

具三角形耦合矩阵的二阶拟线性双曲组的 精确边界能观性*

王 珂¹ 杨盼盼¹

提要 文章考虑了一类具三角形耦合矩阵的一维二阶拟线性双曲系统. 首先, 作者利用一阶拟线性双曲系统的半整体 C^1 解的理论, 建立了该二阶系统在不同边界条件下的半整体 C^2 解的适定性. 然后, 作者采用直接的构造性框架, 研究了该二阶系统在这些边界条件下的局部精确边界能观性. 最后, 作者分析了能观性和能控性之间隐含的对偶关系.

关键词 二阶拟线性双曲系统, 一阶拟线性双曲系统, 初边值问题, 半整体解,
精确边界能观性

MR (2020) 主题分类 35L51, 35L53, 93B07

中图法分类 O175.2

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2025)02-0113-16

§1 引 言

偏微分方程控制问题的研究一直是一个非常活跃的领域. 精确能观性作为核心问题之一, 在过去几十年来, 许多知名学者对其进行了深入的研究. 精确能观性的概念最早起源于 20 世纪 70 年代, 当时 Dolecki 和 Russell 揭示了线性偏微分方程组的能观性和能控性之间的对偶性, 这也标志着能观性研究的开始 (见文 [1–2]). 20 世纪 80 年代, Lions 在文 [3] 中提出了著名的 HUM (希尔伯特唯一性方法), 将原系统的能控性问题转化为对偶系统的能观性问题, 实现了线性波动方程的精确能控性和稳定性. 20 世纪 90 年代以来, Bardos、姚鹏飞等人考虑了变系数线性偏微分方程的精确能观性, 并推导了相应的能观性不等式 (见文 [4–5]). Lasiecka、Triggiani 和姚鹏飞针对半线性情况给出了不同边界条件下对应的能观不等式, 并通过一些几何或能量方法间接证明了这些不等式 (见文 [6]). 这些研究主要集中在线性偏微分方程、半线性偏微分方程等领域.

进入 21 世纪, 李大潜借助半整体经典解的概念, 创造了一个直接的构造性框架, 对不具有零特征的一阶拟线性双曲系统建立了精确边界能观性 (见文 [7–9]). 当系统具有零特征时, 情况会有所不同 (见文 [10]). 拟线性波动方程作为最典型的二阶拟线性双曲型方程, 其在各类具物理意义边界下的精确边界能观性得到了充分的讨论 (见文 [11–12]).

本文 2025 年 3 月 18 日收到, 2025 年 5 月 15 日收到修改稿.

¹ 东华大学数学与统计学院, 上海 201620. E-mail: kwang@dhu.edu.cn; p15539110669@163.com

* 本文受到上海市科委自然科学基金 (No. 23ZR1402100) 和中央高校基本科研业务费专项资金 (No. 2232023 G-13) 的资助.

在文 [13] 中, 尚培培和庄凯丽考虑如下一般形式的二阶拟线性方程

$$u_{tt} + a(u, u_x, u_t)u_{tx} + b(u, u_x, u_t)u_{xx} = c(u, u_x, u_t),$$

当 $a^2 - 4b > 0$ 时, 这个二阶方程满足双曲性. 她们对该二阶双曲方程建立了半整体 C^2 解的适定性和局部精确边界能观性.

对于由多个方程耦合的二阶拟线性方程组, 其耦合矩阵的复杂性导致了对此类拟线性系统控制问题的研究相对较少. 相关研究主要针对特殊的耦合矩阵, 如于立新对如下特殊形式的二阶拟线性双曲组建立了精确边界能观性

$$u_{tt} + (A + B)(u, u_x, u_t)u_{tx} + AB(u, u_x, u_t)u_{xx} = F(u, u_x, u_t),$$

其中 $u = (u_1, \dots, u_n)^T$ 是关于 (t, x) 的未知向量函数, 矩阵 A 和 B 都只有正特征值或负特征值 (见文 [14]).

对于如下二阶拟线性方程组更一般的形式

$$u_{tt} + A(u, u_x, u_t)u_{tx} + B(u, u_x, u_t)u_{xx} = C(u, u_x, u_t), \quad (1.1)$$

其中 $u = (u_1, \dots, u_n)^T$ 是关于 (t, x) 的未知向量函数, A 和 B 为 $n \times n$ 阶耦合矩阵. 为了使方程组 (1.1) 具有双曲性, 本文的作者之一在文 [15] 中提出了一个矩阵充分条件: 矩阵 A, B 可对角化且满足 $AB = BA$.

在本文中, 我们也考虑上述形式的二阶拟线性方程组 (1.1), 我们提出另一类矩阵的充分条件使得二阶组 (1.1) 具有双曲性. 具体来说, 我们考虑耦合矩阵 A, B 都是下三角矩阵. 不失一般性, 我们令 $n = 2$, 设

$$A(u, u_x, u_t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ a & \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad B(u, u_x, u_t) = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ b & \beta_2 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

都是下三角矩阵函数, 且假设 α_i, β_i ($i = 1, 2$), a, b 都是关于其变量的 C^1 函数.

$$C(u, u_x, u_t) = (c_1, c_2)^T$$

是 C^1 向量函数且满足

$$C(0, 0, 0) = 0.$$

我们首先在所考虑的区域內提出如下一般性假设

$$\begin{cases} \beta_i \neq 0, \\ \alpha_i^2 - 4\beta_i > 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

(1.3) 第一个式子成立当且仅当矩阵 B 可逆. 由文 [16] 可知, 二阶拟线性方程组 (1.1) 可以化为如下—阶拟线性方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = w, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + B(u, v, w) \frac{\partial v}{\partial x} + A(u, v, w) \frac{\partial w}{\partial x} = C(u, v, w), \end{cases} \quad (1.4)$$

其特征方程为

$$\lambda^2(\lambda^2 - \alpha_i\lambda + \beta_i) = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (1.5)$$

注意到 (1.3) 的第二个式子, 可得到 (1.4) 的六个实特征值

$$\lambda_i^- = \frac{\alpha_i - \sqrt{\alpha_i^2 - 4\beta_i}}{2}, \quad \lambda_i^0 \equiv 0, \quad \lambda_i^+ = \frac{\alpha_i + \sqrt{\alpha_i^2 - 4\beta_i}}{2} \quad (i = 1, 2), \quad (1.6)$$

其中 $\lambda_i^\pm$ ($i = 1, 2$) 满足

$$\lambda_i^+ + \lambda_i^- = \alpha_i, \quad \lambda_i^+ - \lambda_i^- = \sqrt{\alpha_i^2 - 4\beta_i}, \quad \lambda_i^+ \lambda_i^- = \beta_i \quad (i = 1, 2). \quad (1.7)$$

由假设 (1.3), 我们还可以得到

$$\lambda_i^\pm \neq 0, \quad \lambda_i^+ > \lambda_i^- \quad (i = 1, 2). \quad (1.8)$$

