数 学 年 刊 A 辑
2024, 45(4):409–422
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2024.0028

涉及 Picard 定理的移动超曲面多变量亚纯映射正规族 *

陈 玮 [1] NGUYEN Van Thin[2] 王 琼 [3]

提要 作者证明了与 Picard 定理相关并涉及移动超曲面的全纯映射正规族的一些结果. 另外, 作者也得到一个涉及移动超曲面的亚纯映射拟正规定则. 这些结果推广了前人的一些相关结论.

关键词 全纯映射, 正规族, 正规映射, 亚纯映射
MR (2000) 主题分类 30D45, 32H30
中图法分类 O174.52
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2024)04-0409-14

§1 引 言

Picard 小定理和 Picard 大定理是复分析中两个最基本的定理.

定理 1.1 (Picard 小定理) 设 f 是复平面上的亚纯函数. 如果在黎曼球面上存在三个不同的点 w_1, w_2, w_3, 使得 $f(z) - w_i (i = 1, 2, 3)$ 在复平面上没有零点, 则 f 是一个常数.

定理 1.2 (Picard 大定理) 设 f 是 $\Delta^* = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < R\} (R > 0)$ 上的亚纯函数. 如果在黎曼球面上存在三个不同的点 w_1, w_2, w_3, 使得 $f(z) - w_i (i = 1, 2, 3)$ 在 Δ^* 内没有零点, 则原点不是 f 的本性奇点.

因为无穷远点为非多项式全纯函数的本性奇点, 由此可知 Picard 大定理包含 Picard 小定理. Montel 曾利用单复变亚纯函数正规族对 Picard 定理, Schottky 定理和 Landau 定理进行了非常细致地研究. 设 $\mathcal{F}$ 是定义在复域 $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$ 内的一个亚纯函数族, 若 $\mathcal{F}$ 的每一个函数列都存在一个子序列在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上按球面度量一致收敛到一个亚纯函数或恒等于 ∞, 则称 $\mathcal{F}$ 在 $\mathbb{D}$ 内正规. 下面涉及 Picard 定理的 Montel 型定理是单复变函数正规定则中非常著名的结果.

定理 1.3[1] 设 $\mathcal{F}$ 为复域 $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$ 内的一族亚纯函数. 假设黎曼球面上存在三个不同的点 w_1, w_2 和 w_3, 使得对任意 $f \in \mathcal{F}$ 都有 $f(z) - w_i$ $(i = 1, 2, 3)$ 在 $\mathbb{D}$ 内没有零点, 则 $\mathcal{F}$ 在 $\mathbb{D}$ 内正规.

本文 2023 年 11 月 7 日收到, 2024 年 12 月 27 日收到修改稿.

[1]重庆邮电大学理学院, 重庆 400065. E-mail: weichensdu@126.com

[2]Department of Mathematics, Thai Nguyen University of Education, Thai Nguyen, Viet Nam.
E-mail: thinmath@gmail.com

[3]通信作者. 重庆邮电大学复杂系统智能分析与决策重点实验室, 重庆 400065.
E-mail: qiongwangsdu@126.com

*本文受到国家自然科学基金 (No. 12101099), 中国博士后科学基金 (No. 2023M730387), 重庆市自然科学基金 (Nos. CSTB2022NSCQ-MSX0528, CSTB2023NSCQ-MSX0435), 重庆市教育委员会科学技术研究项目 (No. KJQN202300644) 和重庆市博士后特别资助项目 (No. 2022CQBSHTB2007) 的资助.

定理 1.4[2] 设 $\mathcal{F}$ 是复域 $\mathbb{D}\subseteq\mathbb{C}$ 内的一族亚纯函数. 假设黎曼球面上存在多个不同的点 $w_1,w_2,\cdots,w_q$ $(q\geqslant 3)$, 使得 $\mathcal{F}$ 中的每一个函数 f 都有 $f(z)-w_i$ 在 $\mathbb{D}$ 内不存在重级小于 m_i $(i=1,2,\cdots,q)$ 的零点，其中 m_i $(i=1,2,\cdots,q)$ 是 q 个固定的正整数或 ∞, 并且 $\sum\limits_{j=1}^{q}\dfrac{1}{m_j}<q-2$, 则 $\mathcal{F}$ 在 $\mathbb{D}$ 内正规.

设 $f:\mathbb{D}\subseteq\mathbb{C}^m\to\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 是一个全纯映射， U 是 $\mathbb{D}$ 内的非空连通开子集. 若存在一个全纯映射 $\widetilde{f}=(f_0,\cdots,f_n):U\to\mathbb{C}^{n+1}$, 使得对于 $z\in U$ 有 $\mathbb{P}(\widetilde{f}(z))\equiv f(z)$, 其中 $\mathbb{P}:\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}\to\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 是标准商映射，则称 $\widetilde{f}$ 为 f 在 U 上的一个表示. 此外，如果 $f_0,\cdots,f_n$ 没有公共零点，则称 $\widetilde{f}$ 为 f 在 U 内的约化表示. 显然对于任意点 $z\in\mathbb{D}$, 总能在 z 附近找到 f 的约化表示.

设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 的一族全纯映射，若 $\mathcal{F}$ 中的任意序列包含一个子序列，使得该子序列在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 的一个全纯映射，则称 $\mathcal{F}$ 在 $\mathbb{D}$ 内正规. 进一步，若 $\mathcal{F}$ 在 $\mathbb{D}$ 中点 a 的某个邻域上是正规的，我们称 $\mathcal{F}$ 在点 a 处正规. 通过利用 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 中的 Fubini-Study 度量，我们可以得到 $\mathcal{F}$ 上的一个序列 $\{f_p\}_{p=1}^{\infty}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到全纯映射 $f:\mathbb{D}\longrightarrow\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 当且仅当对于任意 $a\in\mathbb{D}$, 每个 f_p 在 a 的固定邻域 U 上有一个约化表示 $\widetilde{f}_p=(f_{p0},f_{p1},\cdots,f_{pn})$, 使得 $\{f_{pi}\}_{p=1}^{\infty}$ 在 U 的紧子集上一致收敛到 U 上的全纯函数 f_i $(i=0,\cdots,n)$, 并且 $\widetilde{f}=(f_0,f_1,\cdots,f_n)$ 是 f 在 U 上的约化表示.

如果 $\mathbb{C}^{N+1}$ 内有一个 N 维线性子空间 $\widetilde{H}$ 满足 $\rho(\widetilde{H}\backslash\{0\})=H$, 其中 $\rho:\mathbb{C}^{N+1}\backslash\{0\}\to P^N(\mathbb{C})$ 是标准投影映射，则 H 称为一个超平面. 设 $H_1,\cdots,H_q(q\geqslant N+1)$ 为 $P^N(\mathbb{C})$ 中的 q 个超平面. 记 $(\mathbb{C}^{N+1})^*$ 为 $\mathbb{C}^{N+1}$ 的对偶空间，则存在 $\alpha_i\in(\mathbb{C}^{N+1})^*\backslash\{0\}$, 使得 $H_i=\rho(\ker(\alpha_i)\backslash\{0\})(i=1,\cdots,q)$ 成立. 若对于任意指标 $1\leqslant j_1<\cdots<j_{N+1}\leqslant q$, $\dim\langle\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_{N+1}}\rangle=N+1$, 其中 $\langle\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_{N+1}}\rangle$ 是由 $\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_{N+1}}$ 张成的 $(\mathbb{C}^{N+1})^*$ 中的线性子空间，则称 $\{H_i\}_{i=1}^{q}$ 处于一般位置.

设 D 为 $\mathbb{C}^n$ 中的一个复域，对于任意 $z\in D$, 定义 $L_i(z)(Z):=\sum\limits_{j=1}^{N+1}a_{ij}(z)Z_j,Z=(Z_1,\cdots,Z_{N+1})\in\mathbb{C}^{N+1}$, 其中 $a_{ij}(z)(1\leqslant j\leqslant N+1)$ 是 D 内没有公共零点的全纯函数. 对于任意给定的 $z\in D$, 用 $\ker(L_i(z))(\subset\mathbb{C}^{N+1})$ 表示线性函数 $L_i(z):\mathbb{C}^{N+1}\to\mathbb{C}$ 的核，并且令 $H_i(z):=\rho(\ker(L_i(z))\backslash\{0\})(\subset P^N(\mathbb{C}))$ 是对应于线性形式 $L_i(z)$ 的移动超平面. 若由 $L_i(z)(1\leqslant i\leqslant q)$ 组成的任意 $N+1$ 个线性形式的系数组成的 $(N+1)\times(N+1)$ 阶矩阵的行列式对任意 $z\in D$ 都不等于 0, 则称集合 $\{H_i(z):1\leqslant i\leqslant q\}$ 在 $P^N(\mathbb{C})$ 内处于点态一般位置，即集合 $\{H_i(z):1\leqslant i\leqslant q\}$ 在 $P^N(\mathbb{C})$ 内按点态处于一般位置，当且仅当对于任意的 $z\in D$, $\{H_i(z):1\leqslant i\leqslant q\}$ 处于一般位置. 对于一个集合 $E\subseteq\mathbb{C}^n$, 集合 $\{H_i(z):1\leqslant i\leqslant q\}$ 在 $P^N(\mathbb{C})$ 内处于点态一般位置，当且仅当 $\{H_i(z):1\leqslant i\leqslant q\}$ 在 E 的某个邻域上处于点态一般位置.

