数 学 年 刊 A 辑
2024, 45(4):437–468
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2024.0030

C- 乘积下的张量广义逆*

靳宏伟[1] 徐淑敏[2] 江鸿杰[3] 刘晓冀[4]

提要 作者主要研究了C-乘积下的张量广义逆. 首先, 给出了 C- 乘积下张量的 Moore-Penrose 逆, Drazin 逆和沿张量逆的定义, 并通过使用张量的几种分解形式给出了张量广义逆的其它表达式. 此外, 建立了张量的 Moore-Penrose 逆, Drazin 逆和沿张量逆的算法. 最后, 给出了张量的群逆在马尔可夫链上的应用.

关键词 C- 乘积, 张量, Moore-Penrose 逆, Drazin 逆, 沿张量逆
MR (2000) 主题分类 15A18, 15A69
中图法分类 O151
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2024)04-0437-32

§1 引 言

近年来, 关于张量或多维数组的研究越来越普遍. 一个复张量可以看作一个多维数组, 其形式为 $\mathcal{A}=(a_{i_1\cdots i_p})\in\mathbb{C}^{n_1\times n_2\times\cdots\times n_p}$. 张量的阶数就是维数, 因此向量和矩阵也被称为一阶张量和二阶张量. 本文主要研究三阶张量.

目前, 高阶张量被广泛应用于各个领域, 例如心理测量学 [1], 化学计量学 [2], 人脸识别 [3], 图像和信号处理 [4−9], 等等. Sun 等人在文 [10] 中基于爱因斯坦积下引入了偶数阶张量逆的概念并称之为张量的 Moore-Penrose 逆. 此外, Sun 等人在文 [11] 中基于张量的一般积定义了张量的 $\{i\}$- 逆和群逆, 研究了张量广义逆的性质. Miao 等人在文 [12] 中, 根据张量的 T- 乘积, 利用张量的奇异值分解提出了广义张量函数的定义, 利用部分等距张量建立了张量的柯西积分公式, 提出了不变张量锥的概念. 此外, 在文 [13] 中作者研究了张量相似关系, 并提出了 T-Jordan 标准型并探究了其性质, 讨论了张量的分解, 从而得到了张量的 T- 极分解, T-LU 分解, T-QR 分解和 T-Schur 分解. 然后利用 T-Jordan 标准型给出了不可逆的 F- 平方张量的 T- 群逆和 T-Drazin 逆的表达式. 在文 [14] 中作者证明了几个关于张量的 Moore-Penrose 逆的恒等式, 通过爱因斯坦积得到了张量 Moore-Penrose 逆

本文 2022 年 11 月 4 日收到, 2024 年 11 月 28 日收到修改稿.
[1]广西民族大学数学科学学院; 广西民族大学应用数学中心, 南宁 530006. E-mail: jhw_math@126.com
[2]商丘学院计算机工程学院, 河南 商丘 476000. E-mail: 18438596256@163.com
[3]通信作者. 广西民族大学数学科学学院; 广西民族大学应用数学中心, 南宁 530006.
E-mail: hongjiejiang@yeah.net
[4]广西职业师范学院教育学院, 南宁 530007. E-mail: xiaojiliu72@126.com
*本文受到广西自然科学基金 (No. 2024GXNSFAA010503), 广西科技基地与人才专项 (No桂科 AA24010005) 和国家自然科学基金 (No. 12261027) 的资助.

的反序律的几个充要条件. 在文 [15] 中作者研究了交换环和非交换环上张量的几个广义逆, 建立了计算张量的内逆, Moore-Penrose 逆和加权 Moore-Penrose 逆的算法, 并介绍了该算法在图像去模糊问题中的应用. 在文 [16] 中, 基于 T- 乘积研究了对偶指标为 1 的对偶张量, 利用张量的核逆给出了对偶线性系统的解, 提出了对偶 Moore-Penrose 逆和群逆的概念. 在文 [17] 中, 通过 T- 乘积研究了三阶张量的 T- 核 EP 逆, 利用 T-Schur 分解给出了一种新的张量的分解 (T- 核 EP 分解). 此外, 文 [17] 还给出了 T- 核 EP 逆的一个正则形式和一些性质, 建立了 T- 核 EP 逆的扰动界. Sahoo 等人在文 [18] 中定义了张量的核逆和核 EP 逆, 并给出了核逆和核 EP 逆的一些特征, 性质和表达式. 在文 [19] 中利用张量方程建立了张量的广义逆, 研究了张量方程的最小二乘解. 在文 [20] 中对张量的广义逆做了进一步的研究, 给出了张量广义逆的几个特征, 还得到了一种计算张量 Moore-Penrose 逆的新方法. 在文 [21] 中将方阵的 Drazin 逆拓展到偶数阶平方张量, 还利用核 - 幂零分解得到了 Drazin 逆的表达式. Behera 等人在 文 [22] 中进一步阐述了张量的 Drazin 逆和 $\mathcal{W}$ 加权 Drazin 逆的相关理论, 提出了一些计算张量 Drazin 逆的新方法. Benítez 等人在文 [23] 中研究了任意矩阵的单侧 (b, c)- 逆以及沿矩阵 (不一定是方的) 的单侧逆, 并且还研究了矩形矩阵的 (b, c)- 逆和沿元素的逆. Kolda 等人在文 [24] 中提供了高阶张量分解及其应用的概述, 介绍了两种特殊的张量分解: CP 分解和 Tucker 分解.

Kernfeld 等人在文 [25] 中定义了一个新的张量 - 张量积 —— 余弦变换乘积, 简称 C- 乘积, 然后还验证了利用 DCT 可以有效的实现 C- 乘积. 此外, 作者指出可以使用 C- 乘积更为方便的说明离散图像模糊模型和图像复原模型. Xu 等人在文 [26] 中指出使用 DCT 的两个优点, 并用数值例子表明使用 C- 乘积的效率是使用 T- 乘积的两倍, 使用 DCT 的视频和多光谱图像完成的误差也小于使用 DFT 的误差. Bentbib 等人在文 [27] 探索了 C- 乘积的新应用, 基于 C- 乘积下结合 TV 正则化过程和张量稳健主成分分析提出了解决三阶张量补全问题的新方法, 并通过实例验证了所提出方法的有效性. 基于这些背景, 本文将通过 C- 积研究张量的广义逆理论.

本文主要内容如下. 在第 2 节中, 给出了本文中需要使用的术语和符号, 然后介绍了两个张量的 C- 乘积及其一些性质. 在第 3 节中, 首先基于 C- 乘积定义了张量的 Moore-Penrose 逆, 给出了张量的一些分解, 包括 C-SVD 分解, C-QR 分解, C-Schur 分解, C- 满秩分解, C-QDR 分解和 C-HS 分解, 然后通过使用这些分解形式给出了张量 Moore-Penrose 逆的一些表达式, 并建立了一个计算该逆的算法. 在第 4 节中, 本文研究了 C- 乘积下张量的 Drazin 逆. 首先给出了张量 Drazin 逆的定义和一些性质, 并提供了张量 Drazin 逆的几个表达式. 在第 5 节中, 定义了 C- 乘积下的沿张量逆, 给出了该逆的一些表达式. 最后还建立了一个计算沿张量逆的算法. 在最后一节中, 本文介绍了张量的群逆在高阶马尔可夫链上的应用.

§2　预备知识

在本文中, 我们用 $\mathbf{a}$, $\mathbf{A}$ 和 $\mathcal{A}$ 分别表示向量, 矩阵和三阶或高阶的张量. 另外, $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{A}_{ij}$ 和 $\mathcal{A}_{i_1 i_2 \cdots i_p}$ 分别表示向量 $\mathbf{a}$, 矩阵 $\mathbf{A}$ 和张量 $\mathcal{A}$ 的元素. $\mathcal{A}(:,:,i)$ 表示 $\mathcal{A}$ 的第 i 个正面切片, 简记为 $\mathcal{A}^{(i)}$. 若固定三阶张量的两个指标, 则可以得到管. 模 -3 纤维也称为管, 记作为 $\mathcal{A}(i,j,:)$. 我们定义 $\bar{\mathbf{a}}$ 是张量 $\mathcal{A}$ 的管, 且可以利用 $\mathbf{a} = \mathrm{vec}(\bar{\mathbf{a}})$ 将一个管矢量化.

§2.1　C- 乘积

定义 2.1 [25] 设 $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ 和 $\mathcal{B} \in \mathbb{C}^{n_2 \times l \times n_3}$, 则积 $\mathcal{A} \triangle \mathcal{B}$ 定义为

$$(\mathcal{A} \triangle \mathcal{B})^{(i)} = \mathcal{A}^{(i)} \mathcal{B}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \cdots, n_3.$$

定义 2.2 [25] 设 $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$, $\mathcal{A}^{(1)}, \mathcal{A}^{(2)}, \cdots, \mathcal{A}^{(n_3)}$ 表示 $\mathcal{A}$ 的正面切片, 则下面利用 $\mathbf{mat}(\mathcal{A})$ 去定义块 Toeplitz+Hankel 矩阵

$$\mathbf{mat}(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}^{(1)} & \mathcal{A}^{(2)} & \cdots & \mathcal{A}^{(n_3-1)} & \mathcal{A}^{(n_3)} \\ \mathcal{A}^{(2)} & \mathcal{A}^{(1)} & \cdots & \mathcal{A}^{(n_3-2)} & \mathcal{A}^{(n_3-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathcal{A}^{(n_3-1)} & \mathcal{A}^{(n_3-2)} & \cdots & \mathcal{A}^{(1)} & \mathcal{A}^{(2)} \\ \mathcal{A}^{(n_3)} & \mathcal{A}^{(n_3-1)} & \cdots & \mathcal{A}^{(2)} & \mathcal{A}^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{A}^{(2)} & \mathcal{A}^{(3)} & \cdots & \mathcal{A}^{(n_3)} & O \\ \mathcal{A}^{(3)} & \mathcal{A}^{(4)} & \cdots & O & \mathcal{A}^{(n_3)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathcal{A}^{(n_3)} & O & \cdots & \mathcal{A}^{(4)} & \mathcal{A}^{(3)} \\ O & \mathcal{A}^{(n_3)} & \cdots & \mathcal{A}^{(3)} & \mathcal{A}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

其中 O 是 $n_1 \times n_2$ 的零矩阵.

定义 2.3 [25] 设 $\mathbf{ten}(\cdot)$ 是 $\mathbf{mat}(\cdot)$ 的逆运算, 即

$$\mathbf{ten}(\mathbf{mat}(\mathcal{A})) = \mathcal{A}.$$

定义 2.4 [25] 设 $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ 和 $\mathcal{B} \in \mathbb{C}^{n_2 \times l \times n_3}$, 则两个张量的余弦变换乘积 (简称 C- 乘积) 的定义为

$$\mathcal{A} *_c \mathcal{B} = \mathbf{ten}[\mathbf{mat}(\mathcal{A}) \cdot \mathbf{mat}(\mathcal{B})].$$

令 $\bar{\mathbf{y}}$ 是一个 $1 \times 1 \times n_3$ 的张量, 则 $\mathbf{mat}(\bar{\mathbf{y}})$ 是 (2.1) 所定义的大小为 $1 \cdot n_3 \times 1 \cdot n_3$ 的块 Toeplitz+Hankel 矩阵, 其中每一个块是 1×1. 令 $\mathbf{C}_{n_3}$ 是文 [2] 中所定义的 $n_3 \times n_3$ 的正交 DCT 矩阵, 可利用式子 $\mathbf{C}_{n_3} = \mathrm{dct}(\mathrm{eye}(n_3))$ 在 Matlab 上计算. 此外

$$\mathbf{C}_{n_3} \mathbf{mat}(\bar{\mathbf{y}}) \mathbf{C}_{n_3}^T = \mathbf{D} = \mathrm{diag}(\mathbf{d}),$$

其中 $\mathbf{d} = \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{C}_{n_3} \mathbf{mat}(\bar{\mathbf{y}}) \mathbf{e}_1)$, $\mathbf{W} = \mathrm{diag}(\mathbf{C}_{n_3}(:,1))$, $\mathbf{e}_1 = [1, 0, \cdots, 0]^{\mathrm{T}}$.

注意 $\mathbf{mat}(\bar{\mathbf{y}}) \mathbf{e}_1 = (\mathbf{I} + \mathbf{Z}) \mathrm{vec}(\bar{\mathbf{y}})$, 其中 $\mathrm{vec}(\bar{\mathbf{y}})$ 表示 $\bar{\mathbf{y}}$ 的矢量化, $\mathbf{Z}$ 是 $n_3 \times n_3$ 的奇异循环上升矩阵, 可在 Matlab 中通过式子 $\mathbf{Z} = \mathrm{diag}(\mathrm{ones}(n_3 - 1, 1), 1)$ 进行计算. 因此

$$\mathbf{d} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{C}_{n_3} (\mathbf{I} + \mathbf{Z}) \mathrm{vec}(\bar{\mathbf{y}}) = \mathbf{M} \mathrm{vec}(\bar{\mathbf{y}}). \quad (2.2)$$

定义 2.5 [25] 令 $L:\mathbb{C}^{1\times 1\times n_3}\to\mathbb{C}^{1\times 1\times n_3}$ 是一个可逆的线性变换. 定义

$$\mathrm{vec}(L(\overline{\mathbf{y}}))=\mathbf{M}\mathbf{y},$$

其中 $\mathbf{y}=\mathrm{vec}(\overline{\mathbf{y}})$, $\mathbf{M}=\mathbf{W}^{-1}\mathbf{C}_{n_3}(\mathbf{I}+\mathbf{Z})$.

注意到一个 $n_1\times n_2\times n_3$ 的张量可以看作是一个 $n_1\times n_2$ 的矩阵, 其中第 (i,j) 个元素 $\overline{\mathbf{a}}_{ij}=(\mathcal{A})_{ij}$ 是 $\mathbb{C}^{1\times 1\times n_3}$ 中的管状纤维.

定义 2.6 [25] 设 $\mathcal{A}\in\mathbb{C}^{n_1\times n_2\times n_3}$, 则 $L(\mathcal{A})=\widehat{\mathcal{A}}\in\mathbb{C}^{n_1\times n_2\times n_3}$ 且有管状纤维

$$\widehat{\mathbf{a}}_{ij}=(\widehat{\mathcal{A}})_{ij}=L(\overline{\mathbf{a}}_{ij}),\quad i=1,2,\cdots,n_1,\ j=1,2,\cdots,n_2,$$

其中 $\overline{\mathbf{a}}_{ij}$ 是 $\mathcal{A}$ 的管状纤维.

定义 2.7 [24] 设张量 $\mathcal{A}\in\mathbb{C}^{n_1\times n_2\times n_3}$ 和矩阵 $\mathbf{U}\in\mathbb{C}^{J\times n_3}$, 则 $\mathcal{A}$ 和 $\mathbf{U}$ 的乘积称为模 -3 乘积, 记作 $\mathcal{A}\times_3\mathbf{U}$. 更准确地, 我们有

$$(\mathcal{A}\times_3\mathbf{U})_{i_1i_2j}=\sum_{i_3=1}^{n_3}\mathcal{A}_{i_1i_2i_3}\mathbf{U}_{ji_3},\quad i_1=1,\cdots,n_1,\ i_2=1,\cdots,n_2,\ j=1,\cdots,J.$$

设 $\mathcal{A}\in\mathbb{C}^{n_1\times n_2\times n_3}$ 的正面切片是

$$\mathcal{A}^{(1)}=\begin{bmatrix}\mathcal{A}_{111}&\mathcal{A}_{121}&\cdots&\mathcal{A}_{1n_21}\\\mathcal{A}_{211}&\mathcal{A}_{221}&\cdots&\mathcal{A}_{2n_21}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\mathcal{A}_{n_111}&\mathcal{A}_{n_121}&\cdots&\mathcal{A}_{n_1n_21}\end{bmatrix},\quad\cdots,\quad\mathcal{A}^{(n_3)}=\begin{bmatrix}\mathcal{A}_{11n_3}&\mathcal{A}_{12n_3}&\cdots&\mathcal{A}_{1n_2n_3}\\\mathcal{A}_{21n_3}&\mathcal{A}_{22n_3}&\cdots&\mathcal{A}_{2n_2n_3}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\mathcal{A}_{n_11n_3}&\mathcal{A}_{n_12n_3}&\cdots&\mathcal{A}_{n_1n_2n_3}\end{bmatrix},$$

则 $\mathcal{A}$ 的模 -3 展开 $\mathcal{A}_{(3)}$ 是

$$\begin{aligned}&\mathcal{A}_{(3)}\\=&\begin{bmatrix}\mathcal{A}_{111}&\mathcal{A}_{211}&\cdots&\mathcal{A}_{n_111}&\mathcal{A}_{121}&\mathcal{A}_{221}&\cdots&\mathcal{A}_{n_121}&\cdots&\mathcal{A}_{1n_21}&\mathcal{A}_{2n_21}&\cdots&\mathcal{A}_{n_1n_21}\\\mathcal{A}_{112}&\mathcal{A}_{212}&\cdots&\mathcal{A}_{n_112}&\mathcal{A}_{122}&\mathcal{A}_{222}&\cdots&\mathcal{A}_{n_122}&\cdots&\mathcal{A}_{1n_22}&\mathcal{A}_{2n_22}&\cdots&\mathcal{A}_{n_1n_22}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\\mathcal{A}_{11n_3}&\mathcal{A}_{21n_3}&\cdots&\mathcal{A}_{n_11n_3}&\mathcal{A}_{12n_3}&\mathcal{A}_{22n_3}&\cdots&\mathcal{A}_{n_12n_3}&\cdots&\mathcal{A}_{1n_2n_3}&\mathcal{A}_{2n_2n_3}&\cdots&\mathcal{A}_{n_1n_2n_3}\end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{2.3}$$

注意到 $\mathcal{A}\times_3\mathbf{U}$ 可以使用下面的矩阵 - 矩阵乘积进行计算, 详见文 [24].

$$\mathcal{Y}=\mathcal{A}\times_3\mathbf{U}\Leftrightarrow\mathcal{Y}_{(3)}=\mathbf{U}\mathcal{A}_{(3)}.\tag{2.4}$$

显然有

$$L(\mathcal{A})=\mathcal{A}\times_3\mathbf{M}\tag{2.5}$$

和

$$L^{-1}(\mathcal{A})=\mathcal{A}\times_3\mathbf{M}^{-1}.\tag{2.6}$$

引理 2.1 [25] 设 $\mathcal{A}\in\mathbb{C}^{n_1\times n_2\times n_3}$, 则

$$(\mathbf{C}_{n_3}\otimes\mathbf{I}_{n_1})\mathbf{mat}(\mathcal{A})(\mathbf{C}_{n_3}^{-1}\otimes\mathbf{I}_{n_2})=\begin{bmatrix} L(\mathcal{A})^{(1)} & & & \\ & L(\mathcal{A})^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & L(\mathcal{A})^{(n_3)}\end{bmatrix},$$

其中 $\mathbf{C}_{n_3}$ 是 $n_3\times n_3$ 的正交的离散余弦变换矩阵.