为了保证一阶拟线性方程组 (1.4) (对应于二阶拟线性方程组 (1.1)) 的双曲性, 我们进一步假设

$$\lambda_1^\pm \neq \lambda_2^\pm, \quad (1.9)$$

即特征方程 $\lambda^2 - \alpha_1\lambda + \beta_1 = 0$ 与 $\lambda^2 - \alpha_2\lambda + \beta_2 = 0$ 不同根. 从文 [16] 中, 我们看到假设 (1.9) 保证了一阶组 (1.4) 具备一组完备的特征向量, 可取为

$$\left\{ \begin{array}{l} l_1^- = (0, 0, \lambda_1^+, 0, 1, 0), \\ l_1^+ = (0, 0, \lambda_1^-, 0, 1, 0), \\ l_1^0 = (1, 0, 0, 0, 0, 0), \\ l_2^0 = (0, 1, 0, 0, 0, 0), \\ l_2^- = \left(0, 0, \frac{a\beta_1 + (\lambda_2^- - \alpha_1)b}{\chi_1}, \lambda_2^+, \frac{\lambda_2^- a - b}{\chi_1}, 1\right), \\ l_2^+ = \left(0, 0, \frac{a\beta_1 + (\lambda_2^+ - \alpha_1)b}{\chi_2}, \lambda_2^-, \frac{\lambda_2^+ a - b}{\chi_2}, 1\right), \end{array} \right. \quad (1.10)$$

其中

$$\chi_1 = \lambda_2^{-2} - \alpha_1\lambda_2^- + \beta_1, \quad \chi_2 = \lambda_2^{+2} - \alpha_1\lambda_2^+ + \beta_1.$$

本文的结构如下: 在第 2 节中, 我们根据特征值的符号分为三种情况, 利用已有的一阶拟线性双曲系统半整体 C^1 解的理论, 得到该二阶拟线性双曲系统的半整体 C^2 解的适定性. 在第 3 节和第 4 节中, 我们在各种情况下分别建立双侧和单侧精确边界能观性. 最后, 在第 5 节中, 我们总结了能观性和能控性之间隐含的对偶关系.

注 1.1 本文考虑的二阶拟线性方程组的形式与文 [15] 中的类似. 然而, 对耦合矩阵的要求和假设截然不同. 文 [15] 中要求系数矩阵 A, B 可对角化且满足可交换条件: $AB = BA$, 而本文中系数矩阵为下三角矩阵不需要可对角化, 也不满足可交换条件.

注 1.2 本文主要讨论两个方程耦合的二阶拟线性方程组, 对于类似形式的 n 个方程耦合的二阶组, 可类似地得到相关结果.

§2 半整体 C^2 解的适定性

首先, 对于二阶拟线性双曲组 (1.1), 我们给定如下的初始条件

$$t = 0 : u = \varphi(x), \quad u_t = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (2.1)$$

其中 $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T$ 和 $\psi = (\psi_1, \psi_2)^T$ 是给定的向量函数. 根据 (1.8) 以及 $\lambda_i^\pm$ ($i = 1, 2$) 在点 $(u, v, w) = (0, 0, 0)$ 邻域内不同符号的分布, 我们分以下三种情况讨论:

$$(i) \quad \beta_i < 0 \Leftrightarrow \lambda_i^+ > 0, \quad \lambda_i^- < 0 \quad (i = 1, 2); \quad (2.2)$$

$$(ii) \quad \beta_i > 0, \quad \alpha_i > 0 \Leftrightarrow \lambda_i^\pm > 0 \quad (i = 1, 2); \quad (2.3)$$

$$(iii) \quad \beta_i > 0, \quad \alpha_i < 0 \Leftrightarrow \lambda_i^\pm < 0 \quad (i = 1, 2). \quad (2.4)$$

情况 (i) 表示二阶组 (1.1) 具有相同数量的正特征值和负特征值. 对于这种情况, 我们在 $x = 0$ 和 $x = L$ 两侧给出以下 Robin 型边界条件

$$x = 0 : u_x - \alpha u = h(t) \quad (2.5)$$

和

$$x = L : u_x + \bar{\alpha} u = \bar{h}(t), \quad (2.6)$$

其中 α 和 $\bar{\alpha}$ 均为正常数, $h = (h_1, h_2)^T$ 和 $\bar{h} = (\bar{h}_1, \bar{h}_2)^T$ 均为 C^1 向量函数.

情况 (ii) 意味着二阶组 (1.1) 没有负特征值, 因此我们只需在 $x = 0$ 处施加边界条件, 给出以下 Dirichlet-Neumann 型边界

$$x = 0 : u = h(t), \quad u_x = \bar{h}(t), \quad (2.7)$$

其中 $h = (h_1, h_2)^T$ 是 C^2 向量函数, $\bar{h} = (\bar{h}_1, \bar{h}_2)^T$ 是 C^1 向量函数.

情况 (iii) 意味着二阶组 (1.1) 没有正特征值, 因此我们只需在 $x = L$ 处施加边界条件

$$x = L : u = h(t), \quad u_x = \bar{h}(t), \quad (2.8)$$

其中 $h = (h_1, h_2)^T$ 是 C^2 向量函数, $\bar{h} = (\bar{h}_1, \bar{h}_2)^T$ 是 C^1 向量函数.

注 2.1 对于情况 (i), 文 [16] 证明了 Dirichlet 型边界条件下的半整体 C^2 解的存在唯一性. 鉴于 Neumann 型边界条件与之类似, 本文将不再进一步讨论, 我们重点关注更复杂的 Robin 型边界条件下半整体 C^2 解的适定性理论.

首先, 我们研究情况 (i) 的混合初边值问题 (1.1), (2.1) 和 (2.5)–(2.6) 的半整体 C^2 解的适定性.

定理 2.1 假设 (1.3), (1.9) 和 (2.2) 成立. 进一步假设在点 $(t, x) = (0, 0)$ 和 $(0, L)$ 处分别满足 C^2 相容性条件. 那么对于任何给定且足够大的 $T > 0$, 只要 $\|(\varphi, \psi)\|_{C^2[0, L] \times C^1[0, L]}$ 和 $\|(h, \bar{h})\|_{C^1[0, T] \times C^1[0, T]}$ 足够小, 前向混合初边值问题 (1.1), (2.1) 和 (2.5)–(2.6) 在区域 $R(T) = \{(t, x) \mid 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq L\}$ 上存在唯一的半整体 C^2 解 $u = u(t, x)$, 其 C^2 模充分小, 且成立如下估计式

$$\|u\|_{C^2[R(T)]} \leq C(\|(\varphi, \psi)\|_{C^2[0, L] \times C^1[0, L]} + \|(h, \bar{h})\|_{C^1[0, T] \times C^1[0, T]}), \quad (2.9)$$

其中 C 是一个依赖于 T 的正数.

