数 学 年 刊 A 辑
2024, 45(4):401–408
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2024.0027

无平方因子整数上的反正弦律*

冯 彬[1] 刘 双[2] 秦小二[3]

提要 作者证明了无平方因子整数上的 Deshouillers-Dress-Tenenbaum 反正弦律, 该定理改进了第一作者和崔振在短区间上的结果.

关键词 Selberg–Delange 方法, 反正弦律, 无平方因子整数
MR (2000) 主题分类 11N37, 11N60
中图法分类 O156.4
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2024)04-0401-8

§1 引 言

一般地, 用 $\tau(n)$ 表示正整数 n 的因子个数, 用 D_n 表示概率 $\frac{1}{\tau(n)}$ 取值为 $\frac{\log d}{\log n}$ 的均匀分布随机变量, 其中 d 遍历 n 的 $\tau(n)$ 个因子构成的集合. 考虑 D_n 的分布函数

$$F_n(t)=\mathrm{Prob}(D_n\leqslant t)=\frac{1}{\tau(n)}\sum_{d|n,\, d\leqslant n^t}1\quad(0\leqslant t\leqslant 1).$$

显然在 $[0,1]$ 上 $\{F_n\}_{n\geqslant 1}$ 不逐点收敛. 然而 Deshouillers, Dress 和 Tenenbaum [1] 或 [2, Theorem II.6.7] 证明了它的 Cesàro 平均序列在区间 $[0,1]$ 上一致收敛于反正弦律. 更精确地, 他们证明了渐近公式

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}F_n(t)=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{t}+O\Big(\frac{1}{\sqrt{\log x}}\Big)\tag{1.1}$$

对所有的 $x\geqslant 2$ 和 $0\leqslant t\leqslant 1$ 一致成立, 其中误差项是最优的. 最近, 崔振和吴杰在 [3, Theorem 2] 将该结果推广到短区间的情形, 证明了对任意的 $\varepsilon>0$, 渐近公式

$$\frac{1}{y}\sum_{x<n\leqslant x+y}F_n(t)=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{t}+O_\varepsilon\Big(\frac{1}{\sqrt{\log x}}\Big)\tag{1.2}$$

对所有的 $0\leqslant t\leqslant 1$, $x\geqslant 2$ 和 $x^{\frac{62}{77}+\varepsilon}\leqslant y\leqslant x$ 一致成立, 其中所隐含的常数仅依赖于 ε. 另一方面, Basquin [4] 考虑了反正弦律 (1.1) 推广到脆数上. 一般地, 用 $P(n)$ 表示正整数 $n\geqslant 2$ 的最大素因子, 并约定 $P(1)=1$. 如果 $P(n)\leqslant y$, 则称 n 是 y- 脆的. 对于 $x\geqslant 1$ 和

本文 2024 年 2 月 23 日收到, 2024 年 11 月 16 日收到修改稿.
[1]通信作者. 重庆第二师范学院数学与大数据学院, 重庆 400065. E-mail: binfengcq@163.com
[2]重庆工业职业技术院通识教育学院, 重庆 401120. E-mail: 499061067@qq.com
[3]重庆第二师范学院数学与大数据学院, 重庆 400065. E-mail: qincn328@sina.com
*本文受到重庆第二师范学院高层次引进人才项目 (No. 235032) 和重庆市教育委员会项目 (No. KJQN202403202) 的资助.