引理 2.2 [25] 设 $\mathcal{A}\in\mathbb{C}^{n_1\times n_2\times n_3}$ 和 $\mathcal{B}\in\mathbb{C}^{n_2\times l\times n_3}$, 则

(1) $\mathbf{mat}(\mathcal{A}*_c\mathcal{B})=\mathbf{mat}(\mathcal{A})\mathbf{mat}(\mathcal{B})$.

(2) $\mathcal{A}*_c\mathcal{B}=L^{-1}(L(\mathcal{A})\triangle L(\mathcal{B}))$.

下面给出了一个计算张量 $\mathcal{A}\in\mathbb{C}^{n_1\times n_2\times n_3}$ 和 $\mathcal{B}\in\mathbb{C}^{n_2\times l\times n_3}$ 的 C- 乘积的算法 [25].

算法 1　计算两个张量的 C- 乘积

输入: 一个 $n_1\times n_2\times n_3$ 的张量 $\mathcal{A}$ 和一个 $n_2\times l\times n_3$ 的张量 $\mathcal{B}$

输出: 一个 $n_1\times l\times n_3$ 的张量 $\mathcal{C}$

1: $\widehat{\mathcal{A}}=L(\mathcal{A})$, $\widehat{\mathcal{B}}=L(\mathcal{B})$

2: for $i=1,\cdots,n_3$

$\quad\widehat{\mathcal{C}}^{(i)}=\widehat{\mathcal{A}}^{(i)}\widehat{\mathcal{B}}^{(i)}$

end

3: $\mathcal{C}=L^{-1}(\widehat{\mathcal{C}})$

引理 2.3 [25] 设 $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ 是适当大小的三阶张量, 则下列表述成立:

(1) $\mathcal{A}*_c(\mathcal{B}+\mathcal{C})=\mathcal{A}*_c\mathcal{B}+\mathcal{A}*_c\mathcal{C}$;

(1) $(\mathcal{A}+\mathcal{B})*_c\mathcal{C}=\mathcal{A}*_c\mathcal{C}+\mathcal{B}*_c\mathcal{C}$;

(1) $(\mathcal{A}*_c\mathcal{B})*_c\mathcal{C}=\mathcal{A}*_c(\mathcal{B}*_c\mathcal{C})$.

定义 2.8 [25] 设 $L(\mathcal{I})=\widehat{\mathcal{I}}\in\mathbb{C}^{n\times n\times n_3}$ 且满足 $\widehat{\mathcal{I}}^{(i)}=\mathbf{I}_n$, $i=1,2,\cdots,n_3$, 则称 $\mathcal{I}=L^{-1}(\widehat{\mathcal{I}})$ 是单位张量.

引理 2.4 [25] 设 $\mathcal{A}\in\mathbb{C}^{n_1\times n_1\times n_3}$ 和单位张量 $\mathcal{I}\in\mathbb{C}^{n_1\times n_1\times n_3}$, 则有

$$\mathcal{I}*_c\mathcal{A}=\mathcal{A}*_c\mathcal{I}=\mathcal{A}.$$

证　显然地,

$$L(\mathcal{I}*_c\mathcal{A})=L(\mathcal{I})\triangle L(\mathcal{A})=L(\mathcal{A})=L(\mathcal{A})\triangle L(\mathcal{I})=L(\mathcal{A}*_c\mathcal{I}).$$

因此 $\mathcal{I}*_c\mathcal{A}=\mathcal{A}*_c\mathcal{I}=\mathcal{A}$.

定义 2.9　设 $\mathcal{A}\in\mathbb{C}^{n_1\times n_1\times n_3}$ 和 $\mathcal{B}\in\mathbb{C}^{n_1\times n_1\times n_3}$, 若

$$\mathcal{A}*_c\mathcal{B}=\mathcal{I}\ \text{ 且 }\ \mathcal{B}*_c\mathcal{A}=\mathcal{I},$$

则称 $\mathcal{A}$ 是可逆的, 称 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的逆, 记作 $\mathcal{A}^{-1}$.

显然地, 一个张量的逆若存在, 则必是唯一的. 下面给出张量的共轭转置的定义.

定义 2.10 [25] 设 $\mathcal{A}\in\mathbb{C}^{n_1\times n_2\times n_3}$, 通过 $L(\mathcal{A}^H)^{(i)}=\left(L(\mathcal{A})^{(i)}\right)^H(i=1,2,\cdots,n_3)$ 可以得到一个 $n_2\times n_1\times n_3$ 的张量, 将其称为 $\mathcal{A}$ 的共轭转置, 记作 $\mathcal{A}^H$.

引理 2.5 [25] 设 $\mathcal{A}\in\mathbb{C}^{n_1\times n_2\times n_3}$ 和 $\mathcal{B}\in\mathbb{C}^{n_2\times l\times n_3}$, 则

$$(\mathcal{A}*_c\mathcal{B})^H=\mathcal{B}^H*_c\mathcal{A}^H.$$

定义 2.11 设 $\mathcal{A}\in\mathbb{C}^{n_1\times n_1\times n_3}$, 若 $\mathcal{A}^H=\mathcal{A}$, 则称 $\mathcal{A}$ 是埃尔米特张量.

定义 2.12 [25] 设 $\mathcal{Q}\in\mathbb{C}^{n_1\times n_1\times n_3}$, 若 $\mathcal{Q}^H*_c\mathcal{Q}=\mathcal{Q}*_c\mathcal{Q}^H=\mathcal{I}$, 则称 $\mathcal{Q}$ 是酉张量.

定义 2.13 设 $\mathcal{A}\in\mathbb{C}^{n_1\times n_2\times n_3}$, 若 $\mathcal{A}$ 的正面切片 $\mathcal{A}^{(i)}$, $i=1,2,\cdots,n_3$ 都是对角 / 上三角 / 下三角矩阵, 则称 $\mathcal{A}$ 是 F- 对角 /F- 上三角 /F- 下三角张量.

引理 2.6 设 $\mathcal{A}\in\mathbb{C}^{n_1\times n_2\times n_3}$, 则 $L(\mathcal{A})$ 是一个 F- 对角 /F- 上三角 /F- 下三角张量当且仅当 $\mathcal{A}$ 是一个 F- 对角 /F- 上三角 /F- 下三角张量.

证 我们只证明 F- 下三角张量的情况, 因为 F- 对角张量是 F- 下三角张量的一个特例, F- 上三角张量也可以类似的证明.

设 $\mathcal{B}=L(\mathcal{A})$, 则利用 (2.4) 和 (2.6), 有 $\mathcal{A}=L^{-1}(\mathcal{B})=\mathcal{B}\times_3\mathbf{M}^{-1}$ 和 $\mathcal{A}_{(3)}=\mathbf{M}^{-1}\mathcal{B}_{(3)}$, 其中 $\mathbf{M}$ 是 (2.2) 所定义的. 因为 $\mathcal{B}$ 是一个 F- 下三角张量, 根据 (2.3), 则有

$$\mathcal{B}_{(3)}=\begin{bmatrix}\mathcal{B}_{111} & \mathcal{B}_{211} & \cdots & \mathcal{B}_{n_111} & 0 & \mathcal{B}_{221} & \cdots & \mathcal{B}_{n_121} & 0 & 0 & \mathcal{B}_{331} & \cdots & \mathcal{B}_{n_131} & \cdots\\ \mathcal{B}_{112} & \mathcal{B}_{212} & \cdots & \mathcal{B}_{n_112} & 0 & \mathcal{B}_{222} & \cdots & \mathcal{B}_{n_122} & 0 & 0 & \mathcal{B}_{332} & \cdots & \mathcal{B}_{n_132} & \cdots\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \mathcal{B}_{11n_3} & \mathcal{B}_{21n_3} & \cdots & \mathcal{B}_{n_11n_3} & 0 & \mathcal{B}_{22n_3} & \cdots & \mathcal{B}_{n_12n_3} & 0 & 0 & \mathcal{B}_{33n_3} & \cdots & \mathcal{B}_{n_13n_3} & \cdots\end{bmatrix}.$$

通过利用矩阵乘积, 则有

$$\mathcal{A}_{(3)}=\begin{bmatrix}\mathcal{A}_{111} & \mathcal{A}_{211} & \cdots & \mathcal{A}_{n_111} & 0 & \mathcal{A}_{221} & \cdots & \mathcal{A}_{n_121} & 0 & 0 & \mathcal{A}_{331} & \cdots & \mathcal{A}_{n_131} & \cdots\\ \mathcal{A}_{112} & \mathcal{A}_{212} & \cdots & \mathcal{A}_{n_112} & 0 & \mathcal{A}_{222} & \cdots & \mathcal{A}_{n_122} & 0 & 0 & \mathcal{A}_{332} & \cdots & \mathcal{A}_{n_132} & \cdots\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \mathcal{A}_{11n_3} & \mathcal{A}_{21n_3} & \cdots & \mathcal{A}_{n_11n_3} & 0 & \mathcal{A}_{22n_3} & \cdots & \mathcal{A}_{n_12n_3} & 0 & 0 & \mathcal{A}_{33n_3} & \cdots & \mathcal{A}_{n_13n_3} & \cdots\end{bmatrix}.$$

因此, 我们可以得到 $\mathcal{A}$ 的所有的正面切片都是下三角矩阵, 故可推出 $\mathcal{A}$ 是一个 F- 下三角张量.

相反地, 若 $\mathcal{A}$ 是一个 F- 下三角张量, 则 $\mathcal{A}_{(3)}$ 具有上述形式. 此外, 根据 (2.4) 和 (2.5), 有

$$L(\mathcal{A})=\mathcal{A}\times_3\mathbf{M}\Leftrightarrow L(\mathcal{A})_{(3)}=\mathbf{M}\mathcal{A}_{(3)},$$

则

$$L(\mathcal{A})_{(3)}=\begin{bmatrix}\mathcal{L}_{111} & \mathcal{L}_{211} & \cdots & \mathcal{L}_{n_111} & 0 & \mathcal{L}_{221} & \cdots & \mathcal{L}_{n_121} & 0 & 0 & \mathcal{L}_{331} & \cdots & \mathcal{L}_{n_131} & \cdots\\ \mathcal{L}_{112} & \mathcal{L}_{212} & \cdots & \mathcal{L}_{n_112} & 0 & \mathcal{L}_{222} & \cdots & \mathcal{L}_{n_122} & 0 & 0 & \mathcal{L}_{332} & \cdots & \mathcal{L}_{n_132} & \cdots\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \mathcal{L}_{11n_3} & \mathcal{L}_{21n_3} & \cdots & \mathcal{L}_{n_11n_3} & 0 & \mathcal{L}_{22n_3} & \cdots & \mathcal{L}_{n_12n_3} & 0 & 0 & \mathcal{L}_{33n_3} & \cdots & \mathcal{L}_{n_13n_3} & \cdots\end{bmatrix},$$

可推出 $L(\mathcal{A})$ 是一个 F- 下三角张量.

§3　C- 乘积下张量的 Moore-Penrose 逆

在这一部分中, 我们将利用 C-SVD, C-QR 分解, C-Schur 分解, C- 满秩分解, C-QDR 分解和 C-HS 分解给出 Moore-Penrose 逆的一些表达式. 然后, 基于张量 $\mathcal{A}$ 的 C-SVD 分解建立一个计算 Moore-Penrose 逆的算法.

§3.1　张量的 Moore-Penrose 逆的表征

定义 3.1　设 $\mathcal{A}\in\mathbb{C}^{n_1\times n_2\times n_3}$, 若存在唯一的张量 $\mathcal{X}\in\mathbb{C}^{n_2\times n_1\times n_3}$ 满足等式

$$\mathcal{A}*_c\mathcal{X}*_c\mathcal{A}=\mathcal{A},\quad \mathcal{X}*_c\mathcal{A}*_c\mathcal{X}=\mathcal{X},\ (\mathcal{A}*_c\mathcal{X})^H=\mathcal{A}*_c\mathcal{X},\quad (\mathcal{X}*_c\mathcal{A})^H=\mathcal{X}*_c\mathcal{A},\tag{3.1}$$

则 $\mathcal{X}$ 称为 $\mathcal{A}$ 的 Moore-Penrose 逆, 记作 $\mathcal{A}^\dagger$.

对于任意张量 $\mathcal{A}\in\mathbb{C}^{n_1\times n_2\times n_3}$, 定义 $\mathcal{A}\{i,j,\cdots,k\}$ 表示所有满足 (3.1) 中第 (i), (j), $\cdots$, (k) 个方程的张量 $\mathcal{X}\in\mathbb{C}^{n_2\times n_1\times n_3}$ 的集合, 若 $\mathcal{X}\in\mathbb{C}^{n_2\times n_1\times n_3}$ 满足 (i), (j), $\cdots$, (k), 则称 $\mathcal{X}$ 为 $\mathcal{A}$ 的 $\{i,j,\cdots,k\}$- 逆.

定理 3.1 [25] 设 $\mathcal{A}\in\mathbb{C}^{n_1\times n_2\times n_3}$, 则存在酉张量 $\mathcal{U}\in\mathbb{C}^{n_1\times n_1\times n_3}$ 和 $\mathcal{V}\in\mathbb{C}^{n_2\times n_2\times n_3}$, 使得

$$\mathcal{A}=\mathcal{U}*_c\mathcal{S}*_c\mathcal{V}^H,$$

其中 $\mathcal{S}$ 是一个 $n_1\times n_2\times n_3$ 的 F- 对角张量. 这种分解称为张量 $\mathcal{A}$ 的 C-SVD 分解.

定理 3.2　任意张量 $\mathcal{A}\in\mathbb{C}^{n_1\times n_2\times n_3}$ 的 Moore-Penrose 逆存在且唯一.

证　根据引理 2.1, 有

$$(\mathbf{C}_{n_3}\otimes\mathbf{I}_{n_1})\mathbf{mat}(\mathcal{A})(\mathbf{C}_{n_3}^{-1}\otimes\mathbf{I}_{n_2})=\begin{bmatrix}L(\mathcal{A})^{(1)} & & & \\ & L(\mathcal{A})^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & L(\mathcal{A})^{(n_3)}\end{bmatrix}.$$

令 $L(\mathcal{A})^{(i)}=\mathbf{U}_i\mathbf{\Sigma}_i\mathbf{V}_i^H$ 是 $L(\mathcal{A})^{(i)}$, $i=1,\cdots,n_3$ 的奇异值分解. 因此

$$(\mathbf{C}_{n_3}\otimes\mathbf{I}_{n_1})\mathbf{mat}(\mathcal{A})(\mathbf{C}_{n_3}^{-1}\otimes\mathbf{I}_{n_2})=\begin{bmatrix}L(\mathcal{A})^{(1)} & & & \\ & L(\mathcal{A})^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & L(\mathcal{A})^{(n_3)}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\mathbf{U}_1\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{V}_1^H & & & \\ & \mathbf{U}_2\mathbf{\Sigma}_2\mathbf{V}_2^H & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{U}_{n_3}\mathbf{\Sigma}_{n_3}\mathbf{V}_{n_3}^H\end{bmatrix}.$$

对于每一个

$$\mathbf{\Sigma}_i=\begin{bmatrix}\sigma_1^i & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sigma_{r_i}^i & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{bmatrix},$$

σ_j^i, $j=1,2,\cdots,r_i$, $r_i=\mathrm{rank}(L(\mathcal{A})^{(i)})$ 是 $L(\mathcal{A})^{(i)}$ 的奇异值. 定义矩阵 $\mathbf{R}_i$, $i=1,\cdots,n_3$, 如下

$$\mathbf{R}_i=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sigma_1^i} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \frac{1}{\sigma_{r_i}^i} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{bmatrix}.$$

明显有 $\mathbf{R}_i=\mathbf{\Sigma}_i^{\dagger}$, $i=1,\cdots,n_3$. 令 $\mathbf{X}_i=\mathbf{V}_i\mathbf{R}_i\mathbf{U}_i^H$, $i=1,\cdots,n_3$. 则有

$$\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{X}_{n_3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{V}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{V}_{n_3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{R}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{R}_{n_3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{U}_1^H & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{U}_{n_3}^H\end{bmatrix}.$$

因此

$$\begin{aligned}&\mathbf{ten}\left((\mathbf{C}_{n_3}^{-1}\otimes\mathbf{I}_{n_2})\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{X}_{n_3}\end{bmatrix}(\mathbf{C}_{n_3}\otimes\mathbf{I}_{n_1})\right)\\ &=\mathbf{ten}\left((\mathbf{C}_{n_3}^{-1}\otimes\mathbf{I}_{n_2})\begin{bmatrix}\mathbf{V}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{V}_{n_3}\end{bmatrix}(\mathbf{C}_{n_3}\otimes\mathbf{I}_{n_1})\right)\\ &\quad\times\mathbf{ten}\left((\mathbf{C}_{n_3}^{-1}\otimes\mathbf{I}_{n_2})\begin{bmatrix}\mathbf{R}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{R}_{n_3}\end{bmatrix}(\mathbf{C}_{n_3}\otimes\mathbf{I}_{n_1})\right)\end{aligned}$$

$$\times \,\mathbf{ten}\left((\mathbf{C}_{n_3}^{-1} \otimes \mathbf{I}_{n_2}) \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1^H & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{U}_{n_3}^H \end{bmatrix} (\mathbf{C}_{n_3} \otimes \mathbf{I}_{n_1}) \right),$$

即 $\mathcal{X} = \mathcal{V} *_c \mathcal{R} *_c \mathcal{U}^H$. 经检验 $\mathcal{X}$ 满足 (3.1), 故 $\mathcal{A}$ 的 Moore-Penrose 逆存在. 下证唯一性.