注 2.2 在定理 2.1 中, 在点 $(t, x) = (0, 0)$ 处的 C^2 相容性条件是指

$$\begin{cases} \varphi(0) - \alpha\varphi(0) = h(0), \\ \psi'(0) - \alpha\psi(0) = h'(0). \end{cases}$$

在点 $(t, x) = (0, L)$ 处的 C^2 相容性条件可以类似地定义.

为了得到上述 Robin 型边界条件下混合初边值问题的半整体 C^2 解的适定性, 我们将其转化为相应的一阶拟线性双曲系统的混合初边值问题, 然后利用一阶拟线性双曲系统的半整体 C^1 解的理论.

沿着这个思路, 我们首先回顾一阶拟线性双曲系统的半整体 C^1 解的适定性理论 (见文 [17]).

引理 2.1 对于一阶拟线性双曲系统

$$u_t + A(u)u_x = F(u), \quad (2.10)$$

其中 $u = (u_1, \dots, u_n)^T$, $F(0) = 0$, 矩阵 A 有 n 个实特征值 $\lambda_p < \lambda_q \equiv 0 < \lambda_r$ ($p = 1, \dots, l$; $q = l+1, \dots, m$; $r = m+1, \dots, n$) 和一组完备的左特征向量 $l_i(u)$ ($i = 1, \dots, n$).

令

$$v_i = l_i(u)u \quad (i = 1, \dots, n).$$

对于一阶拟线性双曲组 (2.10), 我们给出如下初始条件和边界条件

$$t = 0 : u = \phi(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (2.11)$$

$$x = 0 : v_r = G_r(t, v_1, \dots, v_m) + H_r(t) \quad (r = m+1, \dots, n), \quad (2.12)$$

$$x = L : v_p = G_p(t, v_{l+1}, \dots, v_n) + H_p(t) \quad (p = 1, \dots, l), \quad (2.13)$$

其中 $G_r(t, 0, \dots, 0) \equiv 0$, $G_p(t, 0, \dots, 0) \equiv 0$.

假设 A , F , ϕ , G_p , G_r , H_p 和 H_r ($p = 1, \dots, l$; $r = m+1, \dots, n$) 是关于其变量的 C^1 函数, 并且在点 $(t, x) = (0, 0)$ 和 $(0, L)$ 处分别满足相应的 C^1 相容性条件. 对于任何给定且可能充分大的 $T > 0$, 只要范数 $\|\phi\|_{C^1[0, L]}$, $\|(H_p, H_r)\|_{C^1[0, T] \times C^1[0, T]}$ ($p = 1, \dots, l$; $r = m+1, \dots, n$) 足够小, 前向混合初边值问题 (2.10)–(2.13) 在区域

$$R(T) = \{(t, x) \mid 0 \leq t \leq T; 0 \leq x \leq L\}$$

上存在唯一的半整体 C^1 解 $u = u(t, x)$, 其 C^1 模充分小. 进一步假设 $\frac{\partial G_p}{\partial t}(t, \cdot)$ ($p = 1, \dots, l$) 和 $\frac{\partial G_r}{\partial t}(t, \cdot)$ ($r = m+1, \dots, n$) 关于变量 v 满足局部 Lipschitz 条件, 则解 $u = u(t, x)$ 成立如下估计

$$\|u\|_{C^1[R(T)]} \leq C(\|\phi\|_{C^1[0, L]} + \|(H_p, H_r)\|_{C^1[0, T] \times C^1[0, T]}), \quad (2.14)$$

其中 C 是一个依赖于 T 的正数.

基于这个引理, 现在证明定理 2.1.

定理 2.1 的证明 设 $U = (u, v, w)^T$, 其中 $u = (u_1, u_2)^T$, $v = (v_1, v_2)^T$, $w = (w_1, w_2)^T$. 此外, 令

$$L = \begin{pmatrix} l_i^- \\ l_i^0 \\ l_i^+ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} V^- \\ V^0 \\ V^+ \end{pmatrix} = LU. \quad (2.15)$$

根据 (1.10), 有

$$\begin{cases} V_1^0 = u_1, \\ V_2^0 = u_2, \\ V_1^- = \lambda_1^+ v_1 + w_1, \\ V_1^+ = \lambda_1^- v_1 + w_1, \\ V_2^- = \frac{a\beta_1 + (\lambda_2^- - \alpha_1)b}{\chi_1} v_1 + \lambda_2^+ v_2 + \frac{\lambda_2^- a - b}{\chi_1} w_1 + w_2, \\ V_2^+ = \frac{a\beta_1 + (\lambda_2^+ - \alpha_1)b}{\chi_2} v_1 + \lambda_2^- v_2 + \frac{\lambda_2^+ a - b}{\chi_2} w_1 + w_2. \end{cases} \quad (2.16)$$

由 (2.16) 易知

$$(u, v, w) = 0 \Leftrightarrow (V^-, V^0, V^+) = 0 \quad (2.17)$$

及

$$\frac{\partial(V^-, V^0, V^+)}{\partial(u, v, w)} = (\lambda_1^+ - \lambda_1^-)(\lambda_2^+ - \lambda_2^-) \neq 0. \quad (2.18)$$

因此, 在 $U = 0$ 的邻域内, 可得

$$\begin{cases} u_1 = V_1^0, \\ u_2 = V_2^0, \\ v_1 = \frac{V_1^- - V_1^+}{\lambda_1^+ - \lambda_1^-}, \\ v_2 = \frac{(b\lambda_1^+ - a\beta_1)(\alpha_2 - \alpha_1) + (\lambda_1^- a - b)(\beta_2 - \beta_1)}{(\lambda_1^+ - \lambda_1^-)\chi_1\chi_2} V_1^- \\ \quad + \frac{(a\beta_1 - \lambda_1^- b)(\alpha_2 - \alpha_1) + (b - \lambda_1^+ a)(\beta_2 - \beta_1)}{(\lambda_1^+ - \lambda_1^-)\chi_1\chi_2} V_1^+ \\ \quad + \frac{V_2^- - V_2^+}{\lambda_2^+ - \lambda_2^-}, \\ w_1 = \frac{\lambda_1^+ V_1^+ - \lambda_1^- V_1^-}{\lambda_1^+ - \lambda_1^-}, \\ w_2 = \frac{(\lambda_1^- a\beta_2 - b\beta_1)(\alpha_2 - \alpha_1) + (a\beta_1 + \lambda_1^- b - \lambda_1^- a\alpha_2)(\beta_2 - \beta_1)}{(\lambda_1^+ - \lambda_1^-)\chi_1\chi_2} V_1^- \\ \quad + \frac{(b\beta_1 - \lambda_1^+ a\beta_2)(\alpha_2 - \alpha_1) + (\lambda_1^+ a\alpha_2 - \lambda_1^+ b - a\beta_1)(\beta_2 - \beta_1)}{(\lambda_1^+ - \lambda_1^-)\chi_1\chi_2} V_1^+ \\ \quad + \frac{\lambda_2^+ V_2^+ - \lambda_2^- V_2^-}{\lambda_2^+ - \lambda_2^-}. \end{cases} \quad (2.19)$$

