数 学 年 刊 A 辑
2024, 45(4):373–400
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2024.0026

平均场型的随机微分对策和路径依赖的 Bellman-Isaacs 主方程 *

郝 涛 [1]

提要 作者研究由路径依赖平均场随机微分方程驱动的零和随机微分对策. 动力系统和价值泛函的系数均依赖于解的路径以及路径的分布. 采用典则场景下的非预期策略对反馈控制的弱解框架, 因此值函数定义在平方可积的概率测度空间上. 通过调整测试函数空间使其具备必要的局部紧性, 给出路径依赖 Bellman -Isaacs 主方程粘性解的内生性定义. 证明值函数的正则性和动态规划原理, 从而得到相关的 Bellman -Isaacs 主方程解的一种概率解释.

关键词 随机微分对策，路径依赖的平均场随机微分方程， Bellman-Isaacs 主方程，动态规划，粘性解

MR (2000) 主题分类 93E20, 60H30, 60H35

中图法分类 O211.63

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2024)04-0373-28

§1 引 言

1989 年 Fleming, Souganidis [1] 使用非预期策略对开环控制来研究经典的二人零和随机微分对策. 他们的工作与开环控制对开环控制的随机微分对策的不同之处在于可以得到值函数的动态规划原理. Buckdahn, Li [2] 在 2008 年将 Fleming 和 Souganidis 的工作从正向随机微分方程系统发展到正倒向随机微分方程系统. 在他们的工作中，值函数被定义为倒向随机微分方程的解在初始时刻的值，并被刻画为相应的 (状态依赖的) Bellman-Isaacs 方程的粘性解. 需要说明的是文 [1–2] 所研究的对策是马尔可夫型的. 后来，受 Ekren 等 [3], Ekren, Touzi 和 Zhang [4−5] 工作的启发， Pham, Zhang [6] 将状态依赖的随机微分对策发展到路径依赖情形，用弱解的方式研究由路径依赖的随机微分方程驱动的零和随机微分对策，证明值函数是相应的路径依赖 Bellman-Isaacs 方程的粘性解.

自从 Caines, Huang, Malhame [7] 和 Lasry, Lions [8] 开始独立研究平均场对策以来，这一主题和相关的平均场控制问题引起广大学者的兴趣 [9−14]. 这些问题研究当个体的数量非常大时, 带有平均场交互作用的大种群随机控制系统的极限行为. 这一理论在经济、金融和社会科学中具有重要应用 [15]. 目前已有很多文献考虑平均场随机微分方程驱动的

本文 2024 年 3 月 16 日收到， 2024 年 11 月 19 日收到修改稿.

[1] 山东财经大学统计与数学学院，济南 250014. E-mail: taohao@sdufe.edu.cn

* 本文受到国家自然科学基金 (No. 72171133) 和山东省自然科学基金 (Nos. ZR2024MA039, ZR2022MA029) 的资助.

随机微分对策. Li, Min [16] 和 Djehiche, Hamadène [17] 在弱解框架下考虑一类偏移系数依赖于解的分布和控制的 McKean-Vlasov 型零和随机微分对策. 由于工作背景是典则概率场景, 所以他们的工作可以看成是反馈控制对反馈控制. Cosso 和 Pham [18] 考虑一般形式的 McKean-Vlasov 方程驱动的零和随机微分对策. 他们动力系统的漂移和扩散系数均依赖于解的分布和控制. 作者在强解的情况下采用非预期策略对开环控制研究该问题, 证明动态规划原理. 另外, Averboukh [19] 研究带有反馈控制的平均场确定性微分对策.

金融中的很多问题通常表现出路径依赖的特性. 例如, Viens, Zhang [20] 的工作表明在考虑粗糙波动率模型时, 路径依赖的偏微分方程会被碰到. Saporito, Zhang [21] 在研究带有延迟信息的控制问题时, 推导出一个 Wasserstein 空间上的路径依赖的非线性偏微分方程, 也称为路径依赖的主方程. 最近, 很多学者对主方程的粘性解理论作出巨大贡献. Burzoni 等 [22] 考虑带有跳扩散的平均场控制问题, 通过限定粘性邻域来保持紧性. 但是这种方法的缺陷在于受控动力系统的系数不能依赖于空间变量. Cosso 等 [13] 通过将 Wasserstein 空间中那些在切线方向上具有全局极值的函数作为测试函数, 提出哈密顿 - 雅各比 -V- 贝尔曼 (简记为 HJB) 方程的粘性解概念. Talbi 等 [23] 考虑将 $(X_{\tau\wedge t},\{\tau\geqslant t\})$ 的联合分布作为值函数的变量 (这里 X 是状态过程, τ 是停时), 来证明平均场最优停时问题的值函数是相应的 Wasserstein 空间上障碍方程的唯一粘性解. 在研究路径依赖的平均场控制问题时, Wu, Zhang [24] 给出 Wasserstein 空间上抛物型方程的一种全新的粘性解概念.

当将路径依赖的平均场控制问题延拓到路径依赖的平均场随机微分对策时, 路径依赖的 Bellman-Isaacs 主方程很自然被得到. 为此, 本文研究路径依赖的 Bellman-Isaacs 主方程, 给出它的一种概率解释, 即证明 (3.4) 中定义的下上值函数 W 和 V 分别是方程 (6.1) 和方程 (6.3) 的粘性解. 一方面由于本文关注的重点是状态过程的分布, 而不是状态过程本身, 另一方面, 在很多实际情况中, 仅仅状态过程 X 被观测到而其驱动噪音布朗运动无法被观测到, 因此本文采用典则场景下的非预期策略对反馈控制的弱解框架. 与文 [18] 不同, 本文中需要在 $\mathcal{P}_2$ 空间 (而不是在平方可积的随机变量构成的 Hilbert 空间) 上, 证明下上值函数 W 和 V 满足动态规划原理, 这是本文技术难点之一. 众所周知, 在粘性解理论中, 测试函数的局部紧性是一个必要的要求, 然而 Wasserstain 空间缺少这一性质. 为了克服这一困难, 本文通过构造适当的测试函数空间来保证其必要的紧性. 具体来说, 令 $\mathcal{P}_K(t,\mu)$ 表示漂移和扩散特征被一常数 K 所界的所有半鞅测度构成的紧集. $W(t,\mu)$ 是一个候选解, ϕ 是在 (t,μ) 处的平滑测试函数. 我们仅要求 $\phi-W$ 在 (t,μ) 处的一个邻域 $[t,t+\theta]\times\mathcal{P}_K(t,\mu)$ 内达到极大值或者极小值. 这一条件弱化了经典粘性理论 (见 [25]) 中对于测试函数的要求.

最近, 文 [18, 26] 给出定义在 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ (所有具有有限二阶矩的测度构成的空间) 上主方程粘性解的概念. 他们通过将 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ 空间提升到由相应的平方可积的随机变量构成

的 Hilbert 空间，利用 Hilbert 空间上已有的粘性解理论来研究 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ 空间上的粘性解理论，从而给出与受控的状态依赖的 McKean-Vlasov 动力系统相关联的主方程粘性解的存在唯一性结论. 然而，这样定义的粘性解并不具有内生性，特别地，这种粘性解是否和经典解一致尚不明确. 进一步，很难将他们的粘性解概念从状态依赖推广到路径依赖情形，原因在于目前没有 Hilbert 空间上路径依赖情形的粘性解理论.

本文组织如下. 第 2 节介绍路径依赖的背景知识和 Wasserstein 空间中的泛函伊藤公式. 第 3 节用来公式化随机微分对策. 在第 4 节中，我们证明值函数的正则性. 动态规划原理在第 5 节中给出. 最后一节用来展示 Bellman-Isaacs 主方程的粘性解的存在性.

§2　准 备 工 作

本节主要介绍路径依赖场景下的 Wasserstein 度量和 Wasserstein 空间中的泛函伊藤公式.

§2.1　路径依赖场景下的 Wasserstein 度量

令 T 是一个给定的常数. 本文的工作背景是典则空间 $\Omega := C([0,T];\mathbb{R}^d)$, 它具有一致范数 $\|\omega\| = \sup\limits_{t\in[0,T]} |\omega_t|$. 令 X 表示典则过程，即 $X_t(\omega) = \omega_t$. $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t\}_{0\leqslant t\leqslant T} = \mathbb{F}^X$ 是由 X 生成的自然信息流. $\mathcal{P}_2$ 表示 $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ 上满足 $\mathbb{E}^\mu[\|X\|^2] < +\infty$ 的所有概率测度 μ 构成的集合. $\mathcal{P}_2$ 装备下面的 2-Wasserstain 距离：对于 $\mu, \nu \in \mathcal{P}_2$,

$$W_2(\mu,\nu) := \inf\Big\{\Big(\int_{\Omega\times\Omega} \|\omega-\omega^*\|^2 \mathrm{d}\mathbb{P}_{\mu,\nu}(\omega,\omega^*)\Big)^{\frac{1}{2}},\quad \mathbb{P}_{\mu,\nu}\in\mathcal{P}_{\mu,\nu}\Big\}, \tag{2.1}$$

这里 $\mathcal{P}_{\mu,\nu}$ 表示具有边际分布 μ 和 ν 的乘积空间 $(\Omega\times\Omega, \mathcal{F}\times\mathcal{F})$ 上所有概率测度. $(\Omega, \|\cdot\|)$ 和 $(\mathcal{P}_2, W_2)$ 是 Polish 空间. 对于 $(t,\mu)\in[0,T]\times\mathcal{P}_2$, 令 $\mu_{[0,t]}\in\mathcal{P}_2$ 表示在 μ 下截断过程 $X_{t\wedge\cdot}$ 的分布. 介绍 $[0,T]\times\mathcal{P}_2$ 上 2-Wasserstein 伪度量：对于 $(t,\mu),(t^*,\mu^*)\in[0,T]\times\mathcal{P}_2$,

$$W_2((t,\mu),(t^*,\mu^*)) := (|t-t^*| + W_2^2(\mu_{[0,t]},\mu^*_{[0,t^*]}))^{\frac{1}{2}}.$$

一个函数 $\varphi: [0,T]\times\mathcal{P}_2\to\mathbb{R}$ 被称为 $\mathbb{F}$- 适应的，如果对于任意的 $(t,\mu)\in[0,T]\times\mathcal{P}_2$, 它满足 $\varphi(t,\mu) = \varphi(t,\mu_{[0,t]})$. 如果一个函数 $\varphi: [0,T]\times\mathcal{P}_2\to\mathbb{R}$ 关于由 W_2 导出的拓扑是 Borel 可测，则它是 $\mathbb{F}$- 适应的. 特别地，如果 φ 是连续的，它一定是 $\mathbb{F}$- 适应.

类似于 Dupire [27], 为了研究泛函伊藤公式，将典则空间延拓到 Càdlàg 空间 $\widetilde{\Omega} := D([0,T];\mathbb{R}^d)$. 这一空间装备下面的 Skorohod 距离：

$$d_0(\widetilde{\omega},\widetilde{\omega}^*) = \inf_l \sup_{0\leqslant t\leqslant T} [|t-l(t)| + |\widetilde{\omega}_t - \widetilde{\omega}^*_{l(t)}|],$$

这里 $l: [0,T]\to[0,T]$ 是连续的、严格递增的，满足 $l(0)=0, l(T)=T$. $\widetilde{X}, \widetilde{\mathbb{F}}, \widetilde{\mathcal{P}}_2$ 具有类似的定义，此时 (2.1) 中的度量 $\|\omega-\omega^*\|^2$ 将会被度量 $d_0(\widetilde{\omega},\widetilde{\omega}^*)$ 所替代. 利用同样的方式可以给出 $[0,T]\times\widetilde{\mathcal{P}}_2$ 上 2-Wasserstein 伪度量.

§2.2 Wasserstein 空间中的泛函伊藤公式

§2.2.1 Wasserstein 空间中的路径依赖导数

在介绍泛函伊藤公式之前, 首先回忆 Wasserstein 空间中的路径导数. 假设 $\varphi:[0,T]\times\widetilde{\mathcal{P}}_2\to\mathbb{R}$ 是一个连续函数, φ 关于时间的导数定义为

$$\partial_t\varphi(t,\widetilde{\mu})=\lim_{\theta\downarrow 0}\frac{\varphi(t+\theta,\widetilde{\mu}_{[0,t]})-\varphi(t,\widetilde{\mu})}{\theta}.$$

接下来介绍 φ 的空间导数. 令 $(\overline{\Omega},\overline{\mathcal{F}},\overline{\mathbb{P}})$ 是一个没有原子的 Polish 概率空间, $\mathcal{L}^2(\overline{\Omega};\mathbb{R}^d)$ 表示 $\overline{\mathbb{P}}$- 平方可积的 $\overline{\mathcal{F}}$- 可测的随机变量 $\eta:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^d$ 构成的集合, $\mathcal{L}^2(\overline{\Omega};\widetilde{\Omega})$ 表示 $\overline{\mathbb{P}}$ - 平方可积的, $\overline{\mathcal{F}}$- 可测的映射 $\eta:\overline{\Omega}\to\widetilde{\Omega}$ 构成的集合. 考虑提升函数 Φ: $[0,T]\times\mathcal{L}^2(\overline{\Omega};\widetilde{\Omega})\to\mathbb{R}$:

$$\Phi(t,\overline{X}):=\varphi(t,\overline{\mathbb{P}}_{\overline{X}})=\varphi(t,\overline{\mathbb{P}}_{\overline{X}_{t\wedge\cdot}}).\tag{2.2}$$

如果存在一个随机变量 $D\Phi(t,\overline{X})\in L^2(\overline{\Omega};\mathbb{R}^d)$, 使得对于 $\eta\in L^2(\overline{\Omega};\mathbb{R}^d)$,

$$\Phi(t,\overline{X}+\eta 1_{[t,T]})-\Phi(t,\overline{X})=\mathbb{E}^{\overline{\mathbb{P}}}[D\Phi(t,\overline{X})\cdot\eta]+o(\|\eta\|_2),$$

这里 $\|\eta\|_2^2:=\mathbb{E}^{\overline{\mathbb{P}}}[|\eta|^2]$, Φ 被称作在 $(t,\overline{X})$ 处 Fréchet 可导. Φ 的 Fréchet 可导性说明 $D\Phi(t,\overline{X})$ 是 Gâteux 导数, 即对于 $\eta\in L^2(\overline{\Omega};\mathbb{R}^d)$,

$$\mathbb{E}^{\overline{\mathbb{P}}}[D\Phi(t,\overline{X})\cdot\eta]=\lim_{\epsilon\downarrow 0}\frac{\Phi(t,\overline{X}+\epsilon\eta 1_{[t,T]})-\Phi(t,\overline{X})}{\epsilon}.$$

因为 φ 是连续的 (因而是 $\widetilde{\mathbb{F}}$- 适应), 所以 $D\Phi(t,\overline{X})$ 仅仅依赖于 $\overline{X}$ 在 t 时刻的扰动.

引理 2.1 假设 $\varphi:[0,T]\times\widetilde{\mathcal{P}}_2\to\mathbb{R}$ 是连续的, (2.2) 中给出的提升函数 Φ 是 Fréchet 可导的, $D\Phi$ 具有下面的连续性

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}^{\overline{\mathbb{P}}}[|D\Phi(t,\overline{X}^k)-D\Phi(t,\overline{X})|^2]=0,\quad \text{当}\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}^{\overline{\mathbb{P}}}[d_0^2(\overline{X}^k,\overline{X})]=0\text{ 时}.$$

则存在一个 $\widetilde{\mathcal{F}}_t$ 可测的函数 $g:\widetilde{\Omega}\to\mathbb{R}^d$, 使得

$$D\Phi(t,\overline{X})=g(\overline{X}_{t\wedge\cdot}),\quad \overline{\mathbb{P}}\text{ -a.s.}\tag{2.3}$$

函数 g 是 $\overline{\mathbb{P}}_{\overline{X}}$ -a.s. 唯一的. g 被称为 φ 关于测度 $\overline{\mathbb{P}}_{\overline{X}}$ 的导数, 记作 $\partial_\mu\varphi(t,\overline{\mathbb{P}}_{\overline{X}},\widetilde{\omega})=g(\widetilde{\omega})$, $\widetilde{\omega}\in\widetilde{\Omega}$.

推论 2.1 假定引理 2.1 中所有的假设成立, 并假定 (2.3) 中的 $D\Phi$ 是一致连续的, 则存在一个 Borel 可测函数 $\partial_\mu\varphi:[0,T]\times\widetilde{\mathcal{P}}_2\times\widetilde{\Omega}\to\mathbb{R}^d$, 使得

$$D\Phi(t,\overline{X})=\partial_\mu\varphi(t,\overline{\mathbb{P}}_{\overline{X}_{t\wedge\cdot}},\overline{X}_{t\wedge\cdot}),\quad \overline{\mathbb{P}}\text{ -a.s.}$$

进一步, 如果对于 $t\in[0,T]$, $\partial_\mu\varphi(t,\cdot,\cdot)$ 在 $\widetilde{\mathcal{P}}_2\times\widetilde{\Omega}$ 上是联合连续的, 则 $\partial_\mu\varphi$ 是唯一的.

现在假定 $\partial_\mu\varphi:[0,T]\times\widetilde{\mathcal{P}}_2\times\widetilde{\Omega}\to\mathbb{R}^d$ 是连续的. 借助 Dupire [27] 的方法, 可以定义下面导函数 $\partial_\omega\partial_\mu\varphi:[0,T]\times\widetilde{\mathcal{P}}_2\times\widetilde{\Omega}\to\mathbb{R}^{d\times d}$: 对于 $y\in\mathbb{R}^d$,

$$\partial_\omega\partial_\mu\varphi(t,\widetilde{\mu},\widetilde{\omega})y:=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial_\mu\varphi(t,\widetilde{\mu},\widetilde{\omega}+\epsilon y 1_{[t,T]})-\partial_\mu\varphi(t,\widetilde{\mu},\widetilde{\omega})}{\epsilon}.$$

下面的空间经常被使用.

• $C^{1,2}([0,T]\times\widetilde{\mathcal{P}}_2)$ 是由下面的函数构成的空间：

(i) $\varphi:[0,T]\times\widetilde{\mathcal{P}}_2\to\mathbb{R}$ 是连续的；

(ii) $\partial_t\varphi:[0,T]\times\widetilde{\mathcal{P}}_2\to\mathbb{R}$, $\partial_\mu\varphi:[0,T]\times\widetilde{\mathcal{P}}_2\times\widetilde{\Omega}\to\mathbb{R}^d$ 和 $\partial_\omega\partial_\mu\varphi:[0,T]\times\widetilde{\mathcal{P}}_2\times\widetilde{\Omega}\to\mathbb{R}^{d\times d}$ 是连续的.