假设 $\mathcal{X}_1$ 和 $\mathcal{X}_2$ 都是 (3.1) 的解, 则有

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_1 &= \mathcal{X}_1 *_c \mathcal{A} *_c \mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_1 *_c (\mathcal{A} *_c \mathcal{X}_2 *_c \mathcal{A}) *_c \mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_1 *_c (\mathcal{A} *_c \mathcal{X}_2)^H *_c (\mathcal{A} *_c \mathcal{X}_1)^H \\
&= \mathcal{X}_1 *_c (\mathcal{A} *_c \mathcal{X}_1 *_c \mathcal{A} *_c \mathcal{X}_2)^H = \mathcal{X}_1 *_c (\mathcal{A} *_c \mathcal{X}_2)^H \\
&= \mathcal{X}_1 *_c \mathcal{A} *_c \mathcal{X}_2 \\
&= \mathcal{X}_1 *_c (\mathcal{A} *_c \mathcal{X}_2 *_c \mathcal{A}) *_c \mathcal{X}_2 = (\mathcal{X}_1 *_c \mathcal{A})^H *_c (\mathcal{X}_2 *_c \mathcal{A})^H *_c \mathcal{X}_2 \\
&= (\mathcal{X}_2 *_c \mathcal{A} *_c \mathcal{X}_1 *_c \mathcal{A})^H *_c \mathcal{X}_2 = (\mathcal{X}_2 *_c \mathcal{A})^H *_c \mathcal{X}_2 \\
&= \mathcal{X}_2 *_c \mathcal{A} *_c \mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_2.
\end{aligned}$$

因此, 张量 $\mathcal{A}$ 的 Moore-Penrose 逆是唯一的.

定理 3.3　设 $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ 且有 C-SVD 分解 $\mathcal{A} = \mathcal{U} *_c \mathcal{S} *_c \mathcal{V}^H$, 则 $\mathcal{A}^\dagger = \mathcal{V} *_c \mathcal{S}^\dagger *_c \mathcal{U}^H$.

证　很显然 $\mathcal{V} *_c \mathcal{S}^\dagger *_c \mathcal{U}^H$ 满足 (3.1) 中的 4 个等式.

定理 3.4　设 $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$, 若存在一个酉张量 $\mathcal{Q} \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_1 \times n_3}$ 和一个 F- 上三角张量 $\mathcal{R} \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$, 使得

$$\mathcal{A} = \mathcal{Q} *_c \mathcal{R},$$

则称此分解是张量 $\mathcal{A}$ 的 C-QR 分解.

证　令 $\widehat{\mathcal{A}} = L(\mathcal{A})$, $\widehat{\mathcal{Q}} = L(\mathcal{Q})$ 和 $\widehat{\mathcal{R}} = L(\mathcal{R})$. 假设 $\widehat{\mathcal{A}}^{(i)} = \mathbf{Q}_i \mathbf{R}_i = \widehat{\mathcal{Q}}^{(i)} \widehat{\mathcal{R}}^{(i)}$, $i = 1, 2, \cdots, n_3$, 是 $\widehat{\mathcal{A}}^{(i)}$ 的 QR 分解. 因此, $\mathcal{A} = \mathcal{Q} *_c \mathcal{R}$. 由于 $L(\mathcal{Q} *_c \mathcal{Q}^H) = L(\mathcal{Q}) \triangle L(\mathcal{Q}^H)$, 故

$$L(\mathcal{Q})^{(i)} L(\mathcal{Q}^H)^{(i)} = \widehat{\mathcal{Q}}^{(i)} (\widehat{\mathcal{Q}}^{(i)})^H = \mathbf{I}_{n_1} = L(\mathcal{I})^{(i)}, \quad i = 1, 2, \cdots, n_3.$$

故可推出 $\mathcal{Q} *_c \mathcal{Q}^H = \mathcal{I}$, 因此 $\mathcal{Q}$ 是一个酉张量. 另一方面, $\mathbf{R}_i$ 都是上三角矩阵, 因此 $\widehat{\mathcal{R}}^{(i)}$ 都是上三角矩阵, 故可得 $\mathcal{R}$ 是一个 F- 上三角张量.

定理 3.5　设 $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ 且有分解 $\mathcal{A} = \mathcal{Q} *_c \mathcal{R}$, 则 $\mathcal{A}^\dagger = \mathcal{R}^\dagger *_c \mathcal{Q}^H$.

证　经检验, $\mathcal{R}^\dagger *_c \mathcal{Q}^H$ 满足 (3.1) 中的 4 个等式.

定理 3.6　设 $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{n \times n \times n_3}$, 若存在一个酉张量 $\mathcal{Q} \in \mathbb{C}^{n \times n \times n_3}$ 和一个 F- 上三角张量 $\mathcal{T} \in \mathbb{C}^{n \times n \times n_3}$, 使得

$$\mathcal{A} = \mathcal{Q}^H *_c \mathcal{T} *_c \mathcal{Q},$$

则称此分解是张量 $\mathcal{A}$ 的 C-Schur 分解.

证　令 $\widehat{\mathcal{A}} = L(\mathcal{A})$, $\widehat{\mathcal{Q}} = L(\mathcal{Q})$ 和 $\widehat{\mathcal{T}} = L(\mathcal{T})$. 假设 $\widehat{\mathcal{A}}^{(i)} = \mathbf{Q}_i^H \mathbf{T}_i \mathbf{Q}_i = (\widehat{\mathcal{Q}}^{(i)})^H \widehat{\mathcal{T}}^{(i)} \widehat{\mathcal{Q}}^{(i)}$, $i = 1, 2, \cdots, n_3$, 是 $\widehat{\mathcal{A}}^{(i)}$ 的 Schur 分解. 因此, $\mathcal{A} = \mathcal{Q}^H *_c \mathcal{T} *_c \mathcal{Q}$. 根据定理 3.4 的证明, $\mathcal{Q}$ 是一个酉张量. 另一方面, $\mathbf{T}_i$ 和 $\widehat{\mathcal{T}}^{(i)}$ 都是上三角矩阵, 则可推出 $\mathcal{T}$ 是一个 F- 上三角张量.

定理 3.7 设 $\mathcal{A}\in\mathbb{C}^{n\times n\times n_3}$ 且有分解 $\mathcal{A}=\mathcal{Q}^H*_c\mathcal{T}*_c\mathcal{Q}$, 则有

$$\mathcal{A}^\dagger=\mathcal{Q}^H*_c\mathcal{T}^\dagger*_c\mathcal{Q}.$$

证 下面证明 $\mathcal{Q}^H*_c\mathcal{T}^\dagger*_c\mathcal{Q}$ 满足 (3.1) 中的 4 个等式. 令 $\mathcal{X}=\mathcal{Q}^H*_c\mathcal{T}^\dagger*_c\mathcal{Q}$, 则有

$$\begin{aligned}\mathcal{A}*_c\mathcal{X}*_c\mathcal{A}&=\mathcal{Q}^H*_c\mathcal{T}*_c\mathcal{Q}*_c\mathcal{Q}^H*_c\mathcal{T}^\dagger*_c\mathcal{Q}*_c\mathcal{Q}^H*_c\mathcal{T}*_c\mathcal{Q}\\&=\mathcal{Q}^H*_c\mathcal{T}*_c\mathcal{T}^\dagger*_c\mathcal{T}*_c\mathcal{Q}=\mathcal{Q}^H*_c\mathcal{T}*_c\mathcal{Q}=\mathcal{A},\\\mathcal{X}*_c\mathcal{A}*_c\mathcal{X}&=\mathcal{Q}^H*_c\mathcal{T}^\dagger*_c\mathcal{Q}*_c\mathcal{Q}^H*_c\mathcal{T}*_c\mathcal{Q}*_c\mathcal{Q}^H*_c\mathcal{T}^\dagger*_c\mathcal{Q}\\&=\mathcal{Q}^H*_c\mathcal{T}^\dagger*_c\mathcal{T}*_c\mathcal{T}^\dagger*_c\mathcal{Q}=\mathcal{Q}^H*_c\mathcal{T}^\dagger*_c\mathcal{Q}=\mathcal{X},\\(\mathcal{A}*_c\mathcal{X})^H&=(\mathcal{Q}^H*_c\mathcal{T}*_c\mathcal{Q}*_c\mathcal{Q}^H*_c\mathcal{T}^\dagger*_c\mathcal{Q})^H=(\mathcal{Q}^H*_c\mathcal{T}*_c\mathcal{T}^\dagger*_c\mathcal{Q})^H\\&=\mathcal{Q}^H*_c\mathcal{T}*_c\mathcal{T}^\dagger*_c\mathcal{Q}=\mathcal{Q}^H*_c\mathcal{T}*_c\mathcal{Q}*_c\mathcal{Q}^H*_c\mathcal{T}^\dagger*_c\mathcal{Q}=\mathcal{A}*_c\mathcal{X}\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}(\mathcal{X}*_c\mathcal{A})^H&=(\mathcal{Q}^H*_c\mathcal{T}^\dagger*_c\mathcal{Q}*_c\mathcal{Q}^H*_c\mathcal{T}*_c\mathcal{Q})^H=(\mathcal{Q}^H*_c\mathcal{T}^\dagger*_c\mathcal{T}*_c\mathcal{Q})^H\\&=\mathcal{Q}^H*_c\mathcal{T}^\dagger*_c\mathcal{T}*_c\mathcal{Q}=\mathcal{Q}^H*_c\mathcal{T}^\dagger*_c\mathcal{Q}*_c\mathcal{Q}^H*_c\mathcal{T}*_c\mathcal{Q}=\mathcal{X}*_c\mathcal{A}.\end{aligned}$$

因此, 根据定义 3.1, 可得 $\mathcal{A}^\dagger=\mathcal{Q}^H*_c\mathcal{T}^\dagger*_c\mathcal{Q}$.

从现在开始, 定义

$$\mathbf{DCT}(\mathbf{mat}(\mathcal{A}))=(\mathbf{C}_{n_3}\otimes\mathbf{I}_{n_1})\mathbf{mat}(\mathcal{A})(\mathbf{C}_{n_3}^{-1}\otimes\mathbf{I}_{n_2})=\begin{bmatrix}L(\mathcal{A})^{(1)}&&&\\&L(\mathcal{A})^{(2)}&&\\&&\ddots&\\&&&L(\mathcal{A})^{(n_3)}\end{bmatrix}$$

和

$$\mathbf{ten}\left(\mathbf{IDCT}\left(\begin{bmatrix}L(\mathcal{A})^{(1)}&&&\\&L(\mathcal{A})^{(2)}&&\\&&\ddots&\\&&&L(\mathcal{A})^{(n_3)}\end{bmatrix}\right)\right)=\mathcal{A}.$$

下面将给出张量的满秩分解, 注意并非所有的张量都具有满秩分解.

定义 3.2 设 $\mathcal{A}\in\mathbb{C}^{n_1\times n_2\times n_3}$, 如果 $\mathcal{A}$ 可以分解成

$$\mathcal{A}=\mathcal{M}*_c\mathcal{N},$$

其中

$$\mathcal{M}=\mathbf{ten}\left(\mathbf{IDCT}\left(\begin{bmatrix}\mathbf{M}_1&&\\&\ddots&\\&&\mathbf{M}_{n_3}\end{bmatrix}\right)\right)\in\mathbb{C}^{n_1\times r\times n_3},\quad \mathbf{M}_i\in\mathbb{C}_r^{n_1\times r},\ i=1,2,\cdots,n_3$$

和

$$\mathcal{N} = \mathbf{ten}\left(\mathbf{IDCT}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{N}_{n_3} \end{bmatrix}\right)\right) \in \mathbb{C}^{r\times n_2\times n_3}, \quad \mathbf{N}_i \in \mathbb{C}_r^{r\times n_2},\ i=1,2,\cdots,n_3,$$

这种分解称为张量 $\mathcal{A}$ 的 C- 满秩分解.

注 3.1　令 $\widehat{\mathcal{A}} = L(\mathcal{A})$, $\widehat{\mathcal{M}} = L(\mathcal{M})$ 和 $\widehat{\mathcal{N}} = L(\mathcal{N})$. 假设 $\widehat{\mathcal{A}}^{(i)} = \mathbf{M}_i\mathbf{N}_i = \widehat{\mathcal{M}}^{(i)}\widehat{\mathcal{N}}^{(i)}$, $\mathbf{M}_i \in \mathbb{C}_r^{n_1\times r}$, $\mathbf{N}_i \in \mathbb{C}_r^{r\times n_2}$, $i=1,2,\cdots,n_3$, 是 $\widehat{\mathcal{A}}^{(i)}$ 的满秩分解. 我们可推出当 $\mathrm{rank}(\widehat{\mathcal{A}}^{(i)}) = r$, $i=1,2,\cdots,n_3$ 时, 上文所定义的张量 $\mathcal{A}$ 的满秩分解成立.

定理 3.8　设 $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{n_1\times n_2\times n_3}$ 且有分解 $\mathcal{A} = \mathcal{M} *_c \mathcal{N}$, 则有

$$\mathcal{A}^{\dagger} = \mathcal{N}^H *_c (\mathcal{M}^H *_c \mathcal{A} *_c \mathcal{N}^H)^{-1} *_c \mathcal{M}^H.$$

证　令 $\mathcal{X} = \mathcal{N}^H *_c (\mathcal{M}^H *_c \mathcal{A} *_c \mathcal{N}^H)^{-1} *_c \mathcal{M}^H$, 则有

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} *_c \mathcal{X} *_c \mathcal{A} &= \mathcal{M} *_c \mathcal{N} *_c \mathcal{N}^H *_c (\mathcal{M}^H *_c \mathcal{A} *_c \mathcal{N}^H)^{-1} *_c \mathcal{M}^H *_c \mathcal{M} *_c \mathcal{N} \\
&= \mathcal{M} *_c \mathcal{N} *_c \mathcal{N}^H *_c (\mathcal{M}^H *_c \mathcal{M} *_c \mathcal{N} *_c \mathcal{N}^H)^{-1} *_c \mathcal{M}^H *_c \mathcal{M} *_c \mathcal{N} \\
&= \mathcal{M} *_c \mathcal{N} *_c \mathcal{N}^H *_c (\mathcal{N} *_c \mathcal{N}^H)^{-1} *_c (\mathcal{M}^H *_c \mathcal{M})^{-1} *_c \mathcal{M}^H *_c \mathcal{M} *_c \mathcal{N} \\
&= \mathcal{M} *_c \mathcal{N} = \mathcal{A}, \\
\mathcal{X} *_c \mathcal{A} *_c \mathcal{X} &= \mathcal{N}^H *_c (\mathcal{M}^H *_c \mathcal{A} *_c \mathcal{N}^H)^{-1} *_c \mathcal{M}^H *_c \mathcal{A} \\
&\quad *_c \mathcal{N}^H *_c (\mathcal{M}^H *_c \mathcal{A} *_c \mathcal{N}^H)^{-1} *_c \mathcal{M}^H \\
&= \mathcal{N}^H *_c (\mathcal{M}^H *_c \mathcal{A} *_c \mathcal{N}^H)^{-1} \mathcal{M}^H = \mathcal{X}, \\
(\mathcal{A} *_c \mathcal{X})^H &= [\mathcal{M} *_c \mathcal{N} *_c \mathcal{N}^H *_c (\mathcal{M}^H *_c \mathcal{A} *_c \mathcal{N}^H)^{-1} *_c \mathcal{M}^H]^H \\
&= [\mathcal{M} *_c \mathcal{N} *_c \mathcal{N}^H *_c (\mathcal{N} *_c \mathcal{N}^H)^{-1} *_c (\mathcal{M}^H *_c \mathcal{M})^{-1} *_c \mathcal{M}^H]^H \\
&= \mathcal{M} *_c (\mathcal{M}^H *_c \mathcal{M})^{-1} *_c \mathcal{M}^H \\
&= \mathcal{M} *_c \mathcal{N} *_c \mathcal{N}^H *_c (\mathcal{N} *_c \mathcal{N}^H)^{-1} *_c (\mathcal{M}^H *_c \mathcal{M})^{-1} *_c \mathcal{M}^H \\
&= \mathcal{M} *_c \mathcal{N} *_c \mathcal{N}^H *_c (\mathcal{M}^H *_c \mathcal{A} *_c \mathcal{N}^H)^{-1} *_c \mathcal{M}^H = \mathcal{A} *_c \mathcal{X}
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
(\mathcal{X} *_c \mathcal{A})^H &= [\mathcal{N}^H *_c (\mathcal{M}^H *_c \mathcal{A} *_c \mathcal{N}^H)^{-1} *_c \mathcal{M}^H *_c \mathcal{M} *_c \mathcal{N}]^H \\
&= [\mathcal{N}^H *_c (\mathcal{N} *_c \mathcal{N}^H)^{-1} *_c (\mathcal{M}^H *_c \mathcal{M})^{-1} *_c \mathcal{M}^H *_c \mathcal{M} *_c \mathcal{N}]^H \\
&= \mathcal{N}^H *_c (\mathcal{N} *_c \mathcal{N}^H)^{-1} *_c \mathcal{N} \\
&= \mathcal{N}^H *_c (\mathcal{N} *_c \mathcal{N}^H)^{-1} *_c (\mathcal{M}^H *_c \mathcal{M})^{-1} *_c \mathcal{M}^H *_c \mathcal{M} *_c \mathcal{N} \\
&= \mathcal{N}^H *_c (\mathcal{M}^H *_c \mathcal{A} *_c \mathcal{N}^H)^{-1} *_c \mathcal{M}^H *_c \mathcal{M} *_c \mathcal{N} = \mathcal{X} *_c \mathcal{A}.
\end{aligned}$$

根据定义 3.1, 可得 $\mathcal{A}^{\dagger} = \mathcal{N}^H *_c (\mathcal{M}^H *_c \mathcal{A} *_c \mathcal{N}^H)^{-1} *_c \mathcal{M}^H$.