注意到在点 $(t, x) = (0, 0)$ 和 $(0, L)$ 处满足 C^2 相容性条件, 初始条件 (2.1) 可以改写为

$$t = 0 : u = \varphi(x), \quad v = \varphi'(x), \quad w = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (2.20)$$

根据边界条件 (2.5), 有

$$x = 0 : v_i = \alpha V_i^0 + h_i(t) \quad (i = 1, 2). \quad (2.21)$$

根据 (2.19), 可得

$$\frac{\partial(v_1, v_2)}{\partial(V_1^+, V_2^+)} = \frac{1}{(\lambda_1^+ - \lambda_1^-)(\lambda_2^+ - \lambda_2^-)} \neq 0.$$

因此, 在 $U = 0$ 的邻域内, $x = 0$ 处的边界条件 (2.21) 可以被等价地改写为

$$x = 0 : V^+ = G(t, V^0, V^-) + H(t), \quad (2.22)$$

其中 G, H 是关于其变量的 C^1 函数. 不失一般性, 可以假设

$$G(t, 0, 0) \equiv 0.$$

因此, 当 $\|h\|_{C^1[0, T]}$ 足够小时, 可得

$$C_1 \|h\|_{C^1[0, T]} \leq \|H\|_{C^1[0, T]} \leq C_2 \|h\|_{C^1[0, T]}. \quad (2.23)$$

此处及后文中, C_i ($i = 1, 2, \dots$) 表示一些正常数.

类似地, 对于边界条件 (2.6), 有

$$x = L : v_i = -\bar{\alpha} V_i^0 + \bar{h}_i(t) \quad (i = 1, 2). \quad (2.24)$$

由 (2.19), 可得

$$\frac{\partial(v_1, v_2)}{\partial(V_1^-, V_2^-)} = \frac{1}{(\lambda_1^+ - \lambda_1^-)(\lambda_2^+ - \lambda_2^-)} \neq 0.$$

因此, 在 $U = 0$ 的邻域内, $x = L$ 处的边界条件可以等价地改写为

$$x = L : V^- = \bar{G}(t, V^0, V^+) + \bar{H}(t), \quad (2.25)$$

其中 $\bar{G}, \bar{H}$ 是关于其变量的 C^1 函数, 不妨设

$$\bar{G}(t, 0, 0) \equiv 0.$$

因此, 当 $\|\bar{h}\|_{C^1[0, T]}$ 足够小时, 可得

$$C_3 \|\bar{h}\|_{C^1[0, T]} \leq \|\bar{H}\|_{C^1[0, T]} \leq C_4 \|\bar{h}\|_{C^1[0, T]}. \quad (2.26)$$

由原混合初边值问题 (1.1), (2.1) 和 (2.5)–(2.6) 在点 $(t, x) = (0, 0)$ 和 $(0, L)$ 处分别满足 C^2 相容性条件, 易知混合初边值问题 (1.4), (2.20), (2.22) 和 (2.25) 在点 $(t, x) = (0, 0)$ 和 $(0, L)$ 处分别满足 C^1 相容性条件.

利用一阶拟线性双曲系统混合初边值问题的半整体 C^1 解的结果 (见引理 2.1), 即可得到原混合初边值问题 (1.1), (2.1) 和 (2.5)–(2.6) 在区域 $R(T)$ 上存在唯一的半整体 C^2 解. 此外, 注意到 (2.20), (2.23) 和 (2.26), 可以由引理 2.1 中的 (2.14) 得到估计式 (2.9). 定理 2.1 得证.

命题 2.1 假设 (1.3), (1.9) 和 (2.2) 成立. 对于任何给定且可能充分大的 $T > 0$, 给定 $t = T$ 处的终端条件

$$t = T : u = \Phi(x), \quad u_t = \Psi(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (2.27)$$

其中 $(\Phi, \Psi) \in C^2 \times C^1$. 假设在点 $(t, x) = (T, 0)$ 和 (T, L) 处分别满足 C^2 相容性条件. 只要 $\|(\Phi, \Psi)\|_{C^2[0, L] \times C^1[0, L]}$ 和 $\|(h, \bar{h})\|_{C^1[0, T] \times C^1[0, T]}$ 足够小, 后向混合初边值问题 (1.1), (2.27) 和 (2.5)–(2.6) 在区域 $R(T)$ 上存在唯一的半整体 C^2 解 $u = u(t, x)$, 其 C^2 模充分小且成立如下不等式

$$\|u\|_{C^2[R(T)]} \leq C(\|(\Phi, \Psi)\|_{C^2[0, L] \times C^1[0, L]} + \|(h, \bar{h})\|_{C^1[0, T] \times C^1[0, T]}), \quad (2.28)$$

其中 C 是依赖于 T 的正数.

对于情况 (ii) 和情况 (iii), 我们也可以分别得到相应的混合初边值问题半整体 C^2 解的适定性理论.

定理 2.2 假设 (1.3), (1.9) 和 (2.3) 成立. 进一步假设在点 $(t, x) = (0, 0)$ 处满足相应的 C^2 相容性条件, 那么对于任何给定且可能充分大的 $T > 0$, 只要 $\|(\varphi, \psi)\|_{C^2[0, L] \times C^1[0, L]}$ 和 $\|(h, \bar{h})\|_{C^2[0, T] \times C^1[0, T]}$ 足够小, 前向混合初边值问题 (1.1), (2.1) 和 (2.7) 在区域 $R(T)$ 上存在唯一的半整体 C^2 解 $u = u(t, x)$, 其 C^2 模充分小, 且成立如下估计式

$$\|u\|_{C^2[R(T)]} \leq C(\|(\varphi, \psi)\|_{C^2[0, L] \times C^1[0, L]} + \|(h, \bar{h})\|_{C^2[0, T] \times C^1[0, T]}), \quad (2.29)$$

其中 C 是依赖于 T 的正数.

定理 2.2 的证明方法与定理 2.1 的类似, 它们之间的主要区别在于对边界条件的处理.