• $C_b^{1,2}([0,T]\times\widetilde{\mathcal{P}}_2)$ 是由 $C^{1,2}([0,T]\times\widetilde{\mathcal{P}}_2)$ 中所有满足下面性质的函数 φ 组成的空间：

(i) $\partial_t\varphi$ 是有界的；

(ii) $\partial_\mu\varphi,\partial_\omega\partial_\mu\varphi$ 关于 $\widetilde{\omega}$ 是线性增长的，即对于 $(t,\widetilde{\mu},\widetilde{\omega})\in[0,T]\times\widetilde{\mathcal{P}}_2\times\widetilde{\Omega}$,

$$|\partial_\mu\varphi(t,\widetilde{\mu},\widetilde{\omega})|+|\partial_\omega\partial_\mu\varphi(t,\widetilde{\mu},\widetilde{\omega})|\leqslant C_0(1+\|\widetilde{\omega}\|).$$

§2.2.2　泛函伊藤公式

定义 2.1　对于任意给定的 $K>0$, μ 被称为一个漂移和扩散特征被常数 K 所界的半鞅测度，如果 $\mu=\overline{\mathbb{P}}\circ\overline{X}^{-1}$, 这里 $(\overline{\Omega},\overline{\mathcal{F}},\overline{\mathbb{P}})$ 是一个被赋予信息流的概率空间，并且 $\mathrm{d}\overline{X}_t=\overline{b}_t\mathrm{d}t+\overline{\sigma}_t\mathrm{d}\overline{W}_t,\overline{X}_0=\eta\in L^2(\mathcal{F}_0,\overline{\mathbb{P}};\mathbb{R}^d)$, $\overline{b}:[0,T]\times\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^d$ 和 $\overline{\sigma}:[0,T]\times\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^{d\times d}$ 是 $\overline{\mathbb{F}}$- 循序可测的，满足 $|\overline{b}|,\left|\frac{1}{2}\overline{\sigma}\right|^2\leqslant K$. $\overline{W}$ 是一个 d- 维的 $(\overline{\mathbb{F}},\overline{\mathbb{P}})$- 布朗运动.

对于 $(t,\mu)\in[0,T]\times\widetilde{\mathcal{P}}_2$ 和常数 $K>0$. 令 $\widetilde{\mathcal{P}}_K(t,\mu)$ 表示满足下面性质的 $\mathbb{P}\in\widetilde{\mathcal{P}}_2$ 构成的集合： (i) $\mathbb{P}_{[0,t]}=\mu_{[0,t]}$; (ii) $X_{[t,T]}$ 是一个漂移和扩散特征被常数 K 所界的 $\mathbb{P}$- 半鞅. 下面的伊藤公式成立.

定理 2.1　假设 $\varphi\in C_b^{1,2}([0,T]\times\widetilde{\mathcal{P}}_K(t,\mu))$. 对于给定的 $K>0$, 令 $\mathbb{P}\in\widetilde{\mathcal{P}}_K(t,\mu)$, 则有

$$\begin{aligned}\varphi(t,\mathbb{P})=\varphi(0,\mathbb{P})&+\int_0^t\partial_t\varphi(s,\mathbb{P})\mathrm{d}s+\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\Big[\int_0^t\partial_\mu\varphi(s,\mathbb{P},\widetilde{X})\cdot\mathrm{d}\widetilde{X}_s\\&+\frac{1}{2}\int_0^t\mathrm{tr}\{\partial_\omega\partial_\mu\varphi(s,\mathbb{P},\widetilde{X})\cdot\mathrm{d}\langle\widetilde{X}_s\rangle\}\Big],\end{aligned}\tag{2.4}$$

这里 $\cdot$ 表示内积.

接下来，我们解释连续轨道空间的限制.

令 $C^{1,2}([0,T]\times\mathcal{P}_2)$ 表示所有满足下面性质的 $\phi:[0,T]\times\mathcal{P}_2\to\mathbb{R}$ 构成的空间：

(i) 存在一个函数 $\widetilde{\phi}\in C^{1,2}([0,T]\times\widetilde{\mathcal{P}}_2)$, 在 $[0,T]\times\mathcal{P}_2$ 上满足 $\widetilde{\phi}=\phi$;

(ii) 定义

$$\partial_t\phi(t,\mu):=\partial_t\widetilde{\phi}(t,\mu),\quad\partial_\mu\phi(t,\mu,\varnothing):=\partial_\mu\widetilde{\phi}(t,\mu,\varnothing),$$
$$\partial_\omega\partial_\mu\phi(t,\mu,\varnothing):=\partial_\omega\partial_\mu\widetilde{\phi}(t,\mu,\varnothing),\quad\partial_\omega^s\partial_\mu\phi(t,\mu,\varnothing):=\partial_\omega^s\widetilde{\phi}(t,\mu,\varnothing),$$

这里

$$\partial_\omega^s\partial_\mu\phi(t,\mu,\varnothing)=\frac{1}{2}[\partial_\omega\widetilde{\phi}(t,\mu,\varnothing)+\partial_\omega\widetilde{\phi}(t,\mu,\varnothing)^{\mathrm{T}}].$$

根据定理 2.1 可得下面的定理.

定理 2.2　假设 $\varphi\in C^{1,2}([0,T]\times\mathcal{P}_2)$, 则有

(i) 导数 $\partial_t\varphi,\partial_\mu\varphi,\partial_\omega\partial_\mu\varphi$ 独立于 $\widetilde{\varphi}$;

(ii) 对于 $K>0$, 令 $\mathbb{P}\in\mathcal{P}_K(t,\mu)$, 则

$$\varphi(t,\mathbb{P})=\varphi(0,\mathbb{P})+\int_0^t\partial_t\varphi(s,\mathbb{P})\mathrm{d}s+\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\Big[\int_0^t\partial_\mu\varphi(s,\mathbb{P},\widetilde{X})\cdot\mathrm{d}\widetilde{X}_s$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t\mathrm{tr}\{\partial_\omega\partial_\mu\varphi(s,\mathbb{P},\widetilde{X})\cdot\mathrm{d}\langle\widetilde{X}_s\rangle\}\Big],$$

这里 $\mathcal{P}_K(t,\mu)$ 和 $\widetilde{\mathcal{P}}_K(t,\mu)$ 具有相同的含义，但是需用 $\mathcal{P}_2$ 替换 $\widetilde{\mathcal{P}}_2$.

最后, 通篇文章假设 $\gamma:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ 是一个连续递增的函数, 满足当 $\epsilon\downarrow 0$ 时，$\gamma(\epsilon)\to 0$. 它也许会逐行变化.

§3 问题公式化

令 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}_0,\mathbb{F}=\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0})$ 是一个完备的装备信息流的概率空间， W 是定义在其上的一个 d- 维布朗运动. 假设 $U\in\mathbb{R}^{n_1},V\in\mathbb{R}^{n_2}$ 是两个任意可测的集合. 令映射

$$b:[0,T]\times\Omega\times\mathcal{P}_2\times U\times V\to\mathbb{R},\quad \sigma:[0,T]\times\Omega\times\mathcal{P}_2\times U\times V\to\mathbb{R}^d,$$
$$f:[0,T]\times\Omega\times\mathcal{P}_2\times U\times V\to\mathbb{R},\quad h:\Omega\times\mathcal{P}_2\to\mathbb{R}$$

关于其各自变量是循序可测的，并且满足下面的假设.

假设 3.1 (i) b,σ 关于 (t,u,v) 是连续的，并且被常数 $L_0>0$ 所界.

(ii) b,σ 关于 (ω,μ) 是李普希兹的，即存在一个 $C_0>0$, 使得对于 $t\in[0,T]$, $\omega,\overline{\omega}\in\Omega$, $\mu,\overline{\mu}\in\mathcal{P}_2$, $u\in U,v\in V$ 和 $\varphi=b,\sigma$,

$$|\varphi(t,\omega,\mu,u,v)-\varphi(t,\overline{\omega},\overline{\mu},u,v)|\leqslant C_0(\|\omega_{t\wedge\cdot}-\overline{\omega}_{t\wedge\cdot}\|+W_2(\mu_{[0,t]},\overline{\mu}_{[0,t]})).$$

(iii) f 关于 (u,v) 是连续的，并且 $f(t,0,\delta_0,u,v)$ 被常数 $L_0>0$ 所界，这里 $\delta_{\{a\}}$ 表示 a 处的 Dirac 度量.

(iv) 对于 $t\in[0,T]$, $\omega,\overline{\omega}\in\Omega$, $\mu,\overline{\mu}\in\mathcal{P}_2$, $u\in U$, $v\in V$,

$$|f(t,\omega,\mu,u,v)-f(t,\overline{\omega},\overline{\mu},u,v)|\leqslant\gamma(\|\omega_{t\wedge\cdot}-\overline{\omega}_{t\wedge\cdot}\|+W_2(\mu_{[0,t]},\overline{\mu}_{[0,t]})),$$
$$|h(\omega,\mu)-h(\overline{\omega},\overline{\mu})|\leqslant\gamma(\|\omega-\overline{\omega}\|+W_2(\mu_{[0,T]},\overline{\mu}_{[0,T]})).$$

(v) b,σ,f 关于 t 具有下面的局部一致连续性：对于 $t_1<t_2$ 和 $\phi=b,\sigma,f$,

$$|\phi(t_2,\omega_{t_1\wedge\cdot},\mu_{[0,t_1]},u,v)-\phi(t_1,\omega,\mu,u,v)|\leqslant C_0\Big(1+\|\omega_{t_1\wedge\cdot}\|+W_2(\mu_{[0,t_1]},\delta_{\{0\}})\Big)\gamma(t_2-t_1).$$

(vi) $\sigma\sigma^{\mathrm{T}}$ 是正定的.

固定 $t\in[0,T]$ 和一个 [0, t] 上的过程 η, 考虑下面路径依赖的 McKean-Vlasov 方程：$\mathbb{P}_0$ -a.s.,

$$X_s^{t,\eta;u,v}=\eta+\int_t^s b(r,X_{r\wedge\cdot}^{t,\eta;u,v},\mathcal{L}_{X_{r\wedge\cdot}^{t,\eta;u,v}},u_r,v_r)\mathrm{d}r$$
$$+\int_t^s\sigma(r,X_{r\wedge\cdot}^{t,\eta;u,v},\mathcal{L}_{X_{r\wedge\cdot}^{t,\eta;u,v}},u_r,v_r)\mathrm{d}W_r,\quad s\in[t,T].\tag{3.1}$$

因为我们的关注点是 $X^{t,\eta;u,v}_{r\wedge\cdot}$ 的分布，而不是 $X^{t,\eta;u,v}_{r\wedge\cdot}$ 的轨道本身，所以本文采用典则空间中的弱解框架．相比于给定概率分布 $\mathbb{P}_0$, 考虑受控的随机过程 $X^{t,\eta;u,v}$, 我们更加倾向于给定典则过程 X, 考虑受控的分布 $\mathbb{P}^{u,v}$. 为此，对于给定的 $t\in[0,T]$, $\mu\in\mathcal{P}_2$ 和控制过程 u,v, 令 $\mathbb{P}^{t,\mu;u,v}\in\mathcal{P}_2$, 使得 $\mathbb{P}^{t,\mu;u,v}_{[0,t]}=\mu_{[0,t]}$ 和对于 $s\in[t,T]$, $\mathbb{P}^{t,\mu;u,v}$ -a.s.,

$$X_s = X_t+\int_t^s b(r,X_{r\wedge\cdot},\mathbb{P}^{t,\mu;u,v}_{[0,r]},u_r,v_r)\mathrm{d}r+\int_t^s \sigma(r,X^{t,\eta;u,v}_{r\wedge\cdot},\mathbb{P}^{t,\mu;u,v}_{[0,r]},u_r,v_r)\mathrm{d}W^{u,v}_r, \quad (3.2)$$

这里 $W^{u,v}=\{W^{u,v}_s\}_{s\in[0,T]}$ 是一个 $\mathbb{P}^{t,\mu;u,v}$- 布朗运动．价值泛函被定义为

$$J(t,\mu,u,v)=\mathbb{E}^{\mathbb{P}^{t,\mu;u,v}}\Big[h(X,\mathbb{P}^{t,\mu;u,v})+\int_t^T f(s,X,\mathbb{P}^{t,\mu;u,v},u_s,v_s)\mathrm{d}s\Big]. \quad (3.3)$$

由于博弈双方具有同一价值泛函，称 (3.2)–(3.3) 为路径依赖的平均场型零和随机微分对策．

为了给出上下值函数，首先介绍可容许控制和非预期策略的定义．众所周知，开环控制意味着控制 u 依赖于一个布朗运动 W, 即 $u_t=u_t(W)$. 然而在很多实际问题中，过程 X 可以被观测到，但是用来描述 X 分布的布朗运动 W 不能被观测到．因此，在目前工作中我们使用反馈控制．另外，因为控制 u_r 和 v_r 可以依赖于过去的信息，所以假设 u,v 是 $\mathbb{F}^{X^{t,\eta,u,v}}$- 可测的，即 $u_r=u_r(X^{t,\eta,u,v}_{[0,r]})$ 和 $v_r=v_r(X^{t,\eta,u,v}_{[0,r]})$ 是合理的选择． Wu, Zhang[24] 在路径依赖的 McKean-Vlasov 动力系统的最优控制问题中指出，定义在空间 $\mathcal{P}_2$ 上的值函数的正则性证明是相当复杂的，也更具有技术性．因此，本文考虑分段常数控制．具体来说，令

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_{t,s}=\Big\{&u:\text{存在}\,n\in\mathbb{N}\text{和}\ t=t_0<\cdots<t_n=s,\ \text{使得}\,u_r=\sum_{j=0}^{n-1}g_j1_{[t_j,t_{j+1})(r)},\\ &\text{这里}\,g_j:\Omega\to U\,\text{是}\,\mathcal{F}_{t_j}\text{- 可测的},\ j=0,1,\cdots,n-1\Big\};\\ \mathcal{V}_{t,s}=\Big\{&v:\text{存在}n\in\mathbb{N}\text{和}\ t=t_0<\cdots<t_n=s,\ \text{使得}v_r=\sum_{j=0}^{n-1}l_j1_{[t_j,t_{j+1})(r)},\\ &\text{这里}l_j:\Omega\to V\text{是}\mathcal{F}_{t_j}\text{- 可测的},j=0,1,\cdots,n-1\Big\}.\end{aligned}$$

定义 3.1 (可容许控制)　一个 $\mathbb{F}$- 循序可测的过程 $u:[t,s]\times\Omega\to U$ (相应地, $v:[t,s]\times\Omega\to V$) 被称作博弈者 I (相应地， II) 在 $[t,s]$ 上的一个可容许控制，如果 $u\in\mathcal{U}_{t,s}$ (相应地， $v\in\mathcal{V}_{t,s}$).

注 3.1　根据上述可容许控制的定义可知，对于任何的 $u\in\mathcal{U}_{t,s}$ 和 $v\in\mathcal{V}_{t,s}$, (3.1) 具有唯一弱解，因此， (3.2) 具有唯一强解 $\mathbb{P}^{t,\mu;u,v}$.

定义 3.2 (非预期策略)　一个连续映射 $\alpha:\mathcal{V}_{t,s}\to\mathcal{U}_{t,s}$ 被称为博弈者 I 在 $[t,s]$ 上的一个非预期策略，如果对于任何的 $\mathcal{F}_r$- 停时 $\tau:\Omega\to[t,s]$ 和对于任何在 $[[t,\tau]]\,(=\{(r,\omega)\in[0,T]\times\Omega\mid t\leqslant r\leqslant\tau(\omega)\})$ 上满足 $v_1=v_2$ 的控制 $v_1,v_2\in\mathcal{V}_{t,s}$, 有

$$\alpha(v_1)=\alpha(v_2),\quad \text{在}\,[[t,\tau]]\,\text{上}.$$

类似地，可以定义博弈者 II 在 $[t,s]$ 上的非预期策略．令 $\mathcal{A}_{t,s}$ (相应的， $\mathcal{B}_{t,s}$) 表示博弈者 I (相应地， II) 在 $[t,s]$ 上的所有非预期策略的全体．上、下值函数为

$$\begin{cases} W(t,\mu) := \inf\limits_{\beta\in\mathcal{B}_{t,T}} \sup\limits_{u\in\mathcal{U}_{t,T}} J(t,\mu;u,\beta(u)), \quad t\in[0,T],\ \mu\in\mathcal{P}_2, \\ V(t,\mu) := \sup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}_{t,T}} \inf\limits_{v\in\mathcal{V}_{t,T}} J(t,\mu;\alpha(v),v), \quad t\in[0,T],\ \mu\in\mathcal{P}_2. \end{cases} \tag{3.4}$$

下面给出 W 和 V 的一个直观解释：考虑一个由两个种群所构成的零和随机微分对策，这两个种群分别由同质的相互影响的追求对立目标的 N 个体组成．假设当个体的数目 N 非常大时，可以用两个具有代表性的 “博弈者” 代替上面的两个种群，原来的种群间的对策问题将演化成由具有代表性的 “博弈者 ” 构成的平均场随机微分对策问题，此时 (3.4) 中定义的 W 和 V 就给刻画了这两个代表性 “博弈者” 根据对方的决策做出合理策略后的值．

§4 值函数的正则性

本节研究下值函数 W 的正则性，上值函数 V 的正则性可以类似分析．

命题 4.1 假定假设 3.1 成立，存在一个连续函数 γ, 使得对于任何 $t\in[0,T],\ \mu,\nu\in\mathcal{P}_2,\ u\in\mathcal{U}_{t,T},\ v\in\mathcal{V}_{t,T}$,

(i) $|J(t,\mu,u,v)-J(t,\nu,u,v)|\leqslant\gamma(W_2(\mu_{[0,t]},\nu_{[0,t]}))$;

(ii) $|W(t,\mu)-W(t,\nu)|\leqslant\gamma(W_2(\mu_{[0,t]},\nu_{[0,t]}))$.

