数 学 年 刊 A 辑
2024, 45(4):357–372
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2024.0025

3×3 上三角关系矩阵的闭值域谱的扰动*

李佳丽[1]　吴秀峰[2]　阿拉坦仓[1]

提要　设 H_1, H_2, H_3 为无穷维复可分 Hilbert 空间. 对给定关系 $A \in \mathcal{LR}(H_1)$, $B \in \mathcal{LR}(H_2)$, $C \in \mathcal{LR}(H_3)$, 记 3×3 上三角关系矩阵为 $M_{D,E,F} := \begin{pmatrix} A & D & E \\ 0 & B & F \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$. 作者借助对角关系 A, B, C 的谱性质, 给出了对任意的 $D \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$, $E \in \mathcal{B}(H_3, H_1)$, $F \in \mathcal{B}(H_3, H_2)$, 使得 $M_{D,E,F}$ 都有值域不闭的充分必要条件, 并进一步刻画了 $M_{D,E,F}$ 的闭值域谱的扰动.

关键词　关系矩阵, 值域的闭性, 闭值域谱, 扰动
MR (2000) 主题分类　47A06, 47A10, 47A55
中图法分类　O177.7
文献标志码　A
文章编号　1000-8314(2024)04-0357-16

§1　引　言

算子理论是泛函分析中一个极为重要的分支, 它在理论和实际问题中被广泛应用, 因此对其的研究较为火热, 而算子矩阵理论是算子理论中较为火热的研究领域之一. 众所周知, 线性算子即一种线性映射, 可称其为单值线性关系. 线性关系是线性算子概念在多值情形的推广, 也称其为多值线性算子 [1]. 它的出现极大地扩展了线性算子相关的理论, 也扩宽了实际问题的解题思路. 例如, 某些最优化、控制论、微分方程和退化算子半群问题涉及到线性关系的相关理论 [2]. 此外, 线性关系已有效地运用到线性算子的延拓理论中 [3−5].

在经典算子理论研究中, 一般要求算子是单值的, 所以当考虑算子的逆时, 要求算子是单射, 否则其逆是多值的; 当考虑算子的共轭时, 要求算子是稠定的, 否则其共轭算子是多值的. 但是随着对算子理论的深入研究, 发现了越来越多的多值算子和非稠定算子, 例如, 考虑二阶线性差分方程

$$-\nabla(p(t)\triangle y(t)) + q(t)y(t) = \lambda s(t)y(t), \quad t \in I, \tag{1.1}$$

其中 $I = \{t\}_{t=a}^{b}$ 为整数集, a 为有限数或 $-\infty$, b 为有限数或 $+\infty$ 且 $b-a \geqslant 3$; $\Delta y(t) = y(t+1) - y(t), \nabla y(t) = y(t) - y(t-1)$; $p(t)$ 和 $q(t)$ 为实值函数且满足当 $t \in I$ 时, $p(t) \neq 0$, 当 a, b

本文 2024 年 4 月 15 日收到, 2024 年 11 月 8 日收到修改稿.
[1]内蒙古师范大学数学科学学院, 呼和浩特 010022. E-mail: Lijiali692@163.com; alatanca@imu.edu.cn
[2]通信作者. 内蒙古师范大学数学科学学院, 呼和浩特 010022. E-mail: wuxiufeng68@163.com
*本文受到内蒙古自治区自然科学基金项目 (No. 2022LHMS01003), 内蒙古自治区高等学校青年科技英才项目 (No. NJYT22029), 内蒙古师范大学基本科研业务费专项资金资助项目 (No. 2022JBBJ009) 和内蒙古自治区一流学科科研专项项目 (No. YLXKZX-NSD-011, No. YLXKZX-NSD-001) 的资助.

为有限数时, $p(a-1)\neq 0, p(b+1)\neq 0$; 当 $t\in I$ 时, $s(t)>0$; λ 为复的谱参数. 为了方便描述, 记自然差分算子 $\mathcal{L}(y)(t)=-\nabla(p(t)\triangle y(t))+q(t)y(t), t\in I$. 令 $l_s^2(I)=\big\{y=\{y(t)\}_{t=a-1}^{b+1}\subseteq \mathbb{C}:\sum\limits_{t=a}^{b}s(t)|y(t)|^2<\infty\big\}$. 若定义 $l_s^2(I)$ 中的内积为 $\langle y_1,y_2\rangle=\sum\limits_{t=a}^{b}s(t)\overline{y_2}(t)y_1(t)$, 则 $l_s^2(I)$ 为 Hilbert 空间. 当 $a=0, b=+\infty$ 时, 由 (1.1) 产生的最大算子 $H_{\max}$ 和准最小算子 H_p 分别为

$$D(H_{\max})=\{y\in l_s^2[0,+\infty): s^{-1}\mathcal{L}(y)\in l_s^2[0,+\infty)\},$$
$$D(H_p)=\{y\in D(H_{\max}): 存在 t_0\geqslant 1, 使得 y(-1)=y(0)=y(t)=0, t\geqslant t_0+1\},$$
$$H_{\max}(y)=s^{-1}\mathcal{L}(y), H_p(y)=s^{-1}\mathcal{L}(y).$$

由 (1.1) 产生的最小算子 $H_{\min}=\overline{H_p}$, 其中 $\overline{H_p}$ 为 H_p 的闭包. 2011 年, 文 [6] 证明了最大算子 $H_{\max}$ 在 Hilbert 空间 $l_s^2[0,+\infty)$ 中是多值线性算子, 最小算子 $H_{\min}$ 在 $l_s^2[0,+\infty)$ 中是非稠定的 Hermite 算子. 在这种情况下, 经典的算子理论不再适用. 为研究此类算子和进一步完善算子理论, 需要建立多值线性算子理论. 由此可见, 深入研究线性关系及其谱性质具有重要意义.

关系矩阵是以关系为元素的矩阵, 而缺项关系矩阵是指缺少了某些关系块的关系矩阵. 由于插值理论及控制论中某些问题的研究需要, 这一问题被学者们从不同的方向进行研究, 其中重要方向之一是谱补问题, 所谓谱补问题是指研究关于缺项关系矩阵中已知元素的性质刻画其谱性质的补的问题.

多年来, (缺项) 上三角算子矩阵的谱补问题一直是比较活跃的研究课题 [7−15]. 在 1994 年, 文 [7] 描述了上三角算子矩阵 $M_D=\left(\begin{smallmatrix}A & D\\ 0 & B\end{smallmatrix}\right)$ 的谱的扰动之后, 上三角算子矩阵 M_D 的各种谱补问题被广泛研究. 例如, 文 [8, 10] 讨论了 M_D 的闭值域谱的扰动; 文 [9, 12] 给出了 M_D 的左 (右)Weyl 谱的扰动; 文 [13] 给出了 $n\times n$ 上三角算子矩阵的左 (右) 本质谱和本质谱的充分必要条件, 并描述了左 (右) 本质谱和本质谱的扰动; 文 [14] 验证了单值扩张性, 给出单值扩张性关于谱和局部谱的应用, 得到了谱扰动和局部谱扰动不变的新条件; 文 [15] 研究了更一般的上三角算子矩阵, 刻画了左 (右)Weyl 谱的扰动且给出了 Weyl 谱.

近年来, 3×3 上三角算子矩阵的谱补问题备受专家学者的青睐 [16−20]. 例如, 文 [16] 研究了 3×3 上三角算子矩阵 $M_{D,E,F}$ 的本质谱的扰动以及 Weyl 定理; 文 [17] 考察了 $M_{D,E,F}$ 的谱、点谱、剩余谱、连续谱的并集; 文 [18–19] 刻画了 $M_{D,E,F}$ 的点谱、连续谱、剩余谱、谱的扰动; 文 [20] 描述了对任意的 $D\in\mathcal{B}(H_2,H_1), E\in\mathcal{B}(H_3,H_1), F\in\mathcal{B}(H_3,H_2)$, $\sigma_*(M_{D,E,F})=\sigma_*(A)\cup\sigma_*(B)\cup\sigma_*(C)$ 均成立的充分必要条件, 其中 σ_* 表示点谱、剩余谱、连续谱等.

关系矩阵的谱补问题在近几年引起了一些学者的关注, 主要是对上三角关系矩阵 $M_D=\left(\begin{smallmatrix}A & D\\ 0 & B\end{smallmatrix}\right)$ 的研究. 例如, 2013 年, 文 [21] 在 Hilbert 空间中研究了 M_D 在一定条件下 Browder 谱的扰动问题. 最近, 文 [22–23] 对关系矩阵也进行了探讨. 文 [23] 得到了对任意的 $D\in\mathcal{B}(H_2,H_1)$ 和 $D\in\mathcal{BR}(H_2,H_1)$, 都有关系矩阵 M_D 闭值域和值域不闭的充分必要条

件及闭值域谱的扰动结论. 即若 $A \in \mathcal{LR}(H_1), B \in \mathcal{BCR}(H_2)$, 则

$$\begin{aligned}\bigcap_{D\in\mathcal{B}(H_2,H_1)} \sigma_{cr}(M_D) =&\{\lambda \in \sigma_{cr}(A) : n(B-\lambda\mathrm{I}) < \dim(\overline{\operatorname{ran}(A-\lambda\mathrm{I})}/\operatorname{ran}(A-\lambda\mathrm{I}))\}\\ &\cup\{\lambda\in\sigma_{cr}(B) : d(A-\lambda\mathrm{I})<\infty\};\end{aligned}$$