定理 2.2 的证明 首先, 我们仍将二阶拟线性双曲组 (1.1) 化为一阶拟线性双曲组 (1.4). 注意到在点 $(t, x) = (0, 0)$ 处满足 C^2 相容性条件, 初始条件 (2.1) 仍然可以改写 (2.20). 边界条件 (2.7) 可以改写为

$$x = 0 : v = \bar{h}(t), \quad w = h'(t). \quad (2.30)$$

此外, 由 (2.19) 可知

$$\frac{\partial(v, w)}{\partial(V^-, V^+)} = \frac{1}{(\lambda_1^+ - \lambda_1^-)(\lambda_2^+ - \lambda_2^-)} \neq 0.$$

因此, 在 $U = 0$ 的邻域内, 边界条件 (2.30) 可以等价地改写为

$$x = 0 : \begin{cases} V^+ = G(t, V^0) + H(t), \\ V^- = \bar{G}(t, V^0) + \bar{H}(t), \end{cases} \quad (2.31)$$

其中 $G(t, 0) \equiv 0$, $\bar{G}(t, 0) \equiv 0$. 因此, 当 $\|(h, \bar{h})\|_{C^2[0, T] \times C^1[0, T]}$ 足够小时, 可得

$$C_5 \|(h, \bar{h})\|_{C^2[0, T] \times C^1[0, T]} \leq \|(H, \bar{H})\|_{C^1[0, T] \times C^1[0, T]} \leq C_6 \|(h, \bar{h})\|_{C^2[0, T] \times C^1[0, T]}. \quad (2.32)$$

由混合初边值问题 (1.1), (2.1) 和 (2.7) 在点 $(t, x) = (0, 0)$ 处的 C^2 相容性条件, 易知混合初边值问题 (1.4), (2.20) 和 (2.31) 在点 $(t, x) = (0, 0)$ 处满足 C^1 相容性条件.

由引理 2.1, 我们可以得到原混合初边值问题 (1.1), (2.1) 和 (2.7) 的半整体 C^2 解的存在唯一性. 注意到 (2.32), 可知估计式 (2.29) 成立. 定理 2.2 得证.

命题 2.2 假设 (1.3), (1.9) 和 (2.3) 成立. 对于任何给定且可能充分大的 $T > 0$, 我们给定 $t = T$ 处的终端条件 (2.27). 假设在点 $(t, x) = (T, L)$ 处满足相应的 C^2 相容性条件, 只要 $\|(\Phi, \Psi)\|_{C^2[0,L] \times C^1[0,L]}$ 和 $\|(h, \bar{h})\|_{C^2[0,T] \times C^1[0,T]}$ 足够小, 后向混合初边值问题 (1.1), (2.27) 和 (2.8) 在区域 $R(T)$ 上存在唯一的半整体 C^2 解 $u = u(t, x)$, 其 C^2 模充分小且满足

$$\|u\|_{C^2[R(T)]} \leq C(\|(\Phi, \Psi)\|_{C^2[0,L] \times C^1[0,L]} + \|(h, \bar{h})\|_{C^2[0,T] \times C^1[0,T]}), \quad (2.33)$$

其中 C 是一个依赖于 T 的正数.

情况 (iii) 可与情况 (ii) 类似地得到如下混合初边值问题的半整体 C^2 解的适定性.

定理 2.3 假设 (1.3), (1.9) 和 (2.4) 成立. 进一步假设在点 $(t, x) = (0, L)$ 处满足相应的 C^2 相容性条件. 那么对于任何给定且可能充分大的 $T > 0$, 只要 $\|(\varphi, \psi)\|_{C^2[0,L] \times C^1[0,L]}$, $\|(h, \bar{h})\|_{C^2[0,T] \times C^1[0,T]}$ 足够小, 前向混合初边值问题 (1.1), (2.1) 和 (2.8) 在区域 $R(T)$ 上存在唯一的半整体 C^2 解 $u = u(t, x)$, 其 C^2 模充分小, 且估计式 (2.29) 成立.

命题 2.3 假设 (1.3), (1.9) 和 (2.4) 成立. 对于任何给定且可能充分大的 $T > 0$, 我们给定 $t = T$ 处的终端条件 (2.27). 假设在点 $(t, x) = (T, 0)$ 处满足相应的 C^2 相容性条件, 只要 $\|(\Phi, \Psi)\|_{C^2[0,L] \times C^1[0,L]}$ 和 $\|(h, \bar{h})\|_{C^2[0,T] \times C^1[0,T]}$ 足够小, 后向混合初边值问题 (1.1), (2.27) 和 (2.7) 在区域 $R(T)$ 上存在唯一的半整体 C^2 解 $u = u(t, x)$, 其 C^2 模充分小且满足 (2.33).

对于这三种情况, 根据定理 2.1–2.3, 我们也可以建立相应的 Cauchy 问题整体 C^2 解的适定性.

命题 2.4 若 $\|(\varphi, \psi)\|_{C^2[0,L] \times C^1[0,L]}$ 足够小, 则 Cauchy 问题 (1.1) 和 (2.1) 在其对应的最大决定区域上存在唯一的整体 C^2 解且成立

$$\|u\|_{C^2} \leq C\|(\varphi, \psi)\|_{C^2[0,L] \times C^1[0,L]}, \quad (2.34)$$

其中 C 是一个正常数.

§3 情况 (i) 的局部精确边界能观性

在本节中, 我们主要讨论情况 (i) 的局部双侧和单侧精确边界能观性.

首先, 观测值的给定原则是确保边界上 (u, u_x) 的值可以由边界条件和这些观测值唯一确定. 因此, 对于边界条件 (2.5), 我们在 $x = 0$ 处给出观测值 $u = K(t)$, 其是关于 t 的 C^2 函数, 则有

$$x = 0: (u, u_x) = (K(t), h(t) + \alpha K(t)). \quad (3.1)$$

因此, 对于任何给定的 $T > 0$, 在 $x = 0$ 处, 存在一个正常数 C , 使得

$$\|(u, u_x)\|_{C^2[0,T] \times C^1[0,T]} \leq C(\|K\|_{C^2[0,T]} + \|h\|_{C^1[0,T]}). \quad (3.2)$$

类似地, 对于边界条件 (2.6), 我们在 $x = L$ 处给出观测值 $u = \bar{K}(t)$, 其中 u 是关于 t 的 C^2 函数, 有

$$x = L: (u, u_x) = (\bar{K}(t), \bar{h}(t) - \bar{\alpha}\bar{K}(t)). \quad (3.3)$$

则对于任何给定的 $T > 0$, 存在一个正常数 C , 使得

$$\|(u, u_x)\|_{C^2[0,T] \times C^1[0,T]} \leq C(\|\bar{K}\|_{C^2[0,T]} + \|\bar{h}\|_{C^1[0,T]}). \quad (3.4)$$

定理 3.1 (局部双侧精确边界能观性) 假设 α_i, β_i, c_i ($i = 1, 2$), a, b 都是关于其参数的 C^1 函数, 进一步假设 (1.3), (1.9) 和 (2.2) 成立. 令

$$T > L \max_{i=1,2} \frac{1}{|\lambda_i^\pm(0, 0, 0)|}. \quad (3.5)$$

对于任何给定的初值 $(\varphi(x), \psi(x))$ 和边界函数 $(h(t), \bar{h}(t))$, 且其范数 $\|(\varphi, \psi)\|_{C^2[0,L] \times C^1[0,L]}$ 和 $\|(h, \bar{h})\|_{C^1[0,T] \times C^1[0,T]}$ 足够小, 使得在点 $(t, x) = (0, 0)$ 和 $(0, L)$ 处分别满足 C^2 相容性条件. 如果我们在区间 $[0, T]$ 上给出 $x = 0$ 处的观测值 $u = K(t)$ 和 $x = L$ 处的观测值 $u = \bar{K}(t)$, 则初值 $(\varphi(x), \psi(x))$ 可由这些观测值和边界函数 $(h(t), \bar{h}(t))$ 唯一地确定. 此外, 我们还可以得到如下的能观不等式

$$\|(\varphi, \psi)\|_{C^2[0,L] \times C^1[0,L]} \leq C(\|(K, \bar{K})\|_{C^2[0,T] \times C^2[0,T]} + \|(h, \bar{h})\|_{C^1[0,T] \times C^1[0,T]}), \quad (3.6)$$

其中 C 是一个正常数.

