{2k},\eta^k(\eta^r+\eta^{-r}))\boldsymbol{v}_{1,k,r}\\&\quad-\eta^{2k}F_{t-2}(\eta^{2k},\eta^k(\eta^r+\eta^{-r}))\boldsymbol{v}_{1,k,r}\\&=(\eta^k(\eta^r+\eta^{-r})F_{t-1}(\eta^{2k},\eta^k(\eta^r+\eta^{-r}))\\&\quad-\eta^{2k}F_{t-2}(\eta^{2k},\eta^k(\eta^r+\eta^{-r})))\boldsymbol{v}_{1,k,r}\\&=F_t(\eta^{2k},\eta^k(\eta^r+\eta^{-r}))\boldsymbol{v}_{1,k,r}=\boldsymbol{v}_{t,k,r}.\end{aligned}$$

因为 $(\eta^{2k},\eta^k(\eta^r+\eta^{-r}))$ 是 $F_n(y,z)=0$ 的一个解, 所以 $\boldsymbol{v}_{n,k,r}=F_n(\eta^{2k},\eta^k(\eta^r+\eta^{-r}))\boldsymbol{v}_{1,k,r}=\overline{\mathbf{0}}$. 因此

$$U\boldsymbol{v}_{n,k,r}=\overline{\mathbf{0}}=\sigma_{k,r}\boldsymbol{v}_{n,k,r}.$$

如此, 我们有

$$W\boldsymbol{v}_{k,r}=\begin{pmatrix}0&\mathrm{I}_n&0&&\cdots&0&0&0\\Z&0&\mathrm{I}_n&&\cdots&0&0&0\\0&Z&0&\mathrm{I}_n&\ddots&0&0&0\\\vdots&\vdots&Z&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\mathrm{I}_n&0&0\\0&0&0&\cdots&Z&0&\mathrm{I}_n&0\\0&0&0&&\cdots&0&U&0\\0&0&0&&\cdots&0&0&2\mathrm{I}_{m-1}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_{1,k,r}\\\boldsymbol{v}_{2,k,r}\\\boldsymbol{v}_{3,k,r}\\\vdots\\\boldsymbol{v}_{n-1,k,r}\\\boldsymbol{v}_{n,k,r}\\\mathbf{0}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_{2,k,r}\\Z\boldsymbol{v}_{1,k,r}+\mathrm{I}_n\boldsymbol{v}_{3,k,r}\\Z\boldsymbol{v}_{2,k,r}+\mathrm{I}_n\boldsymbol{v}_{4,k,r}\\\vdots\\Z\boldsymbol{v}_{n-2,k,r}+\mathrm{I}_n\boldsymbol{v}_{n,k,r}\\U\boldsymbol{v}_{n,k,r}\\\mathbf{0}\end{bmatrix}=\sigma_{k,r}\boldsymbol{v}_{k,r}.$$

证毕.

假设 n 为偶数且对任意 $1\leqslant l\leqslant n$, 令

$$\boldsymbol{v}^l_{k,\frac{n}{2}}=\begin{cases}(-1)^{\frac{l-1}{2}}\eta^{(l-1)k}\boldsymbol{v}^k_1, & 2\nmid l,\\\overline{\mathbf{0}}, & 2\mid l,\end{cases}$$

则令 $\boldsymbol{v}_{k,\frac{n}{2}}:=[\boldsymbol{v}^1_{k,\frac{n}{2}},\boldsymbol{v}^2_{k,\frac{n}{2}},\cdots,\boldsymbol{v}^{n-1}_{k,\frac{n}{2}},\boldsymbol{v}^n_{k,\frac{n}{2}},\mathbf{0}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{v}_1^{k\,\mathrm{T}},\overline{\mathbf{0}}^{\mathrm{T}},-\eta^{2k}\boldsymbol{v}_1^{k\,\mathrm{T}},\overline{\mathbf{0}}^{\mathrm{T}},\cdots,(-1)^{\frac{n}{2}-1}\cdot\eta^{(n-2)k}\boldsymbol{v}_1^{k\,\mathrm{T}},\overline{\mathbf{0}}^{\mathrm{T}},\mathbf{0}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, 我们有如下结论.

定理 3.5 令 n 是偶数, 则向量 $\boldsymbol{v}_{k,\frac{n}{2}}$, $0\leqslant k\leqslant n-1$, 是 W 特征值 0 的 n 个线性无关

的特征向量.

证 直接计算验证可得. 证毕.

§4 特征值的几何重数

在第 3 节中, 我们确定了矩阵 W 的所有特征值及其代数重数. 根据定理 3.2 和推论 3.1, 特征值 $\sigma_{k,r}$ $(0\leqslant k\neq \frac{n}{2}\leqslant n-1, 1\leqslant r\neq k\leqslant n-1)$ 的几何重数均为 1. 并且, 定理 3.2 和注 3.1 表明特征值 2 的几何重数为 m. 在本节中, 我们将研究 n 为偶数时, 特征值 0 的几何重数. 然而, 我们难以确定特征值 $\sigma_{k,k}$ $(1\leqslant k\neq \frac{n}{2}\leqslant n-1)$ 的几何重数.

命题 4.1 当 n 为偶数时, 特征值 0 的几何重数为 n.