$y>1$, 记

$$S(x,y):=\{n\leqslant x: P(n)\leqslant y\},$$
$$\Psi(x,y):=|S(x,y)|,$$

用

$$u:=\frac{\log x}{\log y}$$

表示脆性参数. 对于正实数 $\kappa>0$, 设 $\rho_\kappa(u)$ 是微分差分方程

$$\begin{cases}\rho_\kappa(u)=\frac{u^{\kappa-1}}{\Gamma(\kappa)} & (0<u\leqslant 1),\\ u\rho_\kappa'(u)+(1-\kappa)\rho_\kappa(u)+\kappa\rho_\kappa(u-1)=0 & (u>1)\end{cases}$$

的唯一连续解. 特别地, $\rho(u):=\rho_1(u)$ 就是 Dickman 函数. 根据文 [5], 对于任给的 $\varepsilon>0$, 渐近公式

$$\Psi(x,y)=x\rho(u)\Big\{1+O\Big(\frac{\log(2u)}{\log y}\Big)\Big\}$$

对所有的

$$(H_\varepsilon)\qquad x\geqslant x_0(\varepsilon)\ \text{ 和 }\ \exp\{(\log_2 x)^{\frac{5}{3}+\varepsilon}\}\leqslant y\leqslant x\ \ (\text{这里}\log_2=\log\log)$$

一致成立. Basquin 的主要结果 [4, Theorem 1.1] 可以表述如下: 对 $(x,y)\in H_\varepsilon$ 和 $0\leqslant t\leqslant 1$, 渐近公式:

$$\frac{1}{\Psi(x,y)}\sum_{n\in S(x,y)}F_n(t)=J_u(t)+O_\varepsilon\Big(\frac{1}{\sqrt{\log y}}+\frac{\log(2u)}{\log y}\Big),\tag{1.3}$$

一致成立, 其中

$$J_u(t):=\frac{1}{\rho(u)}\int_0^{tu}\rho_{\frac12}(v)\rho_{\frac12}(u-v)\mathrm{d}v,$$

并且所隐含的 O- 常数仅依赖于 ε. 特别地, 如果 $x=y$ (即 $u=1$), 则有

$$J_1(t)=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{t}.$$

非常有趣的是, 他还证明了

$$J_u(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{(t-\frac12)u(2\xi'(u))^{\frac12}}\mathrm{e}^{-v^2}\mathrm{d}v+O\Big(\frac{1}{u}\Big),$$

其中, 对于 $u\neq 1$, $\xi(u)$ 是方程 $\mathrm{e}^{\xi}=1+t\xi$ 的唯一非零实根, 并约定 $\xi(1)=0$. 这表明, 当脆性参数 $u\to\infty$ 时, 正整数因子的平均分布就从反正弦律逐步演变为脆数因子的 Gauss 分布. 最近, 冯彬和崔振 [6, Theorem 1.2] 证明因子的反正弦律对 n 是无平方因子也成立. 该结果如下: 对所有的 $0\leqslant t\leqslant 1$, $x\geqslant 2$ 和 $x^{\frac{62}{77}+\varepsilon}\leqslant y\leqslant x$, 渐近公式

$$\frac{1}{(6/\pi^2)y}\sum_{\substack{x<n\leqslant x+y\\ n\ \text{无平方因子整数}}}F_n(t)=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{t}+O_\varepsilon\Big(\frac{1}{\sqrt{\log x}}\Big)\tag{1.4}$$

一致成立, 其中所隐含的常数仅依赖于 ε.

本文一方面将证明整数因子的 Deshouillers-Dress-Tenenbaum 的反正弦律在限制无平方整数上成立. 另一方面我们将改进冯 - 崔在式中 (1.4) 结果中的指数 $\frac{62}{77}$.

我们的结果为如下定理.

定理 1.1 (i) 对 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 和 $x \geqslant 2$,

$$\frac{1}{(6/\pi^2)x} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \text{ 无平方因子整数}}} F_n(t) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{t} + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\log x}}\Big) \tag{1.5}$$

一致成立, 其中隐含的 O- 常数是绝对的.

(ii) 对 $\varepsilon > 0$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $x \geqslant 2$ 和 $x^{\frac{19}{24}+\varepsilon} \leqslant y \leqslant x$,

$$\frac{1}{(6/\pi^2)y} \sum_{\substack{x < n \leqslant x+y \\ n \text{ 无平方因子整数}}} F_n(t) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{t} + O_\varepsilon\Big(\frac{1}{\sqrt{\log x}}\Big) \tag{1.6}$$

一致成立, 其中隐含的 O- 常数仅依赖 ε. 并且若 Riemann ζ-function 的零点密度猜想成立, 指数 $\frac{19}{24}$ 可减为 $\frac{3}{4}$.