定义 3.3 设 $\mathcal{A}\in\mathbb{C}^{n_1\times n_2\times n_3}$, 若张量 $\mathcal{A}$ 可以分解成

$$\mathcal{A}=\mathcal{Q}*_c\mathcal{D}*_c\mathcal{R},$$

其中

$$\mathcal{Q}=\mathbf{ten}\left(\mathbf{IDCT}\left(\begin{bmatrix}\mathbf{Q}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{Q}_{n_3}\end{bmatrix}\right)\right)\in\mathbb{C}^{n_1\times r\times n_3},\quad \mathbf{Q}_i\in\mathbb{C}_r^{n_1\times r},\ i=1,2,\cdots,n_3,$$

$\mathcal{D}\in\mathbb{C}^{r\times r\times n_3}$ 是一个可逆 F- 对角张量和

$$\mathcal{R}=\mathbf{ten}\left(\mathbf{IDCT}\left(\begin{bmatrix}\mathbf{R}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{R}_{n_3}\end{bmatrix}\right)\right)\in\mathbb{C}^{r\times n_2\times n_3},\quad \mathbf{R}_i\in\mathbb{C}_r^{r\times n_2},\ i=1,2,\cdots,n_3$$

是一个 F- 上三角张量, 这种分解称为 $\mathcal{A}$ 的 C-QDR 分解.

注 3.2 令 $\widehat{\mathcal{A}}=L(\mathcal{A})$, $\widehat{\mathcal{Q}}=L(\mathcal{Q})$, $\widehat{\mathcal{D}}=L(\mathcal{D})$, $\widehat{\mathcal{R}}=L(\mathcal{R})$. 假设 $\widehat{\mathcal{A}}^{(i)}=\mathbf{Q}_i\mathbf{D}_i\mathbf{R}_i=\widehat{\mathcal{Q}}^{(i)}\widehat{\mathcal{D}}^{(i)}\widehat{\mathcal{R}}^{(i)}$, $\mathbf{Q}_i\in\mathbb{C}_r^{n_1\times r}$, $\mathbf{D}_i\in\mathbb{C}_r^{r\times r}$, $\mathbf{R}_i\in\mathbb{C}_r^{r\times n_2}$, $i=1,2,\cdots,n_3$, 是 $\widehat{\mathcal{A}}^{(i)}$ 的 QDR 分解 [28]. 我们可推出当 $\operatorname{rank}(\widehat{\mathcal{A}}^{(i)})=r$, $i=1,2,\cdots,n_3$ 时, 上文所定义的 $\mathcal{A}$ 的 C-QDR 分解成立. 由于 $\mathbf{D}_i$ 是可逆对角矩阵, 所以 $\widehat{\mathcal{D}}^{(i)}$ 也是可逆对角矩阵. 此外, $\mathbf{R}_i$ 和 $\widehat{\mathcal{R}}^{(i)}$ 都是上三角矩阵, 故可推出 $\mathcal{D}$ 是一个可逆 F- 对角张量和 $\mathcal{R}$ 是一个 F- 上三角张量.

定理 3.9 设 $\mathcal{A}\in\mathbb{C}^{n_1\times n_2\times n_3}$ 且有分解 $\mathcal{A}^H=\mathcal{Q}*_c\mathcal{D}*_c\mathcal{R}$, 则有

$$\mathcal{A}^\dagger=\mathcal{Q}*_c(\mathcal{R}*_c\mathcal{A}*_c\mathcal{Q})^{-1}*_c\mathcal{R}.$$

证 令 $\mathcal{X}=\mathcal{Q}*_c(\mathcal{R}*_c\mathcal{A}*_c\mathcal{Q})^{-1}*_c\mathcal{R}$, 可以得到

$$\begin{aligned}\mathcal{A}*_c\mathcal{X}*_c\mathcal{A}&=\mathcal{R}^H*_c\mathcal{D}^H*_c\mathcal{Q}^H*_c\mathcal{Q}*_c(\mathcal{R}*_c\mathcal{A}*_c\mathcal{Q})^{-1}*_c\mathcal{R}*_c\mathcal{R}^H*_c\mathcal{D}^H*_c\mathcal{Q}^H\\&=\mathcal{R}^H*_c\mathcal{D}^H*_c\mathcal{Q}^H*_c\mathcal{Q}*_c(\mathcal{R}*_c\mathcal{R}^H*_c\mathcal{D}^H*_c\mathcal{Q}^H*_c\mathcal{Q})^{-1}*_c\mathcal{R}*_c\mathcal{R}^H*_c\mathcal{D}^H*_c\mathcal{Q}^H\\&=\mathcal{R}^H*_c\mathcal{D}^H*_c\mathcal{Q}^H=\mathcal{A},\\ \mathcal{X}*_c\mathcal{A}*_c\mathcal{X}&=\mathcal{Q}*_c(\mathcal{R}*_c\mathcal{A}*_c\mathcal{Q})^{-1}*_c\mathcal{R}*_c\mathcal{A}*_c\mathcal{Q}*_c(\mathcal{R}*_c\mathcal{A}*_c\mathcal{Q})^{-1}*_c\mathcal{R}\\&=\mathcal{Q}*_c(\mathcal{R}*_c\mathcal{A}*_c\mathcal{Q})^{-1}*_c\mathcal{R}=\mathcal{X},\\ (\mathcal{A}*_c\mathcal{X})^H&=[\mathcal{R}^H*_c\mathcal{D}^H*_c\mathcal{Q}^H*_c\mathcal{Q}*_c(\mathcal{R}*_c\mathcal{A}*_c\mathcal{Q})^{-1}*_c\mathcal{R}]^H\\&=[\mathcal{R}^H*_c\mathcal{D}^H*_c\mathcal{Q}^H*_c\mathcal{Q}*_c(\mathcal{Q}^H*_c\mathcal{Q})^{-1}*_c(\mathcal{D}^H)^{-1}*_c(\mathcal{R}*_c\mathcal{R}^H)^{-1}*_c\mathcal{R}]^H\\&=\mathcal{R}^H*_c(\mathcal{R}*_c\mathcal{R}^H)^{-1}*_c\mathcal{R}\\&=\mathcal{R}^H*_c\mathcal{D}^H*_c\mathcal{Q}^H*_c\mathcal{Q}*_c(\mathcal{Q}^H*_c\mathcal{Q})^{-1}*_c(\mathcal{D}^H)^{-1}*_c(\mathcal{R}*_c\mathcal{R}^H)^{-1}*_c\mathcal{R}\\&=\mathcal{R}^H*_c\mathcal{D}^H*_c\mathcal{Q}^H*_c\mathcal{Q}*_c(\mathcal{R}*_c\mathcal{A}*_c\mathcal{Q})^{-1}*_c\mathcal{R}=\mathcal{A}*_c\mathcal{X}\end{aligned}$$

和

$$(\mathcal{X}*_c\mathcal{A})^H=[\mathcal{Q}*_c(\mathcal{R}*_c\mathcal{A}*_c\mathcal{Q})^{-1}*_c\mathcal{R}*_c\mathcal{R}^H*_c\mathcal{D}^H*_c\mathcal{Q}^H]^H$$

$$\begin{aligned}
&= [\mathcal{Q} *_c (\mathcal{Q}^H *_c \mathcal{Q})^{-1} *_c (\mathcal{D}^H)^{-1} *_c (\mathcal{R} *_c \mathcal{R}^H)^{-1} *_c \mathcal{R} *_c \mathcal{R}^H *_c \mathcal{D}^H *_c \mathcal{Q}^H]^H \\
&= \mathcal{Q} *_c (\mathcal{Q}^H *_c \mathcal{Q})^{-1} *_c \mathcal{Q}^H \\
&= \mathcal{Q} *_c (\mathcal{Q}^H *_c \mathcal{Q})^{-1} *_c (\mathcal{D}^H)^{-1} *_c (\mathcal{R} *_c \mathcal{R}^H)^{-1} *_c \mathcal{R} *_c \mathcal{R}^H *_c \mathcal{D}^H *_c \mathcal{Q}^H \\
&= \mathcal{Q} *_c (\mathcal{R} *_c \mathcal{A} *_c \mathcal{Q})^{-1} *_c \mathcal{R} *_c \mathcal{R}^H *_c \mathcal{D}^H *_c \mathcal{Q}^H = \mathcal{X} *_c \mathcal{A}.
\end{aligned}$$

因此 $\mathcal{X} = \mathcal{A}^\dagger$.

对于一个张量 $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{n_1\times n_2\times n_3}$, 其块形式是

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 \\ \mathcal{A}_3 & \mathcal{A}_4 \end{bmatrix},$$

其中 $\mathcal{A}_1 \in \mathbb{C}^{s\times t\times n_3}$, $\mathcal{A}_2 \in \mathbb{C}^{s\times (n_2-t)\times n_3}$, $\mathcal{A}_3 \in \mathbb{C}^{(n_1-s)\times t\times n_3}$, $\mathcal{A}_4 \in \mathbb{C}^{(n_1-s)\times (n_2-t)\times n_3}$. 令

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1 & \mathcal{B}_2 \\ \mathcal{B}_3 & \mathcal{B}_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n_2\times n_4\times n_3},$$

其中 $\mathcal{B}_1 \in \mathbb{C}^{t\times k\times n_3}, \mathcal{B}_2 \in \mathbb{C}^{t\times (n_4-k)\times n_3}, \mathcal{B}_3 \in \mathbb{C}^{(n_2-t)\times k\times n_3}, \mathcal{B}_4 \in \mathbb{C}^{(n_2-t)\times (n_4-k)\times n_3}$. 可以得到

$$\mathcal{A} *_c \mathcal{B} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 \\ \mathcal{A}_3 & \mathcal{A}_4 \end{bmatrix} *_c \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1 & \mathcal{B}_2 \\ \mathcal{B}_3 & \mathcal{B}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_1 *_c \mathcal{B}_1 + \mathcal{A}_2 *_c \mathcal{B}_3 & \mathcal{A}_1 *_c \mathcal{B}_2 + \mathcal{A}_2 *_c \mathcal{B}_4 \\ \mathcal{A}_3 *_c \mathcal{B}_1 + \mathcal{A}_4 *_c \mathcal{B}_3 & \mathcal{A}_3 *_c \mathcal{B}_2 + \mathcal{A}_4 *_c \mathcal{B}_4 \end{bmatrix}.$$

假设 $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{n\times n\times n_3}$ 且有分解 $\mathcal{A} = \mathcal{U} *_c \mathcal{S} *_c \mathcal{V}^H$. 当 $\operatorname{rank}(\mathcal{S}^{(1)}) = \operatorname{rank}(\mathcal{S}^{(2)}) = \cdots = \operatorname{rank}(\mathcal{S}^{(n_3)}) = r$ 时, $\mathcal{A}$ 的分解可以写成

$$\mathcal{A} = \mathcal{U} *_c \begin{bmatrix} \mathcal{S}_r & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{bmatrix} *_c \mathcal{V}^H,$$

其中 $\mathcal{S}_r \in \mathbb{C}^{r\times r\times n_3}, \mathcal{U} \in \mathbb{C}^{n_1\times n_1\times n_3}, \mathcal{V} \in \mathbb{C}^{n_1\times n_1\times n_3}$. 令

$$\mathcal{V}^H *_c \mathcal{U} = \begin{bmatrix} \mathcal{K} & \mathcal{L} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{bmatrix}, \quad 其中\ \mathcal{K} \in \mathbb{C}^{r\times r\times n_3}.$$

因此

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \mathcal{U} *_c \begin{bmatrix} \mathcal{S}_r & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{bmatrix} *_c \mathcal{V}^H = \mathcal{U} *_c \begin{bmatrix} \mathcal{S}_r & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{bmatrix} *_c \begin{bmatrix} \mathcal{K} & \mathcal{L} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{bmatrix} *_c \mathcal{U}^H \\
&= \mathcal{U} *_c \begin{bmatrix} \mathcal{S}_r *_c \mathcal{K} & \mathcal{S}_r *_c \mathcal{L} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{bmatrix} *_c \mathcal{U}^H.
\end{aligned}$$

由于 $\mathcal{V}^H *_c \mathcal{U}$ 是酉的, 可以得到 $\mathcal{K} *_c \mathcal{K}^H + \mathcal{L} *_c \mathcal{L}^H = \mathcal{I}_r$, 其中 $\mathcal{I}_r \in \mathbb{C}^{r\times r\times n_3}$. 我们称这种分解为张量 $\mathcal{A}$ 的 C-HS 分解.

定理 3.10　设 $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{n\times n\times n_3}$, 假设 $\mathcal{A}$ 有 C-HS 分解, 则

$$\mathcal{A}^\dagger = \mathcal{U} *_c \begin{bmatrix} \mathcal{K}^H *_c \mathcal{S}_r^{-1} & \mathcal{O} \\ \mathcal{L}^H *_c \mathcal{S}_r^{-1} & \mathcal{O} \end{bmatrix} *_c \mathcal{U}^H. \tag{3.2}$$

证 令 $\mathcal{A}=\mathcal{U}*_c\begin{bmatrix}\mathcal{S}_r*_c\mathcal{K} & \mathcal{S}_r*_c\mathcal{L}\\ \mathcal{O} & \mathcal{O}\end{bmatrix}*_c\mathcal{U}^H$ 和 $\mathcal{X}=\mathcal{U}*_c\begin{bmatrix}\mathcal{K}^H*_c\mathcal{S}_r^{-1} & \mathcal{O}\\ \mathcal{L}^H*_c\mathcal{S}_r^{-1} & \mathcal{O}\end{bmatrix}*_c\mathcal{U}^H$, 则

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}*_c\mathcal{X}*_c\mathcal{A}=&\,\mathcal{U}*_c\begin{bmatrix}\mathcal{S}_r*_c\mathcal{K} & \mathcal{S}_r*_c\mathcal{L}\\ \mathcal{O} & \mathcal{O}\end{bmatrix}*_c\mathcal{U}^H*_c\mathcal{U}*_c\begin{bmatrix}\mathcal{K}^H*_c\mathcal{S}_r^{-1} & \mathcal{O}\\ \mathcal{L}^H*_c\mathcal{S}_r^{-1} & \mathcal{O}\end{bmatrix}*_c\mathcal{U}^H\\
&*_c\mathcal{U}*_c\begin{bmatrix}\mathcal{S}_r*_c\mathcal{K} & \mathcal{S}_r*_c\mathcal{L}\\ \mathcal{O} & \mathcal{O}\end{bmatrix}*_c\mathcal{U}^H\\
=&\,\mathcal{U}*_c\begin{bmatrix}\mathcal{S}_r*_c\mathcal{K} & \mathcal{S}_r*_c\mathcal{L}\\ \mathcal{O} & \mathcal{O}\end{bmatrix}*_c\mathcal{U}^H=\mathcal{A},\\
\mathcal{X}*_c\mathcal{A}*_c\mathcal{X}=&\,\mathcal{U}*_c\begin{bmatrix}\mathcal{K}^H*_c\mathcal{S}_r^{-1} & \mathcal{O}\\ \mathcal{L}^H*_c\mathcal{S}_r^{-1} & \mathcal{O}\end{bmatrix}*_c\mathcal{U}^H*_c\mathcal{U}*_c\begin{bmatrix}\mathcal{S}_r*_c\mathcal{K} & \mathcal{S}_r*_c\mathcal{L}\\ \mathcal{O} & \mathcal{O}\end{bmatrix}*_c\mathcal{U}^H\\
&*_c\mathcal{U}*_c\begin{bmatrix}\mathcal{K}^H*_c\mathcal{S}_r^{-1} & \mathcal{O}\\ \mathcal{L}^H*_c\mathcal{S}_r^{-1} & \mathcal{O}\end{bmatrix}*_c\mathcal{U}^H\\
=&\,\mathcal{U}*_c\begin{bmatrix}\mathcal{K}^H*_c\mathcal{S}_r^{-1} & \mathcal{O}\\ \mathcal{L}^H*_c\mathcal{S}_r^{-1} & \mathcal{O}\end{bmatrix}*_c\mathcal{U}^H=\mathcal{X},\\
\mathcal{A}*_c\mathcal{X}=&\,\mathcal{U}*_c\begin{bmatrix}\mathcal{S}_r*_c\mathcal{K} & \mathcal{S}_r*_c\mathcal{L}\\ \mathcal{O} & \mathcal{O}\end{bmatrix}*_c\mathcal{U}^H*_c\mathcal{U}*_c\begin{bmatrix}\mathcal{K}^H*_c\mathcal{S}_r^{-1} & \mathcal{O}\\ \mathcal{L}^H*_c\mathcal{S}_r^{-1} & \mathcal{O}\end{bmatrix}*_c\mathcal{U}^H\\
=&\,\mathcal{U}*_c\begin{bmatrix}\mathcal{I}_r & \mathcal{O}\\ \mathcal{O} & \mathcal{O}\end{bmatrix}*_c\mathcal{U}^H=(\mathcal{A}*_c\mathcal{X})^H,\\
\mathcal{X}*_c\mathcal{A}=&\,\mathcal{U}*_c\begin{bmatrix}\mathcal{K}^H*_c\mathcal{S}_r^{-1} & \mathcal{O}\\ \mathcal{L}^H*_c\mathcal{S}_r^{-1} & \mathcal{O}\end{bmatrix}*_c\mathcal{U}^H*_c\mathcal{U}*_c\begin{bmatrix}\mathcal{S}_r*_c\mathcal{K} & \mathcal{S}_r*_c\mathcal{L}\\ \mathcal{O} & \mathcal{O}\end{bmatrix}*_c\mathcal{U}^H\\
=&\,\mathcal{U}*_c\begin{bmatrix}\mathcal{K}^H*_c\mathcal{K} & \mathcal{K}^H*_c\mathcal{L}\\ \mathcal{L}^H*_c\mathcal{K} & \mathcal{L}^H*_c\mathcal{L}\end{bmatrix}*_c\mathcal{U}^H=(\mathcal{X}*_c\mathcal{A})^H.
\end{aligned}$$

因此 $\mathcal{A}^\dagger=\mathcal{U}*_c\begin{bmatrix}\mathcal{K}^H*_c\mathcal{S}_r^{-1} & \mathcal{O}\\ \mathcal{L}^H*_c\mathcal{S}_r^{-1} & \mathcal{O}\end{bmatrix}*_c\mathcal{U}^H$.