正规族在多复变函数几何理论中具有重要意义. Fujimoto [3], Green [4] 和 Nochka [5] 曾建立了若干个全纯映射的 Picard 型定理，并且还给出了涉及截断重数的结果. 受 Green 和 Nochka 的 Picard 型定理以及 Aladro 和 Krantz [6] 工作的启发， Tu [7] 在 $\mathbb{C}^m$ 内将定理 1.3 和定理 1.4 推广到全纯映射的情形. 2002 年，利用 Stoll [8] 在 $\mathbb{D}\subseteq\mathbb{C}^n$ 内给出的涉及非负除子的正规族定义， Tu [9] 得到了一些多复变亚纯映射的正规定则，并推广了 Fujimoto [10] 的结果，详细结果请参阅 [7, 11–13]． 2006 年， Tu [12] 进一步证明了一些与 Nochka-Picard 型小定理相关的涉及移动超平面的多复变全纯映射 Picard 型大定理，具体定理内容如下.

定理 1.5[12] 设 $f:\mathbb{D}-S\to\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 为全纯映射，其中 S 是 $\mathbb{D}\subseteq\mathbb{C}^m$ 内的解析子集且 $\dim_{\mathbb{C}} S\leqslant m-2$. 假设 $H_1,\cdots,H_q$ 为 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 内 $q(\geqslant 2n+1)$ 个处于点态一般位置的移动超平面. 如果 f 与 H_j 在 $\mathbb{D}-S$ 上相交至少 m_j $(j=1,\cdots,q)$ 次，其中 $m_1,\cdots,m_q$ 都是正整数或 ∞, 且满足 $\sum\limits_{j=1}^{q}\dfrac{1}{m_j}<\dfrac{q-n-1}{n}$, 则全纯映射 f 可以延拓为从 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 的一个全纯映射.

定理 1.6[12] 设 $f:\mathbb{D}-S\to\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 为全纯映射，其中 S 是 $\mathbb{D}\subseteq\mathbb{C}^m$ 内余维为 1 的解析子集且其奇异点是正则交叉的. 假设 $H_1,\cdots,H_q$ 为 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 内 $q(\geqslant 2n+1)$ 个处于点态一般位置的移动超平面. 如果 f 与 H_j 在 $\mathbb{D}-S$ 上相交至少 m_j $(j=1,\cdots,q)$ 次，其中 $m_1,\cdots,m_q$ 都是正整数或 ∞, 且有 $\sum\limits_{j=1}^{q}\dfrac{1}{m_j}<\dfrac{q-n-1}{n}$, 则全纯映射 f 可以延拓为从 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 的一个全纯映射.

本文的目的是将上述结果从移动超平面推广到移动超曲面. 在陈述本文的结果之前，我们将回顾一些记号.

设 $H_{\mathbb{D}}$ 是 $\mathbb{D}$ 上的全纯函数环， $H_{\mathbb{D}}[x_0,\cdots,x_n]$ 是 $H_{\mathbb{D}}$ 中关于变量 $\mathbf{x}=(x_0,\cdots,x_n)$ 的齐次多项式. 令 $Q\in H_{\mathbb{D}}[x_0,\cdots,x_n]\setminus\{0\}$ 且满足 $\deg(Q)=d$, 则我们可以将 Q 写成

$$Q(\mathbf{x})=Q(x_0,\cdots,x_n)=\sum_{k=0}^{n_d}a_k\mathbf{x}^{I_k}=\sum_{k=0}^{n_d}a_k x_0^{i_{k0}}\ldots x_n^{i_{kn}},$$

其中 $a_k\in H_{\mathbb{D}}$, $I_k=(i_{k0},\cdots,i_{kn})$, 并且 $|I_k|=i_{k0}+\cdots+i_{kn}=d$, $k=0,\cdots,n_d$, $n_d=\binom{n+d}{n}-1$. 因此，对于任意 $z\in\mathbb{D}$ 都对应 $\mathbb{C}[x_0,\cdots,x_n]$ 中的一个元素

$$Q_z(\mathbf{x})=\sum_{k=0}^{n_d}a_k(z)\mathbf{x}^{I_k},$$

以及一个超曲面

$$D_z:=\{\mathbf{x}\in\mathbb{C}^{n+1}:Q_z(\mathbf{x})=0\}.$$

由 Q 定义的超曲面 D 称为 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 中的移动超曲面. 令 $\mathbf{a}=(a_0,\cdots,a_{n_d})$ 是与 D (或 Q) 相关的向量函数. 在本文中，我们只考虑 $H_{\mathbb{D}}[x_0,\cdots,x_n]$ 上的齐次多项式 Q, 使得 Q 的系数没有公共零点.

设 $P_0,\cdots,P_n$ 是 $H_{\mathbb{D}}[x_0,\cdots,x_n]$ 上的 $n+1$ 个次数相同的齐次多项式. 记 $S(\{P_i\}_{i=0}^n)$ 为所有非零齐次多项式

$$Q=\sum_{i=0}^{n}b_iP_i,\quad b_i\in H_{\mathbb{D}}$$

的集合. 设 $T_0,\cdots,T_n$ 是 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 中具有次数相同的移动超曲面，其中 T_i 由非零多项式 P_i $(0\leqslant i\leqslant N)$ 定义. 记 $\widetilde{S}(\{T_i\}_{i=0}^n)$ 表示 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 中由 $Q\in S(\{P_i\}_{i=0}^n)$ 定义的所有移动超曲面的集合.

设 $\{Q_j=\sum\limits_{i=0}^{n}b_{ij}P_i\}_{j=1}^q$ 是 $S(\{P_i\}_{i=0}^n)$ 内的 q $(q\geqslant n+1)$ 个齐次多项式. 若对所有的 $1\leqslant j_0<\cdots<j_n\leqslant q$ 和 $z\in\mathbb{D}$, 有

$$\det(b_{ij_k})_{0\leqslant k,i\leqslant n}\neq 0,$$

则称 $\{Q_j\}_{j=1}^q$ 在 $S(\{P_i\}_{i=0}^n)$ 处于点态一般位置.

定义 1.1 设 D_j 是 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 中由次数为 d_j 的齐次多项式 $Q_j \in H_{\mathbb{D}}[x_0,\cdots,x_n], j=1,\cdots,q$ 定义的移动超曲面. 若存在 $z\in\mathbb{D}$, 使得对于任意 $1\leqslant j_0<\cdots<j_n\leqslant q$, 方程组

$$Q_{j_i}(z)(x_0,\cdots,x_n)=0,\quad 0\leqslant i\leqslant n$$

在 $\mathbb{C}^{n+1}$ 内只有平凡解 $\mathbf{x}=(0,\cdots,0)$, 则称移动超曲面 $\{D_j\}_{j=1}^q(q\geqslant n+1)$ 在 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 内位于 (弱) 一般位置. 这等价于

$$D(Q_1,\cdots,Q_q)(z)=\prod_{1\leqslant j_0<\cdots<j_n\leqslant q}\inf_{\|\mathbf{x}\|=1}(|Q_{j_0}(z)(\mathbf{x})|^2+\cdots+|Q_{j_n}(z)(\mathbf{x})|^2)>0,$$

其中 $\mathbf{x}=(x_0,\cdots,x_n)$, $Q_j(z)(\mathbf{x})=\sum\limits_{|I|=d_j}a_{jI}(z)\mathbf{x}^I$ 和 $\|\mathbf{x}\|=\big(\sum\limits_{j=0}^n|x_j|^2\big)^{\frac12}$.

令 $\mathcal{D}=\{D_1,\cdots,D_q\}$ 是任意超曲面集合, Q_j 是 $\mathbb{C}[x_0,\cdots,x_n]$ 内由次数为 d_j 的多项式 D_j, $j=1,\cdots,q$ 定义的齐次多项式. 令 $m_{\mathcal{D}}$ 是 d_j 的最小公倍数, $j=1,\cdots,q$, 以及

$$n_{\mathcal{D}}=\binom{n+m_{\mathcal{D}}}{n}-1.$$

记 $Q_j^*=Q_j^{m_{\mathcal{D}}/d_j}, j=1,\cdots,q$, 并且令 $\mathbf{a}_j^*$ 为与 Q_j^* 相关的向量.