若 $A \in \mathcal{BCR}(H_1), B \in \mathcal{BCR}(H_2)$, 则

$$\bigcap_{D\in\mathcal{B}(H_2,H_1)} \sigma_{cr}(M_D) = \{\lambda \in \sigma_{cr}(A) : n(B-\lambda\mathrm{I}) < \infty\} \cup \{\lambda\in\sigma_{cr}(B) : d(A-\lambda\mathrm{I})<\infty\}.$$

通过学者们对线性关系矩阵谱理论的研究, 不难发现, 一些结论在算子理论中是成立的, 但在关系理论中不再有效, 或者需要其他额外的假设. 例如, 谱的包含关系 $\sigma(M_D) \subseteq \sigma(A)\cup\sigma(B)$ 在算子矩阵中成立, 但在线性关系矩阵中并不成立. 因此, 我们需要进一步研究关系矩阵的谱补问题. 本文结合线性关系值域的有限秩扰动性质和空间分解法深入研究了 3×3 上三角关系矩阵 $M_{D,E,F} = \left(\begin{smallmatrix} A & D & E\\ 0 & B & F\\ 0 & 0 & C\end{smallmatrix}\right)$ 的闭值域谱的扰动. 对给定关系 $A \in \mathcal{LR}(H_1)$, $B \in \mathcal{LR}(H_2)$, $C \in \mathcal{LR}(H_3)$, 对任意的 $D \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$, $E \in \mathcal{B}(H_3, H_1)$, $F \in \mathcal{B}(H_3, H_2)$ 都有 $M_{D,E,F}$ 值域不闭的充分必要条件, 并进一步描述了 $M_{D,E,F}$ 的闭值域谱的扰动.

下面是本文采用的记号. 设 H_1, H_2, H_3 为无穷维复可分 Hilbert 空间. $\mathcal{B}(H_i, H_j)$ 表示从 H_i 到 H_j 的所有有界 (线性) 算子构成的集合, $\mathcal{B}(H_i, H_i)$ 简记为 $\mathcal{B}(H_i)$, 其中 $i, j \in \{1, 2, 3\}$. $\mathcal{C}(H_i, H_j)$ 表示所有从 H_i 到 H_j 的闭线性算子组成的集合, $\mathcal{C}(H_i, H_i)$ 简记为 $\mathcal{C}(H_i)$. $\mathcal{LR}(H_i, H_j)$ 表示所有从 H_i 到 H_j 且定义域为全空间 H_i 的线性关系, $\mathcal{LR}(H_i, H_i)$ 简记为 $\mathcal{LR}(H_i)$. $\mathcal{CR}(H_i, H_j)$ 表示所有从 H_i 到 H_j 的闭线性关系构成的集合, $\mathcal{CR}(H_i, H_i)$ 简记为 $\mathcal{CR}(H_i)$. $\mathcal{BCR}(H_i, H_j)$ 表示所有从 H_i 到 H_j 的有界闭线性关系构成的集合, $\mathcal{BCR}(H_i, H_i)$ 简记为 $\mathcal{BCR}(H_i)$. 设 $T \in \mathcal{LR}(H_1, H_2)$, 分别以 T^{-1}, T^* 和 $\operatorname{dom} T$ 表示 T 的逆关系、共轭关系和定义域; 分别以 $\ker T = \{x \in H_1 : 0 \in Tx\}$, $\operatorname{ran} T = T(\operatorname{dom} T)$ 和 $\operatorname{mul} T = \{y \in H_2 : y \in T(0)\}$ 表示 T 的零空间、值域和多值部分; 以 $n(T)$, $d(T)$ 表示 $\ker T$, $\ker T^*$ 的维数, 即 $n(T) = \dim\ker T$, $d(T) = \dim\ker T^*$.

§2　预备知识

定义 2.1 [1]　$T \in \mathcal{LR}(H_1, H_2)$ 的图 $G(T)$ 定义为

$$G(T) = \{(u, v) \in H_1 \oplus H_2 : u \in \operatorname{dom} T, v \in T(u)\}.$$

设 M 是 $\operatorname{dom} T$ 的子空间, 则定义 $T|_M$ 为 $G(T|_M) = \{(u, v) \in H_1 \oplus H_2 : u \in M, v \in T(u)\}$ 确定的线性关系.

定义 2.2 [1]　设 $T \in \mathcal{LR}(H_1, H_2)$. 若它的图 $G(T)$ 是 $H_1 \oplus H_2$ 的闭子空间, 则称 T 是闭的.

定义 2.3 [1] 设 $T \in \mathcal{LR}(H_1, H_2)$. 闭值域谱 $\sigma_{cr}(T)$ 定义为 $\sigma_{cr}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{ran}(T - \lambda \mathrm{I})$不闭$\}$.

引理 2.1 [1] 若 $T \in \mathcal{LR}(H_1, H_2)$, 则

(i) 若 T 连续, 并且 $\operatorname{dom} T$ 和 $T(0)$ 都是闭的, 则 T 是闭的;

(ii) T 闭当且仅当 T^{-1} 闭;

(iii) 若 T 是闭的, 则 $T(0)$ 是闭的.

引理 2.2 [8] 设 $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. 若 $F \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ 是有限秩算子, 则 $\operatorname{ran}(T + F)$ 闭当且仅当 $\operatorname{ran} T$ 闭.

引理 2.3 [23] 设 $T \in \mathcal{BR}(H_1, H_2)$. 若 $T(0)$ 是闭的, 则 $\ker T$ 是闭的.

引理 2.4 [23] 设 X 是线性空间, M, N 是 X 的子空间. 若 M 不闭且 $\dim N < \dim \overline{M}/M$, 则 $M + N$ 不闭.

引理 2.5 [23] 设 $T \in \mathcal{LR}(H)$. 若 $U \in \mathcal{B}(H)$ 和 $V \in \mathcal{B}(H)$ 可逆, 则

(i) $\operatorname{ran} UT$ 闭当且仅当 $\operatorname{ran} T$ 闭;

(ii) $\operatorname{ran} TV$ 闭当且仅当 $\operatorname{ran} T$ 闭.

引理 2.6 [23] 若 $A \in \mathcal{LR}(H_1), B \in \mathcal{BCR}(H_2)$, 则对任意的 $D \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$, 有 $\operatorname{ran} M_D$ 不闭当且仅当下列条件至少有一个成立:

(i) $\operatorname{ran} A$ 不闭且 $n(B) < \dim(\overline{\operatorname{ran} A}/\operatorname{ran} A)$;

(ii) $\operatorname{ran} B$ 不闭且 $d(A) < \infty$.

引理 2.7 [23] 若 $A \in \mathcal{BCR}(H_1), B \in \mathcal{BCR}(H_2)$, 则对任意的 $D \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$ 有, $\operatorname{ran} M_D$ 不闭当且仅当下列条件至少有一个成立:

(i) $\operatorname{ran} A$ 不闭且 $n(B) < \infty$;

(ii) $\operatorname{ran} B$ 不闭且 $d(A) < \infty$.

引理 2.8 [24] 若 $T \in \mathcal{LR}(H_1, H_2)$, 则对任意的 $x \in \operatorname{dom} T$ 有, $\|P_{T(0)^\perp} Tx\| = \|Tx\|$ 且 $\|P_{T(0)^\perp} T\| = \|T\|$.

§3 主要结果及证明

定理 3.1 设 $A \in \mathcal{LR}(H_1)$, $B \in \mathcal{BCR}(H_2)$, $C \in \mathcal{BCR}(H_3)$. 若 $\operatorname{ran} B$ 和 $\operatorname{ran} C$ 都是闭的, 则对任意的 $D \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$, $E \in \mathcal{B}(H_3, H_1)$, $F \in \mathcal{B}(H_3, H_2)$, 都有 $\operatorname{ran} M_{D,E,F}$ 不闭当且仅当 $\operatorname{ran} A$ 不闭且 $n(B) + n(C) < \dim(\overline{\operatorname{ran} A}/\operatorname{ran} A)$.

证 充分性. 设 $\operatorname{ran} B$ 和 $\operatorname{ran} C$ 都是闭的, $\operatorname{ran} A$ 不闭且 $n(B)+n(C) < \dim(\overline{\operatorname{ran} A}/\operatorname{ran} A)$. 因为 $B \in \mathcal{BCR}(H_2)$ 和 $C \in \mathcal{BCR}(H_3)$, 根据引理 2.1 和引理 2.3 可知, $B(0)$, $C(0)$ 与 $\ker B$,

$\ker C$ 都是闭的. 因此, 对任意的 $D\in\mathcal{B}(H_2,H_1)$, $E\in\mathcal{B}(H_3,H_1)$, $F\in\mathcal{B}(H_3,H_2)$, 关系 $M_{D,E,F}$ 有如下矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} A_1 & D_{11} & D_{12} & E_{11} & E_{12} \\ 0 & D_{21} & D_{22} & E_{21} & E_{22} \\ 0 & B^1_{[\perp]} & 0 & F_{11} & F_{12} \\ 0 & B-B & B-B & F_{21} & F_{22} \\ 0 & 0 & 0 & F_{31} & F_{32} \\ 0 & 0 & 0 & C^1_{[\perp]} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C-C & C-C \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} H_1 \\ \ker B^\perp \\ \ker B \\ \ker C^\perp \\ \ker C \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \overline{\operatorname{ran} A} \\ \operatorname{ran} A^\perp \\ \operatorname{ran} B\cap B(0)^\perp \\ B(0) \\ \operatorname{ran} B^\perp \\ \operatorname{ran} C\cap C(0)^\perp \\ C(0) \\ \operatorname{ran} C^\perp \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