为了证明命题 4.1, 我们采用两个新的逐段常值控制过程空间 $\mathcal{U}^0_{t,T},\mathcal{V}^0_{t,T}$ 取代原来的空间 $\mathcal{U}_{t,T},\mathcal{V}_{t,T}$．具体来说，令 $(\overline{\Omega},\overline{\mathcal{F}},\overline{\mathbb{P}})$ 是一个概率空间， η,ζ 是这一空间上的两个过程．对于一个分割 $\Delta:0\leqslant s_1<\cdots<s_k\leqslant t$, 定义

$$\begin{aligned} \eta_\Delta &:= (\eta_{s_1},\cdots,\eta_{s_k}), \\ \|\eta-\zeta\|_{\overline{\mathbb{P}},\Delta} &:= \|\eta_\Delta-\zeta_\Delta\|_{\overline{\mathbb{P}}} = \Big(\mathbb{E}^{\overline{\mathbb{P}}}\Big[\max_{1\leqslant j\leqslant k}|\eta_{s_j}-\zeta_{s_j}|\Big]\Big)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^0_{t,T} = \Big\{ u_r = \sum_{j=0}^{n-1} g_j 1_{[t_j,t_{j+1})}(r)\in\mathcal{U}_{t,T} : \text{存在 } 0\leqslant s_1<\cdots<s_k\leqslant t,\ \text{使得} \\ g_i = g_i(X_\Delta, X_{[t,t_i]}):\Omega\to U \text{ 对于 } j=0,1,\cdots,n-1\Big\}; \\ \mathcal{V}^0_{t,T} = \Big\{ v_r = \sum_{j=0}^{n-1} l_j 1_{[t_j,t_{j+1})}(r)\in\mathcal{V}_{t,T} :\ \text{存在 } 0\leqslant s_1<\cdots<s_k\leqslant t,\ \text{使得} \\ l_i = l_i(X_\Delta, X_{[t,t_i]}):\Omega\to V \text{ 对于 } j=0,1,\cdots,n-1\Big\}. \end{aligned}$$

$\mathcal{A}^0_{t,s},\mathcal{B}^0_{t,s}$ 和 $\mathcal{A}_{t,s},\mathcal{B}_{t,s}$ 具有类似的含义，只不过在定义 3.2 中用 $\mathcal{U}^0_{t,s},\mathcal{V}^0_{t,s}$ 代替 $\mathcal{U}_{t,s},\mathcal{V}_{t,s}$.

考虑一个新的下值函数

$$W_0(t,\mu)=\inf_{\beta\in\mathcal{B}^0_{t,T}}\sup_{u\in\mathcal{U}^0_{t,T}}J(t,\mu,u,\beta(u)).$$

我们将会证明在下面引理 4.2 中 W_0 满足命题 4.1 中的性质 (ii)；在下面引理 4.3 中证明 $W_0=W$. 从而得到下值函数 W 也满足命题 4.1 中的性质 (ii). 为此，先介绍一个重要的引理.

引理 4.1[24] 假设 $0<t<T$, $\mu,\nu\in\mathcal{P}_2$ 和 $\widetilde{\mathbb{P}}\in\mathcal{P}(\mu,\nu)$, 则对于任意 $\varepsilon>0$, $\kappa>0$ 和任何的分割 $\Delta: 0\leqslant s_1<\cdots<s_k\leqslant t$, 存在一个概率空间 $(\overline{\Omega},\overline{\mathcal{F}},\overline{\mathbb{P}})$, 一个布朗运动 $\overline{W}$ 以及这一空间上的两个随机过程 η,ζ, 使得

(i) $\overline{\mathbb{P}}_\eta=\mu,\overline{\mathbb{P}}_\zeta=\nu$, 并且过程 ζ 独立于布朗运动 $\overline{W}$;

(ii) η_Δ 关于 σ- 代数 $\sigma(\zeta_\Delta,\overline{W}_{[0,\kappa]})$ 可测;

(iii) $\|\eta-\zeta\|_{\overline{\mathbb{P}},\Delta}\leqslant\|X-X'\|_{\widetilde{\mathbb{P}},\Delta}+\epsilon$, 这里 (X,X') 是乘积空间 $(\Omega\times\Omega,\mathcal{F}\times\mathcal{F})$ 上的典则过程.

下面引理给出 W_0 的正则性.

引理 4.2　在假设 3.1 下，对于 $t\in[0,T]$, $\mu,\nu\in\mathcal{P}_2$,

$$|W_0(t,\mu)-W_0(t,\nu)|\leqslant\gamma(W_2(\mu_{[0,t]},\nu_{[0,t]})).$$

证　根据 $W_0(t,\mu)$ 的定义，存在一个 $\beta^{0,\epsilon}\in\mathcal{B}^0_{t,T}$, 使得对于所有 $u\in\mathcal{U}^0_{t,T}$,

$$W_0(t,\mu)\geqslant J(t,\mu,u,\beta^{0,\epsilon}(u))-\epsilon.$$

证明分为两步.

步骤 1　对于上述给定的 $\beta^{0,\epsilon}$, 构造 $\overline{u}\in\mathcal{U}^0_{t,T}$ 和 $\overline{X}^{\overline{u},\beta^{0,\epsilon}(\overline{u})}$, 使得 $\mathbb{P}^{t,\nu,u,\beta^{0,\epsilon}(u)}=\overline{\mathbb{P}}\circ(\overline{X}^{\overline{u},\beta^{0,\epsilon}(\overline{u})})$.

首先，根据 2-Wasserstein 距离的定义，存在 $\widetilde{\mathbb{P}}\in\mathcal{P}(\mu,\nu)$, 使得对于 $t\in[0,T]$,

$$\mathbb{E}^{\widetilde{\mathbb{P}}}\big[\|X_{t\wedge\cdot}-X'_{t\wedge\cdot}\|^2\big]\leqslant W_2(\mu_{[0,t]},\nu_{[0,t]})+\epsilon^2.$$

其次，考虑分割 $\Delta^0: 0\leqslant s_1<\cdots<s_{k_0}=t$ 和 $t=t_0<t_1<\cdots<t_n=T$. 因为 $u\in\mathcal{U}^0_{t,T}$, 所以假设

$$u_s=\sum_{i=0}^{n-1}g_i^{\#}(X_{\Delta^0},X_{[t,t_i]})1_{[t_i,t_{i+1}]}(s).\tag{4.1}$$

现在固定 $n\in\mathbb{N}$, 令 $\kappa=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|t_i-t_{i-1}|$. 考虑一个新的分割 $\Delta: 0\leqslant s_1<\cdots<s_k=t$, 使得 $\Delta^0\subset\Delta$. 在 $[t_i,t_{i+1}]$ 上，定义映射 g_i, 使得 $g_i(X_\Delta,X_{[t,t_i]})=g_i^{\#}(X_{\Delta^0},X_{[t,t_i]})$. 对于这一分割 Δ, (4.1) 可以重写为

$$u_s=\sum_{i=0}^{n-1}g_i(X_\Delta,X_{[t,t_i]})1_{[t_i,t_{i+1}]}(s).$$

从而 $\beta^{0,\epsilon}_s(u)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}\beta^{0,\epsilon}(g_i(X_\Delta,X_{[t,t_i]}))1_{[t_i,t_{i+1}]}(s)$, 这里 $\beta^{0,,\epsilon}_s(\cdot)$ 独立于 μ.

对于上面给定的 $(t,\mu,\nu,\Delta,\epsilon,\kappa,\widetilde{\mathbb{P}})$, 根据引理 4.1, 存在 $(\overline{\Omega},\overline{\mathcal{F}},\overline{\mathbb{P}},\overline{W},\eta,\zeta)$ 和它对应. 令 $W_s^t=\overline{W}_{s-t}$, $W_s^{t,\kappa}=\overline{W}_{\kappa,(s-t)+\kappa}$, 并令 $X^{u,\beta^{0,\epsilon}(u)}$ 满足:

(i) $X_{[0,t]}^{u,\beta^{0,\epsilon}(u)}=\eta_{[0,t]}$;

(ii) 对于 $s\in(t_i,t_{i+1}]$, $i=0,1,\cdots,n-1$,

$$\begin{aligned}
&X_s^{u,\beta^{0,\epsilon}(u)}\\
&=X_{t_i}^{u,\beta^{0,\epsilon}(u)}+\int_{t_i}^s b(r,X^{u,\beta^{0,\epsilon}(u)},\mathcal{L}_{X^{u,\beta^{0,\epsilon}(u)}},g_i(\eta_\Delta,X_{[t,t_i]}^{u,\beta^{0,\epsilon}(u)}),\beta^{0,\epsilon}(g_i(\eta_\Delta,X_{[t,t_i]}^{u,\beta^{0,\epsilon}(u)})))\mathrm{d}s\\
&\quad+\int_{t_i}^s\sigma(r,X^{u,\beta^{0,\epsilon}(u)},\mathcal{L}_{X^{u,\beta^{0,\epsilon}(u)}},g_i(\eta_\Delta,X_{[t,t_i]}^{u,\beta^{0,\epsilon}(u)}),\beta^{0,\epsilon}(g_i(\eta_\Delta,X_{[t,t_i]}^{u,\beta^{0,\epsilon}(u)})))\mathrm{d}W_s^{t,\kappa}.
\end{aligned}$$

显然 $\mathbb{P}^{t,\mu,u,\beta^{0,\epsilon}(u)}=\overline{\mathbb{P}}\circ(X^{u,\beta^{0,\epsilon}(u)})^{-1}$. 接下来，我们构造 $\overline{u}\in\mathcal{U}_{t,T}^0$ 和 $\overline{X}^{\overline{u},\beta^{0,\epsilon}(\overline{u})}:=\overline{X}^{t,\zeta,\overline{u},\beta^{0,\epsilon}(\overline{u})}$, 满足

$$\overline{X}_{[0,t]}^{\overline{u},\beta^{0,\epsilon}(\overline{u})}=\zeta_{[0,t]}$$

和对于 $t\leqslant s\leqslant T$, $\overline{\mathbb{P}}$ -a.s.,

$$\begin{aligned}
\overline{X}_s^{\overline{u},\beta^{0,\epsilon}(\overline{u})}&=\zeta_t+\int_t^s b(r,\overline{X}^{\overline{u},\beta^{0,\epsilon}(\overline{u})},\mathcal{L}_{\overline{X}^{\overline{u},\beta^{0,\epsilon}(\overline{u})}},\overline{u}_s,\beta^{0,\epsilon}(\overline{u}_s))\mathrm{d}s\\
&\quad+\int_t^s\sigma(r,\overline{X}^{\overline{u},\beta^{0,\epsilon}(\overline{u})},\mathcal{L}_{\overline{X}^{\overline{u},\beta^{0,\epsilon}(\overline{u})}},\overline{u}_s,\beta^{0,\epsilon}(\overline{u}_s))\mathrm{d}W_s^t. \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

注意这里 $\overline{u}$ (因此 $\beta^{0,\epsilon}(\overline{u})$) 的分割是 Δ, 并且

$$t=t_0<t+\kappa<t_1+\kappa<\cdots<t_{n-1}+\kappa<t_n=T.$$

构造步骤如下:

(i) 对于 $s\in[t_0,t_0+\kappa)$, 选择任意的 $u_0\in U$, 令 $\overline{u}_s=u_0$, 则 $\beta^{0,\epsilon}(\overline{u}_s)=\beta^{0,\epsilon}(u_0)$ 和 (4.2) 在 $[t_0,t_0+\kappa]$ 上存在唯一解 $\overline{X}^{\overline{u},\beta^{0,\epsilon}(\overline{u})}$. 进一步，因为 σ 是非退化的，从而有 $\sigma(\zeta_\Delta,\overline{X}_{[t_0,t_0+\kappa]}^{\overline{u},\beta^{0,\epsilon}(\overline{u})})=\sigma(\zeta_\Delta,W_{[t_0,t_0+\kappa]}^t)=\sigma(\zeta_\Delta,\overline{W}_{[0,\kappa]})$. 由此和引理 4.1 可得 $\eta_\Delta=\sigma(\zeta_\Delta,\overline{X}_{[t_0,t_0+\kappa]}^{\overline{u},\beta^{0,\epsilon}(\overline{u})})$. 因此，对于某个函数 $\overline{g}_0$, $\overline{g}_0(\zeta_\Delta,\overline{X}_{[t_0,t_0+\kappa]}^{\overline{u},\beta^{0,\epsilon}(\overline{u})}):=g_0(\psi(\zeta_\Delta,\overline{X}_{[t_0,t_0+\kappa]}^{\overline{u},\beta^{0,\epsilon}(\overline{u})}))=g_0(\eta_\Delta)$.

(ii) 对于 $s\in[t_0+\kappa,t_1+\kappa)$, 令 $\overline{u}_s=\overline{g}_0(\zeta_\Delta,\overline{X}_{[t_0,t_0+\kappa]}^{\overline{u},\beta^{0,\epsilon}(\overline{u})})$, 则有 $\beta^{0,\epsilon}(\overline{u}_s)=\beta^{0,\epsilon}(\overline{g}_0(\zeta_\Delta,\overline{X}_{[t_0,t_0+\kappa]}^{\overline{u},\beta^{0,\epsilon}(\overline{u})}))$. 根据 (4.2) 可得 $\overline{X}_{[t_0+\kappa,t_1+\kappa]}^{\overline{u},\beta^{0,\epsilon}(\overline{u})}$.

由引理 4.1 可知 $\sigma(\eta_\Delta,W_{[t_0,t_1]}^{t,\kappa})=\sigma(\eta_\Delta,\overline{W}_{[\kappa,t_1-t_0+\kappa]})=\sigma(\zeta_\Delta,\overline{W}_{[0,t_1-t_0+\kappa]})=\sigma(\zeta_\Delta,W_{[t_0,t_1+\kappa]}^t)=\sigma(\zeta_\Delta,\overline{X}_{[t_0,t_1+\kappa]}^{\overline{u},\beta^{0,\epsilon}(\overline{u})})$.

因此，$X_{[t_0,t_1]}^{u,\beta^{0,\epsilon}(u)}$ 是 $\sigma(\zeta_\Delta,\overline{X}_{[t_0,t_1+\kappa]}^{\overline{u},\beta^{0,\epsilon}(\overline{u})})$ 可测的. 因而，对于某个函数 $\overline{g}_1$，定义 $\overline{g}_1(\zeta_\Delta,\overline{X}_{[t_0,t_1+\kappa]}^{\overline{u},\beta^{0,\epsilon}(\overline{u})}):=g_1(\eta_\Delta,X_{[t_0,t_1]}^{u,\beta^{0,\epsilon}(u)})$.

(iii) 对于 $s\in[t_1+\kappa,t_2+\kappa)$, 令 $\overline{u}_s=\overline{g}_1(\zeta_\Delta,\overline{X}_{[t_0,t_1+\kappa]}^{\overline{u},\beta^{0,\epsilon}(\overline{u})})(=g_1(\eta_\Delta,X_{[t_0,t_1]}^{u,\beta^{0,\epsilon}(u)}))$, 则 $\beta^{0,\epsilon}(\overline{u}_s)=\beta^{0,\epsilon}(\overline{g}_1(\zeta_\Delta,\overline{X}_{[t_0,t_1+\kappa]}^{\overline{u},\beta^{0,\epsilon}(\overline{u})}))(=\beta^{0,\epsilon}(g_1(\zeta_\Delta,X_{[t_0,t_1]}^{u,\beta^{0,\epsilon}(u)})))$.

重复上述过程，可以构造 $\overline{u}\in\mathcal{U}_{t,T}^0$ 且其形式为 $\overline{u}_s=\overline{g}_i(\zeta_\Delta,\overline{X}_{[t_0,t_i+\kappa]}^{\overline{u},\beta^{0,\epsilon}(\overline{u})})=g_i(\eta_\Delta,X_{[t_0,t_i]}^{u,\beta^{0,\epsilon}(u)})$, $s\in[t_i+\kappa,t_{i+1}+\kappa)$. 进而可以得到 $\beta^{0,\epsilon}(\overline{u}_s)=\beta^{0,\epsilon}(\overline{g}_i(\zeta_\Delta,\overline{X}_{[t_0,t_i+\kappa]}^{\overline{u},\beta^{0,\epsilon}(\overline{u})}))=$

$\beta^{0,\epsilon}(g_i(\eta_\Delta, X^{u,\beta^{0,\epsilon}(u)}_{[t_0,t_i]}))$, $s\in[t_i+\kappa, t_{i+1}+\kappa)$. 相应的过程 $\overline{X}^{\overline{u},\beta^{0,\epsilon}(\overline{u})}$ 由 (4.2) 给出.

步骤 2　计算 $W_0(t,\mu)-W_0(t,\nu)$. 根据假设 3.1(iv)–(v), 可知

$$\begin{aligned}
&J(t,\mu,u,\beta^{0,\epsilon}(u))-W_0(t,\nu)\\
\leqslant{}& J(t,\mu,u,\beta^{0,\epsilon}(u))-J(t,\nu,\overline{u},\beta^{0,\epsilon}(\overline{u}))+\epsilon\\
\leqslant{}& \epsilon+\mathbb{E}^{\overline{\mathbb{P}}}[h(X^{u,\beta^{0,\epsilon}(u)},\mathcal{L}_{X^{u,\beta^{0,\epsilon}(u)}})-h(\overline{X}^{\overline{u},\beta^{0,\epsilon}(\overline{u})},\mathcal{L}_{\overline{X}^{\overline{u},\beta^{0,\epsilon}(\overline{u})}})]\\
&+\mathbb{E}^{\overline{\mathbb{P}}}\Big[\sum_{i=1}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s,X^{u,\beta^{0,\epsilon}(u)},\mathcal{L}_{X^{u,\beta^{0,\epsilon}(u)}},g_i(\eta_\Delta,X^{u,\beta^{0,\epsilon}(u)}_{[t,t_i]}),\beta^{0,\epsilon}(g_i(\eta_\Delta,X^{u,\beta^{0,\epsilon}(u)}_{[t,t_i]})))\\
&-\sum_{i=1}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s+\kappa,\overline{X}^{\overline{u},\beta^{0,\epsilon}(\overline{u})},\mathcal{L}_{\overline{X}^{\overline{u},\beta^{0,\epsilon}(\overline{u})}},g_i(\eta_\Delta,X^{u,\beta^{0,\epsilon}(u)}_{[t,t_i]}),\beta^{0,\epsilon}(g_i(\eta_\Delta,X^{u,\beta^{0,\epsilon}(u)}_{[t,t_i]})))\mathrm{d}s\\
&-\int_t^{t+\kappa} f(s,\overline{X}^{\overline{u},\beta^{0,\epsilon}(\overline{u})},\mathcal{L}_{\overline{X}^{\overline{u},\beta^{0,\epsilon}(\overline{u})}},u_0,\beta^{0,\epsilon}(u_0))\mathrm{d}s\\
&-\int_{T-\kappa}^{T} f(s,\overline{X}^{\overline{u},\beta^{0,\epsilon}(\overline{u})},\mathcal{L}_{\overline{X}^{\overline{u},\beta^{0,\epsilon}(\overline{u})}},\overline{u}_s,\beta^{0,\epsilon}(\overline{u}_s))\mathrm{d}s\Big]\\
\leqslant{}& \epsilon+C\mathbb{E}^{\overline{\mathbb{P}}}[\gamma(\|\overline{X}^{\overline{u},\beta^{0,\epsilon}(\overline{u})}-X^{u,\beta^{0,\epsilon}(u)}\|+W_2(\mathcal{L}_{X^{u,\beta^{0,\epsilon}(u)}},\mathcal{L}_{\overline{X}^{\overline{u},\beta^{0,\epsilon}(\overline{u})}}))]+C\gamma(\kappa). \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

类似于文 [24, 引理 5.13], 可得

$$J(t,\mu,u,\beta^{0,\epsilon}(u))-W_0(t,\nu)\leqslant C\gamma(W_2(\mu_{[0,t]},\nu_{[0,t]})).$$

利用 u 任意性可推出，$W_0(t,\mu)-W_0(t,\nu)\leqslant C\gamma(W_2(\mu_{[0,t]},\nu_{[0,t]}))$. 类似地，可以得到 $W_0(t,\nu)-W_0(t,\mu)\leqslant C\gamma(W_2(\mu_{[0,t]},\nu_{[0,t]}))$. 引理得证.