证 假设 n 为偶数. 想要证明特征值 0 的几何重数为 n, 只需要证明矩阵 W' 的秩为 $n^2-n+m-1$. 注意到 W' 可以被写成如下的分块矩阵

$$W'=\begin{pmatrix} B & 0\\ 0 & 2\mathrm{I}_{m-1}\end{pmatrix},$$

其中

$$B=\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_n & 0 & & \cdots & 0 & 0\\ D & 0 & \mathrm{I}_n & & \cdots & 0 & 0\\ 0 & D & 0 & \mathrm{I}_n & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \mathrm{I}_n & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & D & 0 & \mathrm{I}_n\\ 0 & 0 & 0 & & \cdots & 0 & E\end{pmatrix}.$$

想要确定 W' 的秩, 只需要计算 B 的秩. 由一系列的初等行变换, 矩阵 B 可化简为如下形式:

$$B'=\begin{pmatrix} D & 0 & \mathrm{I}_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \mathrm{I}_n & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & D & 0 & \mathrm{I}_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{I}_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & D & 0 & \mathrm{I}_n & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \mathrm{I}_n & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{I}_n\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & E\end{pmatrix}.$$

容易看出矩阵 B' 的秩为 n^2-n. 这样, W' 的秩为 $n^2-n+m-1$, 且特征值 0 的几何重数为 n. 证毕.

推论 4.1 假设 n 是偶数, 则集合 $\{v_{k,\frac{n}{2}}\,|\,0\leqslant k\leqslant n-1\}$ 构成了特征值 0 的特征空间的一组 $\mathbb{C}$- 基.

证 由命题 4.1 和定理 3.5 可证得. 证毕.

参　考　文　献

[1] McKay J. Graphs, singularities, and finite groups [C]//The Santa Cruz Conference on Finite Groups (Univ Califonia, Santa Cruz, Calif, 1979), Proc Sympos Pure Math, vol 37, Providence, RI: Amer Math Soc, 1980:183–186.

[2] Steinberg R. Finite subgroups of SU_2, Dykin diagrams and affine coxeter elements [J]. *Pacific J Math*, 1985, 118:587–598.

[3] Grinberg D, Huang J, Reiner V. Critical groups for Hopf algebra modules [J]. *Math Proc Cambridge Philos Soc* 2020, 168(3):473–503.

[4] Witherspoon S J. The representation ring and the centre of a Hopf algebra [J]. *Canad J Math*, 1999, 51(4):881–896.

[5] Benkart G, Diaconis P, Liebeck M, et al. Tensor product Markov chains [J]. *J Algebra*, 2020, 561:17–83.

[6] Benkart G, Biswal R, Kirkman E, et al. McKay matrices for finite dimensional Hopf algebras [J]. *Canad J Math*, 2022, 3:686–731.

[7] Cao L F, Chen H X, Li L B. McKay matrix for indecomposable module of finite representation type Hopf algebra [J]. *Comm Algebra*, 2022, 50(10):4560–4576.

[8] Cao L F, Xia X J, Li L B. McKay matrices for pointed rank one Hopf algebras of nilpotent type [J]. *Algebra Colloq*, 2023, 30(3):467–480.

[9] Green J A. The modular representation algebra of a finite group [J]. *Illinois J Math*, 1962, 6:607–619.

[10] Li L B, Zhang Y H. The Green rings of the generalized Taft Hopf algebras [J]. *Contemp Math*, 2013, 585:275–288.

[11] Taft E J. The order of the antipode of a finite dimensional Hopf algebra [J]. *Proc Acad Sci*, USA 1971, 68:2631–2633.

[12] Wang Z H, Li L B, Zhang Y H. Green rings of pointed rank one Hopf algebras of non-nilpotent type [J]. *J Algebra*, 2016, 449:108–137.

[13] Wang Z H, Li L B, Zhang Y H. Green rings of pointed rank one Hopf algebras of nilpotent type [J]. *Algebras and Representation Theory*, 2014, 17(6):1901–1924.

[14] Chen H X, Van Oystaeyen F, Zhang Y H. The Green rings of Taft algebras [J]. *Proc AMS*, 2014, 142(3):765–775.

McKay Matrices for Radford Hopf Algebras

CAO Liufeng[1] CHEN Huixiang[2] LI Libin[2]

[1]Department of Mathematics, Yancheng Institute of Technology, Yancheng 224000, Jiangsu, China. E-mail: 1204719495@qq.com

[2]School of Mathematical Sciences, Yangzhou University, Yangzhou 225000, Jiangsu, China. E-mail: hxchen@yzu.edu.cn; lbli@yzu.edu.cn

Abstract In this paper, the authors first consider the McKay matrix W_V of the Radford Hopf algebra $H_{m,n}$ for tensoring with an indecomposable $H_{m,n}$-module $V := M(2,0)$ in the framework of Green ring. Then the authors determine the characteristic polynomial of W_V, and construct eigenvector(s) of each eigenvalue for W_V. At last, the authors study the algebraic multiplicity and geometric multiplicity of some eigenvalues.

Keywords Hopf algebra, McKay matrix, Eigenvalue, Eigenvector

2000 MR Subject Classification 16T05, 15A18, 11B39

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 45 No. 2, 2024

by ALLERTON PRESS, INC., USA