作为比较, 我们有 $\frac{62}{77} \approx 0.805$, $\frac{19}{24} \approx 0.791$ 和 $\frac{3}{4} = 0.75$.

§2　定理 1.1 的证明

§2.1　短区间算术函数均值

我们主要工具是崔, 吕和吴 [7] 的最近关于短区间 Selberg-Delange 方法的结果. 我们约定 $f(n)$ 为算术函数及其 Dirichlet 级数定义如下：

$$\mathcal{F}(s) := \sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^{-s}. \tag{2.1}$$

设 $z \in \mathbb{C}$, $w \in \mathbb{C}$, $\alpha > 0$, $\delta \geqslant 0$, $A \geqslant 0$, $B > 0$, $C > 0$, $M > 0$, 我们称 Dirichlet 级数 $\mathcal{F}(s)$ 具有性质 $\mathcal{P}(z, w, \alpha, \delta, A, B, C, M)$, 如果以下条件满足:

(a) 对任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$|f(n)| \ll_\varepsilon M n^\varepsilon \quad (n \geqslant 1), \tag{2.2}$$

其中隐含的常数仅依赖于 ε;

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| n^{-\sigma} \leqslant M(\sigma - 1)^{-\alpha} \quad (\sigma > 1);$$

(c) Dirichlet 级数

$$\mathcal{G}(s; z, w) := \mathcal{F}(s) \zeta(s)^{-z} \zeta(2s)^{-w} \tag{2.3}$$

可在 $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$ 上解析开拓为一个全纯函数且在其上对 $|z| \leqslant B$ 和 $|w| \leqslant C$ 满足一致上界估计

$$|\mathcal{G}(s; z, w)| \leqslant M(|\tau| + 1)^{\max\{\delta(1-\sigma), 0\}} \log^A(|\tau| + 1). \tag{2.4}$$

这里以及后文中我们规定 $s = \sigma + \mathrm{i}\tau$, 其中 σ 和 τ 皆为实数, 我们约定选择复对数的主值.

下面的结果是 [7, Corollary 1.2].

引理 2.1 若 Dirichlet 级数 $\mathcal{F}(s)$ 具有性质 $\mathcal{P}(z,w,\alpha,\delta,A,B,C,M)$, 则对任意 $\varepsilon>0$, $x\geqslant 2$, $x^{\frac{7+5\delta}{12+5\delta}+\varepsilon}\leqslant y\leqslant x$, $|z|\leqslant B$ 和 $|w|\leqslant C$,

$$\sum_{x<n\leqslant x+y} f(n)=y(\log x)^{z-1}\Big\{\lambda(z,w)+O\Big(\frac{M}{\log x}\Big)\Big\} \tag{2.5}$$

一致成立, 这里

$$\lambda(z,w):=\frac{\mathcal{G}(1;z,w)\zeta(2)^w}{\Gamma(z)}$$

隐含的常数 O 仅依赖于 A,B,α,δ 和 ε. 并且, 若 Riemann ζ- 函数的零点密度猜想成立, 指数 $\frac{7+5\delta}{12+5\delta}$ 可减为 $\frac{1+\delta}{2+\delta}$.

§2.2 预备引理

由引理 2.1, 我们给出以下引理用于定理 1.1 的证明.