引理 4.3　在假设 3.1 下，$W=W_0$.

证　证明分为两步.

步骤 1　$W_0\leqslant W$.

根据 W 的定义，存在某个 $\beta^\epsilon\in\mathcal{B}_{t,T}$, 使得对于所有的 $u\in\mathcal{U}_{t,T}$, $J(t,\mu,u,\beta^\epsilon(u))\leqslant W(t,\mu)+\epsilon$. 由此可得，对于任意的 $u_0\in\mathcal{U}^0_{t,T}\subset\mathcal{U}_{t,T}$,

$$J(t,\mu,u_0,\beta^\epsilon(u_0))\leqslant W(t,\mu)+\epsilon. \tag{4.4}$$

我们的想法是构造 $\beta^{k,\epsilon}\in\mathcal{B}^0_{t,T}$, 使得对于 $u_0\in\mathcal{U}^0_{t,T}$, $\mathcal{V}^0_{t,T}\ni\beta^{k,\epsilon}(u_0)\to\beta^\epsilon(u_0)\in\mathcal{V}_{t,T}$, $k\to\infty$. 不失一般性，令 $u_0=\sum\limits_{i=0}^{n-1}g^0_i(X_\Delta,X_{[t,t_i]})1_{[t_i,t_{i+1})}\in\mathcal{U}^0_{t,T}$. 由 $\beta^\epsilon(u_0)\in\mathcal{V}_{t,T}$, 可得

$$\beta^\epsilon(u_0)=\sum_{i=0}^{n-1}\beta^\epsilon(g^0_i)(X_{[0,t_i]})1_{[t_i,t_{i+1})}.$$

情况 1　$g^0_i: C[0,t_i]\to U$ 是连续的.

因为 β^ϵ 是连续的，所以 $\beta^\epsilon(g^0_i)$ 是连续的．对于 $m\geqslant1$, 考虑分割 $\widetilde{\Delta}_m: 0=s^m_0<\cdots<s^m_m=t$, 其中 $s^m_i=\frac{i}{m}t$. 令 $\xi^m_{[0,t]}$ 是 ξ_{Δ_m} 的线性插值和 $\xi^m_{[t,t_i]}:=\xi_{[t,t_i]}$. 定义

$$\beta^{m,\epsilon}(g^0_i)(\xi_{\Delta_m},\xi_{[t,t_i]}):=\beta^\epsilon(g^0_i)(\xi^m_{[0,t_i]}),$$

$$\beta^{m,\epsilon}(u_0):=\sum_{i=0}^{n-1}\beta^{m,\epsilon}(g_i^0)(\xi_{\Delta_m},\xi_{[t,t_i]})1_{[t_i,t_{i+1})}\in\mathcal{V}_{t,T}^0.$$

显然 $\beta^{m,\epsilon}:\mathcal{U}_{t,T}^0\to\mathcal{V}_{t,T}^0$. 另外，由 β^{ϵ} 的非预期性质可以得到 $\beta^{m,\epsilon}$. 因此 $\beta^{m,\epsilon}\in\mathcal{B}_{t,T}^0$. 记 $X^{\beta^{m,\epsilon}}:=X^{t,\eta,u_0,\beta^{m,\epsilon}(u_0)}$, $X^{\beta^{\epsilon}}:=X^{t,\eta,u_0,\beta^{\epsilon}(u_0)}$ 和 $\delta X^m=X^{\beta^{m,\epsilon}}-X^{\beta^{\epsilon}}$, 则有

(i) 对于 $s\in[0,t]$, $\delta X^m=0$;

(ii) 对于 $s\in[t,t_1]$, $\mathbb{P}_0$ -a.s.,

$$\begin{aligned}X_s^{\beta^{\epsilon}}&=\eta_t+\int_t^s b(r,X^{\beta^{\epsilon}},\mathcal{L}_{X^{\beta^{\epsilon}}},g_0^0(\eta_\Delta),\beta^{\epsilon}(g_0^0)(\eta_{[0,t]}))\mathrm{d}r\\&\quad+\int_t^s\sigma(r,X^{\beta^{\epsilon}},\mathcal{L}_{X^{\beta^{\epsilon}}},g_0^0(\eta_\Delta),\beta^{\epsilon}(g_0^0)(\eta_{[0,t]}))\mathrm{d}W_r,\\X_s^{\beta^{m,\epsilon}}&=\eta_t+\int_t^s b(r,X^{m,\beta^{\epsilon}},\mathcal{L}_{X^{m,\beta^{\epsilon}}},g_0^0(\eta_\Delta),\beta^{m,\epsilon}(g_0^0)(\eta_{\widetilde{\Delta}_m},\eta_t))\mathrm{d}r\\&\quad+\int_t^s\sigma(r,X^{\beta^{\epsilon}},\mathcal{L}_{X^{\beta^{\epsilon}}},g_0^0(\eta_\Delta),\beta^{m,\epsilon}(g_0^0)(\eta_{\widetilde{\Delta}_m},\eta_t))\mathrm{d}W_r.\end{aligned}$$

由 $\beta^{\epsilon}(g_0^0)$ 是连续的，可知

$$\lim_{m\to\infty}\mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}[|\beta^{m,\epsilon}(g_0^0)(\eta_{\widetilde{\Delta}_m},\eta_t)-\beta^{\epsilon}(g_0^0)(\eta_{[0,t]})|^2\wedge 1]=0.$$

由此和假设 3.1(ii)–(iii) 可推出

$$\lim_{m\to\infty}\mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}[\|\delta X_{t_1\wedge\cdot}^m\|^2]=0.$$

(iii) 对于 $s\in[t_1,t_2]$,

$$\begin{aligned}X_s^{\beta^{\epsilon}}&=X_{t_1}^{\beta^{\epsilon}}+\int_{t_1}^s b(r,X^{\beta^{\epsilon}},\mathcal{L}_{X^{\beta^{\epsilon}}},g_1^0(\eta_\Delta,X_{[t,t_1]}^{\beta^{\epsilon}}),\beta^{\epsilon}(g_1^0)(\eta_{[0,t]},X_{[t,t_1]}^{\beta^{\epsilon}}))\mathrm{d}r\\&\quad+\int_{t_1}^s\sigma(r,X^{\beta^{\epsilon}},\mathcal{L}_{X^{\beta^{\epsilon}}},g_1^0(\eta_\Delta,X_{[t,t_1]}^{\beta^{\epsilon}}),\beta^{\epsilon}(g_1^0)(\eta_{[0,t]},X_{[t,t_1]}^{\beta^{\epsilon}}))\mathrm{d}W_r,\\X_s^{\beta^{m,\epsilon}}&=X_{t_1}^{\beta^{m,\epsilon}}+\int_{t_1}^s b(r,X^{\beta^{m,\epsilon}},\mathcal{L}_{X^{\beta^{m,\epsilon}}},g_1^0(\eta_\Delta,X_{[t,t_1]}^{\beta^{m,\epsilon}}),\beta^{\epsilon}(g_1^0)(\eta_{\widetilde{\Delta}_m},X_{[t,t_1]}^{\beta^{m,\epsilon}}))\mathrm{d}r\\&\quad+\int_{t_1}^s\sigma(r,X^{m,\beta^{\epsilon}},\mathcal{L}_{X^{m,\beta^{\epsilon}}},g_1^0(\eta_\Delta,X_{[t,t_1]}^{\beta^{m,\epsilon}}),\beta^{\epsilon}(g_1^0)(\eta_{\widetilde{\Delta}_m},X_{[t,t_1]}^{\beta^{m,\epsilon}}))\mathrm{d}W_r,\end{aligned}$$

这里 Δ 在引理 4.2 中给出．根据 g_1^0 和 β^{ϵ} 连续性，可得

$$\begin{cases}\lim\limits_{m\to\infty}\mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}[|g_1^0(\eta_\Delta,X_{[t,t_1]}^{\beta^{m,\epsilon}})-g_1^0(\eta_\Delta,X_{[t,t_1]}^{\beta^{\epsilon}})|^2\wedge 1]=0;\\\lim\limits_{m\to\infty}\mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}[|\beta^{\epsilon}(g_1^0)(\eta_{\widetilde{\Delta}_m},X_{[t,t_1]}^{\beta^{m,\epsilon}})-\beta^{\epsilon}(g_1^0)(\eta_{[0,t]},X_{[t,t_1]}^{\beta^{\epsilon}})|^2\wedge 1]=0.\end{cases}$$

因此 $\lim\limits_{m\to\infty}\mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}[\|\delta X_{t_2\wedge\cdot}^m\|^2]=0$. 重复上述步骤，可得

$$\begin{cases}\lim\limits_{m\to\infty}\mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}[|g_i^0(\eta_\Delta,X_{[t,t_i]}^{\beta^{m,\epsilon}})-g_i^0(\eta_\Delta,X_{[t,t_i]}^{\beta^{\epsilon}})|^2\wedge 1]=0,\quad i<n;\\\lim\limits_{m\to\infty}\mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}[|\beta^{\epsilon}(g_i^0)(\eta_{\widetilde{\Delta}_m},X_{[t,t_i]}^{\beta^{m,\epsilon}})-\beta^{\epsilon}(g_i^0)(\eta_{[0,t]},X_{[t,t_i]}^{\beta^{\epsilon}})|^2\wedge 1]=0,\quad i<n;\\\lim\limits_{m\to\infty}\mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}[\|\delta X^m\|^2]=0.\end{cases}$$

由假设 3.1(iii)–(iv) 和 (4.4), 可知对于任何的 $u_0\in\mathcal{U}_{t,T}^0$,

$$\lim_{m\to\infty}J(t,\mu,u_0,\beta^{m,\epsilon}(u_0))=J(t,\mu,u_0,\beta^{\epsilon}(u_0))\leqslant W(t,\mu)+\epsilon.\tag{4.5}$$

进一步地，根据 $W_0(t,\mu)$ 的定义，对于 $\epsilon_1>0$, 存在某个 $u^{\epsilon_1}\in\mathcal{U}^0_{t,T}$, 使得

$$W_0(t,\mu)\leqslant J(t,\mu,u^{\epsilon_1},\beta^{m,\epsilon}(u^{\epsilon_1}))+\epsilon_1. \tag{4.6}$$

通过合并 (4.5) 和 (4.6), 可得

$$\begin{aligned}W_0(t,\mu)&\leqslant\lim_{m\to\infty}J(t,\mu,u^{\epsilon_1},\beta^{m,\epsilon}(u^{\epsilon_1}))+\epsilon_1\\&=J(t,\mu,u^{\epsilon_1},\beta^{\epsilon}(u^{\epsilon_1}))+\epsilon_1\leqslant W(t,\mu)+\epsilon+\epsilon_1.\end{aligned} \tag{4.7}$$

令 $\epsilon\downarrow 0,\epsilon_1\downarrow 0$, 则有 $W_0(t,\mu)\leqslant W(t,\mu),(t,\mu)\in[0,T]\times\mathcal{P}_2$.

情况 2　g_i^0 是一般的 Borel 可测函数. 我们想要构造

$$u_0^m=\sum_{i=0}^{n-1}g_i^{0,m}(X_\Delta,X_{[t,t_i]})1_{[t_i,t_{i+1})}\in\mathcal{U}^0_{t,T},$$

$$\beta^\epsilon(u_0^m)=\sum_{i=0}^{n-1}\beta^\epsilon(g_i^{0,m}(X_\Delta,X_{[t,t_i]}))1_{[t_i,t_{i+1})}\in\mathcal{V}_{t,T},$$

使得 $g_i^{0,m},\beta^\epsilon(g_i^{0,m})$ 是连续的以及

$$\begin{cases}\lim\limits_{m\to\infty}\mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}[|g_i^{0,m}(X_\Delta^{u_0^m},X_{[t,t_i]}^{u_0^m})-g_i^0(X_\Delta^{u_0},X_{[t,t_i]}^{u_0})|^2\wedge 1]=0,\quad i<n;\\ \lim\limits_{m\to\infty}\mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}[|\beta^\epsilon(g_i^{0,m}(X_\Delta^{u_0^m},X_{[t,t_i]}^{u_0^m}))-\beta^\epsilon(g_i^0(X_\Delta^{u_0},X_{[t,t_i]}^{u_0}))|^2\wedge 1]=0,\quad i<n;\\ \lim\limits_{m\to\infty}\mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}[\|\delta X^m\|^2]=0,\end{cases} \tag{4.8}$$

其中 $X^{u_0}=X^{t,\eta,u_0,\beta^\epsilon(u_0)}$, $X^{u_0^m}=X^{t,\eta,u_0^m,\beta^\epsilon(u_0^m)}$, $\delta X^m=X^{u_0^m}-X^{u_0}$. 根据 (4.5)–(4.7) 可知，对于所有的 $u_0^m\in\mathcal{U}^0_{t,T}$,

$$J(t,\mu,u_0^m,\beta^\epsilon(u_0^m))\leqslant W(t,\mu)+\epsilon.$$

从而 $W_0(t,\mu)\leqslant W(t,\mu)$.

现在通过对 i 进行递归的方式构造 $g_i^{0,m},\beta^\epsilon(g_i^{0,m})$ 和 $X^{u_0^m}$. 为此，令 $X^{u_0^m}_{[0,t]}=\eta_{[0,t]}$, 则 $\|\Delta X^m_{t_0\wedge\cdot}\|=0$. 假设我们已经构造 $g_i^{0,m},\beta^\epsilon(g_i^{0,m}),X^{u_0^m}_{[0,t_i]}$ 使得 (4.8) 中前两个等式成立，并且

$$\lim_{m\to\infty}\mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}[\|\delta X^m_{t_i\wedge\cdot}\|^2]=0 \tag{4.9}$$

成立.

记 $C^\Delta_{t_0,s}=\{(X_\Delta,X_{[t_0,s]})$,其中 $\Delta:0\leqslant s_1<\cdots<s_m=t_0\}$. 对于可测函数 $g_i^0:C^\Delta_{t_0,t_i}\to U$, 根据里斯引理，存在连续函数 $\widehat{g}_i^{m,0}:C^\Delta_{t_0,t_i}\to U$ 和闭集 $\mathcal{O}_i^m\in C^\Delta_{t_0,t_i}$, 使得

$$\text{在}\,\mathcal{O}_i^m\,\text{上}\,\widehat{g}_i^{m,0}=g_i^0\ \text{和}\ \lim_{m\to\infty}\mathbb{P}_0((\eta_\Delta,X^{u_0}_{[t_0,t_i]})\notin\mathcal{O}_i^m)=0.$$

由此以及 $\widehat{g}_i^{0,m}$ 的连续性，可知存在一个 $\ell_m\in\mathbb{N}$, 使得对于每个 i 和对于任意的 $m\in\mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}[|\widehat{g}_i^{0,m}(\eta_\Delta,X^{u_0^{\ell_m}}_{[t_0,t_i]})-\widehat{g}_i^{0,m}(\eta_\Delta,X^{u_0}_{[t_0,t_i]})|^2\wedge 1]\leqslant\frac{1}{m}.$$

因此，当 $m\to\infty$ 时,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}[|\widehat{g}_i^{0,m}(\eta_\Delta,X^{u_0^{\ell_m}}_{[t_0,t_i]})-g_i(\eta_\Delta,X^{u_0}_{[t_0,t_i]})|^2\wedge 1]$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}[|\widehat{g}_i^{0,m}(\eta_\Delta, X^{u_0^{\ell_m}}_{[t_0,t_i]}) - \widehat{g}_i^{0,m}(\eta_\Delta, X^{u_0}_{[t_0,t_i]})|^2 \wedge 1] \\
&\quad + \mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}[|\widehat{g}_i^{0,m}(\eta_\Delta, X^{u_0}_{[t_0,t_i]})) - g_i(\eta_\Delta, X^{u_0}_{[t_0,t_i]})|^2 \wedge 1] \\
&\leqslant \frac{C}{m} + C\mathbb{P}_0((\eta_\Delta, X^{u_0}_{[t_0,t_i]}) \notin \mathcal{O}_i^m) \to 0.
\end{aligned}
$$

现在选取 $\{\ell_m\}$ 的一个子列，定义 $g_i^{0,\ell_m} := \widehat{g}_i^{0,m}$, 则有

$$
\lim_{m\to\infty} \mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}[|g_i^{0,\ell_m}(\eta_\Delta, X^{u_0^{\ell_m}}_{[t_0,t_i]}) - g_i^0(\eta_\Delta, X^{u_0}_{[t_0,t_i]})|^2 \wedge 1] = 0. \tag{4.10}
$$

进一步，根据 β^ϵ 可得

$$
\lim_{m\to\infty} \mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}[|\beta^\epsilon(g_i^{0,\ell_m}(\eta_\Delta, X^{u_0^{\ell_m}}_{[t_0,t_i]})) - \beta^\epsilon(g_i^0(\eta_\Delta, X^{u_0}_{[t_0,t_i]}))|^2 \wedge 1] = 0. \tag{4.11}
$$