其中 $B^1_{[\perp]} = P_{\operatorname{ran} B\cap B(0)^\perp} B|_{\ker B^\perp}$. 由引理 2.8 可知, $B^1_{[\perp]}$ 是有界线性算子. 不难看出, $B|_{\ker B^\perp} = \left(B^1_{[\perp]}\ B-B\ 0\right)^{\mathrm{T}} : \ker B^\perp \to (\operatorname{ran} B\cap B(0)^\perp)\oplus B(0)\oplus \operatorname{ran} B^\perp$ 是单射. 此外, 对任意 $y\in\operatorname{ran} B\cap B(0)^\perp$, 存在 $x\in H_2$, $x_1\in\ker B^\perp$, $x_2\in\ker B$, 满足 $x=x_1+x_2$, 使得 $y\in Bx$, 则 $y\in B(x_1+x_2)=Bx_1+B(0)=Bx_1$, 进而 $y=B^1_{[\perp]}x_1$, 即 $B^1_{[\perp]}$ 是满的. 这意味着 $B^1_{[\perp]}$: $\ker B^\perp\to\operatorname{ran} B\cap B(0)^\perp$ 是有界可逆的. 同理, $C^1_{[\perp]}$: $\ker C^\perp\to\operatorname{ran} C\cap C(0)^\perp$ 也是有界可逆的. 因此, 存在可逆算子 $U\in\mathcal{B}(\overline{\operatorname{ran} A}\oplus\operatorname{ran} A^\perp\oplus(\operatorname{ran} B\cap B(0)^\perp)\oplus B(0)\oplus \operatorname{ran} B^\perp\oplus(\operatorname{ran} C\cap C(0)^\perp)\oplus C(0)\oplus\operatorname{ran} C^\perp)$, 使得

$$UM_{D,E,F} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & D_{12} & 0 & E_{12} \\ 0 & 0 & D_{22} & 0 & E_{22} \\ 0 & B^1_{[\perp]} & 0 & 0 & F_{12} \\ 0 & B-B & B-B & 0 & F_{22} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & F_{32} \\ 0 & 0 & 0 & C^1_{[\perp]} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C-C & C-C \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是

$$\operatorname{ran} UM_{D,E,F} = \operatorname{ran}\begin{pmatrix} A_1 & D_{12} & E_{12} \\ 0 & D_{22} & E_{22} \\ 0 & 0 & F_{32} \end{pmatrix}\oplus\operatorname{ran} B\oplus\operatorname{ran} C.$$

注意到 $n(B)+n(C)<\dim(\overline{\operatorname{ran} A}/\operatorname{ran} A)$, 而 $n(B)+n(C)\geqslant\dim\operatorname{ran}\begin{pmatrix} D_{12} & E_{12} \\ D_{22} & E_{22} \\ 0 & F_{32}\end{pmatrix}$, 因此

$$\dim\operatorname{ran}\begin{pmatrix} D_{12} & E_{12} \\ D_{22} & E_{22} \\ 0 & F_{32}\end{pmatrix} < \dim(\overline{\operatorname{ran} A}/\operatorname{ran} A).$$

由于 $\operatorname{ran} A$ 不闭, 根据引理 2.4 可得 $\operatorname{ran}\begin{pmatrix} A_1 & D_{12} & E_{12} \\ 0 & D_{22} & E_{22} \\ 0 & 0 & F_{32} \end{pmatrix}$ 不闭, 从而 $\operatorname{ran} UM_{D,E,F}$ 不闭. 进一步由引理 2.5 可知, 对任意的 $D\in\mathcal{B}(H_2,H_1)$, $E\in\mathcal{B}(H_3,H_1)$, $F\in\mathcal{B}(H_3,H_2)$, 都有

$\operatorname{ran} M_{D,E,F}$ 不闭.

必要性. 设 $\operatorname{ran} B$ 和 $\operatorname{ran} C$ 都是闭的, 对任意的 $D \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$, $E \in \mathcal{B}(H_3, H_1)$, $F \in \mathcal{B}(H_3, H_2)$ 都有 $\operatorname{ran} M_{D,E,F}$ 不闭. 不妨取 $D_0 = 0$, $E_0 = 0$, $F_0 = 0$, 则 $\operatorname{ran} B$ 和 $\operatorname{ran} C$ 闭及 $\operatorname{ran} M_{D_0,E_0,F_0}$ 不闭蕴含 $\operatorname{ran} A$ 不闭. 下面用反证法证明. 假设 $n(B) + n(C) \geqslant \dim(\overline{\operatorname{ran} A}/\operatorname{ran} A)$, 下面只需证明存在 $D_0 \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$, $E_0 \in \mathcal{B}(H_3, H_1)$, $F_0 \in \mathcal{B}(H_3, H_2)$ 使得 $\operatorname{ran} M_{D_0,E_0,F_0}$ 闭即可. 下面分三种情形讨论.

情形 1 $\dim(\overline{\operatorname{ran} A}/\operatorname{ran} A) = n(B) = \infty$. 因为 $\operatorname{ran} A$ 不闭, 所以 $\dim \overline{\operatorname{ran} A} = \infty$. 令 $E_0 = 0, F_0 = 0$,

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 & J_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \ker B^{\perp} \\ \ker B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \overline{\operatorname{ran} A} \\ \operatorname{ran} A^{\perp} \end{pmatrix},$$

其中 $J_1 : \ker B \to \overline{\operatorname{ran} A}$ 是酉算子. 因此, $\operatorname{ran} M_{D_0,E_0,F_0} = \operatorname{ran} \begin{pmatrix} A & J_1 \end{pmatrix} \oplus \operatorname{ran} B \oplus \operatorname{ran} C = \overline{\operatorname{ran} A} \oplus \operatorname{ran} B \oplus \operatorname{ran} C$ 是闭的.

情形 2 $\dim(\overline{\operatorname{ran} A}/\operatorname{ran} A) = n(C) = \infty$. 因为 $\operatorname{ran} A$ 不闭, 所以 $\dim \overline{\operatorname{ran} A} = \infty$. 令 $D_0 = 0, F_0 = 0$,

$$E_0 = \begin{pmatrix} 0 & J_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \ker C^{\perp} \\ \ker C \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \overline{\operatorname{ran} A} \\ \operatorname{ran} A^{\perp} \end{pmatrix},$$

其中 $J_2 : \ker C \to \overline{\operatorname{ran} A}$ 是酉算子. 因此, $\operatorname{ran} M_{D_0,E_0,F_0} = \operatorname{ran} \begin{pmatrix} A & J_2 \end{pmatrix} \oplus \operatorname{ran} B \oplus \operatorname{ran} C = \overline{\operatorname{ran} A} \oplus \operatorname{ran} B \oplus \operatorname{ran} C$ 是闭的.

情形 3 $\dim(\overline{\operatorname{ran} A}/\operatorname{ran} A) < \infty$. 容易发现, 存在有限维子空间 N 使得 $N \subseteq \overline{\operatorname{ran} A}$ 且 $\overline{\operatorname{ran} A} = \operatorname{ran} A \dotplus N$. 取 N 的子空间 N_1, N_2 使得 $N_1 \oplus N_2 = N$, $n(B) \geqslant \dim N_1, n(C) \geqslant \dim N_2$. 此时, $n(B) + n(C) \geqslant \dim(\overline{\operatorname{ran} A}/\operatorname{ran} A) = \dim N = \dim N_1 + \dim N_2$. 令 $F_0 = 0$,

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 & S_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \ker B^{\perp} \\ \ker B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \overline{\operatorname{ran} A} \\ \operatorname{ran} A^{\perp} \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

$$E_0 = \begin{pmatrix} 0 & S_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \ker C^{\perp} \\ \ker C \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \overline{\operatorname{ran} A} \\ \operatorname{ran} A^{\perp} \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

其中 $S_1 : \ker B \to N_1$ 和 $S_2 : \ker C \to N_2$ 均是满射. 因此, $\operatorname{ran} M_{D_0,E_0,F_0} = \operatorname{ran} \begin{pmatrix} A & S_1 & S_2 \end{pmatrix} \oplus \operatorname{ran} B \oplus \operatorname{ran} C = \overline{\operatorname{ran} A} \oplus \operatorname{ran} B \oplus \operatorname{ran} C$ 是闭的.

推论 3.1 设 $A \in \mathcal{BCR}(H_1)$, $B \in \mathcal{BCR}(H_2)$, $C \in \mathcal{BCR}(H_3)$. 若 $\operatorname{ran} B$ 和 $\operatorname{ran} C$ 都是闭的, 则对任意的 $D \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$, $E \in \mathcal{B}(H_3, H_1)$, $F \in \mathcal{B}(H_3, H_2)$ 都有 $\operatorname{ran} M_{D,E,F}$ 不闭当且仅当 $\operatorname{ran} A$ 不闭且 $n(B) + n(C) < \infty$.

证 因为 $A \in \mathcal{BCR}(H_1)$, 所以由引理 2.1 可得 $A(0)$ 是闭的. 注意到 $\operatorname{ran} A = \operatorname{ran} A^1_{[\perp]} \oplus A(0)$, $\overline{\operatorname{ran} A} = \overline{\operatorname{ran} A^1_{[\perp]}} \oplus A(0)$, 从而

$$\overline{\operatorname{ran} A^1_{[\perp]}} = \overline{\operatorname{ran} A} \cap A(0)^{\perp}, \quad \dim\left((\overline{\operatorname{ran} A} \cap A(0)^{\perp})/\operatorname{ran} A^1_{[\perp]}\right) = \infty.$$

因此 $n(B) + n(C) < \dim(\overline{\operatorname{ran} A}/\operatorname{ran} A) = \dim\left((\overline{\operatorname{ran} A} \cap A(0)^{\perp})/\operatorname{ran} A^1_{[\perp]}\right) = \infty$.