现在我们将定义两个自然数元组的一种序关系: 令 $J=(j_0,\cdots,j_n), I=(i_0,\cdots,i_n)\in N^{n+1}$, 则 $J<I$ 当且仅当对于某些 $b\in\{0,\cdots,n\}$, 有 $j_b<i_b$ 且 $j_l=i_l, l<b$. 对于非负整数 $(n+1)$ 元组 $I=(i_0,\cdots,i_n)$, 我们记 $|I|:=\sum\limits_j i_j$.

设 $(x_0:\cdots:x_n)$ 是 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 中的一个齐次坐标, $\{I_0,\cdots,I_{n_{\mathcal{D}}}\}$ 是 $(n+1)$ 元组的集合且满足 $|I_j|=m_{\mathcal{D}}$, $j=0,\cdots,n_{\mathcal{D}}$ 以及当 $i<j\in\{0,\cdots,n_{\mathcal{D}}\}$ 时有 $I_i<I_j$. 令 $\mathbf{x}=(x_0,\cdots,x_n)\in\mathbb{C}^{n+1}$, 将 $\mathbf{x}^I$ 记为 $x_0^{i_0}\ldots x_n^{i_n}$, 其中 $I=(i_0,\cdots,i_n)\in\{I_0,\cdots,I_{n_{\mathcal{D}}}\}$, 则可以将阶数为 $m_{\mathcal{D}}$ 的单项式集合按照序关系排列为 $\{\mathbf{x}^{I_0},\cdots,\mathbf{x}^{I_{n_{\mathcal{D}}}}\}$.

记

$$\varrho_{m_{\mathcal{D}}}:\mathbb{P}^n(\mathbb{C})\to\mathbb{P}^{n_{\mathcal{D}}}(\mathbb{C})$$

表示 $m_{\mathcal{D}}$ 次 Veronese 嵌入. 设 $(w_0:\cdots:w_{n_{\mathcal{D}}})$ 为 $\mathbb{P}^{n_{\mathcal{D}}}(\mathbb{C})$ 中的齐次坐标, 则 $\varrho_{m_{\mathcal{D}}}$ 可以表示为

$$\varrho_{m_{\mathcal{D}}}(x)=(w_0(\mathbf{x}):\cdots:w_{n_{\mathcal{D}}}(\mathbf{x})),$$

其中 $w_j(x)=\mathbf{x}^{I_j}$, $j=0,\cdots,n_{\mathcal{D}}$. 对于任意超曲面 $D_j\in\{D_1,\cdots,D_q\}$ 和 $\mathbf{a}_j=(a_{j0},\cdots,a_{jn_{\mathcal{D}}})$, 其中 $\mathbf{a}_j$ 是与 Q_j^* 相关的向量. 设

$$L_j=Q_j^*=a_{j0}w_0+\cdots+a_{jn_{\mathcal{D}}}w_{n_{\mathcal{D}}},$$

则 L_j 称为 $\mathbb{P}^{n_{\mathcal{D}}}(\mathbb{C})$ 中的线性形式. 设 H_j^* 是由 L_j 定义的 $\mathbb{P}^{n_{\mathcal{D}}}(\mathbb{C})$ 中的一个超平面, 则我们称该超平面 H_j^* 与 Q_j^* (或 D_j) 相关. 因此, 对于 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 中的超曲面集合 $\mathcal{D}=\{D_1,\cdots,D_q\}$, 我们可以得到与之相关的 $\mathbb{P}^{n_{\mathcal{D}}}(\mathbb{C})$ 中的超平面集合 $\mathcal{H}^*=\{H_1^*,\cdots,H_q^*\}$.

设 $q>n_{\mathcal{D}}$ 为正整数, 如果 $\{H_1^*,\cdots,H_q^*\}$ 在 $\mathbb{P}^{n_{\mathcal{D}}}(\mathbb{C})$ 中处于一般位置, 则我们说集合 $\mathcal{D}$ 在 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 中处于 Veronese 嵌入一般位置. 因此, 对于任意的 $i_0,\cdots,i_{n_{\mathcal{D}}}\in\{1,\cdots,q\}$, 如果向量 $\mathbf{a}_{i_0}^*,\cdots,\mathbf{a}_{i_{n_{\mathcal{D}}}}^*$ 的秩为 $n_{\mathcal{D}}$, 则称集合 $\mathcal{D}$ 处于 Veronese 嵌入一般位置. 我们可以看到, 对于超平面处于 Veronese 嵌入一般位置的概念等价于通常情况下的超平面处于一般位置. 对于超曲面, Veronese 嵌入一般位置意味着 $n_{\mathcal{D}}$- 子一般位置.

设 $\mathcal{D}=\{D_1,\cdots,D_q\}$ 是任意移动超曲面的集合，$Q_j(j=1,\cdots,q)$ 是 $H_{\mathbb{D}}[x_0,\cdots,x_n]$ 中定义 D_j 的次数为 d_j 的齐次多项式. 令 $m_{\mathcal{D}}$ 是 d_j 的最小公倍数 d_j 并记

$$n_{\mathcal{D}}=\binom{n+m_{\mathcal{D}}}{n}-1.$$

对于 $j=1,2,\cdots,q$, 设 $Q_j^*=Q_j^{m_{\mathcal{D}}/d_j}$, $\mathbf{a}_j^*$ 是与 Q_j^* 相关的向量函数以及

$$L_j=Q_j^*=a_{j0}w_0+\cdots+a_{jn_{\mathcal{D}}}w_{n_{\mathcal{D}}},$$

则 L_j 是 $\mathbb{P}^{n_{\mathcal{D}}}(\mathbb{C})$ 中的移动线性形式. 设 H_j^* 是 $\mathbb{P}^{n_{\mathcal{D}}}(\mathbb{C})$ 中由 L_j (或 Q_j^*) 定义的一个移动超平面，我们称该超平面 H_j^* 与 Q_j^* (或 D_j) 相关. 因此，对于 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 中的移动超曲面 $\{D_1,\cdots,D_q\}$ 的集合，我们可以在 $\mathbb{P}^{n_{\mathcal{D}}}(\mathbb{C})$ 中得到与其相关的移动超平面集合 $\mathcal{H}^*=\{H_1^*,\cdots,H_q^*\}$.

定义 1.2　设 $\{D_j\}_{j=1}^q$ 为 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 中由次数为 d_j 的齐次多项式 $Q_j\in H_{\mathbb{D}}[x_0,\cdots,x_n]$ 所定义的移动超曲面，其中 $j=1,\cdots,q,q\geqslant n_{\mathcal{D}}+1$. 我们说移动超曲面 $\{D_j\}_{j=1}^q$ 位于 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 中的 (弱) 一般位置，如果存在 $z\in\mathbb{D}$, 使得与集合 $\mathcal{H}^*(z)=\{H_1^*(z),\cdots,H_q^*(z)\}$ 相关的超平面在 z 点处于 $\mathbb{P}^{n_{\mathcal{D}}}(\mathbb{C})$ 中的一般位置.

注 1.1　如果存在 $z\in\mathbb{D}$, 使得在 $\mathbb{P}^{n_{\mathcal{D}}}(\mathbb{C})$ 内，有

$$D(Q_1^*,\cdots,Q_q^*)(z)>0,$$

我们说超曲面 $\{D_j\}_{j=1}^q$ 在 $\mathbb{P}^{n_{\mathcal{D}}}(\mathbb{C})$ 内处于 Veronese 嵌入 (弱) 一般位置.

我们将证明以下定理.

定理 1.7　设 $f:\mathbb{D}-S\to\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 为全纯映射，其中 S 是 $\mathbb{D}$ 内的解析子集且满足 $\dim_{\mathbb{C}}S\leqslant m-2$. 设 $D_1,\cdots,D_q$ 是 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 中 $q(\geqslant 2n_{\mathcal{D}}+1)$ 个移动超曲面，$Q_j^*=\sum\limits_{i=0}^{n_{\mathcal{D}}}d_{ij}\omega_i$, $(\omega_i=\mathbf{x}^{I_i})$ 是 $H_{\mathbb{D}}[\omega_0,\cdots,\omega_{n_{\mathcal{D}}}]$ 中的移动多项式，其定义了与 D_j 相关的超平面 H_j^*, 使得对于任何 $z\in\mathbb{D}$:

$$D(Q_1^*,\cdots,Q_q^*)(z)>0.$$

令 $\widetilde{f}=(f_0,\cdots,f_n)$ 为 f 在 $\mathbb{D}-S$ 上的约化表示. 如果对于某些 i 和 z, $f_i(z)\neq 0$, 当 $m_j\geqslant 2$ 时，有

$$\sup_{\substack{1\leqslant|\alpha|\leqslant m_j-1\\ z\in f^{-1}(D_j)}}\Big|\frac{\partial^{\alpha}(Q_j(\widetilde{f_i}))}{\partial z^{\alpha}}(z)\Big|<\infty,\quad j\in\{1,\cdots,q\},$$

其中 $m_1,\cdots,m_q$ 是正整数或 ∞, 并且 $\sum\limits_{j=1}^{q}\dfrac{d_j}{m_j}<\dfrac{(q-n_{\mathcal{D}}-1)m_{\mathcal{D}}}{n_{\mathcal{D}}}$, 那么全纯映射 f 可以延拓为从 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 的一个全纯映射.