§3.2　计算张量的 Moore-Penrose 逆的算法

算法 2　计算一个张量 $\mathcal{A}$ 的 Moore-Penrose 逆

输入: 一个 $n_1\times n_2\times n_3$ 的张量 $\mathcal{A}$

输出: 一个 $n_2\times n_1\times n_3$ 的张量 $\mathcal{X}$

1: $\widehat{\mathcal{A}}=L(\mathcal{A})=\mathcal{A}\times_3\mathbf{M}$; 其中 $\mathbf{M}$ 是 DCT 矩阵

2: for $i=1,\cdots,n_3$

　$\widehat{\mathcal{X}}^{(i)}=\mathrm{pinv}(\widehat{\mathcal{A}}^{(i)})$, 其中 $\mathrm{pinv}(\widehat{\mathcal{A}}^{(i)})$ 是 $\widehat{\mathcal{A}}^{(i)}$ 的 Moore-Penrose 逆

　end

3: $\mathcal{X}=L^{-1}(\widehat{\mathcal{X}})=\widehat{\mathcal{X}}\times_3\mathbf{M}^{-1}$

例 3.1　设 $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{3\times3\times4}$, 且有

$$\mathcal{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}^{(3)} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}^{(4)} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

通过利用算法 2, 可以得到

$$(\mathcal{A}^{\dagger})^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.6666 & 1.3333 & 9.7778 \\ 1.3333 & 1 & 7.5556 \\ 0 & 0 & -0.3333 \end{bmatrix}, \quad (\mathcal{A}^{\dagger})^{(2)} = \begin{bmatrix} -1.2722 & -1.0482 & -8.2780 \\ -1.2295 & -0.7384 & -6.2015 \\ 0.1057 & -0.0651 & 0.2724 \end{bmatrix},$$

$$(\mathcal{A}^{\dagger})^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.7451 & 0.7255 & 5.0065 \\ 1.1372 & 0.3529 & 3.4837 \\ -0.2353 & 0.1568 & -0.0196 \end{bmatrix}, \quad (\mathcal{A}^{\dagger})^{(4)} = \begin{bmatrix} -0.2723 & -0.3815 & -1.6113 \\ -0.5629 & -0.0718 & -1.0905 \\ 0.1057 & -0.0651 & -0.0610 \end{bmatrix}.$$

§4　C- 乘积下张量的 Drazin 逆

在这一节中, 我们将给出张量 Drazin 逆的一些表达式, 然后建立一个计算张量 Drazin 逆的算法.

§4.1　张量的 Drazin 逆的表征

一个矩阵 A 的指标是指满足 $\mathrm{rank}(A^k) = \mathrm{rank}(A^{k+1})$ 的最小的非负整数 k, 记作 $\mathrm{Ind}(A)$. 现在, 我们给出一个张量 $\mathcal{A}$ 的指标的定义.

定义 4.1　设 $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{n_1\times n_1\times n_3}$, 定义张量 $\mathcal{A}$ 的指标为 $\mathrm{Ind}(\mathcal{A}) = \mathrm{Ind}(\mathbf{mat}(\mathcal{A}))$.

引理 4.1　设 $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{n_1\times n_1\times n_3}$, 假设 $\mathcal{A}$ 可以表示为

$$\mathbf{DCT}(\mathbf{mat}(\mathcal{A})) = \begin{bmatrix} L(\mathcal{A})^{(1)} & & & \\ & L(\mathcal{A})^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & L(\mathcal{A})^{(n_3)} \end{bmatrix},$$

则 $\mathrm{Ind}(\mathcal{A}) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n_3} \{\mathrm{Ind}(L(\mathcal{A})^{(i)})\}$.

证　由于

$$\mathbf{mat}(\mathcal{A}) = (\mathbf{C}_{n_3}^{-1} \otimes \mathbf{I}_{n_1}) \begin{bmatrix} L(\mathcal{A})^{(1)} & & & \\ & L(\mathcal{A})^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & L(\mathcal{A})^{(n_3)} \end{bmatrix} (\mathbf{C}_{n_3} \otimes \mathbf{I}_{n_1}).$$

因此

$$(\mathbf{mat}(\mathcal{A}))^k = (\mathbf{C}_{n_3}^{-1} \otimes \mathbf{I}_{n_1}) \begin{bmatrix} L(\mathcal{A})^{(1)} & & & \\ & L(\mathcal{A})^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & L(\mathcal{A})^{(n_3)} \end{bmatrix}^k (\mathbf{C}_{n_3} \otimes \mathbf{I}_{n_1})$$

$$= (\mathbf{C}_{n_3}^{-1} \otimes \mathbf{I}_{n_1}) \begin{bmatrix} (L(\mathcal{A})^{(1)})^k & & & \\ & (L(\mathcal{A})^{(2)})^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & (L(\mathcal{A})^{(n_3)})^k \end{bmatrix} (\mathbf{C}_{n_3} \otimes \mathbf{I}_{n_1}),$$

可以推出 $\begin{bmatrix} L(\mathcal{A})^{(1)} & & & \\ & L(\mathcal{A})^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & L(\mathcal{A})^{(n_3)} \end{bmatrix}$ 的指标是 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n_3}\{\mathrm{Ind}(L(\mathcal{A})^{(i)})\}$. 因此 $\mathrm{Ind}(\mathbf{mat}(\mathcal{A})) = \mathrm{Ind}(\mathcal{A}) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n_3}\{\mathrm{Ind}(L(\mathcal{A})^{(i)})\}$.

下面我们将给出张量 Drazin 逆的定义. 在此之前, 记 $\mathcal{A}^k = \underbrace{\mathcal{A} *_c \cdots *_c \mathcal{A}}_{k}$.

定义 4.2 设 $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{n_1\times n_1\times n_3}$ 且 $\mathrm{Ind}(\mathcal{A}) = k$. 若存在张量 $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{n_1\times n_1\times n_3}$, 满足

$$\mathcal{A}^{k+1} *_c \mathcal{X} = \mathcal{A}^k, \quad \mathcal{X} *_c \mathcal{A} *_c \mathcal{X} = \mathcal{X}, \quad \mathcal{A} *_c \mathcal{X} = \mathcal{X} *_c \mathcal{A}, \tag{4.1}$$

则称 $\mathcal{X}$ 是张量 $\mathcal{A}$ 的 Drazin 逆, 记作 $\mathcal{A}^D$. 特别地, 当 $k = 1$ 时, 则称 $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{A}$ 的群逆, 记作 $\mathcal{A}^{\#}$.

引理 4.2 设 $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{n_1\times n_1\times n_3}$ 且

$$\mathbf{DCT}(\mathbf{mat}(\mathcal{A})) = \begin{bmatrix} L(\mathcal{A})^{(1)} & & & \\ & L(\mathcal{A})^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & L(\mathcal{A})^{(n_3)} \end{bmatrix}.$$

如果 $\mathrm{Ind}(\mathcal{A}) = k$, 则 $\mathcal{A}$ 的 Drazin 逆存在且唯一.

证 因为 $\mathrm{Ind}(\mathcal{A}) = k$, 所以矩阵 $L(\mathcal{A})^{(i)}$, $i = 1, 2, \cdots, n_3$, 都有 Drazin 逆. 令 $\mathbf{X}_i = (L(\mathcal{A})^{(i)})^D$, $i = 1, 2, \cdots, n_3$, 则

$$\mathcal{X} = \mathbf{ten}\left(\mathbf{IDCT}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{X}_{n_3} \end{bmatrix}\right)\right)$$

满足 (4.1) 中的 3 个等式, 显然 $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{A}$ 的 Drazin 逆. 下证唯一性.

假设张量 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 都是 (4.1) 的解. 令

$$\mathbf{DCT}(\mathbf{mat}(\mathcal{X}))=\begin{bmatrix} L(\mathcal{X})^{(1)} & & & \\ & L(\mathcal{X})^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & L(\mathcal{X})^{(n_3)} \end{bmatrix}$$

和

$$\mathbf{DCT}(\mathbf{mat}(\mathcal{A}))=\begin{bmatrix} L(\mathcal{Y})^{(1)} & & & \\ & L(\mathcal{Y})^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & L(\mathcal{Y})^{(n_3)} \end{bmatrix}.$$

它们是满足 $L(\mathcal{X})^{(i)}=(L(\mathcal{A})^{(i)})^D$ 和 $L(\mathcal{Y})^{(i)}=(L(\mathcal{A})^{(i)})^D$, $i=1,2,\cdots,n_3$ 的, 所以 $L(\mathcal{X})^{(i)}$ 和 $L(\mathcal{Y})^{(i)}$ 是一样的, 由此可得 $\mathcal{X}=\mathcal{Y}$.

下面给出张量的 Drazin 逆的一些刻画.

定理 4.1　设 $\mathcal{A}\in\mathbb{C}^{n_1\times n_1\times n_3}$ 和 $\mathrm{Ind}(\mathcal{A})=k$, 则

$$\mathcal{A}^D=\mathcal{A}^k *_c (\mathcal{A}^{2k+1})^{(1)} *_c \mathcal{A}^k.$$

特别地,

$$\mathcal{A}^D=\mathcal{A}^k *_c (\mathcal{A}^{2k+1})^{\dagger} *_c \mathcal{A}^k.$$

证　根据定义 4.2, 有

$$\mathcal{A}^k=\mathcal{A}^{k+1} *_c \mathcal{A}^D=\mathcal{A}^{k+2} *_c (\mathcal{A}^D)^2=\cdots=\mathcal{A}^{2k} *_c (\mathcal{A}^D)^k=\mathcal{A}^{2k+1} *_c (\mathcal{A}^D)^{k+1}.$$

令 $\mathcal{X}=\mathcal{A}^k *_c (\mathcal{A}^{2k+1})^{(1)} *_c \mathcal{A}^k$, 则有

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^{k+1} *_c \mathcal{X}&=\mathcal{A}^{k+1} *_c \mathcal{A}^k *_c (\mathcal{A}^{2k+1})^{(1)} *_c \mathcal{A}^k=\mathcal{A}^{2k+1} *_c (\mathcal{A}^{2k+1})^{(1)} *_c \mathcal{A}^{2k+1} *_c (\mathcal{A}^D)^{k+1}\\
&=\mathcal{A}^{2k+1} *_c (\mathcal{A}^D)^{k+1}=\mathcal{A}^k,\\
\mathcal{X} *_c \mathcal{A} *_c \mathcal{X}&=\mathcal{A}^k *_c (\mathcal{A}^{2k+1})^{(1)} *_c \mathcal{A}^k *_c \mathcal{A} *_c \mathcal{A}^k *_c (\mathcal{A}^{2k+1})^{(1)} *_c \mathcal{A}^k\\
&=\mathcal{A}^k *_c (\mathcal{A}^{2k+1})^{(1)} *_c \mathcal{A}^k=\mathcal{X},\\
\mathcal{A} *_c \mathcal{X}&=\mathcal{A} *_c \mathcal{A}^k *_c (\mathcal{A}^{2k+1})^{(1)} *_c \mathcal{A}^k=\mathcal{A} *_c \mathcal{A}^{2k} *_c (\mathcal{A}^D)^k *_c (\mathcal{A}^{2k+1})^{(1)}\\
&\quad *_c \mathcal{A}^{2k+1} *_c (\mathcal{A}^D)^{k+1}\\
&=(\mathcal{A}^D)^k *_c \mathcal{A}^{2k+1} *_c (\mathcal{A}^{2k+1})^{(1)} *_c \mathcal{A}^{2k+1} *_c (\mathcal{A}^D)^{k+1}\\
&=(\mathcal{A}^D)^k *_c \mathcal{A}^{2k+1} *_c (\mathcal{A}^D)^{k+1}
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
\mathcal{X} *_c \mathcal{A}&=\mathcal{A}^k *_c (\mathcal{A}^{2k+1})^{(1)} *_c \mathcal{A}^{k+1}=\mathcal{A}^{2k+1} *_c (\mathcal{A}^D)^{k+1} *_c (\mathcal{A}^{2k+1})^{(1)} *_c \mathcal{A} *_c \mathcal{A}^{2k} *_c (\mathcal{A}^D)^k\\
&=(\mathcal{A}^D)^{k+1} *_c \mathcal{A}^{2k+1} *_c (\mathcal{A}^{2k+1})^{(1)} *_c \mathcal{A}^{2k+1} *_c (\mathcal{A}^D)^k=(\mathcal{A}^D)^{k+1} *_c \mathcal{A}^{2k+1} *_c (\mathcal{A}^D)^k\\
&=(\mathcal{A}^D)^k *_c \mathcal{A}^{2k+1} *_c (\mathcal{A}^D)^{k+1},
\end{aligned}$$

故可得到 $\mathcal{A} *_c \mathcal{X} = \mathcal{X} *_c \mathcal{A}$. 因此 $\mathcal{A}^D = \mathcal{A}^k *_c (\mathcal{A}^{2k+1})^{(1)} *_c \mathcal{A}^k$. 若以 $(\mathcal{A}^{2k+1})^{\dagger}$ 替换 $(\mathcal{A}^{2k+1})^{(1)}$, 便可得到 $\mathcal{A}^D = \mathcal{A}^k *_c (\mathcal{A}^{2k+1})^{\dagger} *_c \mathcal{A}^k$.

定理 4.2 设 $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_1 \times n_3}$ 和 $\mathrm{Ind}(\mathcal{A}) = k$. 假设 $\mathcal{A}^k$ 有 C-QDR 分解 $\mathcal{A}^k = \mathcal{Q} *_c \mathcal{D} *_c \mathcal{R}$, 则

$$\mathcal{A}^D = \mathcal{Q} *_c (\mathcal{R} *_c \mathcal{A} *_c \mathcal{Q})^{-1} *_c \mathcal{R}.$$

证 令

$$\mathbf{DCT}(\mathbf{mat}(\mathcal{A})) = \begin{bmatrix} L(\mathcal{A})^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & L(\mathcal{A})^{(n_3)} \end{bmatrix}.$$

因为 $\mathcal{A}^k$ 有 C-QDR 分解 $\mathcal{A}^k = \mathcal{Q} *_c \mathcal{D} *_c \mathcal{R}$, 从而可推出 $(L(\mathcal{A})^{(i)})^k = \mathbf{Q}_i \mathbf{D}_i \mathbf{R}_i$, $\mathbf{Q}_i \in \mathbb{C}_r^{n_1 \times r}$, $\mathbf{D}_i \in \mathbb{C}_r^{r \times r}$, $\mathbf{R}_i \in \mathbb{C}_r^{r \times n_2}$ $(i = 1, 2, \cdots, n_3)$ 是 $(L(\mathcal{A})^{(i)})^k$ 的 QDR 分解. 注意到 $(L(\mathcal{A})^{(i)})^k = (\mathbf{Q}_i \mathbf{D}_i)\mathbf{R}_i = \mathbf{Q}_i(\mathbf{D}_i \mathbf{R}_i)$ 是 $(L(\mathcal{A})^{(i)})^k$ 的满秩分解. 根据文 [29, 定理2.1], 可知 $\mathbf{R}_i L(\mathcal{A})^{(i)} \mathbf{Q}_i \mathbf{D}_i$ 和 $\mathbf{D}_i \mathbf{R}_i L(\mathcal{A})^{(i)} \mathbf{Q}_i$, $i = 1, 2, \cdots, n_3$ 是可逆的, 所以 $\mathcal{R} *_c \mathcal{A} *_c \mathcal{Q} *_c \mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D} *_c \mathcal{R} *_c \mathcal{A} *_c \mathcal{Q}$ 是可逆的. 因此, $\mathcal{R} *_c \mathcal{A} *_c \mathcal{Q}$ 是可逆的.

另一方面, 根据文 [30] 可推出

$$(\mathbf{Q}_i \mathbf{D}_i \mathbf{R}_i L(\mathcal{A})^{(i)} \mathbf{Q}_i \mathbf{D}_i \mathbf{R}_i)^{\dagger} = (\mathbf{D}_i \mathbf{R}_i)^{\dagger} (\mathbf{R}_i L(\mathcal{A})^{(i)} \mathbf{Q}_i)^{-1} (\mathbf{Q}_i \mathbf{D}_i)^{\dagger}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n_3,$$

由于 $\mathbf{R}_i L(\mathcal{A})^{(i)} \mathbf{Q}_i$ 是可逆的, $\mathbf{D}_i \mathbf{R}_i$ 行满秩的且 $\mathbf{Q}_i \mathbf{D}_i$ 是列满秩的. 因此

$$(\mathcal{Q} *_c \mathcal{D} *_c \mathcal{R} *_c \mathcal{A} *_c \mathcal{Q} *_c \mathcal{D} *_c \mathcal{R})^{\dagger} = (\mathcal{D} *_c \mathcal{R})^{\dagger} *_c (\mathcal{R} *_c \mathcal{A} *_c \mathcal{Q})^{-1} *_c (\mathcal{Q} *_c \mathcal{D})^{\dagger}.$$

根据定理 4.1, 我们有

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^D &= \mathcal{A}^k *_c (\mathcal{A}^{2k+1})^{\dagger} *_c \mathcal{A}^k = \mathcal{A}^k *_c (\mathcal{A}^k *_c \mathcal{A} *_c \mathcal{A}^k)^{\dagger} *_c \mathcal{A}^k \\ &= \mathcal{Q} *_c \mathcal{D} *_c \mathcal{R} *_c (\mathcal{Q} *_c \mathcal{D} *_c \mathcal{R} *_c \mathcal{A} *_c \mathcal{Q} *_c \mathcal{D} *_c \mathcal{R})^{\dagger} *_c \mathcal{Q} *_c \mathcal{D} *_c \mathcal{R} \\ &= \mathcal{Q} *_c \mathcal{D} *_c \mathcal{R} *_c (\mathcal{D} *_c \mathcal{R})^{\dagger} *_c (\mathcal{R} *_c \mathcal{A} *_c \mathcal{Q})^{-1} *_c (\mathcal{Q} *_c \mathcal{D})^{\dagger} *_c \mathcal{Q} *_c \mathcal{D} *_c \mathcal{R} \\ &= \mathcal{Q} *_c (\mathcal{R} *_c \mathcal{A} *_c \mathcal{Q})^{-1} *_c \mathcal{R}. \end{aligned}$$

故得证.