定理 3.2　设 $A\in\mathcal{LR}(H_1)$, $B\in\mathcal{BCR}(H_2)$, $C\in\mathcal{BCR}(H_3)$. 若 $\operatorname{ran}A$ 和 $\operatorname{ran}C$ 都是闭的, 则对任意的 $D\in\mathcal{B}(H_2,H_1)$, $E\in\mathcal{B}(H_3,H_1)$, $F\in\mathcal{B}(H_3,H_2)$ 都有 $\operatorname{ran}M_{D,E,F}$ 不闭当且仅当 $\operatorname{ran}B$ 不闭且 $d(A)+n(C)<\infty$.

证　充分性. 设 $\operatorname{ran}A$ 和 $\operatorname{ran}C$ 都是闭的, $\operatorname{ran}B$ 不闭且 $d(A)+n(C)<\infty$. 注意到 $B\in\mathcal{BCR}(H_2)$ 和 $C\in\mathcal{BCR}(H_3)$, 根据引理 2.1 和引理 2.3 可知 $B(0)$, $C(0)$ 与 $\ker B$, $\ker C$ 都是闭的. 容易发现, 对任意的 $D\in\mathcal{B}(H_2,H_1)$, $E\in\mathcal{B}(H_3,H_1)$, $F\in\mathcal{B}(H_3,H_2)$, 关系 $M_{D,E,F}$ 有如下矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} A_1 & D_{11} & D_{12} & E_{11} & E_{12}\\ 0 & D_{21} & D_{22} & E_{21} & E_{22}\\ 0 & B^1_{[\perp]} & 0 & F_{11} & F_{12}\\ 0 & B-B & B-B & F_{21} & F_{22}\\ 0 & 0 & 0 & F_{31} & F_{32}\\ 0 & 0 & 0 & C^1_{[\perp]} & 0\\ 0 & 0 & 0 & C-C & C-C\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} H_1\\ \ker B^\perp\\ \ker B\\ \ker C^\perp\\ \ker C \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \operatorname{ran}A\\ \operatorname{ran}A^\perp\\ \overline{\operatorname{ran}B}\cap B(0)^\perp\\ B(0)\\ \operatorname{ran}B^\perp\\ \operatorname{ran}C\cap C(0)^\perp\\ C(0)\\ \operatorname{ran}C^\perp \end{pmatrix}.$$

因为 $C^1_{[\perp]}$: $\ker C^\perp\to\operatorname{ran}C\cap C(0)^\perp$ 是有界可逆的, 所以存在可逆算子 $U_1\in\mathcal{B}(\operatorname{ran}A\oplus\operatorname{ran}A^\perp\oplus(\overline{\operatorname{ran}B}\cap B(0)^\perp)\oplus B(0)\oplus\operatorname{ran}B^\perp\oplus(\operatorname{ran}C\cap C(0)^\perp)\oplus C(0)\oplus\operatorname{ran}C^\perp)$, 使得

$$U_1M_{D,E,F}=\begin{pmatrix} A_1 & D_{11} & D_{12} & 0 & E_{12}\\ 0 & D_{21} & D_{22} & 0 & E_{22}\\ 0 & B^1_{[\perp]} & 0 & 0 & F_{12}\\ 0 & B-B & B-B & 0 & F_{22}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & F_{32}\\ 0 & 0 & 0 & C^1_{[\perp]} & 0\\ 0 & 0 & 0 & C-C & C-C\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此

$$\operatorname{ran}U_1M_{D,E,F}=\operatorname{ran}A\oplus\operatorname{ran}\begin{pmatrix} D_{21} & D_{22} & E_{22}\\ B^1_{[\perp]} & 0 & F_{12}\\ 0 & 0 & F_{32}\end{pmatrix}\oplus B(0)\oplus\operatorname{ran}C.$$

由 $d(A)+n(C)<\infty$ 可得 $D_{21},D_{22},E_{22},F_{12},F_{22},F_{32}$ 都是有限秩的. 由 $B^1_{[\perp]}\in\mathcal{B}(H_2)$ 且 $\operatorname{ran}B$ 不闭, 结合引理 2.2 知 $\operatorname{ran}\begin{pmatrix} D_{21} & D_{22} & E_{22}\\ B^1_{[\perp]} & 0 & F_{12}\\ 0 & 0 & F_{32}\end{pmatrix}$ 不闭, 从而 $\operatorname{ran}U_1M_{D,E,F}$ 不闭. 进一步应用引理 2.5 可得 $\operatorname{ran}M_{D,E,F}$ 不闭.

必要性. 设 $\operatorname{ran}A$ 和 $\operatorname{ran}C$ 都是闭的, 对任意的 $D\in\mathcal{B}(H_2,H_1)$, $E\in\mathcal{B}(H_3,H_1)$, $F\in\mathcal{B}(H_3,H_2)$ 都有 $\operatorname{ran}M_{D,E,F}$ 不闭. 取 $D_0=0$, $E_0=0$, $F_0=0$, 则 $\operatorname{ran}A$ 和 $\operatorname{ran}C$ 都闭且 $\operatorname{ran}M_{D,E,F}$ 不闭蕴含着 $\operatorname{ran}B$ 不闭. 下面用反证法证明. 假设 $d(A)+n(C)=\infty$, 下面只需证明存在 $D_0\in\mathcal{B}(H_2,H_1)$, $E_0\in\mathcal{B}(H_3,H_1)$, $F_0\in\mathcal{B}(H_3,H_2)$ 使得 $\operatorname{ran}M_{D_0,E_0,F_0}$ 闭即

可. 注意到 $B\in\mathcal{BCR}(H_2)$, 应用引理 2.1 和引理 2.3 知 $B(0)$ 闭, $\ker B$ 闭. 由 $\operatorname{ran}B$ 不闭知 $\dim\overline{\operatorname{ran}B}=\dim\ker B^{\perp}=\infty$. 下面分两种情形讨论.

情形 1 $d(A)=\infty$. 令 $E_0=0$, $F_0=0$,

$$D_0=\begin{pmatrix}0&0\\J_1&0\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}\ker B^{\perp}\\ \ker B\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\operatorname{ran}A\\ \operatorname{ran}A^{\perp}\end{pmatrix},\tag{3.4}$$

其中 $J_1:\ker B^{\perp}\to\operatorname{ran}A^{\perp}$ 是酉算子. 于是,

$$\operatorname{ran}M_{D_0,E_0,F_0}=\operatorname{ran}A\oplus\operatorname{ran}\begin{pmatrix}J_1\\B^1_{[\perp]}\end{pmatrix}\oplus B(0)\oplus\operatorname{ran}C.$$

因为 $B^1_{[\perp]}$ 是有界线性算子且 J_1 可逆, 所以存在可逆算子

$$U_2\in\mathcal{B}(\operatorname{ran}A^{\perp}\oplus(\overline{\operatorname{ran}B}\cap B(0)^{\perp}))$$

使得

$$\operatorname{ran}U_2\begin{pmatrix}J_1\\B^1_{[\perp]}\end{pmatrix}=\operatorname{ran}\begin{pmatrix}J_1\\0\end{pmatrix}.$$

由引理 2.5 可知 $\operatorname{ran}\begin{pmatrix}J_1\\B^1_{[\perp]}\end{pmatrix}$ 闭, 进一步可推得 $\operatorname{ran}M_{D_0,E_0,F_0}$ 闭.

情形 2 $n(C)=\infty$. 令 $D_0=0$, $E_0=0$,

$$F_0=\begin{pmatrix}0&J_2\\0&0\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}\ker C^{\perp}\\ \ker C\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\overline{\operatorname{ran}B}\\ \operatorname{ran}B^{\perp}\end{pmatrix},$$

其中 $J_2:\ker C\to\overline{\operatorname{ran}B}$ 是酉算子. 于是,

$$\operatorname{ran}M_{D_0,E_0,F_0}=\operatorname{ran}A\oplus\operatorname{ran}\begin{pmatrix}B&J_2\end{pmatrix}\oplus\operatorname{ran}C=\operatorname{ran}A\oplus\overline{\operatorname{ran}B}\oplus\operatorname{ran}C$$

是闭的.

定理 3.3 设 $A\in\mathcal{LR}(H_1)$, $B\in\mathcal{BCR}(H_2)$, $C\in\mathcal{BCR}(H_3)$. 若 $\operatorname{ran}A$ 和 $\operatorname{ran}B$ 都是闭的, 则对任意的 $D\in\mathcal{B}(H_2,H_1)$, $E\in\mathcal{B}(H_3,H_1)$, $F\in\mathcal{B}(H_3,H_2)$ 都有 $\operatorname{ran}M_{D,E,F}$ 不闭当且仅当 $\operatorname{ran}C$ 不闭且 $d(A)+d(B)<\infty$.