定理 1.8　设 $f:\mathbb{D}-S\to\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 为全纯映射，其中 S 是 $\mathbb{D}\subseteq\mathbb{C}^m$ 内余维为 1 的解析子集且其奇异点是正则交叉的. 设 $D_1,\cdots,D_q$ 是 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 中 q $(\geqslant 2n_{\mathcal{D}}+1)$ 个移动超曲面，$Q_j^*=\sum\limits_{i=0}^{n_{\mathcal{D}}}d_{ij}\omega_i$, $(\omega_i=\mathbf{x}^{I_i})$ 是 $H_{\mathbb{D}}[\omega_0,\cdots,\omega_{n_{\mathcal{D}}}]$ 中的移动线性形式，其定义了与 D_j 相关的超平面 H_j^*, 使得对于任何 $z\in\mathbb{D}$,

$$D(Q_1^*,\cdots,Q_q^*)(z)>0.$$

令 $\widetilde{f}=(f_0,\cdots,f_n)$ 为 f 在 $\mathbb{D}-S$ 上的约化表示. 如果对于某些 i 和 z, $f_i(z)\neq 0$, 当 $m_j\geqslant 2$ 时，有

$$\sup_{\substack{1\leqslant|\alpha|\leqslant m_j-1\\ z\in f^{-1}(D_j)}}\Big|\frac{\partial^\alpha(Q_j(\widetilde{f}_i))}{\partial z^\alpha}(z)\Big|<\infty,\quad j\in\{1,\cdots,q\},$$

其中 $m_1,\cdots,m_q$ 是正整数或 ∞, 且 $\sum\limits_{j=1}^{q}\dfrac{d_j}{m_j}<\dfrac{(q-n_{\mathcal{D}}-1)m_{\mathcal{D}}}{n_{\mathcal{D}}}$, 则全纯映射 f 可以延拓为从 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 的一个全纯映射.

设 $D\subseteq\mathbb{C}^n$ 且 f 是 D 上的非零的全纯函数. 对于任意点 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in D$, 假设在 a 的一个领域内，我们可以将 f 展开为级数

$$f(u_1+a_1,\cdots,u_n+a_n)=\sum_{m=0}^{\infty}P_m(u_1,\cdots,u_n),$$

其中 P_m 恒等于零或是次数为 m 的齐次多项式. 定义

$$\nu_f(a):=\min\{m:P_m(u)\not\equiv 0\}$$

为 f 在 a 点的零点指数. 定义 D 上的一个除子是 D 上的整值函数 ν, 使得对于每一个 $a\in D$, 在 a 的一个邻域 U 上，存在全纯函数 $g(z)(\not\equiv 0)$ 和 $h(z)(\not\equiv 0)$, 使得 $\nu(z)=\nu_g(z)-\nu_h(z)$. 定义 D 上除子 ν 的支集

$$\operatorname{supp}\nu:=\overline{\{z\in D:\nu(z)\neq 0\}}.$$

记 $\mathcal{D}^+(D)=\{\nu$: D 上的一个非负除子 $\}$. 设 f 是从 D 到 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的一个亚纯映射. 对于任意齐次多项式 $Q\in\widetilde{\mathcal{H}}_D[\omega_0,\cdots,\omega_N]$, 我们定义 D 上的除子 $\nu(f,Q)$. 对于任意 $a\in D$, 令 $\widetilde{f}=(f_0,\cdots,f_N)$ 是 f 在 a 的一个邻域 U 中的约化表示，记

$$\nu(f,Q)(a):=\nu_{Q(\widetilde{f})}(a)$$

其中 $Q(\widetilde{f}):=Q(f_0,\cdots,f_N)$.

设 H 为由齐次多项式 $Q\in\widetilde{\mathcal{H}}_D[\omega_0,\cdots,\omega_N]$ 定义的移动超曲面， $f:D\to\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 为亚纯映射. 如上所述，我们定义除子 $\nu(f,H)(z):=\nu(f,Q)(z)$. 显然，如果 $f(D)\not\subset H$ (即在 U 上 $Q(\widetilde{f})\not\equiv 0$), 则 supp $\nu(f,H)$ 在 D 中要么是空集，要么是纯 $(n-1)$ 维解析集. 如果 $f(D)\subset H$, 则我们记 $\nu(f,H)=\infty$ 以及 $\operatorname{supp}\nu(f,H)=D$. 有时我们用 D 上的除子 $\nu(f,H)$ 来定义 $f^{-1}(H)$. 我们可以把 $\nu(f,H)$ 写成 $\nu(f,H)=\sum\limits_{i\in I}n_iX_i$, 其中 X_i 是 $\operatorname{supp}\nu(f,H)$ 的不可约部分，n_i 是 $X_i\cap\operatorname{Reg}(\operatorname{supp}\nu(f,H))$ 上的常数 $\nu(f,H)(z)$, 其中 $\operatorname{Reg}()$ 表示所有正则点的集合.

如果对任意的 $z\in\operatorname{supp}\nu(f,H)$ 有 $\nu(f,H)(z)\geqslant m$, 则我们说亚纯映射 f 在 D 上交 H 至少 m 次. 特别地，如果 $f(D)\subset H$ 或 $f(D)\cap H=\emptyset$, 则称 f 交 H 为 ∞ 次.

$\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 的亚纯映射序列 $\{f_p\}$ 称在 $\mathbb{D}$ 上是拟正规的，当且仅当对于任意 $z\in\mathbb{D}$, 存在一个邻域 U, 使得 $\{f_p\}$ 在 U 内至多除去一个处处稠密的解析子集 S 紧致收敛，即对于任意 $G\subset U\setminus S$, 使得 $U\setminus S$ 中 G 的闭包 $\overline{G}$ 为 U 的紧子集，存在 p_0 满足 $p\geqslant p_0$, 使得当 $I(f_p)\cap G=\emptyset$ 时， $\{f_p|_G\}_{p\geqslant p_0}$ 在 G 上一致收敛于从 G 到 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 的全纯映射. 设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 的一族亚纯映射，若 $\mathcal{F}$ 中的任何序列具有子序列在 $\mathbb{D}$ 上是拟正规序列，则 $\mathcal{F}$ 被称为 $\mathbb{D}$ 上的拟正规族.

值得注意的是，D 上收敛的亚纯映射序列总是在 D 上是拟正规的. 但是 D 上的拟正规亚纯映射序列可能不是收敛的. Tu [12] 利用定理 1.5 得到了涉及移动超平面的多复变亚纯映射拟正规定则，具体如下.

定理 1.9[12] 设 $\mathcal{F}=\{f \mid f: D\subseteq C^n\to P^N(C)\}$ 为一族亚纯映射，$H_1(z),\cdots,H_q(z)$ $(z\in D)$ 为 $P^N(C)$ 中 $q(\geqslant 2N+1)$ 个处于点态一般位置的移动超平面. 如果对于 D 上的任意给定的紧子集 K, 下面 $2(n-1)$ 维集合

$$\{z\in \operatorname{supp}\nu(f,H_j):\nu(f,H_j)(z)<m_j\}\cap K,\quad j=1,\cdots,q$$

(不计重数) 的勒贝格测度是有界的, 其中 $\{m_j\}_{j=1}^q$ 是给定的正整数或 ∞ 且满足 $\sum\limits_{j=1}^q\dfrac{1}{m_j}<\dfrac{q-(N+1)}{N}$, 则 $\mathcal{F}$ 是 D 上的一个拟正规族.

受 Dethloff, Thai 和 Trang [14] 工作的启发，我们将定理 1.9 推广如下.