证 由于 $\|(\varphi, \psi)\|_{C^2[0,L] \times C^1[0,L]}$ 和 $\|(h, \bar{h})\|_{C^1[0,T] \times C^1[0,T]}$ 充分小, 根据定理 2.1, 前向混合初边值问题 (1.1), (2.1) 和 (2.5)–(2.6) 在区域 $R(T)$ 上存在唯一的具小范数的半整体 C^2 解 $u = u(t, x)$, 因此 $\|K\|_{C^2[0,T]}$ 和 $\|\bar{K}\|_{C^2[0,T]}$ 也足够小.

注意 (1.3) 的第一个式子, 可以交换 t 和 x 的作用, 方程组 (1.1) 可以改写为

$$u_{xx} + B^{-1}A(u, u_x, u_t)u_{tx} + B^{-1}(u, u_x, u_t)u_{tt} = B^{-1}C(u, u_x, u_t). \quad (3.7)$$

解右向 Cauchy 问题 (3.7) 和 (3.1). 由命题 2.4, 此右向 Cauchy 问题在其最大决定区域 R_r 上存在唯一的整体 C^2 解 $u = u_r(t, x)$, 且满足

$$\|u_r\|_{C^2[R_r]} \leq C(\|K\|_{C^2[0,T]} + \|h\|_{C^1[0,T]}). \quad (3.8)$$

类似地, 左向 Cauchy 问题 (3.7) 和 (3.3) 在其最大决定区域 R_l 上存在唯一的整体 C^2 解 $u = u_l(t, x)$, 且有

$$\|u_l\|_{C^2[R_l]} \leq C(\|\bar{K}\|_{C^2[0,T]} + \|\bar{h}\|_{C^1[0,T]}). \quad (3.9)$$

由唯一性知 (见文 [18]), $u = u_r(t, x)$ 和 $u = u_l(t, x)$ 分别是原混合初始边值问题 (1.1), (2.1) 和 (2.5)–(2.6) 的半整体 C^2 解 $u = u(t, x)$ 在其对应的最大决定区域上的限制.

注意到 (3.5), 这两个最大决定区域 R_r 和 R_l 必相交. 因此, 存在 T_0 ($0 < T_0 < T$), 使得在 $t = T_0$ 时, (u, u_t) 的值可以由解 $u = u_r(t, x)$ 和 $u = u_l(t, x)$ 唯一确定, 将其表示为

$$t = T_0 : (u, u_t) = (\Phi(x), \Psi(x)), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (3.10)$$

此外, 由 (3.8)–(3.9) 式知

$$\|(\Phi, \Psi)\|_{C^2[0, L] \times C^1[0, L]} \leq C(\|(K, \bar{K})\|_{C^2[0, T] \times C^2[0, T]} + \|(h, \bar{h})\|_{C^1[0, T] \times C^1[0, T]}). \quad (3.11)$$

现在在区域

$$R(T_0) = \{(t, x) \mid 0 \leq t \leq T_0, 0 \leq x \leq L\}$$

上考虑后向混合初边值问题 (1.1), (3.10) 和

$$x = 0 : u = K(t), \quad (3.12)$$

$$x = L : u = \bar{K}(t). \quad (3.13)$$

由命题 2.1 可知, 其在 $R(T_0)$ 上存在唯一的半整体 C^2 解 $u = u_b(t, x)$, 且满足

$$\|u_b\|_{C^2[R(T_0)]} \leq C(\|(\Phi, \Psi)\|_{C^2[0, L] \times C^1[0, L]} + \|(K, \bar{K})\|_{C^2[0, T_0] \times C^2[0, T_0]}). \quad (3.14)$$

再由唯一性知 (见文 [18]), 解 $u = u_b(t, x)$ 是解 $u = u(t, x)$ 在 $R(T_0)$ 上的限制. 注意到 (3.11), 并将 $u = u_b(t, x)$ 限制在 $t = 0$ 上, 可以得到能观不等式 (3.6). 定理 3.1 得证.

注 3.1 双侧观测时间所满足的条件 (3.5) 是最优的, 它保证了左向和右向 Cauchy 问题的最大决定区域必相交.

定理 3.2 (局部单侧精确边界能观性) 假设 α_i, β_i, c_i ($i = 1, 2$), a, b 都是关于其参数的 C^1 函数. 进一步假设 (1.3), (1.9) 和 (2.2) 成立. 令

$$T > L \left(\max_{i=1,2} \frac{1}{\lambda_i^+(0, 0, 0)} + \max_{i=1,2} \frac{1}{|\lambda_i^-(0, 0, 0)|} \right). \quad (3.15)$$

对于任何给定的初值 $(\varphi(x), \psi(x))$ 和边界函数 $(h(t), \bar{h}(t))$, 且其范数 $\|(\varphi, \psi)\|_{C^2[0, L] \times C^1[0, L]}$ 和 $\|(h, \bar{h})\|_{C^1[0, T] \times C^1[0, T]}$ 足够小, 使得在点 $(t, x) = (0, 0)$ 和 $(0, L)$ 处分别满足 C^2 相容性条件. 如果在区间 $[0, T]$ 上给出 $x = 0$ 处的观测值 $u = K(t)$, 则初值 $(\varphi(x), \psi(x))$ 可以由观测值 $K(t)$ 和边界函数 $(h(t), \bar{h}(t))$ 唯一确定. 此外, 还可以得到如下能观不等式

$$\|(\varphi, \psi)\|_{C^2[0, L] \times C^1[0, L]} \leq C(\|K\|_{C^2[0, T]} + \|(h, \bar{h})\|_{C^1[0, T] \times C^1[0, T]}), \quad (3.16)$$

其中 C 是一个正常数.

证 这个定理证明的第一步和第二步与定理 3.1 的证明类似. 我们先在 $R(T)$ 上得到一个前向混合初边值问题的半整体 C^2 解 $u = u(t, x)$, 然后, 解一个右向 Cauchy 问题, 在其最大决定区域上得到一个 C^2 解 $u = u_r(t, x)$. 注意到 (3.15), 这个最大决定区域必与 $x = L$ 相交.