证 充分性. 设 $\operatorname{ran}A$ 和 $\operatorname{ran}B$ 都是闭的. 当 $\operatorname{ran}C$ 不闭且 $d(A)+d(B)<\infty$ 时, 对任意的 $D\in\mathcal{B}(H_2,H_1)$, $E\in\mathcal{B}(H_3,H_1)$, $F\in\mathcal{B}(H_3,H_2)$, 关系 $M_{D,E,F}$ 有如下矩阵形式:

$$\begin{pmatrix}A_1&D_{11}&D_{12}&E_{11}&E_{12}\\0&D_{21}&D_{22}&E_{21}&E_{22}\\0&B^1_{[\perp]}&0&F_{11}&F_{12}\\0&B-B&B-B&F_{21}&F_{22}\\0&0&0&F_{31}&F_{32}\\0&0&0&C^1_{[\perp]}&0\\0&0&0&C-C&C-C\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}H_1\\ \ker B^{\perp}\\ \ker B\\ \ker C^{\perp}\\ \ker C\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\operatorname{ran}A\\ \operatorname{ran}A^{\perp}\\ \operatorname{ran}B\cap B(0)^{\perp}\\ B(0)\\ \operatorname{ran}B^{\perp}\\ \overline{\operatorname{ran}C}\cap C(0)^{\perp}\\ C(0)\\ \operatorname{ran}C^{\perp}\end{pmatrix}.\tag{3.5}$$

显然, $B^1_{[\perp]}$: $\ker B^\perp \to \operatorname{ran} B \cap B(0)^\perp$ 是可逆的. 因此, 存在可逆算子 $U_1 \in \mathcal{B}(\operatorname{ran} A \oplus \operatorname{ran} A^\perp \oplus (\operatorname{ran} B \cap B(0)^\perp) \oplus B(0) \oplus \operatorname{ran} B^\perp \oplus (\overline{\operatorname{ran} C} \cap C(0)^\perp) \oplus C(0) \oplus \operatorname{ran} C^\perp)$, 使得

$$U_1 M_{D,E,F} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & D_{12} & E_{11} & E_{12} \\ 0 & 0 & D_{22} & E_{21} & E_{22} \\ 0 & B^1_{[\perp]} & 0 & F_{11} & F_{12} \\ 0 & B-B & B-B & F_{21} & F_{22} \\ 0 & 0 & 0 & F_{31} & F_{32} \\ 0 & 0 & 0 & C^1_{[\perp]} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C-C & C-C \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是,

$$\operatorname{ran} U_1 M_{D,E,F} = \operatorname{ran} A \oplus \operatorname{ran} B \oplus \operatorname{ran} \begin{pmatrix} D_{22} & E_{21} & E_{22} \\ 0 & F_{31} & F_{32} \\ 0 & C^1_{[\perp]} & 0 \end{pmatrix} \oplus C(0).$$

由 $d(A)+d(B) < \infty$ 可知 D_{22}, E_{21}, E_{22}, F_{31}, F_{32} 均是有限秩的. 根据引理 2.2 可得 $\operatorname{ran} \left(\begin{smallmatrix} D_{22} & E_{21} & E_{22} \\ 0 & F_{31} & F_{32} \\ 0 & C^1_{[\perp]} & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 不闭, 从而 $\operatorname{ran} U_1 M_{D,E,F}$ 不闭. 继而结合引理 2.5 知 $\operatorname{ran} M_{D,E,F}$ 不闭.

必要性. 若 $\operatorname{ran} A$ 和 $\operatorname{ran} B$ 均闭, 对任意的 $D \in \mathcal{B}(H_2, H_1), E \in \mathcal{B}(H_3, H_1)$, $F \in \mathcal{B}(H_3, H_2)$ 都有 $\operatorname{ran} M_{D,E,F}$ 不闭, 则 $\operatorname{ran} C$ 不闭. 由 $\operatorname{ran} C$ 不闭知 $\dim \overline{\operatorname{ran} C} = \dim \ker C^\perp = \infty$. 因为 $C \in \mathcal{BCR}(\mathrm{H}_3)$, 应用引理 2.1 和引理 2.3 可知 $C(0)$ 闭, $\ker C$ 闭. 用反证法. 令 $d(A)+d(B)=\infty$. 此时, 只需证明存在 $D_0 \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$, $E_0 \in \mathcal{B}(H_3, H_1)$, $F_0 \in \mathcal{B}(H_3, H_2)$ 使得 $\operatorname{ran} M_{D_0,E_0,F_0}$ 闭即可. 以下分两种情形讨论.

情形 1　$d(A)=\infty$. 令 $D_0 = 0$, $F_0 = 0$,

$$E_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ J_2 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \ker C^\perp \\ \ker C \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \operatorname{ran} A \\ \operatorname{ran} A^\perp \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

其中 $J_2 : \ker C^\perp \to \operatorname{ran} A^\perp$ 是酉算子. 因此, $\operatorname{ran} M_{D_0,E_0,F_0} = \operatorname{ran} A \oplus \operatorname{ran} B \oplus \operatorname{ran} \left(\begin{smallmatrix} J_2 \\ C^1_{[\perp]} \end{smallmatrix}\right) \oplus C(0)$. 由 $C^1_{[\perp]}$ 是有界线性算子且 J_2 可逆可知, 存在可逆算子 $U_2 \in \mathcal{B}(\operatorname{ran} A^\perp \oplus (\overline{\operatorname{ran} C} \cap C(0)^\perp))$ 使得 $\operatorname{ran} U_2 \left(\begin{smallmatrix} J_2 \\ C^1_{[\perp]} \end{smallmatrix}\right) = \operatorname{ran} \left(\begin{smallmatrix} J_2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, 所以由引理 2.5 可知 $\operatorname{ran} \left(\begin{smallmatrix} J_2 \\ C^1_{[\perp]} \end{smallmatrix}\right)$ 闭, 进一步可推得 $\operatorname{ran} M_{D_0,E_0,F_0}$ 是闭的.

情形 2　$d(B)=\infty$. 令 $D_0 = 0, E_0 = 0$,

$$F_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ J_3 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \ker C^\perp \\ \ker C \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \operatorname{ran} B \\ \operatorname{ran} B^\perp \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

其中 $J_3 : \ker C^\perp \to \operatorname{ran} B^\perp$ 是酉算子. 同上, $C^1_{[\perp]}$ 是有界线性算子且 J_3 可逆, 结合引理 2.5 可得 $\operatorname{ran} M_{D_0,E_0,F_0}$ 是闭的.

定理 3.4　设 $A \in \mathcal{LR}(H_1)$, $B \in \mathcal{BCR}(H_2)$, $C \in \mathcal{BCR}(H_3)$. 若 $\operatorname{ran} A$ 闭, $\operatorname{ran} B$ 和 $\operatorname{ran} C$

都不闭, 则对任意的 $D \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$, $E \in \mathcal{B}(H_3, H_1)$, $F \in \mathcal{B}(H_3, H_2)$ 都有 $\operatorname{ran} M_{D,E,F}$ 不闭当且仅当 $d(A) + d(B) < \infty$ 或 $d(A) + n(C) < \infty$.

证 充分性. 设 $\operatorname{ran} A$ 闭, $\operatorname{ran} B$ 和 $\operatorname{ran} C$ 都不闭. 当 $d(A)+d(B) < \infty$ 时, 因为 $d\left(\begin{smallmatrix} A & D \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right) \leqslant d(A)+d(B) < \infty$ 且 $\operatorname{ran} C$ 不闭, 所以根据引理 2.6 可得 $\operatorname{ran} M_{D,E,F}$ 不闭. 当 $d(A)+n(C) < \infty$ 时, 注意到 $B \in \mathcal{BCR}(H_2)$, $C \in \mathcal{BCR}(H_3)$, $\operatorname{ran} B$ 不闭且 $n(C) < \infty$, 因此由引理 2.7 可得, 对任意的 $F \in \mathcal{B}(H_3, H_2)$ 有 $\operatorname{ran}\left(\begin{smallmatrix} B & F \\ 0 & C \end{smallmatrix}\right)$ 不闭. 又 $d(A) < \infty$, 于是由引理 2.6 可得, 对任意 $D \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$, $E \in \mathcal{B}(H_3, H_1)$, $F \in \mathcal{B}(H_3, H_2)$ 都有 $\operatorname{ran} M_{D,E,F}$ 不闭.

必要性. 用反证法证明. 下面分两种情形讨论.

情形 1 $d(A) = \infty$. 由 $\operatorname{ran} B$ 和 $\operatorname{ran} C$ 不闭可得 $\dim \ker B^{\perp} = \dim \ker C^{\perp} = \infty$. 令 D_0 形如式 (3.4), E_0 形如式 (3.6), $F_0 = 0$. 因此, $\operatorname{ran} M_{D_0,E_0,F_0} = \operatorname{ran} A \oplus \operatorname{ran}\begin{pmatrix} J_1 \\ B^1_{[\perp]} \end{pmatrix} \oplus B(0) \oplus \operatorname{ran}\begin{pmatrix} J_2 \\ C^1_{[\perp]} \end{pmatrix} \oplus C(0)$ 是闭的.

情形 2 $d(B) = n(C) = \infty$. 令 $D_0 = 0$, $E_0 = 0$,

$$F_0 = \begin{pmatrix} 0 & J_3 \\ J_4 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \ker C^{\perp} \\ \ker C \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \overline{\operatorname{ran} B} \\ \operatorname{ran} B^{\perp} \end{pmatrix},$$

其中 $J_3 : \ker C \to \overline{\operatorname{ran} B}$, $J_4 : \ker C^{\perp} \to \operatorname{ran} B^{\perp}$ 均是酉算子. 同理, $\operatorname{ran} M_{D_0,E_0,F_0} = \operatorname{ran} A \oplus \operatorname{ran}\left(\begin{smallmatrix} B & J_3 \end{smallmatrix}\right) \oplus \operatorname{ran}\begin{pmatrix} J_4 \\ C^1_{[\perp]} \end{pmatrix} \oplus C(0) = \operatorname{ran} A \oplus \overline{\operatorname{ran} B} \oplus \operatorname{ran}\left(\begin{smallmatrix} J_4 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \oplus C(0)$ 是闭的.