定理 1.10　设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{D}\subseteq\mathbb{C}^m$ 到 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 的一族亚纯映射，$q(\geqslant 2n_{\mathcal{D}}+1)$ 为一个正整数. 假设对于任意 $f\in\mathcal{F}$, 存在由次数分别为 $d_1,\cdots,d_q$ 的齐次多项式 $Q_{1,f},\cdots,Q_{q,f}\in H_{\mathbb{D}}[x_0,\cdots,x_n]$ 所定义的 q 个移动超曲面 $D_{1,f},\cdots,D_{q,f}$, 满足以下条件：

(i) 对于任意的 $1\leqslant j\leqslant q$ 和 $f\in\mathcal{F}$, 齐次多项式 $Q_{j,f}$ 的系数都在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致存在上界. 令 $m_{\mathcal{D}}=\operatorname{lcm}(d_1,\cdots,d_q)$, $n_{\mathcal{D}}=\binom{n+m_{\mathcal{D}}}{n}-1$ 和 $Q_{j,f}^*=Q_{j,f}^{m_{\mathcal{D}}/d_j}$. 假设 $H_{\mathbb{D}}[\omega_0,\cdots,\omega_{n_{\mathcal{D}}}]$ 中的 $Q_{j,f}^*=\sum\limits_{i=0}^{n_{\mathcal{D}}}c_{ij}(f)\omega_i$, $(\omega_i=\mathbf{x}^{I_i})$ 是移动多项式，其定义了与 $D_{j,f}$ 的相关的超平面 $H_{j,f}^*$, 使得对于任意 $\{f_p\}\subset\mathcal{F}$, 存在 $z\in\mathbb{D}$ (可能取决于序列), 满足

$$\inf_{p\in\mathbb{N}}D(Q_{1,f_p}^*,\cdots,Q_{q,f_p}^*)(z)>0.$$

(ii) 对于 $\mathbb{D}$ 上任意给定的紧子集 K, $2(m-1)$ 维集合 $f^{-1}(D_{k,f})\cap K$ $(1\leqslant k\leqslant n_{\mathcal{D}}+1)$ (计重数) 的勒贝格测度有界 (特别地，$f(\mathbb{D})\not\subset D_{k,f}(1\leqslant k\leqslant n_{\mathcal{D}}+1)$).

(iii) 在 $\mathbb{D}$ 中存在一个处处稠密的解析集 S, 使得对于 $\mathbb{D}-S$ 的任意给定的紧子集 K 以及任意 $f\in\mathcal{F}$, 下列 $2(m-1)$ 维集合

$$\{z\in\operatorname{supp}\nu_{Q_{k,f}(\widetilde{f})}:\nu_{Q_{k,f}(\widetilde{f})}(z)<m_k\}\cap K\ (n_{\mathcal{D}}+2\leqslant k\leqslant q)$$

(不计重数) 的勒贝格测度是有界的，其中 $\{m_k\}_{k=n_{\mathcal{D}}+2}^q$ 是给定的正整数或 ∞ 并且

$$\sum_{k=n_{\mathcal{D}}+2}^q\frac{d_k}{m_k}<\frac{(q-n_{\mathcal{D}}-1)m_{\mathcal{D}}}{n_{\mathcal{D}}},$$

$\mathcal{F}$ 在 $\mathbb{D}$ 上是拟正规的.

§2　引　理

为了证明我们的结果，需要如下引理.

定义 2.1[8] 设 $\{A_i\}$ 是 $\mathbb{D}$ 内的闭子集序列. $\{A_i\}$ 在 $\mathbb{D}$ 的一个闭子集内收敛于 A, 当且仅当对于任意 $z\in A$, z 的任意邻域 U 与 A_i 相交且每个 U 与无穷多个 A_i 相交.

引理 2.1[8] 设 $\{N_i\}$ 是 $\mathbb{D}\subseteq\mathbb{C}^m$ 上的 $(m-1)$ 维解析子集，对于 $\mathbb{D}$ 上的任意给定的紧子集 K, $2(m-1)$ 维子集 $N_i\cap K(i=1,2,\cdots)$ (不计重数) 的勒贝格测度有上界，则 $\{N_i\}$

在 $\mathbb{D}$ 上是正规的.

引理 2.2[8] 设 $\{N_i\}$ 是 $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}^m$ 上的 $(m-1)$ 维解析子集，对于 $\mathbb{D}$ 上的任意给定的紧子集 K, $2(m-1)$ 维子集 $N_i \cap K (i=1,2,\cdots)$ (不计重数) 的勒贝格测度有上界，并且 $\{N_i\}$ 收敛于 N, 则 N 要么是空集，要么是 $\mathbb{D}$ 的 $(m-1)$ 维解析子集.

引理 2.3[6] 设 F 是 $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}^m$ 到 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 上的一族全纯映射. F 在 $\mathbb{D}$ 上不正规当且仅当存在一个紧子集 $K_0 \subset \mathbb{D}$ 和序列 $\{f_p\} \subset F$, $\{y_p\} \subset K_0$, $\{r_p\} \subset \mathbb{R}$, 其中 $r_p > 0$ 和 $r_p \to 0^+$, $\{u_p\} \subset \mathbb{C}^m$ 是单位向量，使得

$$g_p(\xi) := f_p(y_p + r_p u_p \xi),$$

其中 $\xi \in \mathbb{C}$ 满足 $y_p + r_p u_p \xi \in \mathbb{D}$, 在 $\mathbb{C}$ 的紧子集上一致收敛于一个非常数全纯映射 g.

定义 2.2 设 $\Omega \subset \mathbb{C}^m$ 是一个双曲域，M 是一个具有度量 ds_M^2 的完备复 Hermittian 流形. 全纯映射 $f(z) : \Omega \to M$ 被称为正规的，当且仅当存在一个正常数 c, 使得对于任意 $z \in \Omega$ 和 $\xi \in T_z(\Omega)$, 有

$$|ds_M^2(f(z), df(z)(\xi))| \leqslant c K_\Omega(z, \xi),$$

其中 $df(z)$ 是从 $T_z(\Omega)$ 到 $T_{f(z)}(M)$ 的映射， K_Ω 表示 Ω 上的无穷维 Kobayashi 度量.

引理 2.4[12] 设 $f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}^m \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 为一个全纯映射， f 在 $\mathbb{D}$ 内不正规当且仅当存在 $\{y_p\} \subset \mathbb{D}$, $\{r_p\}$ 和 $r_p > 0$ $(r_p \to 0^+)$ 以及 $\{u_p\} \subset \mathbb{C}^m$ ($\{u_p\}$ 为欧几里得单位向量), 使得

$$g_p(\xi) := f(y_p + r_p u_p \xi), \quad \xi \in \mathbb{C},$$

其中 $\lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{r_p}{d(y_p, \mathbb{C}^m \setminus \mathbb{D})} = 0$($d(p,q)$ 是 $\mathbb{C}^m$ 上的 p 和 q 之间的欧氏距离), 在 $\mathbb{C}$ 的紧子集上一致收敛到一个非常数全纯映射 g.

引理 2.5[14] 设 n 和 $q \geqslant n+1$ 为两个任意给定的自然数， D_{kp} $(1 \leqslant k \leqslant q, p \geqslant 1)$ 为 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 中的移动超曲面，并且满足以下条件：

(i) 对于任意 $1 \leqslant k \leqslant q, p \geqslant 1$, 由 D_{kp} 定义的齐次多项式 Q_{kp} 的系数在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致有界.

(ii) 存在 $z_0 \in \mathbb{D}$, 使得

$$\inf_{p\in\mathbb{N}} \{D(Q_{1p}, \cdots, Q_{qp})(z_0)\} > \delta > 0.$$

则

(a) 存在一个序列 $\{j_p\} \subset \mathbb{N}$, 使得对于 $1 \leqslant k \leqslant q$, Q_{kj_p} 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛于不恒为零的齐次多项式 Q_k (即 Q_{kj_p} 和 Q_k 是 $H_{\mathbb{D}}[x_0, \cdots, x_N]$ 中次数相同的齐次多项式, 并且它们的系数在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛). 此外, 我们还可以得到 $D(Q_1, \cdots, Q_q)(z_0) > \delta > 0$, 以及超曲面 $Q_1(z_0), \cdots, Q_q(z_0)$ 位于一般位置, 并且移动超曲面 $Q_1(z), \cdots, Q_q(z)$ 处于 (弱) 一般位置.

(b) 存在序列 $\{j_p\} \subset \mathbb{N}$ 和 $r = r(\delta) > 0$, 使得

$$\inf_{p\in\mathbb{N}} D(Q_{1j_p}, \cdots, Q_{qj_p})(z) > \frac{\delta}{4}, \quad \forall z \in B(z_0, r).$$

下面介绍 Nevanlinna-Cartan 理论中的 Picard 型定理，该定理由 Nochka 给出.

引理 2.6[5] 假设 $q \geqslant 2n+1$ 个超平面 $H_1, \cdots, H_q$ 在 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 上处于一般位置，并且对于任意 q 个正整数 (可能是 ∞) $m_1, \cdots, m_q$, 满足

$$\sum_{j=1}^{q} \frac{1}{m_j} < \frac{q-n-1}{n}.$$

那么，不存在非常数全纯映射 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, 使得 f 与 H_j 相交且至少 m_j $(1 \leqslant j \leqslant q)$ 次.

引理 2.7[15] 设 M 为复流形， S 为 M 的复解析子集，其中 $\mathrm{codim} S \geqslant 2$. 则在 $M-S$ 上有 $K_{M-S} = K_M$.

§3　定理 1.7 和 1.8 的证明

为了证明本文的定理，我们需要用到下述引理.