令 $\ell_m = m$ (如果必要，可以选择 ℓ_m 的一个子列). 显然， $g_i^{0,m}$ 满足 (4.9) 为所求的函数. 接下来，证明 $\lim\limits_{m\to\infty} \mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}[\|\delta X^m_{t_{i+1}\wedge\cdot}\|^2] = 0$. 对于 $s \in [t_i, t_{i+1}]$, 注意到

$$
\begin{cases}
X_s^{u_0} = X_{t_i}^{u_0} + \displaystyle\int_{t_i}^s b(r, X^{u_0}, \mathcal{L}_{X^{u_0}}, g_i^0(\eta_\Delta, X^{u_0}_{[t_0,t_i]}), \beta^\epsilon(g_i^0(\eta_\Delta, X^{u_0}_{[t_0,t_i]})))\mathrm{d}r \\
\qquad\qquad + \displaystyle\int_{t_i}^s \sigma(r, X^{u_0}, \mathcal{L}_{X^{u_0}}, g_i^0(\eta_\Delta, X^{u_0}_{[t_0,t_i]}), \beta^\epsilon(g_i^0(\eta_\Delta, X^{u_0}_{[t_0,t_i]})))\mathrm{d}W_r; \\
X_s^{u_0^m} = X_{t_i}^{u_0^m} + \displaystyle\int_{t_i}^s b(r, X^{u_0^m}, \mathcal{L}_{X^{u_0^m}}, g_i^{0,m}(\eta_\Delta, X^{u_0^m}_{[t_0,t_i]}), \beta^\epsilon(g_i^{0,m}(\eta_\Delta, X^{u_0^m}_{[t_0,t_i]})))\mathrm{d}r \\
\qquad\qquad + \displaystyle\int_{t_i}^s \sigma(r, X^{u_0^m}, \mathcal{L}_{X^{u_0^m}}, g_i^{0,m}(\eta_\Delta, X^{u_0^m}_{[t_0,t_i]}), \beta^\epsilon(g_i^{0,m}(\eta_\Delta, X^{u_0^m}_{[t_0,t_i]})))\mathrm{d}W_r.
\end{cases}
$$

由 (b,σ) 关于 (ω,μ) 的有界性和一致连续性，可以得到

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}[|\phi(r, X^{u_0^m}, \mathcal{L}_{X^{u_0^m}}, g_i^{0,m}(\eta_\Delta, X^{u_0^m}_{[t_0,t_i]}), \beta^\epsilon(g_i^{0,m}(\eta_\Delta, X^{u_0^m}_{[t_0,t_i]}))) \\
&\quad - \phi(r, X^{u_0}, \mathcal{L}_{X^{u_0}}, g_i^0(\eta_\Delta, X^{u_0}_{[t_0,t_i]}), \beta^\epsilon(g_i^0(\eta_\Delta, X^{u_0}_{[t_0,t_i]})))|^2] \\
&\leqslant \mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}[|\phi(r, X^{u_0^m}, \mathcal{L}_{X^{u_0^m}}, g_i^{0,m}(\eta_\Delta, X^{u_0^m}_{[t_0,t_i]}), \beta^\epsilon(g_i^{0,m}(\eta_\Delta, X^{u_0^m}_{[t_0,t_i]}))) \\
&\quad - \phi(r, X^{u_0}, \mathcal{L}_{X^{u_0}}, g_i^{0,m}(\eta_\Delta, X^{u_0^m}_{[t_0,t_i]}), \beta^\epsilon(g_i^{0,m}(\eta_\Delta, X^{u_0^m}_{[t_0,t_i]}))) + \delta\phi^m(s)|^2] \\
&\leqslant \mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}[\|\Delta X^m_{s\wedge\cdot}\|^2 + |\delta\phi^m(s)|^2],
\end{aligned}
$$

这里

$$
\begin{aligned}
\delta\phi^m(s) = {}&\phi(r, X^{u_0}, \mathcal{L}_{X^{u_0}}, g_i^{0,m}(\eta_\Delta, X^{u_0^m}_{[t_0,t_i]}), \beta^\epsilon(g_i^{0,m}(\eta_\Delta, X^{u_0^m}_{[t_0,t_i]}))) \\
&- \phi(r, X^{u_0}, \mathcal{L}_{X^{u_0}}, g_i^0(\eta_\Delta, X^{u_0}_{[t_0,t_i]}), \beta^\epsilon(g_i^0(\eta_\Delta, X^{u_0}_{[t_0,t_i]}))).
\end{aligned}
$$

因此

$$
\mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}[\|\delta X^m_{t_{i+1}\wedge\cdot}\|^2] \leqslant C\mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}\Big[\|\delta X^m_{t_i\wedge\cdot}\|^2 + \int_{t_i}^{t_{i+1}} (|\delta b^m(s)|^2 + |\delta\sigma^m(s)|^2)\mathrm{d}s\Big]. \tag{4.12}
$$

根据 (4.10), (4.11) (当 $\ell_m = m$ 时) 和控制收敛定理，可知对于 $i = 0, \cdots, n-1$,

$$
\lim_{m\to\infty} \mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}\Big[\int_{t_i}^{t_{i+1}} (|\delta b^m(s)|^2 + |\delta\sigma^m(s)|^2)\mathrm{d}s\Big] = 0.
$$

由上式和 (4.9), (4.12) 可得 $\lim\limits_{m\to\infty} \mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}[\|\delta X^m_{t_{i+1}\wedge\cdot}\|^2] = 0$. 重复上面的过程 (如果有必要，选择一个子序列), 可以得到对于 $i = 0, 1, \cdots, n-1$, $g_i^{0,m}, \beta^\epsilon(g_i^{0,m})$ 满足 (4.9).

步骤 2　$W_0 \geqslant W$.

根据 W_0 的定义，存在某个 $\beta^{0,\epsilon} \in \mathcal{B}^0_{t,T}$, 使得对于所有的 $u_0 \in \mathcal{U}^0_{t,T}$,

$$J(t,\mu,u_0,\beta^{0,\epsilon}(u_0)) \leqslant W_0(t,\mu)+\epsilon.$$

现在假设 $u=\sum\limits_{i=0}^{n-1} g_i(X_{[0,t_i]})1_{[t_i,t_{i+1})} \in \mathcal{U}_{t,T}$, 考虑两种情况.

情况 1　$g_i : C([0,t_i]) \to \mathbb{R}$ 是连续的．定义

$$g_i^m(\xi_{\widetilde{\Delta}_m},\xi_{[t,t_i]}) := g_i(\xi^m_{[0,t_i]}),$$

这里 $\widetilde{\Delta}_m$ 和 $\xi^m_{[0,t_i]}$ 在步骤 1 中给出．记 $u^m=\sum\limits_{i=0}^{n-1} g_i^m(X_{\widetilde{\Delta}_m},X_{[t,t_i]})1_{[t,t_i+1)} \in \mathcal{U}^0_{t,T}$. 显然

$$\beta^{0,\epsilon}(u^m)=\sum_{i=0}^{n-1}\beta^{0,\epsilon}(g_i^m(X_{\widetilde{\Delta}_m},X_{[t,t_i]}))1_{[t,t_i+1)} \in \mathcal{V}^0_{t,T} \subset \mathcal{V}_{t,T}.$$

接下来，我们证明 $\{\beta^{0,\epsilon}(g_i^m)\}$ 是一个柯西点列．事实上，对于任意的 $m,k \geqslant 1$, 由 $\beta^{0,\epsilon}$ 的连续性，可得

$$\begin{aligned}
&|\beta^{0,\epsilon}(g_i^m(X_{\widetilde{\Delta}_m},X_{[t,t_i]}))-\beta^{0,\epsilon}(g_i^k(X_{\widetilde{\Delta}_k},X_{[t,t_i]}))|\\
&=|\beta^{0,\epsilon}(g_i(X^m_{[0,t_i]}))-\beta^{0,\epsilon}(g_i(X^k_{[0,t_i]}))|\\
&\leqslant|\beta^{0,\epsilon}(g_i(X^m_{[0,t_i]}))-\beta^{0,\epsilon}(g_i(X_{[0,t_i]}))+\beta^{0,\epsilon}(g_i(X_{[0,t_i]}))-\beta^{0,\epsilon}(g_i(X^k_{[0,t_i]}))|\\
&\to 0,\quad \text{当} m\to\infty,\ k\to\infty \text{ 时}.
\end{aligned}$$

据此，可以定义 $\beta_i(g_i(X_{[0,t_i]})) := \lim\limits_{m\to\infty}\beta^{0,\epsilon}(g_i^m(X_{\widetilde{\Delta}_m},X_{[t,t_i]}))$, $i=0,1,\cdots,n-1$ 和

$$\beta(u) := \sum_{i=0}^{n-1}\beta_i(g_i(X_{[0,t_i]}))1_{[t_i,t_i+1)} \in \mathcal{V}_{t,T}.$$

进一步地，由于 $\beta^{0,\epsilon}$ 是非预期的，因此 β 是一个非预期策略．记 $X^u=X^{t,\eta,u,\beta(u)}$, $X^{u^m}=X^{t,\eta,u^m,\ \beta^{0,\epsilon}(u^m)}$, $\delta X^m=X^{u^m}-X^u$. 注意到对于 $s\in[t_0,t_1)$,

$$\begin{cases}
X^u_s=\eta_{t_0}+\displaystyle\int_{t_0}^s b(r,X^u,\mathcal{L}_{X^u},g_0(\eta_{[0,t]}),\beta_0(g_0(\eta_{[0,t]}))\mathrm{d}r\\
\qquad\quad+\displaystyle\int_{t_0}^s \sigma(r,X^u,\mathcal{L}_{X^u},g_0(\eta_{[0,t]}),\beta_0(g_0(\eta_{[0,t]}))\mathrm{d}W_r;\\
X^{u^m}_s=\eta_{t_0}+\displaystyle\int_{t_0}^s b(r,X^{u^m},\mathcal{L}_{X^{u^m}},g_0^m(\eta_{\widetilde{\Delta}_m},\eta_t),\beta^{0,\epsilon}(g_0^m(\eta_{\widetilde{\Delta}_m},\eta_t))\mathrm{d}r\\
\qquad\quad+\displaystyle\int_{t_0}^s \sigma(r,X^{u^m},\mathcal{L}_{X^{u^m}},g_0^m(\eta_{\widetilde{\Delta}_m},\eta_t),\beta^{0,\epsilon}(g_0^m(\eta_{\widetilde{\Delta}_m},\eta_t))\mathrm{d}W_r.
\end{cases}$$

因为 g_0 是连续的，所以

$$\lim_{m\to\infty}\mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}[|g_0^m(\eta_{\widetilde{\Delta}_m},\eta_t)-g_0(\eta_{[0,t]})|^2\wedge 1]=0.$$

从而根据 $\beta_0(g_0)$ 的定义和假设 3.1(ii), (v), 可得

$$\lim_{m\to\infty}\mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}[\|\delta X^m_{t_1\wedge\cdot}\|^2]=0. \tag{4.13}$$

对于 $s\in[t_1,t_2]$,

$$\begin{cases} X_s^u = X_{t_1}^u + \displaystyle\int_{t_1}^s b(r,X^u,\mathcal{L}_{X^u},g_1(X^u_{[0,t_1]}),\beta_1(g_1(X^u_{[0,t_1]}))\mathrm{d}r \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_{t_1}^s \sigma(r,X^u,\mathcal{L}_{X^u},g_1(X^u_{[0,t_1]}),\beta_1(g_1(X^u_{[0,t_1]}))\mathrm{d}W_r; \\ X_s^{u^m} = X_{t_1}^{u^m} + \displaystyle\int_{t_1}^s b(r,X^{u^m},\mathcal{L}_{X^{u^m}},g_1^m(\eta_{\widetilde{\Delta}_m},X^{u^m}_{[t_0,t_1]}),\beta^{0,\epsilon}(g_1^m(\eta_{\widetilde{\Delta}_m},X^{u^m}_{[t_0,t_1]}))\mathrm{d}r \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_{t_1}^s \sigma(r,X^{u^m},\mathcal{L}_{X^{u^m}},g_1^m(\eta_{\widetilde{\Delta}_m},X^{u^m}_{[t_0,t_1]}),\beta^{0,\epsilon}(g_1^m(\eta_{\widetilde{\Delta}_m},X^{u^m}_{[t_0,t_1]}))\mathrm{d}W_r. \end{cases}$$

注意到 g_1 是连续的，根据 $\beta_1(g_1)$ 的定义和 (4.13), 可得 $\lim\limits_{m\to\infty}\mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}[\|\delta X^m_{t_2\wedge\cdot}\|^2]=0$. 重复上述过程可知

$$\lim_{m\to\infty}\mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}[\|\delta X^m\|^2]=0.$$

从而可得对于 $u\in\mathcal{U}_{t,T}$,

$$J(t,\mu,u,\beta(u))=\lim_{m\to\infty}J(t,\mu,u^m,\beta^{0,\epsilon}(u^m))\leqslant W_0(t,\mu)+\epsilon$$

和

$$W(t,\mu)\leqslant W_0(t,\mu)+\epsilon.$$

最后，令 $\epsilon\to 0$, 可知 $W(t,\mu)\leqslant W_0(t,\mu)$, $(t,\mu)\in[0,T]\times\mathcal{P}_2$.

情况 2 $g_i: C([0,T])\to U$ 是一般的 Borel 可测函数. 对于 $g_i: C([0,t_0])\to U$, 根据里斯引理，存在连续函数 $\widehat{g}_i^k: C([0,t_i])\to U$ 和闭集合 $\mathcal{Q}_i^k\subset C([0,t_i])$, 使得

$$\text{在}\ \mathcal{Q}_i^k\ \text{上},\ \widehat{g}_i^k=g_i\ \text{和}\ \lim_{k\to\infty}\mathbb{P}_0(X^u_{[0,t_i]}\notin\mathcal{Q}_i^k)=0.$$

类似于步骤 1 的过程，可以构造 $u^k=\sum\limits_{i=0}^{n-1}g_i^k(X_{[0,t_i]})1_{[t_i,t_{i+1})}\in\mathcal{U}_{t,T}$ 和 $\beta(u^k)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}\beta_i(g_i^k(X_{[0,t_i]}))1_{[t_i,t_{i+1})}\in\mathcal{V}_{t,T}$, 使得对于每一个 g_i^k 是连续的，并且

$$\begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty}\mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}[|g_i^k(X^{u^k}_{[0,t_i]})-g_i(X^u_{[0,t_i]})|^2\wedge 1]=0, \\ \lim\limits_{k\to\infty}\mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}[|\beta_i(g_i^k(X^{u^k}_{[0,t_i]}))-\beta_i(g_i(X^u_{[0,t_i]}))|^2\wedge 1]=0, \\ \lim\limits_{k\to\infty}\mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}[\|\delta X^k_{t_i}\|^2]=0, \end{cases}\tag{4.14}$$

这里 β_i 在步骤 1 中给出； $X^{u^k}:=X^{t,\eta,u^k,\beta(u^k)}$, $X^u:=X^{t,\eta,u,\beta(u)}$ 和 $\delta X^k:=X^{u^k}-X^u$. 最后，由 (4.14), 可得 $W(t,\mu)\leqslant W_0(t,\mu)$, $(t,\mu)\in[0,T]\times\mathcal{P}_2$.

引理得证.

最后我们给出命题 4.1 的证明来结束本节.

命题 4.1 的证明 根据引理 4.2–4.3, 可以得到命题 4.1(ii). 至于命题 4.1(i), 它的证明更加简单，事实上，在引理 4.2 的证明中使用 $\beta^{0,\epsilon}(u),\beta^{\epsilon}(u)$ 替换 v.

§5 动态规划原理

本节用来研究 (3.4) 中给出的下值函数 W 的动态规划原理. 它的证明依赖于下值函数 W 的正则性. 首先, 对于 $w:[0,T]\times\mathcal{P}_2\to\mathbb{R}$ 和 $t\leqslant s\leqslant t+\theta\leqslant T$, 定义

$$\mathscr{G}^{t,\mu;u,v}_{s,t+\theta}[w]:=\int_s^{t+\theta}\mathbb{E}^{\mathbb{P}^{t,\mu;u,v}}[f(r,X,\mathbb{P}^{t,\mu;u,v},u_r,v_r)]\mathrm{d}r+w. \tag{5.1}$$

定理 5.1 在假设 3.1 下, 下值函数 W 的动态规划原理成立:

$$W(t,\mu)=\inf_{\beta\in\mathcal{B}_{t,t+\theta}}\sup_{u\in\mathcal{U}_{t,t+\theta}}\mathscr{G}^{t,\mu;u,\beta(u)}_{t,t+\theta}[W(t+\theta,\mathbb{P}^{t,\mu;u,\beta(u)})]. \tag{5.2}$$

证 为了方便, 将 (5.2) 右侧记为 $\overline{W}(t,\mu)$. 分两步证明 (5.2).

步骤 1 $\overline{W}(t,\mu)\leqslant W(t,\mu)$, $(t,\mu)\in[0,T]\times\mathcal{P}_2$.

令 $\beta\in\mathcal{B}_{t,T}$ 是任意选取但是固定的. 给定 $u^2\in\mathcal{U}_{t+\theta,T}$, 对于任何 $u^1\in\mathcal{U}_{t,t+\theta}$, 利用下式

$$u^1\oplus u^2:=u^1 1_{[t,t+\theta]}+u^2 1_{(t+\theta,T]}. \tag{5.3}$$

将 $u^1(\cdot)$ 延拓成 $\mathcal{U}_{t,T}$ 中的一个元素. 接下来, 考虑 β 在 $\mathcal{B}_{t+\theta,T}$ 上的限制 β^1 如下:

$$\beta^1(u^1):=\beta(u^1\oplus u^2)\big|_{[t,t+\theta]}.$$

因为 β 是非预期的, 所以 β^1 独立于 u^2 的选取. 根据 $\overline{W}(t,\mu)$ 可知, 对于任何 $\beta^1\in\mathcal{B}_{t,t+\theta}$, 存在某个 $u^{1,\varepsilon}\in\mathcal{U}_{t,t+\theta}$, 使得

$$\overline{W}(t,\mu)\leqslant\mathscr{G}^{t,\mu;u^{1,\varepsilon},\beta^1(u^{1,\varepsilon})}_{t,t+\theta}[W(t+\theta,\widetilde{\mu})]+\varepsilon, \tag{5.4}$$

这里 $\widetilde{\mu}=\mathbb{P}^{t,\mu,u^{1,\varepsilon},\beta^1(u^{1,\varepsilon})}$. 另外, β^1 并不依赖与 u^2 的选取这一事实, 允许定义 $\beta^2(u^2):=\beta(u^{1,\varepsilon}\oplus u^2)|_{(t+\theta,T]}$, $u_2\in\mathcal{U}_{t+\theta,T}$. 显然 $\beta^2:\mathcal{U}_{t+\theta,T}\to\mathcal{V}_{t+\theta,T}$.