引理 2.2 设 $\mu(n)$ 为 Möbius 函数. 对任意 $\varepsilon>0$, $d\geqslant 1$, $x\geqslant 2$ 和 $x^{\frac{7}{12}+\varepsilon}\leqslant y\leqslant x$,

$$\sum_{\substack{x<n\leqslant x+y\\(d,n)=1}}\frac{\mu(n)^2}{\tau(n)}=\frac{hy}{\sqrt{\pi\log x}}\Big\{g(d)+O_\varepsilon\Big(\frac{\tau(d)}{\log x}\Big)\Big\} \tag{2.6}$$

一致成立, 其中

$$g(d):=\prod_{p\mid d}\Big(1+\frac{1}{2p}\Big)^{-1},\quad h:=\prod_{p}\Big(1+\frac{1}{2p}\Big)\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{\frac12}. \tag{2.7}$$

并且, 若 Riemann ζ- 函数的零点密度猜想成立, 指数 $\frac{7}{12}$ 可减为 $\frac12$.

证 我们将用引理 2.1 证明所需结果. 为此我们先验证需要满足的所有条件.

因函数 $n\mapsto\mu(n)^2\tau(n)^{-1}$ 是可乘的, 当 $\mathrm{Re}\,s>1$ 时, 有

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_d(s)&:=\sum_{n\geqslant 1,\,(d,n)=1}\frac{\mu(n)^2\tau(n)^{-1}}{n^s}=\prod_{p\nmid d}\Big(1+\frac{1}{2p^s}\Big)\\&=\zeta(s)^{\frac12}\zeta(2s)^{-\frac38}\mathcal{G}_d\Big(s;\frac12,-\frac38\Big),\end{aligned}$$

其中 $\zeta(s)$ 为 Riemann ζ- 函数以及

$$\mathcal{G}_d\Big(s;\frac12,-\frac38\Big):=\prod_{p}\Big(1+\frac{1}{2p^s}\Big)\Big(1-\frac{1}{p^s}\Big)^{\frac12}\Big(1-\frac{1}{p^{2s}}\Big)^{-\frac38}\prod_{p\mid d}\Big(1+\frac{1}{2p^s}\Big)^{-1}$$

是在 $\mathrm{Re}\,s>\frac13$ 时绝对收敛的 Dirichlet 级数. 当 $\mathrm{Re}\,s\geqslant\frac12$, 易得

$$\Big|\mathcal{G}_d\Big(s;\frac12,-\frac38\Big)\Big|\leqslant C\prod_{p\mid d}\Big(1-\frac{1}{2\sqrt{p}}\Big)^{-1}\leqslant C\tau(d), \tag{2.8}$$

其中 $C>0$ 是一个绝对常数. 因此 $\mathcal{F}_d(s)$ 是一个具有 $\mathcal{P}\big(\frac12,-\frac38,\frac12,0,0,\frac12,C\tau(d)\big)$ 性质的 Dirichlet 级数. 由 [7, Corollary 1.2] 和 $\lambda_0\big(\frac12,-\frac38\big)=\frac{hg(d)}{\Gamma(\frac12)}=\frac{hg(d)}{\sqrt{\pi}}$, 可得对 $d\geqslant 1$, $x\geqslant 2$ 和 $x^{\frac{7}{12}+\varepsilon}\leqslant y\leqslant x$ 渐近公式 (2.6) 一致成立.

§2.3　(1.6) 的证明

定义 $F_n^*(t) := \mu(n)^2 F_n(t)$ 和

$$S^*(x,y;t) := \frac{1}{(6/\pi^2)y} \sum_{\substack{x<n\leqslant x+y \\ n \text{ 无平方因子整数}}} F_n(t) = \frac{1}{(6/\pi^2)y} \sum_{x<n\leqslant x+y} F_n^*(t).$$

欲证 (1.6), 只需证明对 $0\leqslant t\leqslant 1$, $x\geqslant 2$ 和 $x^{\frac{19}{24}+\varepsilon}\leqslant y\leqslant x$,

$$S^*(x,y;t) = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{t} + O_\varepsilon\Big(\frac{1}{\sqrt{\log x}}\Big) \tag{2.9}$$

一致成立.