引理 3.1　设 $f : \mathbb{U} \subseteq \mathbb{C}^m \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 为全纯映射，其中 $\mathbb{U}$ 为有界域. 设 $D_1, \cdots, D_q$ 是 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 中 q $(\geqslant 2n_{\mathcal{D}}+1)$ 个移动超曲面， $Q_j^* = \sum\limits_{i=0}^{n_{\mathcal{D}}} d_{ij}\omega_i$, $(\omega_i = \mathbf{x}^{I_i})$ 是 $H_{\mathbb{D}}[\omega_0, \cdots, \omega_{n_{\mathcal{D}}}]$ 中齐次多项式，其定义与 D_j 相关的超平面 H_j^*. 对任意 $z \in \overline{\mathbb{U}}$,

$$D(Q_1^*, \cdots, Q_q^*)(z) > 0.$$

假设 $\widetilde{f} = (f_0, \cdots, f_n)$ 是 f 在 $\mathbb{U}$ 上的一个约化表示，并且对于某些 i 和 z, $f_i(z) \neq 0$, 以及当 $m_j \geqslant 2$ 时，对于所有的 $j \in \{1, \cdots, q\}$,

$$\sup_{\substack{1 \leqslant |\alpha| \leqslant m_j - 1 \\ z \in f^{-1}(D_j)}} \left| \frac{\partial^{\alpha}(Q_j(\widetilde{f}_i))}{\partial z^{\alpha}}(z) \right| < \infty,$$

其中 $m_1, \cdots, m_q$ 是正整数或 ∞, 且满足 $\sum\limits_{j=1}^{q} \dfrac{d_j}{m_j} < \dfrac{(q-n_{\mathcal{D}}-1)m_{\mathcal{D}}}{n_{\mathcal{D}}}$, 则 f 是正规全纯映射.

证　假设 f 在 $\mathbb{U}$ 上不正规，那么根据引理 2.4, 存在 $\{y_p\} \subset \mathbb{U}$, $\{r_p\}$, $r_p > 0$, $r_p \to 0^+$ 以及单位向量 $\{u_p\} \subset \mathbb{C}^m$, 使得

$$g_p(\xi) := f(y_p + r_p u_p \xi), \quad \xi \in \mathbb{C},$$

其中 $\lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{r_p}{d(y_p, \mathbb{C}^m \setminus \mathbb{U})} = 0$, 在 $\mathbb{C}$ 的紧子集上一致收敛到非常数全纯映射 g. 由于 $\overline{\mathbb{U}}$ 是紧的，那么可以假设 $y_p \to y_0 \in \overline{\mathbb{U}}$. 从而有 $G_p := \rho_{m_{\mathcal{D}}}(g_p)$ 在 $\mathbb{C}$ 的紧子集上一致收敛到 $G := \rho_{m_{\mathcal{D}}}(g)$. 根据假设，对于任意的 $z \in \overline{\mathbb{U}}$, 有

$$D(Q_1^*, \cdots, Q_q^*)(z) > 0.$$

特别地，由 $Q_1^*, \cdots, Q_q^*$ 定义的移动超平面 $H_1^*, \cdots, H_q^*$ 在 $\mathbb{P}^{n_{\mathcal{D}}}(\mathbb{C})$ 上处于点态一般位置.

假设 f 和 g 的约化表示分别是 $\widetilde{f} = (f_0, \cdots, f_n)$ 和 $\widetilde{g} = (g_0, \cdots, g_n)$. 那么当 $p \to \infty$ 时， $\widetilde{g}_p(\xi) = \widetilde{f}(y_p + r_p u_p \xi) \to \widetilde{g}(\xi)$. 因此，

$$Q_{jp, y_p + r_p u_p \xi}(\widetilde{g}_p(\xi)) \to Q_{j, y_0}(\widetilde{g}(\xi)) \tag{3.1}$$

在 $\mathbb{C}$ 的紧子集上收敛.

断言 $g(z)$ 与 D_{j,y_0} 相交至少 m_j 次. 假设存在 $\xi_0\in\mathbb{C}$, 满足 $Q_{j,y_0}(\widetilde{g}(\xi_0))=0$, 则存在一个圆盘 $B(\xi_0,r_0)$, 使得 $g(B(\xi_0,r_0))\subset\{[x_0:\cdots:x_n]\in\mathbb{P}^n(\mathbb{C}):x_i\neq 0\}$. 由于在 $B(\xi_0,r_0)$ 上 $g_i(\xi)\neq 0$, 根据 Hurwitz 定理, 当 p 充分大时, $g_{ip}(\xi)=f_i(y_p+r_pu_p\xi)\neq 0$. 因此 $\widetilde{g}_{ip}(\xi)=\big(\frac{g_{0p}}{g_{ip}},\cdots,\frac{g_{np}}{g_{ip}}\big)\to\widetilde{g}_i(\xi)$, 以及 $Q_{jp,y_p+r_pu_p\xi}(\widetilde{g}_{ip}(\xi))\to Q_{j,y_0}(\widetilde{g}_i(\xi))$ 一致收敛. 这进一步表明, 对所有 $k\geqslant 1$,

$$(Q_{jp,y_p+r_pu_p\xi}(\widetilde{g}_{ip}(\xi)))^{(k)}\to(Q_{j,y_0}(\widetilde{g}_i(\xi)))^{(k)}\tag{3.2}$$

一致收敛.

由引理假设可知当 $m_j\geqslant 2$ 时, 对任意 $j\in\{1,\cdots,q\}$, $p\geqslant 1$, 有

$$\sup_{\substack{1\leqslant|\alpha|\leqslant m_j-1\\ z\in f^{-1}(D_j)}}\Big|\frac{\partial^\alpha(Q_j(\widetilde{f}_i))}{\partial z^\alpha}(z)\Big|<\infty,$$

其中 $f_i(z)\neq 0$. 由于 $Q_{j,y_0}(\widetilde{g}(\xi_0))=0$, 则根据 Hurwitz 定理, 存在 $\xi_p\to\xi_0$, 使得 $Q_{j,y_p+r_pu_p\xi_p}(\widetilde{g}_p(\xi_p))=0$, 这意味着 $y_p+r_pu_p\xi_p\in f^{-1}(D_{jp})$. 因此, 存在 $M>0$, 使得当 $m_j\geqslant 2$ $(1\leqslant j\leqslant q)$ 和 p 充分大时, 对于所有 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m):1\leqslant|\alpha|\leqslant m_j-1$ 和一些 $i\in\{0,\cdots,n\}$, 有

$$\Big|\frac{\partial^\alpha(Q_j(\widetilde{f}_i))}{\partial z^\alpha}(y_p+r_pu_p\xi_p)\Big|\leqslant M.$$

由此可知

$$|(Q_{j,y_p+r_pu_p\xi}(\widetilde{g}_{ip}(\xi)))^{(|\alpha|)}|_{\xi=\xi_p}=\Big|\sum_\alpha c_\alpha r_p^{|\alpha|}\frac{\partial^\alpha(Q_j(\widetilde{f}_i))}{\partial z_1^{\alpha_1}\cdots\partial z_m^{\alpha_m}}(y_p+r_pu_p\xi_p)\Big|\leqslant Cr_p^{|\alpha|}M,\tag{3.3}$$

其中 C,c_α 是常数. 结合 (3.2) 和 (3.3), 我们可知对于 $1\leqslant|\alpha|\leqslant m_j-1$ 有

$$(Q_{j,y_0}(\widetilde{g}_i(\xi)))^{(|\alpha|)}|_{\xi=\xi_0}=\lim_{p\to\infty}(Q_{j,y_p+r_pu_p\xi}(\widetilde{g}_{ip}(\xi)))^{(|\alpha|)}_{\xi=\xi_p}=0.$$

因此 ξ_0 是 $Q_{j,y_0}(\widetilde{g})$ 的零点, 其重数至少为 m_j. 因此, 断言被证明.

注意到 $G_p=\rho_{m_{\mathcal{D}}}(g_p)$ 在 $B(\xi_0,r_0)$ 的紧子集上一致收敛于 $G=\rho_{m_{\mathcal{D}}}(g)$. 设 G 的约化表示为 $\widetilde{G}$. 注意到 $Q_{j,y_0}^{m_{\mathcal{D}}/d_j}(\widetilde{g}(\xi))=Q_j^*(y_0)(\widetilde{G}(\xi))$, 则对于每个 $1\leqslant j\leqslant q$, G 与 $H_j^*(y_0)$ 相交至少 $\frac{m_{\mathcal{D}}}{d_j}m_j$ 次, 其中 $H_j^*(y_0)$ 是与 $Q_j^*(y_0)$ 相关的超平面. 由于 $H_1^*(y_0),\cdots,H_q^*(y_0)$ 位于 $\mathbb{P}^{n_{\mathcal{D}}}(\mathbb{C})$ 上的一般位置. 根据假设有

$$\sum_{j=1}^q\frac{d_j}{m_j}<\frac{(q-n_{\mathcal{D}}-1)m_{\mathcal{D}}}{n_{\mathcal{D}}},$$

并应用引理 2.6, 我们得到 G 是常数, 从而 g 也是常数, 这与 g 为非常数全纯映射矛盾. 因此, f 在 $\mathbb{U}$ 内是正规的.