定理 3.5 设 $A \in \mathcal{LR}(H_1)$, $B \in \mathcal{BCR}(H_2)$, $C \in \mathcal{BCR}(H_3)$. 若 $\operatorname{ran} A$ 和 $\operatorname{ran} B$ 都不闭, $\operatorname{ran} C$ 闭, 则对任意的 $D \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$, $E \in \mathcal{B}(H_3, H_1)$, $F \in \mathcal{B}(H_3, H_2)$ 都有 $\operatorname{ran} M_{D,E,F}$ 不闭当且仅当 $n(B) + n(C) < \dim(\overline{\operatorname{ran} A}/\operatorname{ran} A)$ 或 $d(A) + n(C) < \infty$.

证 充分性. 设 $\operatorname{ran} A$ 和 $\operatorname{ran} B$ 都不闭, $\operatorname{ran} C$ 闭. 当 $n(B) + n(C) < \dim(\overline{\operatorname{ran} A}/\operatorname{ran} A)$ 时, 因为 $n\left(\begin{smallmatrix} B & F \\ 0 & C \end{smallmatrix}\right) \leqslant n(B) + n(C) < \dim(\overline{\operatorname{ran} A}/\operatorname{ran} A)$ 且 $\operatorname{ran} A$ 不闭, 所以结合引理 2.6 可知, 对任意的 $D \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$, $E \in \mathcal{B}(H_3, H_1)$, $F \in \mathcal{B}(H_3, H_2)$ 都有 $\operatorname{ran} M_{D,E,F}$ 不闭. 当 $d(A) + n(C) < \infty$ 时, 证明过程与定理 3.4 类似, 不再赘述.

必要性. 用反证法证明. 下面分两种情形讨论.

情形 1 $d(A) = \infty$ 且 $n(B) + n(C) \geqslant \dim(\overline{\operatorname{ran} A}/\operatorname{ran} A)$. 定义 $J_1 : \ker C \to \overline{\operatorname{ran} B}$ 是酉算子, D_0 形如式 (3.2) 中的 D_0. 令 E_0 形如式 (3.3), $F_0 = 0$,

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 & S_1 \\ J_1 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \ker B^{\perp} \\ \ker B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \overline{\operatorname{ran} A} \\ \operatorname{ran} A^{\perp} \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

因此, $\operatorname{ran} M_{D_0,E_0,F_0} = \operatorname{ran}\left(\begin{smallmatrix} A & S_1 & S_2 \end{smallmatrix}\right) \oplus \operatorname{ran}\begin{pmatrix} J_1 \\ B^1_{[\perp]} \end{pmatrix} \oplus B(0) \oplus \operatorname{ran} C = \overline{\operatorname{ran} A} \oplus \operatorname{ran}\left(\begin{smallmatrix} J_1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \oplus B(0) \oplus \operatorname{ran} C$ 是闭的.

情形 2 $n(C) = \infty$. 因为 $B \in \mathcal{BCR}(H_2)$, 所以由引理 2.1 可知 $B(0)$ 闭. 注意到 $\operatorname{ran} A$ 和 $\operatorname{ran} B$ 都不闭, 从而 $\dim \overline{\operatorname{ran} A} = \dim \overline{\operatorname{ran} B} = \infty$. 取 $\ker C$ 的闭子空间 M_1, M_2 使得 $\ker C = M_1 \oplus M_2$, 其中 $\dim M_1 = \dim(\overline{\operatorname{ran} A}/\operatorname{ran} A)$, $\dim M_2 = \dim(\overline{\operatorname{ran} B} \cap B(0)^{\perp}) = \infty$.

定义 $J_2 : M_1 \to \overline{\operatorname{ran} A}/\operatorname{ran} A$, $J_3 : M_2 \to \overline{\operatorname{ran} B} \cap B(0)^\perp$ 均为酉算子. 令 $D_0 = 0$,

$$E_0 = \begin{pmatrix} 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \ker C^\perp \\ M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \overline{\operatorname{ran} A} \\ \operatorname{ran} A^\perp \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

$$F_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & J_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \ker C^\perp \\ M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \overline{\operatorname{ran} B} \cap B(0)^\perp \\ B(0) \\ \operatorname{ran} B^\perp \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

因此 $\operatorname{ran} M_{D_0,E_0,F_0} = \operatorname{ran}\begin{pmatrix} A & J_2 \end{pmatrix} \oplus \operatorname{ran}\begin{pmatrix} B^1_{[\perp]} & J_3 \end{pmatrix} \oplus B(0) \oplus \operatorname{ran} C = \overline{\operatorname{ran} A} \oplus (\overline{\operatorname{ran} B} \cap B(0)^\perp) \oplus B(0) \oplus \operatorname{ran} C$ 是闭的.

定理 3.6　设 $A \in \mathcal{LR}(H_1)$, $B \in \mathcal{BCR}(H_2)$, $C \in \mathcal{BCR}(H_3)$. 若 $\operatorname{ran} A$ 和 $\operatorname{ran} C$ 都不闭, $\operatorname{ran} B$ 闭, 则对任意的 $D \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$, $E \in \mathcal{B}(H_3, H_1)$, $F \in \mathcal{B}(H_3, H_2)$ 都有 $\operatorname{ran} M_{D,E,F}$ 不闭当且仅当 $n(B) + n(C) < \dim(\overline{\operatorname{ran} A}/\operatorname{ran} A)$ 或 $d(A) + d(B) < \infty$.

证　充分性. 证明过程与定理 3.4、定理 3.5 的充分性类似, 不再赘述.

必要性. 用反证法证明. 下面分两种情形讨论.

情形 1　$d(A) = \infty$ 且 $n(B) + n(C) \geqslant \dim(\overline{\operatorname{ran} A}/\operatorname{ran} A)$. 容易发现, 存在有限维子空间 N 使得 $N \subseteq \overline{\operatorname{ran} A}$ 且 $\overline{\operatorname{ran} A} = \operatorname{ran} A \dotplus N$. 取 N 的子空间 N_1, N_2 使得 $N_1 \oplus N_2 = N$ 且定义 $S_1 : \ker B \to N_1$, $S_2 : \ker C \to N_2$ 均是满射, $J_2 : \ker C^\perp \to \operatorname{ran} A^\perp$ 是酉算子. 令 D_0 形如式 (3.2), $F_0 = 0$,

$$E_0 = \begin{pmatrix} 0 & S_2 \\ J_2 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \ker C^\perp \\ \ker C \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \overline{\operatorname{ran} A} \\ \operatorname{ran} A^\perp \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

因此, $\operatorname{ran} M_{D_0,E_0,F_0} = \operatorname{ran}\begin{pmatrix} A & S_1 & S_2 \end{pmatrix} \oplus \operatorname{ran} B \oplus \operatorname{ran}\begin{pmatrix} J_2 \\ C^1_{[\perp]} \end{pmatrix} \oplus C(0) = \overline{\operatorname{ran} A} \oplus \operatorname{ran} B \oplus \operatorname{ran}\begin{pmatrix} J_2 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus C(0)$ 是闭的.

情形 2　$d(B) = \infty$ 且 $n(B) + n(C) \geqslant \dim(\overline{\operatorname{ran} A}/\operatorname{ran} A)$. 令 D_0 形如式 (3.2), E_0 形如式 (3.3), F_0 形如式 (3.7). 因此, $\operatorname{ran} M_{D_0,E_0,F_0} = \operatorname{ran}\begin{pmatrix} A & S_1 & S_2 \end{pmatrix} \oplus \operatorname{ran} B \oplus \operatorname{ran}\begin{pmatrix} J_3 \\ C^1_{[\perp]} \end{pmatrix} \oplus C(0) = \overline{\operatorname{ran} A} \oplus \operatorname{ran} B \oplus \operatorname{ran}\begin{pmatrix} J_3 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus C(0)$ 是闭的.

定理 3.7　设 $A \in \mathcal{LR}(H_1)$, $B \in \mathcal{BCR}(H_2)$, $C \in \mathcal{BCR}(H_3)$. 若 $\operatorname{ran} A$, $\operatorname{ran} B$ 和 $\operatorname{ran} C$ 都不闭, 则对任意的 $D \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$, $E \in \mathcal{B}(H_3, H_1)$, $F \in \mathcal{B}(H_3, H_2)$ 都有 $\operatorname{ran} M_{D,E,F}$ 不闭当且仅当下列条件至少有一个成立:

(i) $n(B) + n(C) < \dim(\overline{\operatorname{ran} A}/\operatorname{ran} A)$;

(ii) $d(A) + n(C) < \infty$;

(iii) $d(A) + d(B) < \infty$.

证　充分性. 设 $\operatorname{ran} A$, $\operatorname{ran} B$ 和 $\operatorname{ran} C$ 都不闭且条件 (i) 成立. 证明过程与定理 3.5 的充分性类似, 不再赘述.

设条件 (ii) 或 (iii) 成立. 证明过程与定理 3.4 的充分性类似, 不再赘述.

必要性. 用反证法证明. 只需证明 $d(A)+d(B)=\infty$, $d(A)+n(C)=\infty$ 且 $n(B)+n(C)\geqslant\dim(\overline{\operatorname{ran}A}/\operatorname{ran}A)$ 时, 存在 $D_0\in\mathcal{B}(H_2,H_1)$, $E_0\in\mathcal{B}(H_3,H_1)$, $F_0\in\mathcal{B}(H_3,H_2)$ 使得 $\operatorname{ran}M_{D_0,E_0,F_0}$ 闭. 下面分两种情形讨论.