由 n 的因子关于 $\sqrt{n}$ 的对称性知

$$\begin{aligned}\mu(n)^2 F_n(t) &= \mu(n)^2 \mathrm{Prob}(D_n \geqslant 1-t)\\ &= \mu(n)^2(1-\mathrm{Prob}(D_n<1-t))\\ &= \mu(n)^2 - \mu(n)^2 F_n(1-t) + O(\mu(n)^2\tau(n)^{-1}).\end{aligned}$$

在 $(x,x+y]$ 上对 n 求和, 用 $d=1$ 时的引理 2.2 估计余项并由已知结果: (参见 [2, Theorem I.3.9]) 对 $x\geqslant 1$ 和 $x^{\frac12}\leqslant y\leqslant x$,

$$\sum_{x<n\leqslant x+y} \mu(n)^2 = \Big(\frac{6}{\pi^2}\Big)y + O(x^{\frac12})$$

一致成立. 于是可得, 对 $0\leqslant t\leqslant 1$, $x\geqslant 1$ 和 $x^{\frac{7}{12}+\varepsilon}\leqslant y\leqslant x$,

$$S^*(x,y;t) + S^*(x,y;1-t) = 1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\log x}}\Big)$$

一致成立.

另一方面, 有

$$\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{t} + \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{1-t} = 1 \quad (0\leqslant t\leqslant 1).$$

只需对 $0\leqslant t\leqslant \frac12$, $x\geqslant 2$ 和 $x^{\frac{19}{24}+\varepsilon}\leqslant y\leqslant x$ 证明 (2.9) 成立.

下设 $0\leqslant t\leqslant\frac12$. 首先

$$S^*(x,y;t) = \frac{1}{(6/\pi^2)y} \sum_{\substack{x<n\leqslant x+y \\ n \text{ 无平方因子整数}}} \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d\mid n,\, d\leqslant n^t} 1 = S_1^*(x,y;t) - S_2^*(x,y;t), \tag{2.10}$$

其中

$$S_1^*(x,y;t) := \frac{1}{(6/\pi^2)y} \sum_{\substack{x<n\leqslant x+y \\ n \text{ 无平方因子整数}}} \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d\mid n,\, d\leqslant (x+y)^t} 1,$$

$$S_2^*(x,y;t) := \frac{1}{(6/\pi^2)y} \sum_{\substack{x<n\leqslant x+y \\ n \text{ 无平方因子整数}}} \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d\mid n,\, n^t< d\leqslant (x+y)^t} 1.$$

交换求和顺序并注意到由 $(d,m)=1$ 可得 $\tau(dm)=\tau(d)\tau(m)$, 于是对 $d\leqslant (x+y)^t\leqslant$

$(2x)^{\frac{1}{2}}$ 和 $y \geqslant x^{\frac{19}{24}+\varepsilon}$, 有

$$S_1^*(x,y;t) = \frac{1}{(6/\pi^2)y} \sum_{d \leqslant (x+y)^t} \frac{\mu(d)^2}{\tau(d)} \sum_{\substack{x/d < m \leqslant (x+y)/d \\ (d,m)=1}} \frac{\mu(m)^2}{\tau(m)}.$$

容易验证 $\big(\frac{y}{d}\big) \geqslant \big(\frac{x}{d}\big)^{\frac{7}{12}+\varepsilon}$. 再用 $\big(\frac{x}{d}, \frac{y}{d}\big)$ 取代引理 2.2 中的 (x,y), 可得对 $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$, $x \geqslant 2$ 和 $x \geqslant y \geqslant x^{\frac{19}{24}+\varepsilon}$,

$$S_1^*(x,y;t) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \sum_{d \leqslant (x+y)^t} \frac{\mu(d)^2}{\tau(d)d\sqrt{\log(x/d)}} \Big\{ g(d) + O_\varepsilon\Big(\frac{\tau(d)}{\log x}\Big) \Big\}$$

一致成立. 显然 $S_1^*(x,y;t)$ 中误差项 $\ll \frac{1}{\sqrt{\log x}}$. 因此, 对 $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$, $x \geqslant 2$ 和 $x^{\frac{19}{24}+\varepsilon} \leqslant y \leqslant x$,

$$S_1^*(x,y;t) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \sum_{d \leqslant (x+y)^t} \frac{g(d)\mu(d)^2}{\tau(d)d\sqrt{\log(x/d)}} + O_\varepsilon\Big(\frac{1}{\sqrt{\log x}}\Big) \tag{2.11}$$

一致成立.