根据 $W(t+\theta,\widetilde{\mu})$ 的定义, 可知对于任何 $\beta^2\in\mathcal{B}_{t+\theta,T}$, 存在某个 $u^{2,\varepsilon}\in\mathcal{U}_{t+\theta,T}$, 使得

$$W(t+\theta,\widetilde{\mu})\leqslant J(t+\theta,\widetilde{\mu},u^{2,\varepsilon},\beta^2(u^{2,\varepsilon}))+\varepsilon. \tag{5.5}$$

定义 $u^\varepsilon=u^{1,\varepsilon}\oplus u^{2,\varepsilon}$. 显然, 在 $[t,t+\theta]$ 上, $u^\varepsilon_s=u^{1,\varepsilon}_s$ 和在 $(t+\theta,T]$ 上, $u^\varepsilon_s=u^{2,\varepsilon}_s$. 另外, 根据 β^1 和 β^2 的定义, 可得在 $[t,t+\theta]$ 上 $\beta_s(u^\varepsilon)=\beta^1_s(u^{1,\varepsilon})$ 和在 $(t+\theta,T]$ 上 $\beta_s(u^\varepsilon)=\beta^2_s(u^{2,\varepsilon})$. 由 (5.4)–(5.5), 可知

$$\begin{aligned}\overline{W}(t,\mu)&\leqslant\mathscr{G}^{t,\mu;u^{1,\varepsilon},\beta^1(u^{1,\varepsilon})}_{t,t+\theta}[J(t+\theta,\widetilde{\mu},u^{2,\varepsilon},\beta^2(u^{2,\varepsilon}))+\varepsilon]+\varepsilon\\&=\mathbb{E}^{\widetilde{\mu}}\Big[\int_t^{t+\theta}f(s,X,\widetilde{\mu},u^{1,\varepsilon}_s,\beta^1_s(u^{1,\varepsilon}))\mathrm{d}s\Big]\\&\quad+\mathbb{E}^{\mathbb{P}^{t+\theta,\widetilde{\mu},u^{2,\varepsilon},\beta^2(u^{2,\varepsilon})}}\Big[h(X,\mathbb{P}^{t+\theta,\widetilde{\mu},u^{2,\varepsilon},\beta^2(u^{2,\varepsilon})})\\&\quad+\int_{t+\theta}^T f(s,X,\mathbb{P}^{t+\theta,\widetilde{\mu},u^{2,\varepsilon},\beta^2(u^{2,\varepsilon})},u^{2,\varepsilon}_s,\beta^2_s(u^{2,\varepsilon}))\mathrm{d}s\Big]+2\varepsilon.\end{aligned} \tag{5.6}$$

由 $u^\varepsilon,\beta^\varepsilon$ 的定义，可知

$$\widetilde{\mu}=\mathbb{P}^{t,\mu,u^{1,\varepsilon},\beta^1(u^{1,\varepsilon})}=\mathbb{P}^{t,\mu,u^\varepsilon,\beta(u^\varepsilon)}=\mathbb{P}^{t+\theta,\widetilde{\mu},u^{2,\varepsilon},\beta^2(u^{2,\varepsilon})},\tag{5.7}$$

由这一结果和 (5.6) 可以推出

$$\overline{W}(t,\mu)\leqslant J(t,\mu,u^\varepsilon,\beta(u^\varepsilon))+2\varepsilon\leqslant\sup_{u\in\mathcal{U}_{t,T}}J(t,\mu,u,\beta(u))+2\varepsilon.$$

最后，根据 β 的任意性，可得 $\overline{W}(t,\mu)\leqslant W(t,\mu)$, $(t,\mu)\in[0,T]\times\mathcal{P}_2$.

步骤 2 $\overline{W}(t,\mu)\geqslant W(t,\mu)$, $(t,\mu)\in[0,T]\times\mathcal{P}_2$.

由 $\overline{W}(t,\mu)$ 的定义可知，存在一个 $\beta^{1,\varepsilon}\in\mathcal{B}_{t,t+\theta}$, 使得对于所有的 $u^1\in\mathcal{U}_{t,t+\theta}$,

$$\overline{W}(t,\mu)\geqslant\mathscr{G}_{t,t+\theta}^{t,\mu;u^1,\beta^{1,\varepsilon}(u^1)}[W(t+\theta,\mathbb{P}^{t,\mu,u^1,\beta^{1,\varepsilon}(u^1)})]-\varepsilon.\tag{5.8}$$

进一步地，由 $W(t+\theta,\nu)$ 的定义，可知存在某个 $\beta_\nu^{2,\varepsilon}\in\mathcal{B}_{t+\theta,T}$, 使得对于所有的 $u^2\in\mathcal{U}_{[t+\theta,T]}$,

$$W(t+\theta,\nu)\geqslant J(t+\theta,\nu,u^2,\beta_\nu^{2,\varepsilon}(u^2))-\varepsilon.\tag{5.9}$$

假定 $\{R_\ell\}_{\ell\geqslant1}\in\mathcal{B}(\mathcal{P}_2)$ 是 $\mathcal{P}_2$ 的一个分解，其满足 $\sum\limits_{l\geqslant1}R_\ell=\mathcal{P}_2$ 和

$$\dim(R_\ell)=\max_{\overline{\nu},\overline{\overline{\nu}}\in R_\ell}W_2((t+\theta,\overline{\nu}),(t+\theta,\overline{\overline{\nu}}))=\max_{\overline{\nu},\overline{\overline{\nu}}\in R_\ell}W_2(\overline{\nu}_{[0,t+\theta]},\overline{\overline{\nu}}_{[0,t+\theta]})<\varepsilon,\quad \ell\geqslant1.$$

令 $\nu_\ell\in R_\ell$, 记 $[\mathbb{P}^{t,\mu,u_1,\beta^{1,\varepsilon}(u^1)}]=\sum\limits_{\ell\geqslant1}\nu_j1_{\{\mathbb{P}^{t,\mu,u_1,\beta^{1,\varepsilon}(u^1)}\in R_\ell\}}$. 易知 $[\mathbb{P}^{t,\mu,u_1,\beta^{1,\varepsilon}(u^1)}]\in\mathcal{P}^2$ 和

$$\begin{aligned}&W_2((t+\theta,[\mathbb{P}^{t,\mu,u_1,\beta^{1,\varepsilon}(u^1)}]),(t+\theta,\mathbb{P}^{t,\mu,u_1,\beta^{1,\varepsilon}(u^1)}))\\&=W_2([\mathbb{P}^{t,\mu,u_1,\beta^{1,\varepsilon}(u^1)}]_{[0,t+\theta]},\mathbb{P}_{[0,t+\theta]}^{t,\mu,u_1,\beta^{1,\varepsilon}(u^1)})<\varepsilon.\end{aligned}$$

根据 (5.9), 对于每个 $\nu_\ell\in\mathcal{P}_2$, 存在 $\beta_{\nu_\ell}^{2,\varepsilon}\in\mathcal{B}_{t+\theta,T}$, 使得

$$W(t+\theta,\nu_\ell)\geqslant J(t+\theta,\nu_\ell,u^2,\beta_{\nu_\ell}^{2,\varepsilon}(u^2))-\varepsilon.\tag{5.10}$$

现在定义 $\beta^{2,\varepsilon,u^1}:=\sum\limits_{\ell\geqslant1}\beta_{\nu_\ell}^{2,\varepsilon}1_{\{\mathbb{P}^{t,\mu,u_1,\beta^{1,\varepsilon}(u^1)}\in R_\ell\}}$. 显然 $\beta^{2,\varepsilon,u^1}\in\mathcal{B}_{t+\theta,T}$. 对于 $u\in\mathcal{U}_{t,T}$, 记 $u^1=u|_{[t,t+\theta]}$, $u^2=u|_{(t+\theta,T]}$, 即 $u=u_1\oplus u_2$. 由此，可以定义一个新的策略 $\beta^\varepsilon(u)=\beta^{1,\varepsilon}(u_1)\oplus\beta^{2,\varepsilon,u^1}(u^2):\mathcal{U}_{t,T}\to\mathcal{V}_{t,T}$. β^ε 是一个非预期策略. 事实上, 假设 $\tau:\Omega\to[t,T]$ 是一个 $\mathcal{F}_s$- 停时, 并假设 $u,\overline{u}\in\mathcal{U}_{t,T}$ 在 $[[t,\tau]]$ 上满足 $u\equiv\overline{u}$. 现在将 $u,\overline{u}$ 分解成 $u^1,\overline{u}^1\in\mathcal{U}_{t,t+\theta}$ 和 $u^2,\overline{u}^2\in\mathcal{U}_{t+\theta,T}$, 使得 $u=u^1\oplus u^2$ 和 $\overline{u}=\overline{u}^1\oplus\overline{u}^2$. 由在 $[[t,\tau]$ 上 $u\equiv\overline{u}$ 可以推出在 $[[t,(t+\theta)\wedge\tau]]$ 上 $u^1\equiv\overline{u}^1$. 因为 $\beta^{1,\varepsilon}$ 是非预期的，所以 $\beta^{1,\varepsilon}(u^1)=\beta^{1,\varepsilon}(\overline{u}^1)$. 由此可得 $\mathbb{P}^{t,\mu,u^1,\beta^{1,\varepsilon}(u^1)}=\mathbb{P}^{t,\mu,\overline{u}^1,\beta^{1,\varepsilon}(\overline{u}^1)}$. 然后根据 $\beta^{2,\varepsilon,u^1}$ 的定义，可得

$$\beta^{2,\varepsilon,u^1}=\sum_{\ell\geqslant1}\beta_{\nu_\ell}^{2,\varepsilon}1_{\{\mathbb{P}^{t,\mu,u_1,\beta^{1,\varepsilon}(u^1)}\in R_\ell\}}=\sum_{\ell\geqslant1}\beta_{\nu_\ell}^{2,\varepsilon}1_{\{\mathbb{P}^{t,\mu,\overline{u}_1,\beta^{1,\varepsilon}(\overline{u}^1)}\in R_\ell\}}=\beta^{2,\varepsilon,\overline{u}^1}.\tag{5.11}$$

进一步地，由在 $[[t,\tau]]$ 上 $u=\overline{u}$ 可推出在 $]]t+\theta,(t+\theta)\vee\tau]]$ 上 $u^2=\overline{u}^2$. 根据 (5.11), 有 $\beta^{2,\varepsilon,u^1}(u_2)=\beta^{2,\varepsilon,\overline{u}^1}(\overline{u}_2)$. 最后，由 β^ε 的定义，可知

$$\beta^\varepsilon(u)=\beta^{1,\varepsilon}(u^1)\oplus\beta^{2,\varepsilon,u^1}(u_2)=\beta^{1,\varepsilon}(\overline{u}^1)\oplus\beta^{2,\varepsilon,\overline{u}^1}(\overline{u}_2)=\beta^\varepsilon(\overline{u}).$$

因此，β^ε 是非预期的.

由 (5.8), 命题 4.1, $[\mathbb{P}^{t,\mu,u_1,\beta^{1,\varepsilon}(u^1)}]$ 的定义和 (5.9)–(5.10), 可以得到

$$\begin{aligned}
\overline{W}(t,\mu) &\geqslant \mathscr{G}_{t,t+\theta}^{t,\mu;u^1,\beta^{1,\varepsilon}(u^1)}[W(t+\theta,\mathbb{P}^{t,\mu,u^1,\beta^{1,\varepsilon}(u^1)})]-\varepsilon\\
&\geqslant \mathscr{G}_{t,t+\theta}^{t,\mu;u^1,\beta^{1,\varepsilon}(u^1)}[W(t+\theta,[\mathbb{P}^{t,\mu,u^1,\beta^{1,\varepsilon}(u^1)}])]-\gamma(\varepsilon)\\
&\geqslant \mathscr{G}_{t,t+\theta}^{t,\mu;u^1,\beta^{1,\varepsilon}(u^1)}\Big[\sum_{\ell\geqslant 1}W(t+\theta,\nu_\ell)1_{\{\mathbb{P}^{t,\mu,u_1,\beta^{1,\varepsilon}(u^1)}\in R_\ell\}}\Big]-\gamma(\varepsilon)\\
&\geqslant \mathscr{G}_{t,t+\theta}^{t,\mu;u^1,\beta^{1,\varepsilon}(u^1)}\Big[\sum_{\ell\geqslant 1}1_{\{\mathbb{P}^{t,\mu,u_1,\beta^{1,\varepsilon}(u^1)}\in R_\ell\}}J(t+\theta,\nu_\ell,u^2,\beta^{2,\varepsilon,u^1}(u^2))\Big]-\gamma(\varepsilon)\\
&= \mathscr{G}_{t,t+\theta}^{t,\mu;u^1,\beta^{1,\varepsilon}(u^1)}[J(t+\theta,[\mathbb{P}^{t,\mu,u^1,\beta^{1,\varepsilon}(u^1)}],u^2,\beta^{2,\varepsilon,u^1}(u^2))]-\gamma(\varepsilon)\\
&\geqslant \mathscr{G}_{t,t+\theta}^{t,\mu;u^1,\beta^{1,\varepsilon}(u^1)}[J(t+\theta,\mathbb{P}^{t,\mu,u^1,\beta^{1,\varepsilon}(u^1)},u^2,\beta^{2,\varepsilon,u^1}(u^2))]-\gamma(\varepsilon).
\end{aligned}$$

类似于 (5.6)–(5.7), 可得对于所有的 $u\in\mathcal{U}_{t,T}$,

$$\overline{W}(t,\mu)\geqslant J(t_1,\mu,u,\beta^\varepsilon(u))-\gamma(\varepsilon).$$

最后，由 u 的任意性，可知 $\overline{W}(t,\mu)\geqslant W(t,\mu)$, $(t,\mu)\in[0,T]\times\mathcal{P}_2$.

定理得证.

利用下值函数的动态规划原理，可得 W 关于 t 是连续的.

命题 5.1　在假设 3.1 下，令 $\theta>0$, 则存在一个常数 $C>0$, 使得对于 $t,t+\theta\in[0,T]$, $\mu,\nu\in\mathcal{P}_2$,

$$|W(t,\mu)-W(t+\theta,\nu)|\leqslant\gamma(W_2((t,\mu),(t+\theta,\nu)))+C(1+W_2(\mu_{[0,t]},\delta_{\{0\}}))\theta. \tag{5.12}$$

证　根据下值函数 W 的动态规划 (5.2) 和假设 3.1(v), 可得

$$\begin{aligned}
&W(t,\mu)-W(t+\theta,\nu)\\
&=\inf_{\beta\in\mathcal{B}_{t,t+\theta}}\sup_{u\in\mathcal{U}_{t,t+\theta}}\Big[W(t+\theta,\mathbb{P}^{t,\mu,u,\beta(u)})-W(t+\theta,\nu)\\
&\quad+\int_t^{t+\theta}\mathbb{E}^{\mathbb{P}^{t,\mu,u,\beta(u)}}[f(r,X,\mathbb{P}^{t,\mu,u,\beta(u)},u_r,\beta(u_r))]\mathrm{d}r\Big]\\
&\leqslant\sup_{\beta\in\mathcal{B}_{t,t+\theta}}\sup_{u\in\mathcal{U}_{t,t+\theta}}\Big[|W(t+\theta,\mathbb{P}^{t,\mu,u,\beta(u)})-W(t+\theta,\nu)|\\
&\quad+\int_t^{t+\theta}\mathbb{E}^{\mathbb{P}^{t,\mu,u,\beta(u)}}[|f(r,X,\mathbb{P}^{t,\mu,u,\beta(u)},u_r,\beta(u_r))|]\mathrm{d}r\Big].
\end{aligned}$$

因此，由上面的估计，命题 4.1(ii) 和假设 3.1(iii), (iv), 可得

$$\begin{aligned}
&|W(t,\mu)-W(t+\theta,\nu)|\\
&\leqslant\gamma(W_2(\mathbb{P}^{t,\mu,u,\beta(u)}_{[0,t+\theta]},\nu_{[0,t+\theta]}))+C_0\int_t^{t+\theta}[1+\mathbb{E}^{\mathbb{P}^{t,\mu,u,\beta(u)}}[\|X_{r\wedge\cdot}\|]+W_2(\mathbb{P}^{t,\mu,u,\beta(u)}_{[0,r]},\delta_{\{0\}})]\mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

根据 b,σ 的有界性，可得对于 $s\in[t,t+\theta]$,

$$W_2(\mathbb{P}^{t,\mu,u,\beta(u)}_{[0,t+\theta]},\nu_{[0,t+\theta]})\leqslant W_2(\mu_{[0,t]},\nu_{[0,t+\theta]})+W_2(\mathbb{P}^{t,\mu,u,\beta(u)}_{[0,t+\theta]},\mu_{[0,t]})$$

$$\leqslant W_2(\mu_{[0,t]},\nu_{[0,t+\theta]})+\Big(\mathbb{E}^{\mathbb{P}^{t,\mu,u,\beta(u)}}\Big[\sup_{t\leqslant r\leqslant t+\theta}|X_r-X_t|^2\Big]\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant W_2(\mu_{[0,t]},\nu_{[0,t+\theta]})+C\theta^{\frac{1}{2}}\leqslant CW_2((t,\mu),(t+\theta,\nu))$$

和

$$\begin{aligned}&(\mathbb{E}^{\mathbb{P}^{t,\mu,u,\beta(u)}}[\|X_{r\wedge\cdot}\|]+W_2(\mathbb{P}^{t,\mu,u,\beta(u)}_{[0,r]},\delta_{\{0\}}))^2\\&\leqslant C\mathbb{E}^{\mathbb{P}^{t,\mu,u,\beta(u)}}\Big[\|X_{t\wedge\cdot}\|^2+\sup_{t\leqslant r\leqslant s}|X_r-X_t|^2\Big]\\&=C\mathbb{E}^{\mu}[\|X_{t\wedge\cdot}\|^2]+C\mathbb{E}^{\mathbb{P}^{t,\mu,u,\beta(u)}}\Big[\sup_{t\leqslant r\leqslant s}|X_r-X_t|^2\Big]\\&\leqslant C\mathbb{E}^{\mu}[\|X_{t\wedge\cdot}\|^2]+C\theta\leqslant C\mathbb{E}^{\mu}[\|X_{t\wedge\cdot}\|^2]+C.\end{aligned}$$

因此

$$|W(t,\mu)-W(t+\theta,\nu)|\leqslant\gamma(CW_2((t,\mu),(t+\theta,\nu)))+C(1+\mathbb{E}^{\mu}[\|X_{t\wedge\cdot}\|^2])^{\frac{1}{2}}\theta.$$

从而得到 (5.12).

命题得证.