定理 1.7 的证明 对选定一个点 $P_0\in S$, 在 $\mathbb{C}^m$ 上取 P_0 的一个有界邻域 U (U 是双曲的), 使得 $\overline{U}\subset\mathbb{D}$. 根据引理 3.1, f 是正规全纯映射. 因此, 根据定义 2.2, 存在一个正常数 c, 使得对所有 $z,w\in U-S$, 有

$$d_{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})}(f(z),\ f(w))\leqslant cd_{U-S}^K(z,w),$$

其中 d_{U-S}^K 和 $d_{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})}$ 分别表示 $U-S$ 上的 Kobayashi 度量和 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 上的 Fubini-Study 度量. 对于任意的 $z_0 \in U \cap S$, 令 $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 $U-S$ 的一个点序列且收敛于 z_0. 由引理 2.7, 我们有

$$d_{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})}(f(z_i), f(z_j)) \leqslant c d_{U-S}^K(z_i, z_j) = c d_U^K(z_i, z_j).$$

因此 $\{f(z_i)\}_{i=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 上的一个柯西序列, 以及 $\{f(z_i)\}_{i=1}^{\infty}$ 收敛到点 $a_0 \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. 从而 $f(z)$ 在 U 上有一个延拓 $h(z)$ 并且 $h(z)$ 在 U–S 上是全纯且在 U 上是连续的. 因此根据 Riemann 延拓定理, $h(z)$ 在 U 上是全纯的. 定理 1.7 证明完成.

定理 1.8 的证明 对选定一个点 $P_0 \in S$, 在 $\mathbb{C}^m$ 内取 P_0 的一个有界邻域 U, 使得 $\overline{U} \subset \mathbb{D}$. 根据引理 3.1, f 是正规全纯映射. 同时根据定理 1.8 的假设, S 是 U 上余维为 1 的解析子集, 并且其奇异点是正则交叉的. 因此根据 Joseph 和 Kwack [16, 定理 2.3], $f(z)$ 可以延拓为 U 到 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 的全纯映射. 定理 1.8 被证明.

§4 定理 1.10 的证明

为了证明定理 1.10, 我们还需要如下引理.

引理 4.1 设 $\mathcal{F}$ 是从 $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}^m$ 到 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 的一族全纯映射. 假设 $q \geqslant 2n_{\mathcal{D}}+1$ 是一个正整数, $m_1, \cdots, m_q$ 为正整数或 ∞ 且满足

$$\sum_{j=1}^{q} \frac{d_j}{m_j} < \frac{(q-n_{\mathcal{D}}-1)m_{\mathcal{D}}}{n_{\mathcal{D}}}.$$

如果对于任意 $f \in \mathcal{F}$, 存在由次数分别为 $d_1, \cdots, d_q$ 的齐次多项式 $Q_{1,f}, \cdots, Q_{q,f} \in H_{\mathbb{D}}[x_0, \cdots, x_n]$ 定义的 q 个移动超曲面 $D_{1,f}, \cdots, D_{q,f}$ 在紧子集 $K \subset \mathbb{D}$ 上满足以下条件:

(i) 对于任意 $1 \leqslant j \leqslant q$ 和 $f \in \mathcal{F}$, 齐次多项式 $Q_{j,f}$ 的系数在紧子集 K 上一致有界. 设 $m_{\mathcal{D}} = \mathrm{lcm}(d_1, \cdots, d_q)$, $n_{\mathcal{D}} = \binom{n+m_{\mathcal{D}}}{n} - 1$, $Q_{j,f}^* = Q_{j,f}^{m_{\mathcal{D}}/d_j}$. 假设 $Q_{j,f}^* = \sum\limits_{i=0}^{n_{\mathcal{D}}} c_{ij}(f)\omega_i$, ($\omega_i = \mathbf{x}^{I_i}$) 为 $H_{\mathbb{D}}[\omega_0, \cdots, \omega_{n_{\mathcal{D}}}]$ 上移动多项式, 其定义了与 $D_{j,f}$ ($j = 1, \cdots, q$) 相关的超平面 $H_{j,f}^*$, 并且对于任意 $\{f_p\} \subset \mathcal{F}$ 和给定的 $z \in \mathbb{D}$, 有

$$\inf_{p \in \mathbb{N}} D(Q_{1,f_p}^*, \cdots, Q_{q,f_p}^*)(z) > 0.$$

(ii) 假设对于任意 $f \in \mathcal{F}$ 以及 $1 \leqslant j \leqslant q$, f 与 $D_{j,f}$ 相交至少 m_j 次.

则 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{D}$ 上的一个全纯正规族.

证 不失一般性, 我们可以假设 $\mathbb{D}$ 是单位圆盘. 假设 $\mathcal{F}$ 在 $\mathbb{D}$ 上不正规. 那么根据引理 2.3, 存在子序列 $\{f_p\} \subset \mathcal{F}$ 和 $\{y_p\}_{p=1}^{\infty} \subset K_0, y_0 \in K_0$ 满足 $y_p \to y_0$, 以及单位向量 $\{r_p\} \subset (0, +\infty)$ 与 $\{u_p\} \subset \mathbb{C}^m$ 满足 $r_p \to 0^+$, 使得 $g_p(\xi) := f_p(y_p + r_p u_p \xi)$ 在 $\mathbb{C}$ 的紧子集上一致收敛到非常数全纯映射 g. 设

$$\varrho_{m_{\mathcal{D}}} : \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^{n_{\mathcal{D}}}(\mathbb{C})$$

是次数为 $m_{\mathcal{D}}$ 的 Veronese 嵌入, 其形式为

$$\varrho_{m_{\mathcal{D}}}(x) = (w_0(\mathbf{x}) : \cdots : w_{n_{\mathcal{D}}}(\mathbf{x})),$$

其中 $w_j(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{I_j}$, $j = 0, \cdots, n_{\mathcal{D}}$. 显然 $G_p := \rho_{m_{\mathcal{D}}}(g_p)$ 在 $\mathbb{C}$ 的紧子集上一致收敛到 $G := \rho_{m_{\mathcal{D}}}(g)$. 根据引理 2.5, $Q_{jp}^* = Q_{jp}^{m_{\mathcal{D}}/d_j} := Q_{j,f_p}^{m_{\mathcal{D}}/d_j}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到

$Q_j^*, 1 \leqslant j \leqslant q$, 从而对任意给定的 $z \in \mathbb{D}$, 有

$$D(Q_1^*, \cdots, Q_q^*)(z) > \delta(z) > 0.$$

特别地，通过移动多项式 $Q_1^*, \cdots, Q_q^*$ 定义的移动超平面 $H_1^*, \cdots, H_q^*$ 在 $\mathbb{P}^{n_{\mathcal{D}}}(\mathbb{C})$ 上处于点态一般位置.

注意到当 p 充分大时，对于任意 $\xi \in \mathbb{C}$, 都有 $y_p + r_p u_p \xi$ 属于 $\mathbb{D}$ 的一个闭盘 $K = \left\{z \in \mathbb{C}^m : \|z\| \leqslant \dfrac{1+\|y_0\|}{2}\right\}$. 对任意 $j \in \{1, \cdots, q\}$, 假设 f_p, g 的约化表示分别为 $\widetilde{f}_p = (f_{0p}, \cdots, f_{np})$, $\widetilde{g} = (g_0, \cdots, g_n)$. 那么当 $p \to \infty$, 我们有 $\widetilde{g}_p(\xi) = \widetilde{f}_p(y_p + r_p u_p \xi) \to \widetilde{g}(\xi)$. 因此

$$Q_{jp, y_p + r_p u_p \xi}(\widetilde{g}_p(\xi)) \to Q_{j, y_0}(\widetilde{g}(\xi)) \tag{4.1}$$

在 $\mathbb{C}$ 的紧子集上一致收敛.

显然 $G_p = \rho_{m_{\mathcal{D}}}(g_p)$ 在 $B(\xi_0, r_0)$ 的紧子集上一致收敛到 $G = \rho_{m_{\mathcal{D}}}(g)$. 设 G 的约化表示为 $\widetilde{G}$. 由于 $Q_{j,y_0}^{m_{\mathcal{D}}/d_j}(\widetilde{g}(\xi)) = Q_j^*(y_0)(\widetilde{G}(\xi))$, 那么对于每个 $1 \leqslant j \leqslant q$, G 与 $H_j^*(y_0)$ 相交至少 $\dfrac{m_{\mathcal{D}}}{d_j} m_j$ 次，其中 $H_j^*(y_0)$ 是与 $Q_j^*(y_0)$ 相关的超平面. 注意到 $H_1^*(y_0), \cdots, H_q^*(y_0)$ 在 $\mathbb{P}^{n_{\mathcal{D}}}(\mathbb{C})$ 上处于一般位置，结合

$$\sum_{j=1}^{q} \frac{d_j}{m_j} < \frac{(q - n_{\mathcal{D}} - 1) m_{\mathcal{D}}}{n_{\mathcal{D}}},$$

并应用引理 2.6, 我们可得 G 是一个常数，从而 g 也是常数，这与 g 为非常数全纯映射矛盾. 因此， $\mathcal{F}$ 在 $\mathbb{D}$ 内是正规的.