情形 1 $d(A)=\infty$ 且 $n(B)+n(C)\geqslant\dim(\overline{\operatorname{ran}A}/\operatorname{ran}A)$. 令 D_0 形如式 (3.8), E_0 形如式 (3.11), $F_0=0$. 于是, $\operatorname{ran}M_{D_0,E_0,F_0}=\operatorname{ran}\begin{pmatrix}A & S_1 & S_2\end{pmatrix}\oplus\operatorname{ran}\begin{pmatrix}J_1\\ B^1_{[\perp]}\end{pmatrix}\oplus B(0)\oplus\operatorname{ran}\begin{pmatrix}J_2\\ C^1_{[\perp]}\end{pmatrix}\oplus C(0)=\overline{\operatorname{ran}A}\oplus\operatorname{ran}\begin{pmatrix}J_1\\ 0\end{pmatrix}\oplus B(0)\oplus\operatorname{ran}\begin{pmatrix}J_2\\ 0\end{pmatrix}\oplus C(0)$ 是闭的.

情形 2 $d(B)=n(C)=\infty$. 注意到 $\operatorname{ran}C$ 不闭, 从而 $\dim\overline{\operatorname{ran}C}=\dim\ker C^{\perp}=\infty$. 取 $\ker C$ 的闭子空间 M_1, M_2 使得 $\ker C=M_1\oplus M_2$, 其中 $\dim M_1=\dim(\overline{\operatorname{ran}A}/\operatorname{ran}A)$, $\dim M_2=\dim(\overline{\operatorname{ran}B}\cap B(0)^{\perp})=\infty$. 定义 $J_3:M_2\to\overline{\operatorname{ran}B}\cap B(0)^{\perp}$, $J_4:\ker C^{\perp}\to\operatorname{ran}B^{\perp}$ 均为酉算子. 令 $D_0=0$, E_0 形如式 (3.9),

$$F_0=\begin{pmatrix}0 & 0 & J_3\\ 0 & 0 & 0\\ J_4 & 0 & 0\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}\ker C^{\perp}\\ M_1\\ M_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\overline{\operatorname{ran}B}\cap B(0)^{\perp}\\ B(0)\\ \operatorname{ran}B^{\perp}\end{pmatrix}.$$

因此, $\operatorname{ran}M_{D_0,E_0,F_0}=\operatorname{ran}\begin{pmatrix}A & J_2\end{pmatrix}\oplus\operatorname{ran}\begin{pmatrix}B^1_{[\perp]} & J_3\end{pmatrix}\oplus B(0)\oplus\operatorname{ran}\begin{pmatrix}J_4\\ C^1_{[\perp]}\end{pmatrix}\oplus C(0)=\overline{\operatorname{ran}A}\oplus(\overline{\operatorname{ran}B}\cap B(0)^{\perp})\oplus B(0)\oplus\operatorname{ran}\begin{pmatrix}J_4\\ 0\end{pmatrix}\oplus C(0)$ 是闭的.

推论 3.2 设 $A\in\mathcal{BCR}(H_1)$, $B\in\mathcal{BCR}(H_2)$, $C\in\mathcal{BCR}(H_3)$. 若 $\operatorname{ran}A$, $\operatorname{ran}B$ 和 $\operatorname{ran}C$ 都不闭, 则对任意的 $D\in\mathcal{B}(H_2,H_1)$, $E\in\mathcal{B}(H_3,H_1)$, $F\in\mathcal{B}(H_3,H_2)$ 都有 $\operatorname{ran}M_{D,E,F}$ 不闭当且仅当 $\min\{n(B)+n(C),d(A)+n(C),d(A)+d(B)\}<\infty$.

由前面的七个定理可总结出 $M_{D,E,F}$ 的闭值域谱的扰动结论.

推论 3.3 若 $A\in\mathcal{LR}(H_1),B\in\mathcal{BCR}(H_2),C\in\mathcal{BCR}(H_3)$, 则

$$\begin{aligned}\bigcap_{D,E,F}\sigma_{cr}(M_{D,E,F})=&\{\lambda\in\sigma_{cr}(A):n(B-\lambda\mathrm{I})+n(C-\lambda\mathrm{I})\\ &<\dim(\overline{\operatorname{ran}(A-\lambda\mathrm{I})}/\operatorname{ran}(A-\lambda\mathrm{I}))\}\\ &\cup\{\lambda\in\sigma_{cr}(B):d(A-\lambda\mathrm{I})+n(C-\lambda\mathrm{I})<\infty\}\\ &\cup\{\lambda\in\sigma_{cr}(C):d(A-\lambda\mathrm{I})+d(B-\lambda\mathrm{I})<\infty\}.\end{aligned}$$

推论 3.4 若 $A\in\mathcal{BCR}(H_1),B\in\mathcal{BCR}(H_2),C\in\mathcal{BCR}(H_3)$, 则

$$\begin{aligned}\bigcap_{D,E,F}\sigma_{cr}(M_{D,E,F})=&\{\lambda\in\sigma_{cr}(A):n(B-\lambda\mathrm{I})+n(C-\lambda\mathrm{I})<\infty\}\\ &\cup\{\lambda\in\sigma_{cr}(B):d(A-\lambda\mathrm{I})+n(C-\lambda\mathrm{I})<\infty\}\\ &\cup\{\lambda\in\sigma_{cr}(C):d(A-\lambda\mathrm{I})+d(B-\lambda\mathrm{I})<\infty\}.\end{aligned}$$

注 3.1 推论 3.4 的结论对有界线性算子 $A\in\mathcal{B}(H_1),B\in\mathcal{B}(H_2),C\in\mathcal{B}(H_3)$ 自然也成立.

§4 例 子

下面举例说明上述结论的正确性.

例 4.1 设 $H_1=H_2=H_3=\ell^2$, 对任意 $x=(x_1,x_2,x_3,\cdots)\in\ell^2$, 定义关系 $A\in\mathcal{BR}(\ell^2)$, $B\in\mathcal{BR}(\ell^2)$ 和 $C\in\mathcal{BR}(\ell^2)$ 分别为

$$\begin{aligned}Ax&=\Big(\frac{x_2}{2},0,0,\frac{x_4}{4},0,0,\frac{x_6}{6},\cdots\Big)+A(0),\\ Bx&=\Big(\frac{x_4}{\sqrt{4}},0,0,0,0,\frac{x_5}{\sqrt{5}},0,0,0,0,\frac{x_6}{\sqrt{6}},\cdots\Big)+B(0),\\ Cx&=\Big(\frac{x_1}{1},\frac{x_3}{3},\frac{x_5}{5},\frac{x_7}{7},\cdots\Big),\end{aligned}$$

其中

$$A(0)=\{(0,x_1,0,0,x_2,0,0,x_3,0,0,\cdots):(x_1,x_2,x_3,\cdots)\in\ell^2\},$$

$$B(0)=\{(0,x_1,0,0,0,0,x_2,0,0,0,0,x_3,\cdots):(x_1,x_2,x_3,\cdots)\in\ell^2\}.$$

我们断言, 存在 $D_0\in\mathcal{B}(\ell^2)$, $E_0\in\mathcal{B}(\ell^2)$, $F_0\in\mathcal{B}(\ell^2)$ 使得 $\operatorname{ran}M_{D_0,E_0,F_0}$ 闭.

注意到 $\operatorname{ran}A$, $\operatorname{ran}B$ 和 $\operatorname{ran}C$ 都不闭且 $d(B)=n(C)=\infty$. 由定理 3.7 知, 存在 $D_0\in\mathcal{B}(\ell^2)$, $E_0\in\mathcal{B}(\ell^2)$, $F_0\in\mathcal{B}(\ell^2)$ 使得 $\operatorname{ran}M_{D_0,E_0,F_0}$ 闭. 另外, 对任意 $x=(x_1,x_2,x_3,\cdots)\in\ell^2$, 令 $D_0=0$. 定义 $E_0x=(x_1,0,0,x_4,0,0,x_7,\cdots)$, $F_0x=F_2x\oplus F_3x=(x_1+x_2,x_3,x_5,x_7,x_9,x_5+x_{11},\cdots)$, 其中 $F_2x=(x_2,0,0,0,0,x_5,0,0,0,0,x_8,\cdots)$, $F_3x=(x_1,x_3,x_5,x_7,\cdots)$. 因此, $\operatorname{ran}M_{D_0,E_0,F_0}=\operatorname{ran}\begin{pmatrix}A & E_0\end{pmatrix}\oplus\operatorname{ran}\begin{pmatrix}B & F_2\end{pmatrix}\oplus\operatorname{ran}\begin{pmatrix}F_3\\ C\end{pmatrix}=\overline{\operatorname{ran}A}\oplus\overline{\operatorname{ran}B}\oplus\operatorname{ran}\begin{pmatrix}F_3\\ C\end{pmatrix}$. 因为 $\operatorname{ran}\begin{pmatrix}F_3\\ C\end{pmatrix}$ 的闭性与 $\operatorname{ran}\begin{pmatrix}F_3\\ 0\end{pmatrix}$ 的闭性是等价的且 $\operatorname{ran}F_3$ 是闭的, 所以 $\operatorname{ran}M_{D_0,E_0,F_0}$ 是闭的.

例 4.2 设 $H_1=H_2=H_3=\ell^2$, 对任意 $x=(x_1,x_2,x_3,\cdots)\in\ell^2$, 定义关系 $A\in\mathcal{BR}(\ell^2)$, $B\in\mathcal{BR}(\ell^2)$ 和 $C\in\mathcal{BR}(\ell^2)$ 满足

$$Ax=(x_2,0,0,x_3,0,0,x_4,\cdots)+A(0),$$

$$Bx=(0,x_1,0,x_3,0,x_5,0,\cdots)+B(0),$$

$$Cx=(x_2,0,x_4,0,x_6,0,x_8,0,x_{10},\cdots),$$

其中

$$A(0)=\{(0,x_1,0,0,x_2,0,0,x_3\cdots):(x_1,x_2,x_3,\cdots)\in\ell^2\},$$

$$B(0)=\{(x_1,0,x_2,0,x_3,0,\cdots):(x_1,x_2,x_3,\cdots)\in\ell^2\}.$$

我们断言, 存在 $D_0\in\mathcal{B}(\ell^2),E_0\in\mathcal{B}(\ell^2),F_0\in\mathcal{B}(\ell^2)$ 使得 $\operatorname{ran}M_{D_0,E_0,F_0}$ 不闭.