另一方面, 根据 [6, Lemma 3.3], 有

$$G(x) := \sum_{d \leqslant x} \frac{g(d)\mu(d)^2}{\tau(d)} = \frac{h^* x}{\sqrt{\pi \log(2x)}} \Big\{ 1 + O\Big(\frac{1}{\log(2x)}\Big) \Big\} \quad (x \geqslant 1), \tag{2.12}$$

其中 $h^* := \prod\limits_p \big(1 + \frac{1}{2p+1}\big)\big(1 - \frac{1}{p}\big)^{\frac{1}{2}}$. 由分部积分可得

$$\sum_{d \leqslant x^t} \frac{g(d)\mu(d)^2}{\tau(d)d\sqrt{\log(x/d)}} = \int_{1^-}^{x^t} \frac{\mathrm{d}G(u)}{u\sqrt{\log(x/u)}} = I(x;t) + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\log x}}\Big),$$

其中

$$I(x;t) := \int_1^{x^t} \frac{G(u)}{u^2\sqrt{\log(x/u)}} \Big(1 - \frac{1}{2\log(x/u)}\Big) \mathrm{d}u.$$

进一步, 由 (2.12) 和 $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$, 可得

$$\begin{aligned} I(x;t) &= \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log x}\Big)\Big\} \frac{h^*}{\sqrt{\pi}} \int_1^{x^t} \frac{1}{u\sqrt{\log(x/u)\log(2u)}} \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log(2u)}\Big)\Big\} \mathrm{d}u \\ &= \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log x}\Big)\Big\} \frac{h^*}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\log 2}{\log(2x)}}^{t + \frac{(1-t)\log 2}{\log(2x)}} \frac{1}{\sqrt{v(1-v)}} \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{v\log(2x)}\Big)\Big\} \mathrm{d}v \\ &= \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\log x}}\Big)\Big\} \frac{h^*}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\log 2}{\log(2x)}}^{t + \frac{(1-t)\log 2}{\log(2x)}} \frac{1}{\sqrt{v(1-v)}} \mathrm{d}v \\ &= \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\log x}}\Big)\Big\} \frac{h^*}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{v(1-v)}} \mathrm{d}v \\ &= \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\log x}}\Big)\Big\} \frac{2h^*}{\sqrt{\pi}} \arcsin\sqrt{t}. \end{aligned}$$

该估计结合

$$hh^* = \prod_p \Big(1 + \frac{1}{2p}\Big)\Big(1 - \frac{1}{p}\Big)\Big(1 + \frac{1}{2p+1}\Big) = \prod_p \Big(1 - \frac{1}{p^2}\Big) = \frac{6}{\pi^2},$$

可得

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\sum_{d\leqslant x^t}\frac{g(d)\mu(d)^2}{\tau(d)d\sqrt{\log(x/d)}}=\frac{6}{\pi^2}\cdot\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{t}+O\Big(\frac{1}{\sqrt{\log x}}\Big).$$

代入 (2.11) 并注意到 $\log(x+y)\asymp\log x$, 对 $0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}$, $x\geqslant 2$ 和 $x\geqslant y\geqslant x^{\frac{19}{24}+\varepsilon}$,

$$S_1^*(x,y;t)=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{t}+O\Big(\frac{1}{\sqrt{\log x}}\Big). \tag{2.13}$$

一致成立.