定理 1.10 的证明 根据引理 2.5 可知 $Q_{jp}^* = Q_{jp}^{m_{\mathcal{D}}/d_j} := Q_{j,f_p}^{m_{\mathcal{D}}/d_j}$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到 $Q_j^* (1 \leqslant j \leqslant q)$, 并且对一个 $z_0 \in \mathbb{D}$, 有

$$D(Q_1^*, \cdots, Q_q^*)(z) > \delta(z_0) > 0.$$

特别地，由移动多项式 $Q_1^*, \cdots, Q_q^*$ 定义的移动超平面 $H_1^*, \cdots, H_q^*$ 位于 $\mathbb{P}^{n_{\mathcal{D}}}(\mathbb{C})$ 中的弱一般位置. 对于任意 $z \in \mathbb{D}$ 和 $w \in \mathbb{P}^{n_{\mathcal{D}}}(\mathbb{C})$, 在关于 z 的紧子集上，有

$$Q_{jp}^*(z)(\mathbf{w}) \to Q_j^*(z)(\mathbf{w})$$

一致收敛. 根据引理 2.1 和 2.2, 存在子序列不妨假设为 $\{f_p\}$, 使得

$$f_p^{-1}(D_{k,f_p}) = S_k \ (1 \leqslant k \leqslant n_{\mathcal{D}} + 1)$$

以及

$$\lim_{p\to\infty} \overline{\{z \in \operatorname{supp} \nu_{Q_{k,f_p}(\widetilde{f}_p)} | \nu_{Q_{k,f_p}(\widetilde{f}_p)}(z) < m_k\}} - S = S_k \ (n_{\mathcal{D}} + 2 \leqslant k \leqslant q) \tag{4.2}$$

为 $\mathbb{D} - S$ 的闭子集，其中 S_k 要么是空集要么是 $(m-1)$ 维解析集.

令 $T = (\cdots, t_j, \cdots)(1 \leqslant j \leqslant q)$, $\widetilde{Q}_j^* = \sum\limits_{j=0}^{n_{\mathcal{D}}} t_j w_j \in \mathbb{Z}[T, w]$. 对任意 $L \subset \{1, \cdots, q\}$ 满足 $|L| = n_{\mathcal{D}} + 1$. 由于 $\{Q_j^*\}_{j \in L}$ 处于弱一般位置，从而其结式 $\widetilde{R}_L(\cdots, c_{ij}, \cdots) \neq 0$. 设

$$\widetilde{S} := \{z \in \mathbb{D} \mid \widetilde{R}_L(\cdots, c_{ij}, \cdots) = 0 \text{ 对于 } L \subset \{1, \cdots, q\} \text{ 满足 } |L| = n_{\mathcal{D}} + 1\}.$$

令

$$E = \Big(\bigcup_{k=1}^{q} S_k \cup \widetilde{S}\Big) - S. \tag{4.3}$$

则 E 要么是空集，要么是 $\mathbb{D}-S$ 中的 $(m-1)$ 维解析集．固定任意一点

$$z_1 \in (\mathbb{D}-S)-E, \tag{4.4}$$

并在 $(\mathbb{D}-S)-E$ 中选择 z_1 的一个相对紧的邻域 U_{z_1}，则有 $\{f_p|_{U_{z_1}}\} \subset \mathrm{Hol}(U_{z_1}, \mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$. 现在我们证明 $\{f_p|_{U_{z_1}}\}$ 是一个全纯正规族. 对于这一点, 只要证明函数族 $\{f_p|_{U_{z_1}}\}$ 满足引理 4.1 的所有条件. 实际上存在 N_0, 使得对于所有的 $p \geqslant N_0$, $\{f_p|_{U_{z_1}}\}$ 与 $D_{j,f_p}(1 \leqslant j \leqslant n_{\mathcal{D}}+1)$ 不相交. 从 (4.2)–(4.4) 我们可知 $\{f_p|_{U_{z_1}}\}$ 和 D_{j,f_p} 相交至少 m_j $(n_{\mathcal{D}}+2 \leqslant j \leqslant q)$ 次. 对于任意 $z \in U_{z_1}$, 当 $1 \leqslant j \leqslant n_{\mathcal{D}}+1$ 时取 $m_j=\infty$, 则我们可得 $D(Q_1^*, \cdots, Q_q^*)(z) > 0$, 从而引理 4.1 的所有条件都满足. 因此，$\{f_p|_{U_{z_1}}\}$ 为全纯正规族, 从而我们可以找到一个子序列 (不妨用 $\{f_p\}$ 表示), 使其在 $(\mathbb{D}-S)-E$ 的紧子集上一致收敛到全纯映射 $f:(\mathbb{D}-S)-E \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, 由此可得 $\{f_p\}$ 在 $\mathbb{D}$ 内拟正规．因此 $\mathcal{F}$ 是拟正规族．定理 1.10 证毕.

致谢 本文作者感谢审稿人提出的宝贵建议.

参 考 文 献

[1] Montel P. Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine [J]. *Ann École Norm Sup*, 1912, 29:487–535.

[2] Montel P. Sur les familles normales de fonctions analytiques [J]. *Ann École Norm Sup*, 1916, 33:223–302.

[3] Fujimoto H. Extensions of the big Picard's theorem [J]. *Tohoku Math J*, 1972, 24:415–422.

[4] Green M. Holomorphic maps into complex projective space omitting hyperplanes [J]. *Trans Amer Math Soc*, 972, 169:89–103.

[5] Nochka E. On the theory of meromorphic functions [J]. *Soviet Math Dokl*, 1983, 27:377–381.

[6] Aladro G, Krantz S. G. A criterion for normality in $\mathbb{C}^n$ [J]. *J Math Anal Appl*, 1991, 161:1–8.

[7] Tu Z H. Normality criterions for families of holomorphic mappings of several complex variables into $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ [J]. *Proc Amer Math Soc*, 1999, 127:1039–1049.

[8] Stoll W. Normal families of non-negative divisors [J]. *Math Z*, 1964, 84:154–218.

[9] Tu Z H. On meromorphically normal families of meromorphic mappings of several complex variables into $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ [J]. *J Math Anal Appl*, 2002, 267:1–19.

[10] Fujimoto H. On families of meromorphic maps into the complex projective space [J]. *Nagoya Math J*, 1974, 54:21–51.

[11] Tu Z H, Li P. Normal families of meromorphic mappings of several complex variables into $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ for moving targets [J]. *Sci China Ser A*, 2005, 48:355–364.

[12] Tu Z H, Li P. Big Picard's theorems for holomorphic mappings of several variables into $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ with moving hyperplanes [J]. *J Math Anal Appl*, 2006, 342:629–638.

[13] Yang L, Fang C Y, Pang X C. Normal families of holomorphic mappings into complex projective space concerning shared hyperplanes [J]. *Pacific J Math*, 2014, 272:245–256.

[14] Dethloff G, Thai D D, Trang P N T. Normal families of meromorphic mappings of several complex variables for moving hypersurfaces in a complex projective space [J]. *Nagoya Math J*, 2015, 217:23–59.

[15] Noguchi J, Ochiai T. Geometry function theory in several complex variables [M]. Transl Math Monogr, 80, Providence, RI: Amer Math Soc, 1990.

[16] Joseph J, Kwack M. Extension and convergence theorem for families of normal maps in several complex variables [J]. *Proc Amer Math Soc*, 1997, 125:1675–1684.

Normal Family of Meromorphic Mappings of Several Variables with Moving Hypersurfaces Related to Picard Theorems

CHEN Wei[1] NGUYEN Van Thin[2] WANG Qiong[3]

[1]School of Science, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China. E-mail: weichensdu@126.com

[2]Department of Mathematics, Thai Nguyen University of Education, Thai Nguyen, Viet Nam. E-mail: thinmath@gmail.com

[3]Corresponding author. Chongqing Key Laboratory of Intelligent Analysis and Decision on Complex Systems, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China. E-mail: qiongwangsdu@126.com

Abstract In this paper, the authors prove some results about normal family of holomorphic mappings intersecting with moving hypersurfaces related to Nochka's Picard type theorems. They also get a quasi-normality criteria for meromorphic mappings intersecting with moving hypersurfaces. All of the results in this paper greatly extend some earlier related results.

Keywords Holomorphic mapping, Normal family, Normal mapping, Meromorphic mapping

2000 MR Subject Classification 30D45, 32H30

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 45 No. 4, 2024
by ALLERTON PRESS, INC., USA