易知 $\operatorname{ran}A,\operatorname{ran}B$ 和 $\operatorname{ran}C$ 都是闭的且 $d(A)=n(B)=n(C)=\infty$. 此外, 对任意 $x=(x_1,x_2,x_3,\cdots)\in\ell^2$, 定义 $D_0x=(0,0,\frac{x_4}{4},0,0,\frac{x_8}{8},0,0,\frac{x_{12}}{12},0,0,\cdots)$. 令 $E_0=0$, $F_0=0$. 一方面, $\operatorname{ran}M_{D_0,E_0,F_0}=\operatorname{ran}A\oplus\operatorname{ran}B\oplus\operatorname{ran}C\oplus\operatorname{ran}D_0$. 另一方面, $\operatorname{ran}D_0$ 不闭. 因此, $\operatorname{ran}M_{D_0,E_0,F_0}$ 不闭.

例 4.3 设 $H_1 = H_2 = H_3 = \ell^2$. 对任意 $x = (x_1, x_2, x_3, \cdots) \in \ell^2$, 定义关系 $A \in \mathcal{BR}(\ell^2)$, $B \in \mathcal{BR}(\ell^2)$ 和 $C \in \mathcal{BR}(\ell^2)$ 分别为

$$\begin{aligned} Ax &= (\frac{x_3}{3}, 0, 0, 0, \frac{x_4}{4}, 0, 0, 0, \frac{x_5}{5}, 0, \cdots) + A(0), \\ Bx &= (\frac{x_2}{2}, 0, 0, \frac{x_3}{3}, 0, 0, \frac{x_4}{4}, \cdots) + B(0), \\ Cx &= (x_1, 0, x_3, 0, x_5, \cdots) + C(0), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} A(0) &= \{(0, x_1, 0, 0, 0, x_2, 0, 0, 0, x_3, 0, 0, 0, \cdots) : (x_1, x_2, x_3, \cdots) \in \ell^2\}, \\ B(0) &= \{(0, x_1, 0, 0, x_2, 0, 0, x_3, \cdots) : (x_1, x_2, x_3, \cdots) \in \ell^2\}, \\ C(0) &= \{(0, x_2, 0, x_4, 0, x_6 \cdots) : (x_2, x_4, x_6, \cdots) \in \ell^2\}. \end{aligned}$$

我们断言, 存在 $D_0 \in \mathcal{B}(\ell^2)$, $E_0 \in \mathcal{B}(\ell^2)$, $F_0 \in \mathcal{B}(\ell^2)$ 使得 $\operatorname{ran} M_{D_0,E_0,F_0}$ 闭.

不难看出 $\operatorname{ran} A$ 和 $\operatorname{ran} B$ 不闭, $\operatorname{ran} C$ 闭且 $d(A) = n(C) = \infty$. 根据定理 3.5, 存在 $D_0 \in \mathcal{B}(\ell^2)$, $E_0 \in \mathcal{B}(\ell^2)$, $F_0 \in \mathcal{B}(\ell^2)$ 使得 $\operatorname{ran} M_{D_0,E_0,F_0}$ 闭. 事实上, 对任意 $x = (x_1, x_2, x_3, \cdots) \in \ell^2$, 定义 $D_0 = 0$, $E_0 x = (x_2, 0, 0, 0, x_6, 0, 0, 0, x_{10}, 0, 0, 0, \cdots)$, $F_0 x = (x_4, 0, 0, x_8, 0, 0, x_{12}, \cdots)$. 因此, $\operatorname{ran} M_{D_0,E_0,F_0} = \operatorname{ran}\begin{pmatrix} A & E_0 \end{pmatrix} \oplus \operatorname{ran}\begin{pmatrix} B & F_0 \end{pmatrix} \oplus \operatorname{ran} C = \overline{\operatorname{ran} A} \oplus \overline{\operatorname{ran} B} \oplus \operatorname{ran} C$ 是闭的.

参 考 文 献

[1] Cross R. Multivalued linear operators [M]. New York: Marcel Dekker, 1998.

[2] Aubin J P, Cellina A. Differential inclusions: Set-valued maps and viability theory [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1984.

[3] Derkach V, Hassi S, Malamud M, et al. Boundary relations and their Weyl families [J]. *Trans Amer Math Soc*, 2006, 358(12):5351–5400.

[4] Favini A, Yagi A. Degenerate differential equations in Banach spaces [M]. New York: Marcel Dekker, 1998.

[5] Baskakov A G. Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations [J]. *Russian Math Surveys*, 2013, 68(1):69–116.

[6] Shi Y, Sun H. Self-adjoint extensions for second-order symmetric linear difference equations [J]. *Linear Algebra Appl*, 2011, 434(4):903–930.

[7] Du H, Pan J. Perturbation of spectrums of 2×2 operator matrices [J]. *Proc Amer Math Soc*, 1994, 121(3):761–766.

[8] Dou Y, Du G, Shao C, et al. Closedness of ranges of upper-triangular operators [J]. *J Math Anal Appl*, 2009, 356(1):13–20.

[9] Cao X, Meng B. Essential approximate point spectra and Weyl's theorem for operator matrices [J]. *J Math Anal Appl*, 2005, 304(2):759–771.

[10] 海国君, 阿拉坦仓. 2×2 阶上三角型算子矩阵的 Moore-Penrose 谱 [J]. 系统科学与数学, 2009, 29(7):962–970.

[11] Hou J. Completion of operator partial matrices to projections [J]. *Linear Algebra Appl*, 1996, 246:71–82.

[12] Li Y, Du H. The intersection of essential approximate point spectra of operator matrices [J]. *J Math Anal Appl*, 2006, 323(2):1171–1183.

[13] Wu X, Huang J. Essential spectrum of upper triangular operator matrices[J]. *Ann Funct Anal*, 2020, 11:780–798.

[14] 王晓丽, 阿拉坦仓. $n \times n$ 上三角算子矩阵的单值扩张性以及应用 [J]. 数学年刊 A 辑, 2023, 44(1):57-70.

[15] Wu X, Huang J. Weyl spectrum of upper triangular operator matrices [J]. *Acta Math Sin*, 2020, 36(7):783–796.

[16] 曹小红. 3×3 上三角算子矩阵的 Weyl 型定理 [J]. 数学学报 (中文版), 2006, 49(3):529–538.

[17] Hai G, Chen A. Possible spectrums of 3×3 upper triangular operator matrices [J]. *J Math Res Expo*, 2009, 29(4):649–661.

[18] 吴秀峰, 黄俊杰, 阿拉坦仓. 三阶上三角算子矩阵点谱、连续谱和剩余谱的扰动 [J]. 数学学报 (中文版), 2015, 58(3):423–430.

[19] Wu X, Huang J, Chen A. Spectra of 3×3 upper triangular operator matrices [J]. *Funct Anal Its Appl*, 2017, 51:135–143.

[20] 吴秀峰, 黄俊杰. 3×3 阶上三角算子矩阵的点谱、剩余谱和连续谱 [J]. 数学学报 (中文版), 2019, 62(6):817–832.

[21] Chamkha Y, Mnif M. Browder spectra of upper triangular matrix linear relations [J]. *Publ Math Debrecen*, 2013, 82(3–4):569–590.

[22] Du Y, Huang J. Spectral property of upper triangular relation matrices [J]. *Linear Multilinear Algebra*, 2022, 70(8):1526–1542.

[23] Du Y, Huang J, Huo R. On the range of upper triangular relation matrices [J]. *Linear Multilinear Algebra*, 2022, 70(20):5750–5769.

[24] Tretter C. Spectral theory of block operator matrices and applications [M]. London: Imperial College Press, 2008.

Perturbation of Closed Range Spectra for 3×3 Upper Triangular Relation Matrices

LI Jiali[1] WU Xiufeng[2] CHEN Alatancang[1]

[1]School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia Normal University, Hohhot 010022, China. E-mail: Lijiali692@163.com; alatanca@imu.edu.cn

[2]Corresponding author. School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia Normal University, Hohhot 010022, China. E-mail: wuxiufeng68@163.com

Abstract Let H_1, H_2 and H_3 be complex separable infinite-dimensional Hilbert spaces. Given the relations $A \in \mathcal{LR}(H_1)$, $B \in \mathcal{LR}(H_2)$ and $C \in \mathcal{LR}(H_3)$, the authors define $M_{D,E,F} := \left(\begin{smallmatrix} A & D & E \\ 0 & B & F \\ 0 & 0 & C \end{smallmatrix}\right)$. In this paper, a necessary and sufficient condition is given for the range of $M_{D,E,F}$ is not closed for any $D \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$, $E \in \mathcal{B}(H_3, H_1)$ and $F \in \mathcal{B}(H_3, H_2)$, in terms of the spectral properties of diagonal relations of A, B and C in $M_{D,E,F}$. Furthermore, the authors characterize the perturbation of closed range spectrum of $M_{D,E,F}$.

Keywords Relation matrix, Closedness of range, Closed range spectrum, Perturbation

2000 MR Subject Classification 47A06, 47A10, 47A55

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 45 No. 4, 2024

by ALLERTON PRESS, INC., USA