同理可得

$$\begin{aligned}S_2^*(x,y;t)&\leqslant\frac{1}{(6/\pi^2)y}\sum_{x^t<d\leqslant(x+y)^t}\frac{1}{\tau(d)}\sum_{x/d<m\leqslant(x+y)/d}\frac{1}{\tau(m)}\\&\ll\frac{1}{\sqrt{\log x}}\sum_{x^t<d\leqslant(x+y)^t}\frac{1}{d\tau(d)}\\&\ll\frac{1}{\sqrt{\log x}}.\end{aligned} \tag{2.14}$$

将 (2.13)–(2.14) 代入 (2.10), 可得, 当 $0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}$, $x\geqslant 2$ 和 $x\geqslant y\geqslant x^{\frac{19}{24}+\varepsilon}$ 时, (2.9) 成立.

§2.4　(1.5) 的证明

最后我们证明, 令 $y=x$, (1.5) 可由 (1.6) 推理得出. 由 $0\leqslant F_n^*(t)\leqslant 1$, $2^{[\frac{\log x}{2\log 2}]+1}\asymp\sqrt{x}$ 和

$$\sum_{k=0}^{[\frac{\log x}{2\log 2}]}\frac{1}{2^{k+1}}=1+O\Big(\frac{1}{\sqrt{x}}\Big),$$

可得

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}F_n^*(t)&=\sum_{\sqrt{x}<n\leqslant x}F_n^*(t)+O(\sqrt{x})\\&=\sum_{k=0}^{[\frac{\log x}{2\log 2}]}\sum_{x/2^{k+1}<n\leqslant x/2^k}F_n^*(t)+O(\sqrt{x})\\&=\sum_{k=0}^{[\frac{\log x}{2\log 2}]}\Big\{\frac{6}{\pi^2}\frac{x}{2^{k+1}}\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{t}+O\Big(\frac{x/2^{k+1}}{\sqrt{\log(x/2^{k+1})}}\Big)\Big\}+O(\sqrt{x})\\&=\frac{6}{\pi^2}x\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{t}+O\Big(\frac{x}{\sqrt{\log x}}\Big),\end{aligned}$$

该式与 (1.5) 等价.

致谢 衷心感谢吴杰教授对本文的指导和帮助.

参 考 文 献

[1] Deshouillers J-M, Dress F, Tenenbaum G. Lois de répartition des diviseurs, 1 [J]. *Acta Arith*, 1979, 34(4):273–285.

[2] Tenenbaum G. Introduction to analytic and probabilistic number theory [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

[3] Cui Z, Wu J. The Selberg-Delange method in short intervals with an application [J]. *Acta Arith*, 2014, 163(3):247–260.

[4] Basquin J. Loi de répartition moyenne des diviseurs des entiers friables [J]. *J Théor Nombres Bordeaux*, 2014, 26(2):281–305.

[5] Hildebrand A. On the local behavior of $\Psi(x, y)$ [J]. *Trans Amer Math Soc*, 1986, 297(2):729–751.

[6] Feng B, Cui Z. DDT theorem over square-free numbers in short intervals [J]. *Front Math China*, 2017, 12(2):367–375.

[7] Cui Z, Lü G S, Wu J. The Selberg-Delange method in short intervals with some applications [J]. *Sci China Math*, 2019, 62:447–468.

Arcsin Law on Divisors over Square-free Integers

FENG Bin[1] LIU Shuang[2] QIN Xiaoer[3]

[1]Corresponding author. School of Mathematics and Big Data, Chongqing University of Education, Chongqing 400065, China. E-mail: binfengcq@163.com

[2]College of General Education, Chongqing Industry Polytechnical College, Chongqing 401120, China. E-mail: 499061067@qq.com

[3]School of Mathematics and Big Data, Chongqing University of Education, Chongqing 400065, China. E-mail: qincn328@sina.com

Abstract In this paper, the authors prove that Deshouillers-Dress-Tenenbaum's arcsin law on divisors also holds if they restrict on square-free integers and improve a similar result of Feng & Cui in short intervals.

Keywords Selberg-Delange method, Arcsin law, Square-free integers

2000 MR Subject Classification 11N37, 11N60

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 45 No. 4, 2024

by ALLERTON PRESS, INC., USA