§6 Bellman-Isaacs 主方程的粘性解

在本节中我们将会证明 (3.4) 中定义的函数 W 是下面下 Bellman- Isaacs 主方程的粘性解:

$$\begin{cases}\partial_tW(t,\mu)+H^-(t,\mu,\partial_\mu W(t,\mu,X),\partial_\omega\partial_\mu W(t,\mu,X))=0,\\W(T,\mu)=\mathbb{E}^{\mu}[h(X,\mu)],\end{cases}\tag{6.1}$$

这里对于 $(t,\mu)\in[0,T]\times\mathcal{P}_2$, $p:[0,T]\times\mathcal{P}_2\times\Omega\to\mathbb{R}^d$, $P:[0,T]\times\mathcal{P}_2\times\Omega\to\mathbb{R}^{d\times d}$, $\omega\in\Omega$,

$$H^-(t,\mu,p,P)=\mathbb{E}^{\mu}\Big[\sup_{u\in U}\inf_{v\in V}G(t,\mu,X,p,P,u,v)\Big],$$

$$G(t,\mu,\omega,p,P,u,v)=\Big(b(\cdot)p+\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\sigma\sigma^{\mathrm{T}}(\cdot)P)+f(\cdot)\Big)(t,\mu,\omega,u,v).\tag{6.2}$$

类似地，可以验证 (3.4) 中给出的 V 是下面上 Bellman-Isaacs 主方程的粘性解:

$$\begin{cases}\partial_tV(t,\mu)+H^+(t,\mu,\partial_\mu V(t,\mu,X),\partial_\omega\partial_\mu V(t,\mu,X))=0,\\V(T,\mu)=\mathbb{E}^{\mu}[h(X,\mu)],\end{cases}\tag{6.3}$$

这里对于 $(t,\mu)\in[0,T]\times\mathcal{P}_2$, $p:[0,T]\times\mathcal{P}_2\times\Omega\to\mathbb{R}^d$, $P:[0,T]\times\mathcal{P}_2\times\Omega\to\mathbb{R}^{d\times d}$, $\omega\in\Omega$,

$$H^+(t,\mu,p,P)=\mathbb{E}^{\mu}\Big[\inf_{v\in V}\sup_{u\in U}G(t,\mu,X,p,P,u,v)\Big].$$

引理 6.1 [24, 引理 4.1] 对任意的 $(t,\mu)\in[0,T]\times\mathcal{P}_2$ 和 $K>0$, 集合在 $\mathcal{P}_2$ 下是紧的.

在粘性解理论中，一个重要的要素是泛函伊藤公式. 为了能应用泛函伊藤公式，我们弱化测试函数的正则性要求.

定义 6.1　对于 $0 \leqslant t < t+\theta \leqslant T$ 和 $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}_2$, 令 X 是在 $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$ 下区间 $[t, t+\theta]$ 上的一个半鞅. 我们称 $\varphi \in C^{1,2}([t, t+\theta] \times \mathcal{Q})$, 如果 $\varphi \in C^0([t, t+\theta] \times \mathcal{Q})$ 和存在 $\partial_t\varphi \in C^0([t, t+\theta] \times \mathcal{Q})$, $\partial_\mu\varphi, \partial_\omega\partial_\mu\varphi \in C^0([t, t+\theta] \times \mathcal{Q})$, 使得在每一个 $\mathbb{P} \in \mathcal{Q}$ 下，等式 (2.4) 在区间 $[t, t+\theta]$ 上成立.

进一步地，记 $C_b^{1,2}([t, t+\theta] \times \mathcal{Q})$ 表示 $C^{1,2}([t, t+\theta] \times \mathcal{Q})$ 中所有满足下面性质的函数构成的集合： (i) $\partial_t\varphi$ 是有界的； (ii) 对于某个 $C_0 > 0$ 和对于所有的 $\mathbb{P} \in \mathcal{Q}$,

$$|\partial_\mu\varphi(t,\mu,\omega)| + |\partial_\omega\partial_\mu\varphi(t,\mu,\omega)| \leqslant C_0(1 + \|\omega\|).$$

对于 $W : [0,T] \times \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}$, 记

$$\begin{aligned}
&\mathscr{O}_\theta^K W(t,\mu) = \{\phi \in C_b^{1,2}([t,t+\theta] \times \mathcal{P}_K(t,\mu)) : (\phi - W)(t,\mu) = 0\};\\
&\underline{\mathscr{O}}_\theta^K W(t,\mu) = \bigcup_{0<\theta\leqslant T-t} \Big\{\phi \in \mathscr{O}_\theta^K W(t,\mu) : \inf_{(s,\mu)\in[t,t+\theta]\times\mathcal{P}_K(t,\mu)} (\phi - W)(s,\mu) = 0\Big\};\\
&\overline{\mathscr{O}}_\theta^K W(t,\mu) = \bigcup_{0<\theta\leqslant T-t} \Big\{\phi \in \mathscr{O}_\theta^K W(t,\mu) : \sup_{(s,\mu)\in[t,t+\theta]\times\mathcal{P}_K(t,\mu)} (\phi - W)(s,\mu) = 0\Big\}.
\end{aligned}$$

现在介绍 (6.1) 的粘性解的概念.

定义 6.2　一个函数 $W \in C([0,T] \times \mathcal{P}_2)$ 被称为

(i) 方程 (6.1) 的一个 K- 粘性下解，如果 $W(T,\mu) \leqslant \mathbb{E}^\mu[h(X,\mu)]$, $\mu \in \mathcal{P}_2$ 以及对于任意的 $\phi \in \underline{\mathscr{O}}_\theta^K W(t,\mu)$,

$$\partial_t\phi(t,\mu) + H^-(t,\mu,\partial_\mu\phi,\partial_\omega\partial_\mu\phi) \geqslant 0;$$

(ii) 方程 (6.1) 的一个 K- 粘性上解，如果 $W(T,\mu) \geqslant \mathbb{E}^\mu[h(X,\mu)]$, $\mu \in \mathcal{P}_2$ 以及对于任意的 $\phi \in \overline{\mathscr{O}}_\theta^K W(t,\mu)$,

$$\partial_t\phi(t,\mu) + H^-(t,\mu,\partial_\mu\phi,\partial_\omega\partial_\mu\phi) \leqslant 0;$$

(iii) 方程 (6.1) 的一个 K- 粘性解，如果它既是一个 K- 粘性上解，又是一个 K- 粘性下解. W 被称为方程 (6.1) 的一个粘性解，如果对于 $K > 0$, 它是一个 K- 粘性解.

记

$$\Gamma^\phi(s,\mu,u,v) = \partial_t\phi(s,\mu) + \mathbb{E}^\mu[G(s,\mu,X,\partial_\mu\phi,\partial_\omega\partial_\mu\phi,u,v)],$$

这里 G 在 (6.2) 中给出.

引理 6.2　在假设 3.1 下，存在一个连续函数的模，使得对于 $0 \leqslant t < t+\theta \leqslant T$, $\phi \in C^{1,2}([t,t+\theta] \times \mathscr{O}_\theta^K W(t,\mu))$, $u \in \mathcal{U}_{t,t+\theta}$, $v \in \mathcal{V}_{t,t+\theta}$,

$$\int_t^{t+\theta} |\Gamma^\phi(s,\mathbb{P}^{t,\mu,u,v},u_s,v_s) - \Gamma^\phi(t,\mu,u_s,v_s)|\mathrm{d}s \leqslant \theta\rho(\theta). \tag{6.4}$$

证　注意到

$$\Gamma^\phi(s,\mathbb{P}^{t,\mu,u,v}) - \Gamma^\phi(t,\mu,u_s,v_s) = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3 + \mathrm{I}_4, \tag{6.5}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_1 :&= \partial_t\phi(s,\mathbb{P}^{t,\mu,u,v}) - \partial_t\phi(t,\mu);\\
\mathrm{I}_2 :&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}^{t,\mu,u,v}}[|\partial_\mu\phi(s,\mathbb{P}^{t,\mu,u,v},X)b(s,X,\mathbb{P}^{t,\mu,u,v},u_s,v_s) - \partial_\mu\phi(t,\mu,X)b(t,X,\mu,u_s,v_s)|];\\
\mathrm{I}_3 :&= \frac{1}{2}\mathbb{E}^{\mathbb{P}^{t,\mu,u,v}}[\mathrm{tr}\{\partial_\omega\partial_\mu\phi(s,\mathbb{P}^{t,\mu,u,v},X)\sigma\sigma^{\mathrm{T}}(s,X,\mathbb{P}^{t,\mu,u,v},u_s,v_s)\}\\
&\quad - \mathrm{tr}\{\partial_\omega\partial_\mu\phi(t,\mu,X)\sigma\sigma^{\mathrm{T}}(t,X,\mu,u_s,v_s)\}];\\
\mathrm{I}_4 :&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}^{t,\mu,u,v}}[f(s,X,\mathbb{P}^{t,\mu,u,v},u_s,v_s) - f(t,X,\mu,u_s,v_s)].
\end{aligned}$$

因为 $\partial_t\phi$ 关于 (t,μ) 是连续的，所以

$$\mathrm{I}_1 \leqslant |\partial_t\phi(s,\mathbb{P}^{t,\mu,u,v}) - \partial_t\phi(t,\mu)| \leqslant \gamma(|s-t| + W_2(\mathbb{P}^{t,\mu,u,v}_{[0,s]},\mu_{[0,t]})). \tag{6.6}$$

至于 I_2,

$$\mathrm{I}_2 \leqslant \mathrm{I}_{21} + \mathrm{I}_{22},$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{21} &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}^{t,\mu,u,v}}[|\partial_\mu\phi(s,\mathbb{P}^{t,\mu,u,v},X) - \partial_\mu\phi(t,\mu,X)\|b(s,X,\mathbb{P}^{t,\mu,u,v},u_s,v_s)|],\\
\mathrm{I}_{22} &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}^{t,\mu,u,v}}[|b(s,X,\mathbb{P}^{t,\mu,u,v},u_s,v_s) - b(t,X,\mu,u_s,v_s)\|\partial_\mu\phi(t,\mu,X)|].
\end{aligned}$$

由 $\partial_\mu\phi$ 关于 (t,μ,ω) 的连续性和 b 的有界性，可得

$$\mathrm{I}_{21} \leqslant L_0\mathbb{E}^{\mathbb{P}^{t,\mu,u,v}}[\gamma(|s-t| + W_2(\mathbb{P}^{t,\mu,u,v}_{[0,s]},\mu_{[0,t]}) + \|X_{s\wedge\cdot} - X_{t\wedge\cdot}\|)].$$

因为 b 关于 $(\varnothing,\mu)$ 是李普希兹连续的和 $\partial_\mu\phi$ 关于 ω 是线性增长的，所以由 Hölder 不等式和假设 3.1(v), 可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{22} &\leqslant \mathbb{E}^{\mathbb{P}^{t,\mu,u,v}}[(|b(s,X,\mathbb{P}^{t,\mu,u,v},u_s,v_s) - b(s,X_{t\wedge\cdot},\mu_{[0,t]},u_s,v_s)|\\
&\qquad + |b(s,X_{t\wedge\cdot},\mu_{[0,t]},u_s,v_s) - b(t,X,\mu,u_s,v_s)|)C(1+\|X_{t\wedge\cdot}\|)]\\
&\leqslant \mathbb{E}^{\mathbb{P}^{t,\mu,u,v}}[(\gamma(\|X_{s\wedge\cdot} - X_{t\wedge\cdot}\| + W_2(\mathbb{P}^{t,\mu,u,v}_{[0,s]},\mu_{[0,t]})) + C_0(1+\|X_{t\wedge\cdot}\|\\
&\qquad + W_2(\mu_{[0,t]},\delta_{\{0\}}))\gamma(s-t))C(1+\|X_{t\wedge\cdot}\|)]\\
&\leqslant C(1+\mathbb{E}^\mu[\|X_{t\wedge\cdot}\|^2])^{\frac{1}{2}}\{\mathbb{E}^{\mathbb{P}^{t,\mu,u,v}}[\gamma(\|X_{s\wedge\cdot} - X_{t\wedge\cdot}\| + W_2(\mathbb{P}^{t,\mu,u,v}_{[0,s]},\mu_{[0,t]}))\\
&\qquad + C_0(1+\|X_{t\wedge\cdot}\| + W_2(\mu_{[0,t]},\delta_{\{0\}}))^2\gamma(s-t)]\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant C(1+\mathbb{E}^\mu[\|X_{t\wedge\cdot}\|^2])^{\frac{1}{2}}\{\mathbb{E}^{\mathbb{P}^{t,\mu,u,v}}[\gamma(\|X_{s\wedge\cdot} - X_{t\wedge\cdot}\| + W_2(\mathbb{P}^{t,\mu,u,v}_{[0,s]},\mu_{[0,t]}))]\\
&\qquad + C_0\gamma(s-t)(1+\mathbb{E}^\mu[\|X_{t\wedge\cdot}\|^2])\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

类似地，根据 $\partial_\omega\partial_\mu\phi$ 关于 ω 线性增长性， σ 的有界性和假设 3.1(iv)–(v), 可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_3 + \mathrm{I}_4 &\leqslant C(1+\mathbb{E}^\mu[\|X_{t\wedge\cdot}\|^2])^{\frac{1}{2}}\gamma(s-t)\\
&\qquad + C\mathbb{E}^{\mathbb{P}^{t,\mu,u,v}}[\gamma(\|X_{s\wedge\cdot} - X_{t\wedge\cdot}\| + W_2(\mathbb{P}^{t,\mu,u,v}_{[0,s]},\mu_{[0,t]}))]\\
&\qquad + L_0\mathbb{E}^{\mathbb{P}^{t,\mu,u,v}}[\gamma(|s-t| + W_2(\mathbb{P}^{t,\mu,u,v}_{[0,s]},\mu_{[0,t]}) + \|X_{s\wedge\cdot} - X_{t\wedge\cdot}\|)]\\
&\qquad + C(1+\mathbb{E}^\mu[\|X_{t\wedge\cdot}\|^2])^{\frac{1}{2}}\{\mathbb{E}^{\mathbb{P}^{t,\mu,u,v}}[\gamma(\|X_{s\wedge\cdot} - X_{t\wedge\cdot}\| + W_2(\mathbb{P}^{t,\mu,u,v}_{[0,s]},\mu_{[0,t]}))]
\end{aligned}$$

$$+ C_0\gamma(s-t)(1+\mathbb{E}^{\mu}[\|X_{t\wedge\cdot}\|^2])\}^{\frac{1}{2}}. \tag{6.7}$$

接下来估计 $\mathbb{E}^{\mathbb{P}^{t,\mu,u,v}}[\gamma(W_2(\mathbb{P}^{t,\mu,u,v}_{[0,s]},\mu_{[0,t]})+\|X_{s\wedge\cdot}-X_{t\wedge\cdot}\|)]$. 由 b,σ 的有界性，易知对于 $\ell\geqslant 1$,

$$\sup_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}_K(t,\mu)}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\sup_{t\leqslant s\leqslant t+\theta}|X_s-X_t|^{\ell}]\leqslant C_\ell\theta^{\frac{\ell}{2}}.$$

由此可得，对于所有的 $s\in[t,t+\theta]$,

$$\lim_{\theta\downarrow 0}\sup_{u\in U,v\in V}\mathbb{E}^{\mathbb{P}^{t,\mu,u,v}}[\gamma(W_2(\mathbb{P}^{t,\mu,u,v}_{[0,s]},\mu_{[0,t]})+\|X_{s\wedge\cdot}-X_{t\wedge\cdot}\|)]=0.$$

记

$$\rho(\theta):=\sup_{t\leqslant s\leqslant t+\theta}\sup_{u\in U,v\in V}\mathbb{E}^{\mathbb{P}^{t,\mu,u,v}}[\gamma(|s-t|+W_2(\mathbb{P}^{t,\mu,u,v}_{[0,s]},\mu_{[0,t]})+\|X_{s\wedge\cdot}-X_{t\wedge\cdot}\|)].$$

显然 $\lim\limits_{\theta\downarrow 0}\rho(\theta)=0$. 合并 (6.5)–(6.7), 并注意到 γ 是递增的，可得

$$|\Gamma^{\phi}(s,\mathbb{P}^{t,\mu,u,v},u_s,v_s)-\Gamma^{\phi}(t,\mu,u_s,v_s)|\leqslant\rho(\theta).$$

从而得到 (6.4).

引理得证.

定理 6.1 (存在性)　在假设 3.1 下，(3.4) 中给出的值函数 W 是下 Bellman-Isaacs 主方程 (6.1) 的一个粘性解.

证　记 $K_0=L_0\vee\left[\frac{1}{2}(L_0)^2\right]$. 显然 $|b|,\frac{1}{2}|\sigma|^2\leqslant K_0$. 证明分为两步.

步骤 1　W 是方程 (6.1) 的一个 K_0- 粘性上解.