因此, 存在 T_0 ($0 < T_0 < T$), 使得 $t = T_0$ 时的 (u, u_t) 值可由 $u = u_r(t, x)$ 唯一确定, 仍记为 (3.10).

再次注意到 (3.2), 有

$$\|(\Phi, \Psi)\|_{C^2[0,L] \times C^1[0,L]} \leq C(\|K\|_{C^2[0,T]} + \|h\|_{C^1[0,T]}). \quad (3.17)$$

最后, 我们考虑后向混合初边值问题 (1.1), (3.10), (3.12) 和 (2.6), 由命题 2.1 可知, 其在区域 $R(T_0)$ 上存在唯一的半整体 C^2 解 $u = u_b(t, x)$, 且满足

$$\|u_b\|_{C^2[R(T_0)]} \leq C(\|(\Phi, \Psi)\|_{C^2[0,L] \times C^1[0,L]} + \|K\|_{C^2[0,T_0]} + \|\bar{h}\|_{C^1[0,T_0]}). \quad (3.18)$$

由唯一性可知 (见文 [18]), 解 $u = u_b(t, x)$ 是解 $u = u(t, x)$ 在 $R(T_0)$ 上的一个限制. 注意到 (3.17), 将 $u = u_b(t, x)$ 限制在 $t = 0$ 上, 可以得到所需的能观不等式 (3.16). 定理 3.2 得证.

注 3.2 单侧精确观测时间所满足的条件 (3.15) 是最优的, 它保证了右向 Cauchy 问题的最大决定区域必与 $x = L$ 相交.

注 3.3 在情况 (i) 中, 正特征值的个数和负特征值的个数相等, 因此, 也可以利用区间 $[0, T]$ 上给出的 $x = L$ 处的观测值 $u = \bar{K}(t)$ 建立能观性. 此时, 观测时间 T 满足相同的条件 (3.15), 能观不等式为

$$\|(\varphi, \psi)\|_{C^2[0,L] \times C^1[0,L]} \leq C(\|\bar{K}\|_{C^2[0,T]} + \|(h, \bar{h})\|_{C^1[0,T] \times C^1[0,T]}), \quad (3.19)$$

其中 C 是一个正常数.

§4 其他情况的局部精确边界能观性

注意到情况 (ii) 和情况 (iii) 的边界条件, 我们只需要建立相应的局部单侧精确边界能观性. 对于情况 (ii), 给出 $x = L$ 处的观测值

$$(u, u_x) = (K(t), \bar{K}(t)).$$

对于情况 (iii), 在 $x = 0$ 处给出观测值

$$(u, u_x) = (K(t), \bar{K}(t)).$$

对于情况 (ii), 可以建立如下的局部单侧精确边界能观性定理.

定理 4.1 (局部单侧精确边界能观性) 假设 α_i, β_i, c_i ($i = 1, 2$), a, b 都是关于其参数的 C^1 函数. 进一步假设 (1.3), (1.9) 和 (2.3) 成立. 令

$$T > L \max_{i=1,2} \frac{1}{\lambda_i^-(0, 0, 0)}. \quad (4.1)$$

对于任何给定的初值 $(\varphi(x), \psi(x))$ 和边界函数 $(h(t), \bar{h}(t))$, 且其范数 $\|(\varphi, \psi)\|_{C^2[0,L] \times C^1[0,L]}$, $\|(h, \bar{h})\|_{C^2[0,T] \times C^1[0,T]}$ 足够小, 使得在点 $(t, x) = (0, 0)$ 处满足 C^2 相容性条件. 如果我们在区间 $[0, T]$ 上给出 $x = L$ 处的观测值

$$x = L : u = K(t), \quad u_x = \bar{K}(t), \quad (4.2)$$

则初值 $(\varphi(x), \psi(x))$ 可以由观测值 $(K(t), \overline{K}(t))$ 和边界函数 $(h(t), \overline{h}(t))$ 唯一确定, 并且得到如下能观不等式

$$\|(\varphi, \psi)\|_{C^2[0,L] \times C^1[0,L]} \leq C(\|(K, \overline{K})\|_{C^2[0,T] \times C^1[0,T]} + \|(h, \overline{h})\|_{C^2[0,T] \times C^1[0,T]}), \quad (4.3)$$

其中 C 是一个正常数.

证 根据定理 2.2, 前向混合初边值问题 (1.1), (2.1) 和 (2.7) 在 $R(T)$ 上存在唯一的半整体 C^2 解 $u = u(t, x)$, 其 C^2 模 $\|u\|_{C^2[R(T)]}$ 充分小, 使得 $\|K\|_{C^2[0,T]}$ 和 $\|\overline{K}\|_{C^1[0,T]}$ 也足够小.

注意到 (2.3), 我们交换 t 和 x 的作用, 解右向 Cauchy 问题 (3.7) 和 (2.7), 在其最大决定区域 R_r 上存在唯一的整体 C^2 解 $u = u_r(t, x)$, 且满足

$$\|u_r\|_{C^2[R_r]} \leq C\|(h, \overline{h})\|_{C^2[0,T] \times C^1[0,T]}. \quad (4.4)$$

事实上, 解 $u = u_r(t, x)$ 是 C^2 解 $u = u(t, x)$ 在 R_r 上的一个限制.

再注意到 (4.1), R_r 一定与直线 $x = L$ 相交, 因此存在 T_0 ($0 < T_0 < T$), 使得当 $t = T_0$ 时, (u, u_t) 的值可由 $u = u_r(t, x)$ 唯一确定, 仍记为 (3.10). 由 (4.4), 可得

$$\|(\Phi, \Psi)\|_{C^2[0,L] \times C^1[0,L]} \leq C\|(h, \overline{h})\|_{C^2[0,T] \times C^1[0,T]}. \quad (4.5)$$

最后, 我们解后向混合初边值问题 (1.1), (3.10) 和 (4.2). 由命题 2.2, 其在 $R(T_0)$ 上存在唯一的半整体 C^2 解 $u = u_b(t, x)$, 使得

$$\|u_b\|_{C^2[R(T_0)]} \leq C(\|(\Phi, \Psi)\|_{C^2[0,L] \times C^1[0,L]} + \|(K, \overline{K})\|_{C^2[0,T_0] \times C^1[0,T_0]}). \quad (4.6)$$

由唯一性知 (见文 [18]), 解 $u = u_b(t, x)$ 是解 $u = u(t, x)$ 在 $R(T_0)$ 上的一个限制. 由 (4.5), 我们可以得到能观不等式 (4.3). 定理 4.1 得证.

注 4.1 观测时间所满足的条件 (4.1) 是最优的, 它保证了最大决定区域 R_r 必与 $x = L$ 相交.

同样, 对于情况 (iii), 我们只考虑 $x = 0$ 处的局部单侧精确边界能观性.