接下来, 我们将利用张量的核心 - 幂零分解建立 Drazin 逆的另外一个表达式.

定义 4.3 设 $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_1 \times n_3}$, 则称 $\mathcal{C}_{\mathcal{A}} = \mathcal{A}^2 *_c \mathcal{A}^D$ 是张量 $\mathcal{A}$ 的核.

引理 4.3 设 $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_1 \times n_3}$ 且 $\mathrm{Ind}(\mathcal{A}) = k$. $\mathcal{C}_{\mathcal{A}} \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_1 \times n_3}$ 是张量 $\mathcal{A}$ 的核部分. 定义 $\mathcal{N}_{\mathcal{A}} = \mathcal{A} - \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$, 则 $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}^k = \mathcal{O}$ 且 $\mathrm{Ind}(\mathcal{N}_{\mathcal{A}}) = k$.

证 当 $\mathrm{Ind}(\mathcal{A}) = 0$ 时, 张量 $\mathcal{A}$ 是可逆的, 可得 $\mathcal{N}_{\mathcal{A}} = \mathcal{O}$ 和 $\mathrm{Ind}(\mathcal{N}_{\mathcal{A}}) = 0$. 当 $\mathrm{Ind}(\mathcal{A}) \geqslant 1$ 时, $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}^k = (\mathcal{A} - \mathcal{A}^2 *_c \mathcal{A}^D)^k = \mathcal{A}^k *_c (\mathcal{I} - \mathcal{A} *_c \mathcal{A}^D)^k = \mathcal{A}^k *_c (\mathcal{I} - \mathcal{A} *_c \mathcal{A}^D) = \mathcal{A}^k - \mathcal{A}^k = \mathcal{O}$.
另一方面, $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}^l = \mathcal{A}^l - \mathcal{A}^{l+1} *_c \mathcal{A}^D \neq \mathcal{O}$, $l < k$. 因此, 我们有 $\mathrm{Ind}(\mathcal{N}_{\mathcal{A}}) = k$.

我们将上述引理中定义的 $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ 称为张量 $\mathcal{A}$ 的幂零部分.

定义 4.4 设 $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_1 \times n_3}$, $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ 是 $\mathcal{A}$ 的核部分且有 $\mathcal{N}_{\mathcal{A}} = \mathcal{A} - \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$, 则

$$\mathcal{A} = \mathcal{C}_{\mathcal{A}} + \mathcal{N}_{\mathcal{A}}$$

被称为张量 $\mathcal{A}$ 的核心幂零分解.

定理 4.3 [31] 设 $\mathbf{A}\in\mathbb{C}^{n_1\times n_1}$, $\mathrm{Ind}(\mathbf{A})=k$, 且有核心幂零分解 $\mathbf{A}=\mathbf{C_A}+\mathbf{N_A}$, 则存在一个可逆矩阵 $\mathbf{P}\in\mathbb{C}^{n_1\times n_1}$, 使得

$$\mathbf{A}=\mathbf{P}\begin{bmatrix}\mathbf{C} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{N}\end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1},$$

其中 $\mathbf{C_A}=\mathbf{P}\begin{bmatrix}\mathbf{C} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}$, $\mathbf{N_A}=\mathbf{P}\begin{bmatrix}\mathbf{O} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{N}\end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}$, $\mathbf{C}\in\mathbb{C}^{r\times r}$, $\mathbf{N}\in\mathbb{C}^{(n_1-r)\times(n_1-r)}$. 此外,

$$\mathbf{A}^D=\mathbf{P}\begin{bmatrix}\mathbf{C}^{-1} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}.$$

定理 4.4 设 $\mathcal{A}\in\mathbb{C}^{n_1\times n_1\times n_3}$ 且 $\mathrm{Ind}(\mathcal{A})=k$, 则

$$\mathcal{A}=\mathcal{P}*_c\Phi*_c\mathcal{P}^{-1}, \tag{4.2}$$

其中 $\mathcal{P}\in\mathbb{C}^{n_1\times n_1\times n_3}$ 是一个可逆张量,

$$\Phi=\mathbf{ten}\left(\mathbf{IDCT}\left(\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{N}_1\end{bmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{bmatrix}\mathbf{C}_{n_3} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{N}_{n_3}\end{bmatrix}\end{bmatrix}\right)\right),\quad \begin{bmatrix}\mathbf{C}_i & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{N}_i\end{bmatrix}=\mathbf{P}_i^{-1}(\mathbf{C}_{\mathbf{A}_i}+\mathbf{N}_{\mathbf{A}_i})\mathbf{P}_i,$$

$\mathbf{C}_{\mathbf{A}_i}$ 和 $\mathbf{N}_{\mathbf{A}_i}$ 分别是 $L(\mathcal{A})^{(i)}$, $i=1,2,\cdots,n_3$, 的核部分和幂零部分. 进一步地, 如果 $\mathrm{rank}(\mathbf{C}_i)=r$, $i=1,2,\cdots,n_3$, 则

$$\mathcal{A}=\mathcal{P}*_c\begin{bmatrix}\mathcal{C} & \mathcal{O}\\ \mathcal{O} & \mathcal{N}\end{bmatrix}*_c\mathcal{P}^{-1}.$$

此外

$$\mathcal{A}^D=\mathcal{P}*_c\begin{bmatrix}\mathcal{C}^{-1} & \mathcal{O}\\ \mathcal{O} & \mathcal{O}\end{bmatrix}*_c\mathcal{P}^{-1}.$$

证 假设

$$\mathbf{DCT}(\mathbf{mat}(\mathcal{A}))=\begin{bmatrix}L(\mathcal{A})^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & L(\mathcal{A})^{(n_3)}\end{bmatrix}.$$

根据定理 4.3, 有

$$\begin{bmatrix}L(\mathcal{A})^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & L(\mathcal{A})^{(n_3)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{P}_1\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{N}_1\end{bmatrix}\mathbf{P}_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{P}_{n_3}\begin{bmatrix}\mathbf{C}_{n_3} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{N}_{n_3}\end{bmatrix}\mathbf{P}_{n_3}^{-1}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{P}_{n_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{N}_1 \end{bmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{n_3} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{N}_{n_3} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{P}_{n_3}^{-1} \end{bmatrix}.$$

对等式两边的张量进行 $\mathbf{ten}(\mathbf{IDCT})(\cdot)$ 运算, 可以得到

$$\mathcal{A} = \mathcal{P} *_c \Phi *_c \mathcal{P}^{-1},$$

其中

$$\Phi = \mathbf{ten}\Bigg(\mathbf{IDCT}\Bigg(\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{N}_1 \end{bmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{n_3} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{N}_{n_3} \end{bmatrix} \end{bmatrix}\Bigg)\Bigg).$$

再利用定理 4.3, 有

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} (L(\mathcal{A})^{(1)})^D & & \\ & \ddots & \\ & & (L(\mathcal{A})^{(n_3)})^D \end{bmatrix} \\ =&\begin{bmatrix} \Big(\mathbf{P}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{N}_1 \end{bmatrix} \mathbf{P}_1^{-1}\Big)^D & & \\ & \ddots & \\ & & \Big(\mathbf{P}_{n_3} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{n_3} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{N}_{n_3} \end{bmatrix} \mathbf{P}_{n_3}^{-1}\Big)^D \end{bmatrix} \\ =&\begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{P}_{n_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{N}_1 \end{bmatrix}^D & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{n_3} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{N}_{n_3} \end{bmatrix}^D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{P}_{n_3}^{-1} \end{bmatrix} \\ =&\begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{P}_{n_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{n_3}^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{P}_{n_3}^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

对等式两边的张量进行 $\mathbf{ten}(\mathbf{IDCT})(\cdot)$ 运算, 便可得

$$\mathcal{A}^D = \mathcal{P} *_c \Phi^D *_c \mathcal{P}^{-1},$$

其中

$$\Phi^D=\mathbf{ten}\left(\mathbf{IDCT}\left(\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1^{-1} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{bmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{bmatrix}\mathbf{C}_{n_3}^{-1} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{bmatrix}\end{bmatrix}\right)\right).$$

当 $\operatorname{rank}(\mathbf{C}_1)=\operatorname{rank}(\mathbf{C}_2)=\cdots=\operatorname{rank}(\mathbf{C}_{n_3})=r$, 有

$$\begin{bmatrix}\mathcal{C} & \mathcal{O}\\ \mathcal{O} & \mathcal{N}\end{bmatrix}=\mathbf{ten}\left(\mathbf{IDCT}\left(\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{N}_1\end{bmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{bmatrix}\mathbf{C}_{n_3} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{N}_{n_3}\end{bmatrix}\end{bmatrix}\right)\right),$$

其中 $\mathcal{C}\in\mathbb{C}^{r\times r\times n_3}$, $\mathcal{N}\in\mathbb{C}^{(n_1-r)\times(n_1-r)\times n_3}$. 故有

$$\mathcal{A}=\mathcal{P}*_c\begin{bmatrix}\mathcal{C} & \mathcal{O}\\ \mathcal{O} & \mathcal{N}\end{bmatrix}*_c\mathcal{P}^{-1}.$$

由于

$$\mathcal{A}^D=\mathcal{P}*\mathbf{ten}\left(\mathbf{IDCT}\left(\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1^{-1} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{bmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{bmatrix}\mathbf{C}_{n_3}^{-1} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{bmatrix}\end{bmatrix}\right)\right)*\mathcal{P}^{-1},$$

很明显可以得到

$$\mathcal{A}^D=\mathcal{P}*_c\begin{bmatrix}\mathcal{C}^{-1} & \mathcal{O}\\ \mathcal{O} & \mathcal{O}\end{bmatrix}*_c\mathcal{P}^{-1}.$$

定理 4.5　设 $\mathcal{A}\in\mathbb{C}^{n_1\times n_2\times n_3}$ 且有 C-HS 分解, 则

$$\mathcal{A}^D=\mathcal{U}*_c\begin{bmatrix}(\mathcal{S}_r*_c\mathcal{K})^D & ((\mathcal{S}_r*_c\mathcal{K})^D)^2*_c\mathcal{S}_r*_c\mathcal{L}\\ \mathcal{O} & \mathcal{O}\end{bmatrix}*_c\mathcal{U}^H.$$

证　令

$$\mathcal{A}=\mathcal{U}*_c\begin{bmatrix}\mathcal{S}_r*_c\mathcal{K} & \mathcal{S}_r*_c\mathcal{L}\\ \mathcal{O} & \mathcal{O}\end{bmatrix}*_c\mathcal{U}^H,$$

其中 $\mathcal{S}_r,\mathcal{K}\in\mathbb{C}^{r\times r\times n_3}$, $\mathcal{L}\in\mathbb{C}^{r\times(n_1-r)\times n_3}$. 假设 $\mathcal{A}$ 的 Drazin 逆是

$$\mathcal{X}=\mathcal{U}*_c\begin{bmatrix}\mathcal{X}_1 & \mathcal{X}_2\\ \mathcal{X}_3 & \mathcal{X}_4\end{bmatrix}*_c\mathcal{U}^H,$$

其中 $\mathcal{X}_1\in\mathbb{C}^{r\times r\times n_3},\mathcal{X}_2\in\mathbb{C}^{r\times(n_1-r)\times n_3},\mathcal{X}_3\in\mathbb{C}^{(n_1-r)\times r\times n_3},\mathcal{X}_4\in\mathbb{C}^{(n_1-r)\times(n_1-r)\times n_3}$. 因此, $\mathcal{X}$ 满足 (4.1) 中的 3 个方程. 根据方程 $\mathcal{X}*_c\mathcal{A}*_c\mathcal{X}=\mathcal{X}$, 有

$$\mathcal{X}_1*_c\mathcal{S}_r*_c\mathcal{K}*_c\mathcal{X}_1+\mathcal{X}_1*_c\mathcal{S}_r*_c\mathcal{L}*_c\mathcal{X}_3=\mathcal{X}_1,\quad \mathcal{X}_1*_c\mathcal{S}_r*_c\mathcal{K}*_c\mathcal{X}_2+\mathcal{X}_1*_c\mathcal{S}_r*_c\mathcal{L}*_c\mathcal{X}_4=\mathcal{X}_2,$$

$$\mathcal{X}_3*_c\mathcal{S}_r*_c\mathcal{K}*_c\mathcal{X}_1+\mathcal{X}_3*_c\mathcal{S}_r*_c\mathcal{L}*_c\mathcal{X}_3=\mathcal{X}_3,\quad \mathcal{X}_3*_c\mathcal{S}_r*_c\mathcal{K}*_c\mathcal{X}_2+\mathcal{X}_3*_c\mathcal{S}_r*_c\mathcal{L}*_c\mathcal{X}_4=\mathcal{X}_4.$$

根据 $\mathcal{A}*_c\mathcal{X}=\mathcal{X}*_c\mathcal{A}$, 有

$$\mathcal{X}_1*_c\mathcal{S}_r*_c\mathcal{K}=\mathcal{S}_r*_c\mathcal{K}*_c\mathcal{X}_1+\mathcal{S}_r*_c\mathcal{L}*_c\mathcal{X}_3,\quad \mathcal{X}_3*_c\mathcal{S}_r*_c\mathcal{K}=\mathcal{O},$$

$$\mathcal{X}_1*_c\mathcal{S}_r*_c\mathcal{L}=\mathcal{S}_r*_c\mathcal{K}*_c\mathcal{X}_2+\mathcal{S}_r*_c\mathcal{L}*_c\mathcal{X}_4,\quad \mathcal{X}_3*_c\mathcal{S}_r*_c\mathcal{L}=\mathcal{O}.$$

根据 $\mathcal{A}^{k+1}*_c\mathcal{X}=\mathcal{A}^k$, 有

$$(\mathcal{S}_r*_c\mathcal{K})^{k+1}*_c\mathcal{X}_1+(\mathcal{S}_r*_c\mathcal{K})^k*_c\mathcal{S}_r*_c\mathcal{L}*_c\mathcal{X}_3=(\mathcal{S}_r*_c\mathcal{K})^k,$$

$$(\mathcal{S}_r*_c\mathcal{K})^{k+1}*_c\mathcal{X}_2+(\mathcal{S}_r*_c\mathcal{K})^k*_c\mathcal{S}_r*_c\mathcal{L}*_c\mathcal{X}_4=(\mathcal{S}_r*_c\mathcal{K})^{k-1}*_c\mathcal{S}_r*_c\mathcal{L}.$$

由此可得 $\mathcal{X}_3=\mathcal{O}$ 和 $\mathcal{X}_4=\mathcal{O}$. 另外,

$$\mathcal{X}_1*_c\mathcal{S}_r*_c\mathcal{K}*_c\mathcal{X}_1=\mathcal{X}_1,\quad \mathcal{X}_1*_c\mathcal{S}_r*_c\mathcal{K}=\mathcal{S}_r*_c\mathcal{K}*_c\mathcal{X}_1,\quad (\mathcal{S}_r*_c\mathcal{K})^{k+1}*_c\mathcal{X}_1=(\mathcal{S}_r*_c\mathcal{K})^k$$

可以推出 $\mathcal{X}_1=(\mathcal{S}_r*_c\mathcal{K})^D$.

$$\mathcal{X}_1*_c\mathcal{S}_r*_c\mathcal{K}*_c\mathcal{X}_2=\mathcal{X}_2,\quad \mathcal{X}_1*_c\mathcal{S}_r*_c\mathcal{L}=\mathcal{S}_r*_c\mathcal{K}*_c\mathcal{X}_2$$

可以推出 $\mathcal{X}_2=((\mathcal{S}_r*_c\mathcal{K})^D)^2*_c\mathcal{S}_r*_c\mathcal{L}$. 因此

$$\mathcal{A}^D=\mathcal{U}*_c\begin{bmatrix}(\mathcal{S}_r*_c\mathcal{K})^D & ((\mathcal{S}_r*_c\mathcal{K})^D)^2*_c\mathcal{S}_r*_c\mathcal{L}\\ \mathcal{O} & \mathcal{O}\end{bmatrix}*_c\mathcal{U}^H.$$

§4.2 计算张量的 Drazin 逆的算法

在下文中, 我们将根据定理 4.1 建立一个计算张量的 Drazin 逆的算法.

算法 3 计算一个张量 $\mathcal{A}$ 的 Drazin 逆

输入: 一个 $n_1\times n_1\times n_3$ 的张量 $\mathcal{A}$

输出: 一个 $n_1\times n_1\times n_3$ 的张量 $\mathcal{X}$

1: $\widehat{\mathcal{A}}=L(\mathcal{A})=\mathcal{A}\times_3\mathbf{M}$; 其中 $\mathbf{M}$ 是 DCT 矩阵

2: $k=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n_3}\{\mathrm{Ind}(\widehat{\mathcal{A}}^{(i)})\}$

3: $\widehat{\mathcal{B}}=L(\mathcal{A}^k)=\mathcal{A}^k\times_3\mathbf{M}$, $\widehat{\mathcal{C}}=L(\mathcal{A}^{2k+1})=\mathcal{A}^{2k+1}\times_3\mathbf{M}$

4: for $i=1,\cdots,n_3$

  $\widehat{\mathcal{H}}^{(i)}=\mathrm{pinv}(\widehat{\mathcal{C}}^{(i)})$; 其中 $\mathrm{pinv}(\widehat{\mathcal{C}}^{(i)})$ 是 $\widehat{\mathcal{C}}^{(i)}$ 的 Moore-Penrose 逆

  end

5: for $i=1,\cdots,n_3$

  $\widehat{\mathcal{X}}^{(i)}=\widehat{\mathcal{B}}^{(i)}\widehat{\mathcal{H}}^{(i)}\widehat{\mathcal{B}}^{(i)}$

  end

6: $\mathcal{X}=L^{-1}(\widehat{\mathcal{X}})=\widehat{\mathcal{X}}\times_3\mathbf{M}^{-1}$

例 4.1　设 $\mathcal{A}\in\mathbb{C}^{3\times3\times3}$ 且有

$$\mathcal{A}^{(1)}=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&3&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad \mathcal{A}^{(2)}=\begin{bmatrix}1&3&3\\0&4&5\\3&0&0\end{bmatrix},\quad \mathcal{A}^{(3)}=\begin{bmatrix}3&2&0\\0&1&3\\2&0&1\end{bmatrix}.$$

根据算法 3, 可以得到

$$(\mathcal{A}^D)^{(1)}=\begin{bmatrix}0.0007&0.0123&-0.1008\\-0.1030&0.0358&0.0223\\-0.0036&-0.0617&0.0042\end{bmatrix},\quad (\mathcal{A}^D)^{(2)}=\begin{bmatrix}0.2056&-0.0473&0.6283\\0.0145&0.0637&-0.1531\\0.1721&0.0365&0.0585\end{bmatrix},$$

$$(\mathcal{A}^D)^{(3)}=\begin{bmatrix}-0.1937&0.0317&-0.5392\\0.1115&-0.1005&0.0693\\-0.2316&0.0415&-0.0040\end{bmatrix}.$$

§5　C- 乘积下张量的沿张量逆

在本节中, 首先基于 C- 乘积给出沿张量逆的定义, 介绍该逆的一些表达式. 此外, 还建立了一个计算沿张量逆的算法.