首先，$W(T,\mu)=\mathbb{E}^{\mu}[h(X,\mu)],\mu\in\mathcal{P}_2$. 其次，由动态规划原理 (5.2) 可知，存在某个 $\beta^{\epsilon}\in\mathcal{B}_{t,t+\theta}$, 使得对于所有的 $u\in\mathcal{U}_{t,t+\theta}$,

$$W(t,\mu)\geqslant\mathscr{G}^{t,\mu;u,\beta^{\epsilon}(u)}_{t,t+\theta}[W(t+\theta,\mathbb{P}^{t,\mu,u,\beta^{\epsilon}}(u))]-\epsilon\theta.$$

由此可知对于任何的 $\phi\in\overline{\mathscr{O}}^{K_0}_{\theta}W(t,\mu)$,

$$\begin{aligned}0=W(t,\mu)-\phi(t,\mu)&\geqslant\mathscr{G}^{t,\mu;u,\beta^{\epsilon}(u)}_{t,t+\theta}[W(t+\theta,\mathbb{P}^{t,\mu,u,\beta^{\epsilon}(u)})-\phi(t,\mu)]-\epsilon\theta\\&\geqslant\mathscr{G}^{t,\mu;u,\beta^{\epsilon}(u)}_{t,t+\theta}[\phi(t+\theta,\mathbb{P}^{t,\mu,u,\beta^{\epsilon}(u)})-\phi(t,\mu)]-\epsilon\theta.\end{aligned}$$

对 $\phi(s,\mathbb{P}^{t,\mu,u,\beta^{\epsilon}(u)})$ 应用泛函伊藤公式，根据 $\mathscr{G}^{t,\mu;u,\beta^{\epsilon}(u)}$ 的定义 (见 (5.1)), 可得

$$\begin{aligned}&\int_t^{t+\theta}\partial_t\phi(s,\mathbb{P}^{t,\mu,u,\beta^{\epsilon}(u)})+\mathbb{E}^{\mathbb{P}^{t,\mu,u,\beta^{\epsilon}(u)}}\Big[\Big[\partial_\mu\phi(s,\mathbb{P}^{t,\mu,u,\beta^{\epsilon}(u)},X)b(\cdot)\\&+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\{\partial_\omega\partial_\mu\phi(s,\mathbb{P}^{t,\mu,u,\beta^{\epsilon}(u)},X)\sigma\sigma^{\mathrm{T}}(\cdot)\}+f(\cdot)\Big](s,X,\mathbb{P}^{t,\mu,u,\beta^{\epsilon}(u)},u_s,\beta^{\epsilon}_s(u))\Big]\mathrm{d}s\leqslant\epsilon\theta.\end{aligned}$$

由上述不等式和引理 6.2, 可得对于任意的 $u\in\mathcal{U}_{t,t+\theta}$,

$$\begin{aligned}&\int_t^{t+\theta}\partial_t\phi(t,\mu)+\mathbb{E}^{\mu}\Big[\Big[\partial_\mu\phi(t,\mu,X)b(\cdot)+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\{\partial_\omega\partial_\mu\phi(t,\mu,X)\sigma\sigma^{\mathrm{T}}(\cdot)\}\\&+f(\cdot)\Big](t,X,\mu,u_s,\beta^{\epsilon}_s(u))\Big]\mathrm{d}s\leqslant\epsilon\theta+\theta\rho(\theta).\end{aligned}$$

因此，对于 $u\in\mathcal{U}_{t,t+\theta}$,

$$\int_t^{t+\theta}\partial_t\phi(t,\mu)+\mathbb{E}^{\mu}\Big[\inf_{v\in V}G(t,\mu,X,\partial_\mu\phi,\partial_\omega\partial_\mu\phi,u_s,v)\Big]\mathrm{d}s\leqslant\epsilon\theta+\theta\rho(\theta),\tag{6.8}$$

其中 G 在 (6.2) 中给出．因为 $G(t,\mu,X,p,P,u,v)$ 是 $\mathcal{F}_t\times\mathcal{B}(U)\times\mathcal{B}(V)$- 可测的，应用选取定理 (见 [28]) 和文 [29, 命题 1.2.2], 可知存在一个 $\mathcal{F}_t$- 可测的 u_t^ϵ, 使得 μ-a.s.,

$$\sup_{u\in U}\inf_{v\in V}G(t,\mu,X,p,P,u,v)\leqslant\inf_{v\in V}G(t,\mu,X,p,P,u_t^\epsilon,v)+\epsilon.\tag{6.9}$$

显然 $u_t^\epsilon\in\mathcal{U}_{t,t+\theta}$. 在 (6.8) 用 u_t^ϵ 替换 u_s, 可得

$$\int_t^{t+\theta}\partial_t\phi(t,\mu)+\mathbb{E}^{\mu}[\inf_{v\in V}G(t,\mu,X,\partial_\mu\phi,\partial_\omega\partial_\mu\phi,u_t^\epsilon,v)]\mathrm{d}s\leqslant\epsilon\theta+\theta\rho(\theta),$$

其中当 $\theta\downarrow 0$ 时， $\rho(\theta)\to 0$. 据此和 (6.9), 可得

$$\partial_t\phi(t,\mu)+\mathbb{E}^{\mu}\Big[\sup_{u\in U}\inf_{v\in V}G(t,\mu,X,\partial_\mu\phi,\partial_\omega\partial_\mu\phi,u,v)\Big]\mathrm{d}s\leqslant 2\epsilon+\rho(\theta).$$

令 $\epsilon\downarrow 0$ 和 $\theta\downarrow 0$, 可得 W 是方程 (6.1) 的一个 K_0- 粘性上解.

步骤 2 W 是方程 (6.1) 的一个 K_0- 粘性下解．仅需证明对于 $\phi\in\underline{\mathscr{O}}_\theta^K W(t,\mu)$,

$$\partial_t\phi(t,\mu)+\mathbb{E}^{\mu}\Big[\sup_{u\in U}\inf_{v\in V}G(t,\mu,X,\partial_\mu\phi,\partial_\omega\partial_\mu\phi,u,v)\Big]\geqslant 0.\tag{6.10}$$

假设 (6.10) 不成立，则存在某个 $L>0$, 使得

$$\partial_t\phi(t,\mu)+\mathbb{E}^{\mu}\Big[\sup_{u\in U}\inf_{v\in V}G(t,\mu,X,\partial_\mu\phi,\partial_\omega\partial_\mu\phi,u,v)\Big]\leqslant -4L<0.$$

根据 inf 的定义，存在一个可测函数 β^0, 使得对于所有的 $u\in U$,

$$\partial_t\phi(t,\mu)+\mathbb{E}^{\mu}[G(t,\mu,X,\partial_\mu\phi,\partial_\omega\partial_\mu\phi,u,\beta^0(u))]\leqslant -3L.\tag{6.11}$$

另外，根据动态规划原理 (5.2) 可知，对于任意 $0<\theta<r$ 和 $\phi\in\underline{\mathscr{O}}_\theta^K W(t,\mu)$,

$$\begin{aligned}0=W(t,\mu)-\phi(t,\mu)&=\inf_{\beta\in\mathcal{B}_{t,t+\theta}}\sup_{u\in\mathcal{U}_{t,t+\theta}}\mathscr{G}_{t,t+\theta}^{t,\mu;u,\beta(u)}[W(t+\theta,\mathbb{P}^{t,\mu,u,\beta(u)})-\phi(t,\mu)]\\&\leqslant\inf_{\beta\in\mathcal{B}_{t,t+\theta}}\sup_{u\in\mathcal{U}_{t,t+\theta}}\mathscr{G}_{t,t+\theta}^{t,\mu;u,\beta(u)}[\phi(t+\theta,\mathbb{P}^{t,\mu,u,\beta(u)})-\phi(t,\mu)].\end{aligned}\tag{6.12}$$

记 $\beta_s^0(u)(\omega)=\beta^0(u_s(\omega))$, $(s,\omega)\in[t,T]\times\Omega$. 则由 (6.12), 可得

$$\sup_{u\in\mathcal{U}_{t,t+\theta}}\mathscr{G}_{t,t+\theta}^{t,\mu;u,\beta^0(u)}[\phi(t+\theta,\mathbb{P}^{t,\mu,u,\beta^0(u)})-\phi(t,\mu)]\geqslant 0.$$

因此存在一个 $u^\epsilon\in\mathcal{U}_{t,t+\theta}$, 使得

$$\mathscr{G}_{t,t+\theta}^{t,\mu;u^\epsilon,\beta^0(u^\epsilon)}[\phi(t+\theta,\mathbb{P}^{t,\mu,u^\epsilon,\beta^0(u^\epsilon)})-\phi(t,\mu)]\geqslant -\epsilon\theta.$$

接下来，根据泛函伊藤公式 (2.4) 和 $\mathscr{G}^{t,\mu;u,v}$ 的定义，可以得到

$$\begin{aligned}&\int_t^{t+\theta}\partial_t\phi(s,\mathbb{P}^{t,\mu,u^\epsilon,\beta^0(u^\epsilon)})+\mathbb{E}^{\mathbb{P}^{t,\mu,u^\epsilon,\beta^0(u^\epsilon)}}\Big[\Big[\partial_\mu\phi(s,\mathbb{P}^{t,\mu,u^\epsilon,\beta^0(u^\epsilon)},X)b(\cdot)\\&+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\big\{\partial_\omega\partial_\mu\phi(s,\mathbb{P}^{t,\mu,u^\epsilon,\beta^0(u^\epsilon)},X)\sigma\sigma^{\mathrm{T}}(\cdot)\big\}+f(\cdot)\Big](s,X,\mathbb{P}^{t,\mu,u^\epsilon,\beta^0(u^\epsilon)},u_s^\epsilon,\beta_s^0(u^\epsilon))\Big]\mathrm{d}s\\&\geqslant -\epsilon\theta.\end{aligned}$$

由引理 6.2 可知

$$
\begin{aligned}
-\epsilon\theta+\theta\rho(\theta) &\leqslant \int_t^{t+\theta} \partial_t\phi(t,\mu)+\mathbb{E}^\mu\Big[\Big[\partial_\mu\phi(t,\mu,X)b(\cdot)+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\{\partial_\omega\partial_\mu\phi(t,\mu,X)\sigma\sigma^{\mathrm{T}}(\cdot)\} \\
&\quad + f(\cdot)\Big](t,X,\mu,u_s^\epsilon,\beta_s^0(u^\epsilon))\Big]\mathrm{d}s \\
&= \int_t^{t+\theta} \partial_t\phi(t,\mu)+\mathbb{E}^\mu[G(t,\mu,X,\partial_\mu\phi,\partial_\omega\partial_\mu\phi,u_s^\epsilon,\beta_s^0(u^\epsilon))]\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

然而，由 (6.11) 可得

$$
\int_t^{t+\theta} \partial_t\phi(t,\mu)+\mathbb{E}^\mu[G(t,\mu,X,\partial_\mu\phi,\partial_\omega\partial_\mu\phi,u_s^\epsilon,\beta_s^0(u^\epsilon))]\mathrm{d}s \leqslant -3L\theta.
$$

因此 $-\epsilon\theta+\theta\rho(\theta)\leqslant -3L\theta$. 令 $\theta\downarrow 0$ 和 $\epsilon\downarrow 0$, 可得 $L\leqslant 0$, 这与假设 $L>0$ 矛盾. 从而证明 W 是一个 K_0 - 粘性下解.

定理得证.

Wu 和 Zhang [24, 第 5 节] 指出 Bellman-Isaacs 主方程 (6.1) 的比较原则是一个公开问题. 目前, 我们仅能对一种特殊情况证明比较原则. 至于一般情况将在后续工作中研究.

定理 6.2 在假设 3.1 下，令 U,V 分别是 $\mathbb{R}^{m_1}$ 和 $\mathbb{R}^{m_2}$ 的两个闭子集. b,σ 独立于 u,v,μ 和 f 仅依赖于 u,v 并关于它们连续，则 (3.4) 中定义的下值函数 W 是方程 (6.1) 唯一的粘性解.

证 对于这种情形,

$$
\begin{aligned}
&H^-(t,\mu,p,P) \\
&= \sup_{\widetilde{u}\in L(\mathbb{R}^n;U)} \inf_{\widetilde{v}\in L(\mathbb{R}^n;V)} \Big\{\int_{\mathbb{R}^n}(b(s,x)p(\mu;x)+\frac{1}{2}\sigma\sigma^{\mathrm{T}}(s,x)P(\mu,x))\mu(\mathrm{d}x)+f(\widetilde{u},\widetilde{v})\Big\} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}(b(s,x)p(\mu;x)+\frac{1}{2}\sigma\sigma^{\mathrm{T}}(s,x)P(\mu,x))\mu(\mathrm{d}x)+\sup_{\widetilde{u}\in L(\mathbb{R}^n;U)} \inf_{\widetilde{v}\in L(\mathbb{R}^n;V)} f(\widetilde{u},\widetilde{v}).
\end{aligned}
$$

显然 $H^-(t,\mu,p,P)$ 满足文 [24, 假设 3.1]. 根据文 [24, 定理 4.13], (3.4) 中定义的 W 是方程 (6.1) 唯一的粘性解.

定理得证.

注 6.1 (i) 在本文中，我们证明下值函数 W 的动态规划原理，正则性和粘性解. 容易证明 (3.4) 中定义的上值函数 V 也具有类似结论.

(ii) 状态依赖主方程的比较定理已经在文 [13, 22] 中被研究. 如果目前工作退化为状态依赖情况，应用他们的方法可以得到相应的比较定理.

注 6.2 如果对于 $(t,\mu)\in[0,T]\times\mathcal{P}_2$, $p:[0,T]\times\mathcal{P}_2\times\Omega\to\mathbb{R}^d$, $P:[0,T]\times\mathcal{P}_2\times\Omega\to\mathbb{R}^{d\times d}$, $\omega\in\Omega$,

$$
H^-(t,\mu,p,P)=H^+(t,\mu,p,P),
$$

称 Bellmam-Isaacs 方程 (6.1) 和 (6.3) 的 Isaacs 条件成立. 进一步地, 如果对于 (6.1) 和 (6.3) 的比较定理成立, 则微分对策 (3.2)–(3.4) 具有唯一值.

参 考 文 献

[1] Fleming W H, Souganidis P E. On the existence of value functions of two-player, zero-sum stochastic differential games [J]. *Indiana Univ Math J*, 1989, 38:293–314.

[2] Buckdahn R, Li J. Stochastic differential games and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman-Isaacs equations [J]. *SIAM J Control Optim*, 2008, 47(1):444–475.

[3] Ekren I, Keller C, Touzi N, et al. On viscosity solutions of path dependent PDEs [J]. *Ann Probab*, 2013, 42:204–236.

[4] Ekren I, Touzi N, Zhang J. Viscosity solutions of fully nonlinear parabolic path dependent PDEs: part I [J]. *Ann Probab*, 2016, 44:1212–1253.

[5] Ekren I, Touzi N, Zhang J. Viscosity solutions of fully nonlinear parabolic path dependent PDEs: part II [J]. *Ann Probab*, 2016, 44:2507–2553.

[6] Pham T, Zhang J. Two person zero-sum game in weak formulation and path dependent Bellman-Isaacs equation [J]. *SIAM J Control Optim*, 2014, 52:2090–2121.

[7] Caines P E, Huang M, Malhame R P. Large population stochastic dynamic games: Closed-loop McKean-Vlasov systems and the Nash certainty equivalence principle [J]. *Commun Inf Syst*, 2006, 6:221–252.

[8] Lasry J, Lions P L. Mean field games [J]. *Jpn J Math*, 2007, 2:229–260.

[9] Bayraktar E, Cosso A, Pham H. Randomized dynamic programming principle and Feynman-Kac representation for optimal control of McKean-Vlasov dynamics [J]. *Trans Amer Math Soc*, 2018, 370:2115–2160.

[10] Bensoussan A, Chau M H M, Yam S C P. Mean-field stackelberg games: aggregation of delayed instructions [J]. *SIAM J Control Optim*, 2015, 53(4):2237–2266.

[11] Bensoussan A, Chau M H M, Yam S C P. Linear-quadratic mean field stackelberg games with state and control delays [J]. *SIAM J Control Optim*, 2017, 55(4):2748–2781.

[12] Bensoussan A, Frehse J, Yam S C P. Mean-field games and mean field type control theory [M]. New York: Springer-Verlag, 2013.

[13] Cosso A, Gozzi F, Kharroubi T, et al. Optimal control of path-dependent McKean-Vlasov SDEs in infinite dimension [J]. *Ann Appl Probab*, 2023, 33(4):2863–2918.

[14] Yong J. A linear-quadratic optimal control problem for mean-field stochastic differential equations [J]. *SIAM J Control Optim*, 2013, 51:2809–2838.

[15] Carmona R, Fouque J P, Sun L. Mean field games and systemic risk [J]. *Commun Math Sci*, 2015, 13:911–933.

[16] Li J, Min H. Weak solutions of mean-field stochastic differential equations and application to zero-sum stochastic differential games [J]. *SIAM J Control Optim*, 2016, 54(3):1826–1858.

[17] Djehiche B, Hamadène S. Optimal control and zero-sum stochastic differential game problems of mean-field type [J]. *Appl Math Optim*, 2020, 81:933–960.

[18] Cosso A, Pham H. Zero-sum stochastic differential games of generalized McKean-Vlasov type [J]. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 2019, 129:180–212.

[19] Averboukh Y. Krasovskii-Subbotin approach to mean field type differential games [J]. *Dyn Games Appl*, 2019, 9:573–593.

[20] Viens F, Zhang J. A martingale approach for fractional Brownian motions and related path dependent PDEs [J]. *Ann Appl Probab*, 2019, 29(6):3489–3540.

[21] Saporito Y, Zhang J. Stochastic control with delayed information and related nonlinear master equation [J]. *SIAM J Control Optim*, 2019, 57:693–717.

[22] Burzoni M, Ignazio V, Max Reppen A, et al. Viscosity solutions for controlled McKean-Vlasov jump-diffusions [J]. *SIAM J Control Optim*, 2020, 58(3):1676–1699.

[23] Talbi M, Touzi N, Zhang J. Viscosity solutions for obstacle problems on Wasserstein space [J]. *SIAM J Control Optim*, 2023, 61(3):1712–1736.

[24] Wu C, Zhang J. Viscosity solutions to parabolic master equations and McKean-Vlasov SDEs with closed-loop controls [J]. *Ann Appl Probab*, 2020, 30(2):936–986.

[25] Crandall M G, Ishii H, Lions P L. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations [J]. *Bull Amer Math Soc*, 1992, 27(1):1–67.

[26] Pham H, Wei X. Bellman equations and viscosity solutions for mean-field stochastic control problem [J]. *Esaim Contr Optim Ca*, 2018, 24:437–461.

[27] Dupire B. Functional Itô calculus [J]. *Quant Financ*, 2019, 19(5):721–729.

[28] El Karoui N, Tan X. Capacities, measurable selection and dynamic programming. Part I: abstract framework [J/OL]. arXiv:1310.3363.

[29] Zhang J. Backward stochastic differential equations-from linear to fully nonlinear theory [M]. New York: Springer-Verlag, 2017.

Stochastic Differential Games of Mean-field Type and Path-dependent Bellman-Isaacs Master Equations

HAO Tao[1]

[1]School of Statistics and Mathematics, Shandong University of Finance and Economics, Jinan 250014, China. E -mail: taohao@sdufe.edu.cn

Abstract The purpose of this paper is to analyse zero-sum stochastic differential games (SDGs for short), which is governed by path-dependent mean-field stochastic differential equations (SDEs for short). All the coefficients of dynamics and cost functional depend on the path of state and the distribution of path. Since the author uses a weak formulation with nonanticipative strategies vs feedback controls, value functions are defined on the space of all the square integrable probability measures. By modifying the set of test functions to guarantee the necessary compactness, the author proposes an intrinsic notion of viscosity solutions to path-dependent Bellman-Isaacs master equations. The regularity of value functions and dynamic programming principle are proved, and thereby the probabilistic interpretation for related Bellman-Isaacs master equations is obtained.

Keywords Stochastic differential game, Path-dependent mean-field SDE, Bellman-Isaacs master equation, Dynamic programming principle, Viscosity solution

2000 MR Subject Classification 93E20, 60H30, 60H35

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 45 No. 4, 2024

by ALLERTON PRESS, INC., USA