定理 4.2 (局部单侧精确边界能观性) 假设 α_i, β_i, c_i ($i = 1, 2$), a, b 都是关于其参数的 C^1 函数. 进一步假设 (1.3), (1.9) 和 (2.4) 成立. 令

$$T > L \max_{i=1,2} \frac{1}{|\lambda_i^+(0, 0, 0)|}. \quad (4.7)$$

对于任何给定的初值 $(\varphi(x), \psi(x))$ 和边界函数 $(h(t), \overline{h}(t))$, 且其范数 $\|(\varphi, \psi)\|_{C^2[0,L] \times C^1[0,L]}$, $\|(h, \overline{h})\|_{C^2[0,T] \times C^1[0,T]}$ 足够小, 使得在点 $(t, x) = (0, L)$ 处满足 C^2 相容性条件. 如果我们在区间 $[0, T]$ 上给出 $x = 0$ 处的观测值

$$x = 0 : u = K(t), \quad u_x = \overline{K}(t), \quad (4.8)$$

则观测值 $(K(t), \overline{K}(t))$ 和边界函数 $(h(t), \overline{h}(t))$ 可以唯一地确定初值 $(\varphi(x), \psi(x))$, 且成立能观不等式 (4.3).

定理 4.2 的证明与定理 4.1 的证明类似, 这里不再重复.

§5 结 论

本文讨论了具三角形耦合矩阵的二阶拟线性双曲系统在不同边界条件下的半整体 C^2 解的适定性, 同时, 通过一个直接的构造性框架建立了相应的局部精确边界能观性, 为二阶拟线性双曲系统的研究提供了新的视角.

将本文中有关能观性的讨论与文 [16] 中关于能控性的研究进行比较, 我们可以发现这类二阶拟线性双曲系统的精确边界能观性和精确边界能控性之间存在一些隐含的对偶关系.

对于双侧能控性和能观性: (1) 控制时间和观测时间相等且均较为严苛. 对控制时间的限制本质上是前向和后向 Cauchy 问题的两个最大决定区域不相交, 而对观测时间的限制本质上是左向 Cauchy 问题和右向 Cauchy 问题的两个最大决定区域必须相交; (2) 边界控制的个数和边界观测值的个数相等, 都等于所有正特征值和负特征值的总数.

对于单侧能控性和能观性: (1) 控制时间仍等于观测时间, 且均是严格的. 对控制时间的限制本质上是前向和后向单侧混合初边值问题的两个最大决定区域不相交, 而对观测时间的限制本质上是右向 (相应地, 左向) Cauchy 问题的最大决定区域 R_r (相应地, R_l) 必须与 $x = L$ (相应地, $x = 0$) 相交; (2) 边界控制的个数和边界观测值的个数相等, 都等于正特征值个数和负特征值个数之间的最大值.

参 考 文 献

- [1] Dolecki S, Russell D L. A general theory of observation and control [J]. *SIAM J Control Optim*, 1977, 15:185–220.
- [2] Russel D L. Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations, recent progress and open questions [J]. *SIAM Review*, 1978, 20:639–739.
- [3] Lions J L. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems [J]. *SIAM Review*, 1988, 30:1–68.
- [4] Bardos C, Lebeau G, Rauch R. Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of wave from the boundary [J]. *SIAM J Control Optim*, 1992, 30:1024–1065.
- [5] Yao P F. On the observability inequalities for exact controllability of wave equations with variable coefficients [J]. *SIAM J Control Optim*, 1999, 37:1568–1599.
- [6] Lasiecka I, Triggiani R, Yao P F. Inverse/observability estimates for second-order hyperbolic equations with variable coefficients [J]. *J Math Anal Appl*, 1999, 235(1):13–57.
- [7] Li T T. Exact boundary observability for quasilinear hyperbolic systems [J]. *ESIAM: Control, Optimisation and Calculus Variations*, 2008, 14:759–766.
- [8] Li T T. Controllability and observability for quasilinear hyperbolic systems [M]. Beijing:

- AIMS Series on Applied Mathematics, 3, American Institute of Mathematical Sciences & Higher Education Press, 2010.
- [9] Li T T. A constructive method to controllability and observability for quasilinear hyperbolic systems [J]. *Methods Appl Anal*, 2011, 18:69–83.
- [10] Li T T, Rao B P, Wang Z Q. A note on the one-side exact boundary observability for quasilinear hyperbolic systems [J]. *Georgian Math J*, 2008, 15:571–580.
- [11] Li T T. Exact boundary observability for 1-D quasilinear wave equations [J]. *Math Meth Appl Sci*, 2006, 29:1543–1553.
- [12] Guo L N, Wang Z Q. Exact boundary observability for nonautonomous quasilinear wave equations [J]. *J Math Anal Appl*, 2010, 364:41–50.
- [13] 尚培培, 庄凯丽. 二阶拟线性双曲型方程的精确能观性 [J]. *工程数学学报*, 2009, 26(4):618–636.
- [14] Yu L X. Exact boundary observability for a kind of second order quasilinear hyperbolic systems and its applications [J]. *Nonlinear Analysis-Theory Methods & Applications*, 2010, 72:4452–4465.
- [15] Wang K. Exact boundary observability for a kind of second-order quasilinear hyperbolic systems [J]. *Chin Ann Math Ser B*, 2016, 37(6):803–820.
- [16] Wang K, Pan P P. Exact boundary controllability for a 1-D second-order quasilinear hyperbolic system [J]. *Chin Quart J Math*, 2023, 38(4):424–440.
- [17] Li T T, Jin Y. Semi-global C^1 solution to the mixed initial-boundary value problem for quasilinear hyperbolic systems [J]. *Chin Ann Math Ser B*, 2001, 22(3):325–336.
- [18] Li T T, Yu W C. Boundary value problems for quasilinear hyperbolic systems [M]. Durham: Duke Univ Math Ser V, Duke Univ Press, 1985.

Exact Boundary Observability for Second-Order Quasilinear Hyperbolic Systems with Triangular Coupling Matrices

WANG Ke¹ YANG Panpan¹

¹School of Mathematics and Statistics, Donghua University, Shanghai 201620, China. E-mail: kwang@dhu.edu.cn; p15539110669@163.com

Abstract In this paper, the authors consider a 1-D second-order quasilinear hyperbolic system with triangular coupling matrices. First, using the theory of semi-global C^1 solutions

to first-order quasilinear hyperbolic systems, the authors establish the well-posedness of the semi-global C^2 solution to this system under different types of boundary conditions. Then, the authors study the local exact boundary observability for this second-order system under these boundary conditions by employing a general constructive framework. Finally, the authors analyze the implicit duality between observability and controllability.

Keywords Second-order quasilinear hyperbolic system, First-order quasilinear hyperbolic system, Initial-boundary value problem, Semi-global solution, Exact boundary observability

2020 MR Subject Classification 35L51, 35L53, 93B07

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 46 No. 2, 2025

by ALLERTON PRESS, INC., USA