§5.1　沿张量逆

定义 5.1　设 $\mathcal{A}\in\mathbb{C}^{n_1\times n_2\times n_3}$ 和 $\mathcal{G}\in\mathbb{C}^{n_2\times n_1\times n_3}$, 若存在张量 $\mathcal{X}\in\mathbb{C}^{n_2\times n_1\times n_3}$, $\mathcal{U}\in\mathbb{C}^{n_1\times n_1\times n_3}$ 和 $\mathcal{V}\in\mathbb{C}^{n_2\times n_2\times n_3}$, 使得

$$\mathcal{X}*_c\mathcal{A}*_c\mathcal{G}=\mathcal{G},\quad \mathcal{G}*_c\mathcal{A}*_c\mathcal{X}=\mathcal{G},\quad \mathcal{X}=\mathcal{G}*_c\mathcal{U},\quad \mathcal{X}^H=\mathcal{G}^H*_c\mathcal{V},\tag{5.1}$$

则 $\mathcal{X}$ 称为 $\mathcal{A}$ 沿 $\mathcal{G}$ 的逆, 记作 $\mathcal{A}^{\|\mathcal{G}}$.

定理 5.1　设 $\mathcal{A}\in\mathbb{C}^{n_1\times n_2\times n_3}$ 和 $\mathcal{G}\in\mathbb{C}^{n_2\times n_1\times n_3}$, 如果 $\mathcal{A}$ 沿 $\mathcal{G}$ 是可逆的, 那么 $\mathcal{A}$ 沿 $\mathcal{G}$ 的逆是唯一的.

证　假设 $\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2\in\mathbb{C}^{n_2\times n_1\times n_3}$ 是 $\mathcal{A}$ 沿张量 $\mathcal{G}$ 的两个逆, 则存在适当大小的张量 $\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2,\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2$, 使得

$$\mathcal{X}_i*_c\mathcal{A}*_c\mathcal{G}=\mathcal{G},\quad \mathcal{G}*_c\mathcal{A}*_c\mathcal{X}_i=\mathcal{G},\quad \mathcal{X}_i=\mathcal{G}*_c\mathcal{U}_i,\quad \mathcal{X}_i^H=\mathcal{G}^H*_c\mathcal{V}_i,\quad i=1,2,$$

可得

$$\mathcal{X}_1=\mathcal{G}*_c\mathcal{U}_1=\mathcal{X}_2*_c\mathcal{A}*_c\mathcal{G}*_c\mathcal{U}_1=\mathcal{X}_2*_c\mathcal{A}*_c\mathcal{X}_1=\mathcal{V}_2^H*_c\mathcal{G}*_c\mathcal{A}*_c\mathcal{X}_1=\mathcal{V}_2^H*_c\mathcal{G}=\mathcal{X}_2.$$

定理 5.2　设 $\mathcal{A}\in\mathbb{C}^{n_1\times n_2\times n_3}$, $\mathcal{G}\in\mathbb{C}^{n_2\times n_1\times n_3}$, 若 $\mathcal{A}$ 沿 $\mathcal{G}$ 是可逆的, 则

$$\mathcal{A}^{\|\mathcal{G}}=\mathcal{G}*_c(\mathcal{G}*_c\mathcal{A}*_c\mathcal{G})^\dagger*_c\mathcal{G}.$$

证 假设

$$\mathbf{DCT}(\mathbf{mat}(\mathcal{A}))=\begin{bmatrix}L(\mathcal{A})^{(1)}&&\\&\ddots&\\&&L(\mathcal{A})^{(n_3)}\end{bmatrix}\ 和\ \mathbf{DCT}(\mathbf{mat}(\mathcal{G}))=\begin{bmatrix}L(\mathcal{G})^{(1)}&&\\&\ddots&\\&&L(\mathcal{G})^{(n_3)}\end{bmatrix}.$$

令 $\overline{\mathbf{A}}_i = L(\mathcal{A})^{(i)}$ 和 $\overline{\mathbf{G}}_i = L(\mathcal{G})^{(i)}$. 根据文 [23], 有 $\overline{\mathbf{A}}_i{}^{\|\overline{\mathbf{G}}_i} = \overline{\mathbf{G}}_i(\overline{\mathbf{G}}_i\overline{\mathbf{A}}_i\overline{\mathbf{G}}_i)^{\dagger}\overline{\mathbf{G}}_i$, $i = 1, 2, \cdots, n_3$, 则

$$\begin{aligned}\mathbf{DCT}(\mathbf{mat}(\mathcal{A}^{\|\mathcal{G}})) &= \begin{bmatrix}\overline{\mathbf{A}}_1{}^{\|\overline{\mathbf{G}}_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\mathbf{A}}_{n_3}{}^{\|\overline{\mathbf{G}}_{n_3}}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\overline{\mathbf{G}}_1(\overline{\mathbf{G}}_1\overline{\mathbf{A}}_1\overline{\mathbf{G}}_1)^{\dagger}\overline{\mathbf{G}}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\mathbf{G}}_{n_3}(\overline{\mathbf{G}}_{n_3}\overline{\mathbf{A}}_{n_3}\overline{\mathbf{G}}_{n_3})^{\dagger}\overline{\mathbf{G}}_{n_3}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\overline{\mathbf{G}}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\mathbf{G}}_{n_3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(\overline{\mathbf{G}}_1\overline{\mathbf{A}}_1\overline{\mathbf{G}}_1)^{\dagger} & & \\ & \ddots & \\ & & (\overline{\mathbf{G}}_{n_3}\overline{\mathbf{A}}_{n_3}\overline{\mathbf{G}}_{n_3})^{\dagger}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{\mathbf{G}}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\mathbf{G}}_{n_3}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

对方程两边的张量进行 $\mathbf{ten}(\mathbf{IDCT})(\cdot)$ 运算, 可以得到 $\mathcal{A}^{\|\mathcal{G}} = \mathcal{G} *_c (\mathcal{G} *_c \mathcal{A} *_c \mathcal{G})^{\dagger} *_c \mathcal{G}$.

定理 5.3 设 $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{n_1\times n_2\times n_3}$, $\mathcal{G} \in \mathbb{C}^{n_2\times n_1\times n_3}$, 且张量 $\mathcal{G}$ 有 C- 满秩分解 $\mathcal{G} = \mathcal{M} *_c \mathcal{N}$. 若 $\mathcal{A}$ 沿 $\mathcal{G}$ 是可逆的, 则

$$\mathcal{A}^{\|\mathcal{G}} = \mathcal{M} *_c (\mathcal{N} *_c \mathcal{A} *_c \mathcal{M})^{-1} *_c \mathcal{N}.$$

证 设

$$\mathbf{DCT}(\mathbf{mat}(\mathcal{A})) = \begin{bmatrix}L(\mathcal{A})^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & L(\mathcal{A})^{(n_3)}\end{bmatrix} \text{ 和 } \mathbf{DCT}(\mathbf{mat}(\mathcal{G})) = \begin{bmatrix}L(\mathcal{G})^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & L(\mathcal{G})^{(n_3)}\end{bmatrix},$$

则有

$$\mathbf{DCT}(\mathbf{mat}(\mathcal{M} *_c \mathcal{N})) = \begin{bmatrix}L(\mathcal{M})^{(1)}L(\mathcal{N})^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & L(\mathcal{M})^{(n_3)}L(\mathcal{N})^{(n_3)}\end{bmatrix}.$$

令 $\overline{\mathbf{A}}_i = L(\mathcal{A})^{(i)}$, $\overline{\mathbf{G}}_i = L(\mathcal{G})^{(i)}$, $\overline{\mathbf{M}}_i = L(\mathcal{M})^{(i)}$, $\overline{\mathbf{N}}_i = L(\mathcal{N})^{(i)}$, $i = 1, 2, \cdots, n_3$. 因此, 可以得到 $\overline{\mathbf{G}}_i$ 的满秩分解是 $\overline{\mathbf{G}}_i = \overline{\mathbf{M}}_i\overline{\mathbf{N}}_i, i = 1, 2, \cdots, n_3$. 根据文 [23], 有

$$\overline{\mathbf{A}}_i{}^{\|\overline{\mathbf{G}}_i} = \overline{\mathbf{M}}_i(\overline{\mathbf{N}}_i\overline{\mathbf{A}}_i\overline{\mathbf{M}}_i)^{-1}\overline{\mathbf{N}}_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n_3.$$

因此

$$\begin{aligned}&\mathbf{DCT}(\mathbf{mat}(\mathcal{A}^{\|\mathcal{G}})\\ &= \begin{bmatrix}\overline{\mathbf{A}}_1{}^{\|\overline{\mathbf{G}}_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\mathbf{A}}_{n_3}{}^{\|\overline{\mathbf{G}}_{n_3}}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{M}}_1(\overline{\mathbf{N}}_1\overline{\mathbf{A}}_1\overline{\mathbf{M}}_1)^{-1}\overline{\mathbf{N}}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\mathbf{M}}_{n_3}(\overline{\mathbf{N}}_{n_3}\overline{\mathbf{A}}_{n_3}\overline{\mathbf{M}}_{n_3})^{-1}\overline{\mathbf{N}}_{n_3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{M}}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\mathbf{M}}_{n_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\overline{\mathbf{N}}_1\overline{\mathbf{A}}_1\overline{\mathbf{M}}_1)^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & (\overline{N}_{n_3}\overline{\mathbf{A}}_{n_3}\overline{\mathbf{M}}_{n_3})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{N}}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\mathbf{N}}_{n_3} \end{bmatrix}.$$

对上述等式进行 $\mathbf{ten}(\mathbf{IDCT})(\cdot)$ 运算, 可得 $\mathcal{A}^{\|\mathcal{G}} = \mathcal{M} *_c (\mathcal{N} *_c \mathcal{A} *_c \mathcal{M})^{-1} *_c \mathcal{N}$.

定理 5.4　设 $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{n_1\times n_2\times n_3}$, $\mathcal{G} \in \mathbb{C}^{n_2\times n_1\times n_3}$, 且张量 $\mathcal{G}$ 有 C-SVD 分解

$$\mathcal{G} = \mathcal{U} *_c \mathcal{S} *_c \mathcal{V}^H. \tag{5.2}$$

假设 $\operatorname{rank}(L(\mathcal{S})^{(i)}) = r_i$, $i = 1, 2, \cdots, n_3$. 如果 $\mathcal{A}$ 表示为

$$\mathcal{A} = \mathcal{V} *_c \mathbf{ten}\left(\mathbf{IDCT}\left(\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \star \\ \star & \star \end{bmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{n_3} & \star \\ \star & \star \end{bmatrix} \end{bmatrix}\right)\right) *_c \mathcal{U}^H, \tag{5.3}$$

其中 $\mathbf{X}_i \in \mathbb{C}^{r_i\times r_i}$, $i = 1, 2, \cdots, n_3$, 则 $\mathcal{A}^{\|\mathcal{G}}$ 存在当且仅当 $\mathbf{X}_i (i = 1, 2, \cdots, n_3)$ 是非奇异的. 特别地, 若 $\operatorname{rank}(L(\mathcal{S})^{(i)}) = r$, $i = 1, 2, \cdots, n_3$, 则

$$\mathcal{A}^{\|\mathcal{G}} = \mathcal{U} *_c \begin{bmatrix} \mathcal{X}^{-1} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{bmatrix} *_c \mathcal{V}^H.$$

证　令

$$\mathbf{DCT}(\mathbf{mat}(\mathcal{A})) = \begin{bmatrix} L(\mathcal{A})^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & L(\mathcal{A})^{(n_3)} \end{bmatrix} \text{ 和 } \mathbf{DCT}(\mathbf{mat}(\mathcal{G})) = \begin{bmatrix} L(\mathcal{G})^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & L(\mathcal{G})^{(n_3)} \end{bmatrix}.$$

定义 $\overline{\mathbf{A}}_i = L(\mathcal{A})^{(i)}$ 和 $\overline{\mathbf{G}}_i = L(\mathcal{G})^{(i)}$, 则有

$$\mathbf{DCT}(\mathbf{mat}(\mathcal{A}^{\|\mathcal{G}}) = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{A}}_1{}^{\|\overline{\mathbf{G}}_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\mathbf{A}}_{n_3}{}^{\|\overline{\mathbf{G}}_{n_3}} \end{bmatrix}.$$

因此, $\mathcal{A}^{\|\mathcal{G}}$ 存在当且仅当 $\overline{\mathbf{A}}_i{}^{\|\overline{\mathbf{G}}_i}$ 存在, $i = 1, 2, \cdots, n_3$. 由于 $\mathcal{G} = \mathcal{U} *_c \mathcal{S} *_c \mathcal{V}^H$, 我们有

$$\begin{aligned} &\mathbf{DCT}(\mathbf{mat}(\mathcal{G})) \\ &= \begin{bmatrix} L(\mathcal{G})^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & L(\mathcal{G})^{(n_3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{G}}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\mathbf{G}}_{n_3} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{DCT}(\mathbf{mat}(\mathcal{U}))\mathbf{DCT}(\mathbf{mat}(\mathcal{S}))\mathbf{DCT}(\mathbf{mat}(\mathcal{V}^H)) \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} L(\mathcal{U})^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & L(\mathcal{U})^{(n_3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L(\mathcal{S})^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & L(\mathcal{S})^{(n_3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L(\mathcal{V})^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & L(\mathcal{V})^{(n_3)} \end{bmatrix}^H.$$

令 $\overline{\mathbf{U}}_i = L(\mathcal{U})^{(i)}$, $\overline{\mathbf{S}}_i = L(\mathcal{S})^{(i)}$ 和 $\overline{\mathbf{V}}_i = L(\mathcal{V})^{(i)}$. 因此

$$\overline{\mathbf{G}}_i = \overline{\mathbf{U}}_i \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{S}}_i & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \overline{\mathbf{V}}_i^H$$

是 $\overline{\mathbf{G}}_i$ 的 SVD, 其中 $\overline{\mathbf{S}}_i \in \mathbb{C}_{r_i}^{r_i \times r_i}$, $\quad i = 1, 2, \cdots, n_3$. 假设

$$\overline{\mathbf{A}}_i = \overline{\mathbf{V}}_i \begin{bmatrix} \mathbf{X}_i & \bigstar \\ \bigstar & \bigstar \end{bmatrix} \overline{\mathbf{U}}_i^H,$$

其中 $\mathbf{X}_i \in \mathbb{C}^{r_i \times r_i}$, $i = 1, 2, \cdots, n_3$.

根据文 [23], $\overline{\mathbf{A}}_i^{\|\overline{\mathbf{G}}_i}$ 存在当且仅当 $\mathbf{X}_i (i = 1, 2, \cdots, n_3)$ 是非奇异的. 在这种情况下,

$$\overline{\mathbf{A}}_i^{\|\overline{\mathbf{G}}_i} = \overline{\mathbf{U}}_i \begin{bmatrix} \mathbf{X}_i^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \overline{\mathbf{V}}_i^H, \quad i = 1, 2, \cdots, n_3.$$

因此, $\mathcal{A}^{\|\mathcal{G}}$ 存在当且仅当 $\mathbf{X}_i (i = 1, 2, \cdots, n_3)$ 是非奇异的. 此外, 我们有

$$\begin{aligned} \mathbf{DCT}(\mathbf{mat}(\mathcal{A}^{\|\mathcal{G}})) &= \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{A}}_1^{\|\overline{\mathbf{G}}_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\mathbf{A}}_{n_3}^{\|\overline{\mathbf{G}}_{n_3}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{U}}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \overline{\mathbf{V}}_1^H & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\mathbf{U}}_{n_3} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{n_3}^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \overline{\mathbf{V}}_{n_3}^H \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{U}}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\mathbf{U}}_{n_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{n_3}^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{V}}_1^H & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\mathbf{V}}_{n_3}^H \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

若 $\mathrm{rank}(\mathcal{S}^{(i)}) = r$, $i = 1, 2, \cdots, n_3$, 则有 $\mathrm{rank}(\mathbf{X}_1) = \mathrm{rank}(\mathbf{X}_2) = \cdots = \mathrm{rank}(\mathbf{X}_{n_3}) = r$. 对上述等式进行 $\mathbf{ten}(\mathbf{IDCT})(\cdot)$ 运算, 可得

$$\mathcal{A}^{\|\mathcal{G}} = \mathcal{U} *_c \begin{bmatrix} \mathcal{X}^{-1} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{bmatrix} *_c \mathcal{V}^H.$$

§5.2 计算沿张量逆的算法

下面我们根据定理 5.4 建立了一个计算沿张量逆的算法.

算法 4 计算张量 $\mathcal{A}$ 的沿张量逆

输入: 一个 $n_1 \times n_2 \times n_3$ 的张量 $\mathcal{A}$ 和一个 $n_2 \times n_1 \times n_3$ 的张量 $\mathcal{G}$

输出: 一个 $n_2 \times n_1 \times n_3$ 的张量 $\mathcal{X}$

1: $\widehat{\mathcal{A}} = L(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \times_3 \mathbf{M}$; 其中 $\mathbf{M}$ 是 DCT 矩阵

2: for $i = 1, \cdots, n_3$

$\operatorname{svd}(\widehat{\mathcal{G}}^{(i)}) = \mathbf{U}_i \mathbf{\Sigma}_i \mathbf{V}_i^H$;

$\operatorname{rank}(\mathbf{\Sigma}_i) = r_i$;

$\mathbf{V}_i^H \widehat{\mathcal{A}}^{(i)} \mathbf{U}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_i & \star \\ \star & \star \end{bmatrix}$, 其中 $\mathbf{X}_i \in \mathbb{C}^{r_i \times r_i}$;

若 $\mathbf{X}_i$ 是非奇异的, $\widehat{\mathcal{W}}^{(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_i^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}$;

$\widehat{\mathcal{Z}}^{(i)} = \mathbf{U}_i \widehat{\mathcal{W}}^{(i)} \mathbf{V}_i^H$;

$i = i + 1$;

否则输出: $\mathcal{A}$ 沿 $\mathcal{G}$ 是不可逆的.

end

3: $\mathcal{X} = L^{-1}(\widehat{\mathcal{Z}}) = \widehat{\mathcal{Z}} \times_3 \mathbf{M}^{-1}$

例 5.1 设 $\mathcal{A}, \mathcal{G} \in \mathbb{C}^{3\times3\times3}$ 且有

$$\mathcal{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{G}^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

根据算法 4, 可以得到 $\mathcal{A}^{\|\mathcal{G}} \in \mathbb{C}^{3\times3\times3}$ 的正面切片是

$$(\mathcal{A}^{\|\mathcal{G}})^{(1)} = \begin{bmatrix} -0.1043 & -0.0495 & 0.1030 \\ 0.4039 & -0.1304 & -0.2377 \\ -0.4616 & 0.0521 & 0.1951 \end{bmatrix}, \quad (\mathcal{A}^{\|\mathcal{G}})^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.1220 & 0.1565 & -0.0864 \\ -0.4423 & 0.1439 & 0.1765 \\ 0.5999 & -0.0208 & -0.2729 \end{bmatrix},$$

$$(\mathcal{A}^{\|\mathcal{G}})^{(3)} = \begin{bmatrix} -0.0972 & -0.0769 & 0.0281 \\ 0.0075 & -0.1129 & 0.1342 \\ -0.1260 & 0.0084 & 0.0486 \end{bmatrix}.$$

§6 高阶马尔可夫链的应用

设 $\mathcal{P}\in\mathbb{R}^{n\times n\times n}$ 且有

$$\mathbf{DCT}(\mathbf{mat}(\mathcal{P}))=\begin{bmatrix}L(\mathcal{P})^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & L(\mathcal{P})^{(n)}\end{bmatrix}.$$

一个高阶马尔可夫链是一个有限马尔可夫链的推广, 其中值为 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的随机过程 $X_0,X_1,\cdots$ 具有转移概率

$$0\leqslant\mathcal{P}_{i_1i_2i_3}=\mathrm{Prob}(X_t=i_1\mid X_{t-1}=i_2,X_{t-2}=i_3)\leqslant 1,$$

其中 $\sum\limits_{j=1}^{n}L(\mathcal{P})^{(i)}_{jk}=1$, $i=1,\cdots,n$, $1\leqslant k\leqslant n$. 我们称 $\mathcal{P}$ 是一个转移张量.

设 F 是 $\mathbb{R}$ 的子集, $\{X_t:t\in F\}$ 是一组随机变量. 如果 F 是可数的, 并且每一个 X_t 的值域是相同的有限集合, 则该链被称为有限马尔可夫链. 我们定义 $\{G_1,\cdots,G_m\}$ 是任意 X_t 的值域.

X_k 是链在第 k 个步骤的结果. 如果 X_{k-1} 处于 G_i 状态, 则 X_k 处于 G_j 状态的概率是 $L(\mathcal{P})^{(i)}_{jk}(s)=\mathrm{Prob}(X_s=G_k|X_{s-1}=G_j)$, $i=1,\cdots,n$. 这些概率被称为单步转移概率. 如果每个单步转移概率都不依赖 s(不依赖时间), 即 $L(\mathcal{P})^{(i)}_{jk}(s)=\mathcal{P}_{jki}$, $s=1,2,\cdots$, $i=1,\cdots,n$, 那么我们称这个链是齐次的.

在后文中, 我们主要研究有限齐次马尔可夫链, 并用马尔可夫链或者链来表示有限齐次马尔可夫链.

遍历集 Ω 是一组状态的集合, Ω 中的每一个状态都可以从 Ω 的任何其余状态进入, 此外, Ω 外的状态都不能进入到 Ω 里的任何一个状态.

瞬态集 Ω 是指元素都是状态的集合, 其中 Ω 里的每一个状态都可以从 Ω 的所有其余状态进入, 并且 Ω 外的一些状态可以从 Ω 的每一个状态进入.

如果一个链的转移张量是不可约的, 则这个马尔可夫链的是遍历的. 等价地, 该链的状态形成一个遍历集合. 若对于一个遍历链的转移张量 $\mathcal{P}$, 存在一个自然数 k, 使得 $\mathcal{P}^k>0$, 则称这个遍历链是正则的.

如果链进入一种状态后无法离开, 则称这种状态是吸收的. 如果链具有至少一个吸收状态, 则称此链是吸收链. 此外, 从该链的每个状态都可能进入吸收状态 (但不一定是一步). 详见文 [32].

定理 6.1 若 $\mathcal{P}\in\mathbb{R}^{n\times n\times n}$ 是一个任意的转移张量且有 $\mathcal{A}=\mathcal{I}-\mathcal{P}$, 则 $\mathcal{A}^{\#}$ 存在.

证 设

$$\mathbf{DCT}(\mathbf{mat}(\mathcal{P}))=\begin{bmatrix}L(\mathcal{P})^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & L(\mathcal{P})^{(n)}\end{bmatrix}.$$

由于 $\mathcal{A}=\mathcal{I}-\mathcal{P}$, 则

$$\mathbf{DCT}(\mathbf{mat}(\mathcal{A}))=\begin{bmatrix}L(\mathcal{A})^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & L(\mathcal{A})^{(n)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}L(\mathcal{I})^{(1)}-L(\mathcal{P})^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & L(\mathcal{I})^{(n)}-L(\mathcal{P})^{(n)}\end{bmatrix}.$$

因此, 我们有 $L(\mathcal{A})^{(i)}=L(\mathcal{I})^{(i)}-L(\mathcal{P})^{(i)}$, $i=1,2,\cdots,n$. 通过利用文 [32, 定理8.2.1], 有 $\mathrm{Ind}(L(\mathcal{A})^{(i)})=1$, 可推出 $L(\mathcal{A})^{(i)}$ 的群逆是存在的, 所以 $\mathcal{A}$ 的群逆是存在的.

定理 6.2 设 $\mathcal{P}\in\mathbb{R}^{n\times n\times n}$ 是一个链的转移张量, 并且有 $\mathcal{A}=\mathcal{I}-\mathcal{P}$, 则

$$\mathcal{I}-\mathcal{A}*_c\mathcal{A}^{\#}=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mathcal{I}+\mathcal{P}+\mathcal{P}^2+\cdots+\mathcal{P}^{n-1}}{n}, \text{对于任意的转移张量 } \mathcal{P}\\ \lim\limits_{n\to\infty}(\alpha\mathcal{I}+(1-\alpha)\mathcal{P}), \text{对于任意的转移张量 } \mathcal{P} \text{ 且 } 0<\alpha<1\\ \lim\limits_{n\to\infty}\mathcal{P}^n, \text{对于任意的正则链}\\ \lim\limits_{n\to\infty}\mathcal{P}^n, \text{对于任意的吸收链.}\end{cases}$$

证 设

$$\mathbf{DCT}(\mathbf{mat}(\mathcal{A}))=\begin{bmatrix}L(\mathcal{A})^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & L(\mathcal{A})^{(n)}\end{bmatrix}.$$

由于 $\mathcal{A}=\mathcal{I}-\mathcal{P}$, 根据定理 6.1, 张量 $\mathcal{A}$ 的群逆存在. 因此

$$\mathbf{DCT}(\mathbf{mat}(\mathcal{A}^{\#}))=\begin{bmatrix}(L(\mathcal{A})^{(1)})^{\#} & & \\ & \ddots & \\ & & (L(\mathcal{A})^{(n)})^{\#}\end{bmatrix}.$$

现在, 很容易可以看到

$$\begin{aligned}&\mathbf{DCT}(\mathbf{mat}(\mathcal{I}-\mathcal{A}*_c\mathcal{A}^{\#}))\\ &=\begin{bmatrix}L(\mathcal{I})^{(1)}-L(\mathcal{A})^{(1)}(L(\mathcal{A})^{(1)})^{\#} & & \\ & \ddots & \\ & & L(\mathcal{I})^{(n)}-L(\mathcal{A})^{(n)}(L(\mathcal{A})^{(n)})^{\#}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

定义 $L(\mathcal{I})^{(i)}=\bar{\mathbf{I}}_i$, $L(\mathcal{A})^{(i)}=\overline{\mathbf{A}}_i$ 和 $L(\mathcal{P})^{(i)}=\overline{\mathbf{P}}_i$. 根据文 [32, 定理8.2.2], 可以得到

$$\bar{\mathbf{I}}_i-\overline{\mathbf{A}}_i\overline{\mathbf{A}}_i^{\#}=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\bar{\mathbf{I}}_i+\overline{\mathbf{P}}_i+\overline{\mathbf{P}}_i^2+\cdots+\overline{\mathbf{P}}_i^{n-1}}{n}, & \text{对于任意的转移矩阵 } \overline{\mathbf{P}}_i\\ \lim\limits_{n\to\infty}(\alpha\bar{\mathbf{I}}_i+(1-\alpha)\overline{\mathbf{P}}_i), & \text{对于任意的转移矩阵 } \overline{\mathbf{P}}_i \text{ 且 } 0<\alpha<1\\ \lim\limits_{n\to\infty}\overline{\mathbf{P}}_i{}^n, & \text{对于任意的正则链}\\ \lim\limits_{n\to\infty}\overline{\mathbf{P}}_i{}^n, & \text{对于任意的吸收链}, i=1,\cdots,n,\end{cases}$$

从而推出

$$\mathcal{I}-\mathcal{A}*_c\mathcal{A}^{\#}=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mathcal{I}+\mathcal{P}+\mathcal{P}^2+\cdots+\mathcal{P}^{n-1}}{n}, & \text{对于任意的转移张量 } \mathcal{P}\\ \lim\limits_{n\to\infty}(\alpha\mathcal{I}+(1-\alpha)\mathcal{P}), & \text{对于任意的转移张量 } \mathcal{P} \text{ 且 } 0<\alpha<1\\ \lim\limits_{n\to\infty}\mathcal{P}^n, & \text{对于任意的正则链}\\ \lim\limits_{n\to\infty}\mathcal{P}^n, & \text{对于任意的吸收链.}\end{cases}$$

参 考 文 献

[1] Kroonenberg P. Three-mode principal component analysis: theory and applications [M]. Leiden: DSWO Press, 1983.

[2] Ng M, Chan R, Tang W. A fast algorithm for deblurring models with Neumann boundary conditions [J]. *SIAM J Sci Comput*, 1999, 851–866.

[3] Hao N, Kilmer M, Braman K, Hoover R. Facial recognition using tensor-tensor decompositions [J]. *Siam J Imaging Sci*, 2013, 6:437–463.

[4] Comon, P. Tensor decompositions [M]//McWhirter V J G, Proudler I K, (eds). Mathematics in Signal Processing. Oxford, UK: Clarendon Press, 2002, 1–24.

[5] L De Lathauwer, B De Moor. From matrix to tensor: multilinear algebra and signal processing [M]//McWhirter J, Proudler I K, (eds). Mathematics in Signal Processing IV. Oxford, UK: Clarendon Press, 1998, 1–15.

[6] Nagy J, Kilmer M. Kronecker product approximation for preconditioning in threedimensional imaging applications [J]. *IEEE Trans Image Process*, 2006, 15:604–613.

[7] Sidiropoulos N, Bro R, Giannakis G. Parallel factor analysis in sensor array processing [J]. *IEEE Trans Signal Process*, 2000, 48:2377–2388.

[8] Hoge W, Westin C. Identification of translational displacements between N-dimensional data sets using the high order SVD and phase correlation [J]. *IEEE Trans Image Process*, 2005, 14:884–889.

[9] Rezghi M, Eldén L. Diagonalization of tensors with circulant structure [J]. *Linear Algebra Appl*, 2011, 435:422–447.

[10] Sun L, Zheng B, Bu C, Wei Y. Moore-Penrose inverse of tensors via Einstein product [J]. *Linear Multilinear Algebra*, 2016, 64(4):686–698.

[11] Sun L, Zheng B, Wei Y, Bu C. Generalized inverses of tensors via a general product of tensors [J]. *Front Math China*, 2018, 13(4):893–911.

[12] Miao Y, Qi L, Wei Y. Generalized tensor function via the tensor singular value decomposition based on the T-product [J]. *Linear Algebra Appl*, 2020, 590:258–303.

[13] Miao Y, Qi L, Wei Y. T-Jordan canonical form and T-Drazin inverse based on the T-product [J]. *Communications on Applied Mathematics and Computation*, 2021, 3:201–220.

[14] Panigrahy K, Behera R, Mishra D. Reverse order law for the Moore-Penrose inverses of tensors [J]. *Linear Multilinear Algebra*, 2020, 68:246–264.

[15] Behera R, Sahoo J, Mohaptra R, Nashed M. Computation of generalized inverses of tensors via t-product [J]. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 2021, 29:e2416.

[16] Liu Y, Ma H. Dual core generalized inverse of third-order dual tensor based on the T-product [J]. *Comput Appl Math*, 2022, 41(8):391(1–28).

[17] Cong Z, Ma H. Characterizations and perturbations of the core-EP inverse of tensors based on the T-product [J]. *Numer Funct Anal Optim*, 2022, 43(10):1150–1200.

[18] Sahoo J K, Behera R, Stanimirović P S, et al. Core and core-EP inverses of tensors [J]. *Comput Appl Math*, 2020, 39(1):1–28.

[19] Jin H, Bai M, Benítez J, Liu X. The generalized inverses of tensors and an application to linear models [J]. *Comput Math Appl*, 2017, 74:385–397.

[20] Behera R, Mishra D. Further results on generalized inverses of tensors via the Einstein product [J]. *Linear Multilinear Algebra*, 2017, 65(8):1662–1682.

[21] Ji J, Wei Y. The Drazin inverse of an even-order tensor and its application to singular tensor equations [J]. *Comput Math Appl*, 2018, 75(9):3402–3413.

[22] Behera R, Nandi A, Sahoo J. Further results on the Drazin inverse of even order tensors [J]. *Numer Linear Algebr*, 2020, 27(5):1–25.

[23] Benítez J, Boasso E, Jin H. On one-sided (B, C)-inverses of arbitrary matrices [J]. *Electron J Linear Al*, 2017, 32:391–422.

[24] Kolda T, Bader B. Tensor decompositions and applications [J]. *SIAM Review*, 2009, 51:455–500.

[25] Kernfeld E, Kilmer M, Aeron S. Tensor-tensor products with invertible linear transforms [J]. *Linear Algebra Appl*, 2015, 485:545–570.

[26] Xu W, Zhao X, Ng M. A fast algorithm for cosine transform based tensor singular value decomposition, 2019, arXiv:1902.03070.

[27] Bentbib A, Hachimi A El, Jbilou K, Ratnani A. Fast multidimensional completion and principal component analysis methods via the cosine product [J]. *Calcolo*, 2022, 59(3):26.

[28] Stanimirović P, Pappas D, Katsikis V, Stanimirović I. Symbolic computation of $A_{T,S}^{(2)}$-inverses using QDR factorization [J]. *Linear Algebra Appl.*, 2012, 437:1317–1331.

[29] Stanimirović P, Djordjević D. Full-rank and determinantal representation of the Drazin inverse [J]. *Linear Algebra Appl*, 2000, 311:131–151.

[30] Cline R. Inverses of rank invariant powers of a matrix [J]. *SIAM J Numer Anal*, 1968, 5(1):182–197.

[31] Wang G, Wei Y, Qiao S. Generalized inverses: theory and computations [M]. Developments in Mathematics, 53, Singapore: Springer-Verlag, Beijing: Science Press, 2018.

[32] Campbell S L, Meyer C D. Generalized inverse of linear transformations [M]. London: Pitman, 1979; New York: Dover, 1991.

The Generalized Inverses of Tensors via the C-product

JIN Hongwei[1] XU Shumin[2] JIANG Hongjie[3] LIU Xiaoji[4]

[1]School of Mathematical Sciences; Center for Applied Mathematics of Guangxi, Guangxi Minzu University, Nanning 530006, China.
E-mail: jhw_math@126.com

[2]School of Computer Engineering, Shangqiu University, Shangqiu 476000, Henan, China. E-mail: 18438596256@163.com

[3]Corresponding author. School of Mathematical Sciences; Center for Applied Mathematics of Guangxi, Guangxi Minzu University, Nanning 530006, China.
E-mail: hongjiejiang@yeah.net

[4]School of Education, Guangxi Vocational Normal University, Nanning 530007, China. E-mail: xiaojiliu72@126.com

Abstract This paper studies the issues about the generalized inverses of tensors under the C-product. The aim of this paper is fourfold. Firstly, this paper presents the definition of the Moore-Penrose inverse, Drazin inverse of tensors under the C-product. Moreover, the inverse along a tensor is also introduced. Secondly, this paper gives some other expressions of the generalized inverses of tensors by using several decomposition forms of tensors. In addition, the algorithms for computing the Moore-Penrose inverse, Drazin inverse of tensors and the inverse along a tensor are established. Finally, the application of group inverse of tensor to Markov chains is given.

Keywords C-product, Tensors, Moore-Penrose inverse, Drazin inverse, Inverse along a tensor

2000 MR Subject Classification 15A18, 15A69

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 45 No. 4, 2024
by ALLERTON PRESS, INC., USA