

二阶上三角关系矩阵的 Fredholm 性*

赵 娜¹ 吴秀峰² 黄俊杰³

提要 设 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ 是 Banach 空间. 对给定关系 $A \in \mathcal{BR}(\mathcal{X})$ 和 $B \in \mathcal{BR}(\mathcal{Y})$, 记二阶上三角关系矩阵 $M_X := \begin{bmatrix} A & X \\ 0 & B \end{bmatrix} \in \mathcal{BR}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y})$, 其中 $X \in \mathcal{BR}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$. 作者利用关系分块技巧给出了存在 $X \in \mathcal{BR}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, 使得 M_X 是左 (右) Fredholm 关系、Fredholm 关系的充要条件.

关键词 关系矩阵, 左 (右) Fredholm 关系, Fredholm 关系

MR (2020) 主题分类 47A06, 47A10, 47A55

中图法分类 O177.1, O177.7

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2025)02-0129-20

§1 引 言

泛函分析的主要研究对象是空间与映射, 而算子则是从微分、积分等近代数学的基本运算中抽象概括出来的空间之间的映射. 20 世纪初建立的算子理论已经发展渗透到数学及其应用的众多分支, 不仅在微分方程、控制理论、调和分析、微分几何、统计学等学科具有深入应用, 而且也是量子力学等物理学许多领域中不可缺少的数学工具.

在经典的算子理论研究中, 一般要求算子是单值的, 但是随着学者们对算子理论的深入研究, 经典的算子理论不再适用. 多值线性算子和单值线性算子统称为线性关系或者乘积空间中的线性子空间关系, 故线性关系可看作线性算子在多值情形下的推广, 它是 von Neumann 在文 [1] 中研究非稠定微分算子的共轭时首次引入的. 在此之后, 文 [2] 借助某些算子的逆来研究一些与抛物型方程有关的柯西问题, 其中某些算子的逆是多值的. 文 [3] 研究了物理应用中出现的非稠定 Fredholm 型算子的共轭, 从而揭示了泛函分析中线性关系的存在性. 最近, 学者们在文 [4] 中发现, 由微分或差分表达式生成的一些算子可能具有多值性或非稠定性, 也就是说经典的算子理论在这类微分和差分算子的研究中是不可用的. 为了研究此类算子和进一步完善算子理论, 学者们用多值线性算子理论代替经典算子理论来研究上述问题.

目前, Banach 空间中线性关系的研究在物理学和其他应用数学领域的许多问题中都有应用, 具有重要的意义. 例如, 文 [5] 研究了线性关系的一些摄动结果并应用于退化椭圆抛物型方程问题. 文 [6–9] 研究了线性关系的不动点理论并应用到微分包含问题, 关系

本文 2025 年 3 月 17 日收到, 2025 年 6 月 24 日收到修改稿.

¹内蒙古师范大学数学科学学院, 呼和浩特 010022. E-mail: zhaona221123@163.com

²通信作者. 内蒙古师范大学数学科学学院, 呼和浩特 010022. E-mail: wuxiufeng68@163.com

³内蒙古大学数学科学学院, 呼和浩特 010021. E-mail: huangjunjie@imu.edu.cn

*本文受到国家自然科学基金 (No. 12461027), 内蒙古自治区高等学校青年科技英才项目 (No. NJYT22029), 内蒙古自治区自然科学基金项目 (No. 2022LHMS01003, No. 2024ZD21) 和内蒙古自治区一流学科科研专项项目 (No. YLXKZX-NSD-011, No. YLXKZX-NSD-017, No. YLXKZX-NSD-001) 的资助.

的不动点理论还可以被应用于博弈论、数理经济学、不连续微分方程和数字成像等领域(见文[10]). 此外, 线性关系在非线形分析、线性算子的延拓理论、微分方程、退化算子半群, 以及最优化和控制论等问题中有重要应用, 线性关系的理论研究和实际应用至今依然活跃.

众所周知, Hilbert 空间中任何一个闭子空间都是可补的, 即若 H_1 是 Hilbert 空间 H 的闭子空间, 则一定存在 H 的另一闭子空间 H_2 , 使得 $H = H_1 \oplus H_2$. 但是, Banach 空间中的闭子空间未必都是可补的(见文[11–12]). 事实上, 一般的 Banach 空间的可补子空间异常复杂. 早在 Banach-Mazur 时代就发现了经典 Banach 空间中存在不可补子空间. 1937 年, Murray 在文[13]中证明了 l^p ($p \neq 2, p > 1$) 空间具有不可补闭子空间, 而且 Gowers-Maurey 系列成果表明存在每个非平凡子空间都不可补的 Banach 空间(见文[14–15]). 然而, 在特定条件下, Banach 空间中的闭子空间是可补的: 若 $\mathcal{X}_1$ 是 Banach 空间 $\mathcal{X}$ 的可补闭子空间, 则存在 $\mathcal{X}$ 的闭子空间 $\mathcal{X}_2$, 使得 $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$.

线性关系矩阵是指以线性关系为元素的矩阵, 简称关系矩阵. 设 T 是 Banach 空间 $\mathcal{X}$ 上的有界线性关系, 如果存在 $\mathcal{X}$ 的两个闭子空间 $\mathcal{X}_1$ 和 $\mathcal{X}_2$, 使得 $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$, 则 $\mathcal{X}$ 上的任意有界线性关系 T 可写为如下形式的二阶关系矩阵

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix},$$

其中 T_{ij} 是从 X_j 到 X_i 的有界线性关系, $i, j = 1, 2$. 若 $\mathcal{X}_1$ 是 T 的非平凡不变子空间, 则有 $T_{21} = 0$, 此时 T 可分解为上三角形式. 在关系矩阵中, 若一些元素已知, 而其他元素未知, 则称其为缺项关系矩阵. 在此基础上, 缺项关系矩阵的补问题则是通过关系矩阵中已知关系的性质来研究该关系矩阵中的具有某一性质的补, 例如 Fredholm 补、Weyl 补、可逆补和谱补等. 由于插值理论及控制论中某些问题的研究需要, 这一问题被学者们从不同的方向进行研究, 其中重要方向之一是缺项关系矩阵的 Fredholm 补问题, 所谓 Fredholm 补问题是指研究关于缺项关系矩阵中如何用已知元素的性质来刻画其整个关系矩阵的 Fredholm(补)性质的问题.

近 30 年来, 上三角缺项算子矩阵的 Fredholm 补问题成为了比较活跃的研究课题, 其中主要是对二阶上三角缺项算子矩阵

$$\begin{bmatrix} A & ? \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

的研究. 例如, 文[16]给出了 Hilbert 空间上缺项算子矩阵 $\begin{bmatrix} A & ? \\ 0 & B \end{bmatrix}$ 存在左(右) Fredholm 补和 Fredholm 补的充要条件; 文[17]基于空间分解方法和指标定理推广了文[18]可逆补的结论, 给出了 Banach 空间背景下缺项算子矩阵 $\begin{bmatrix} A & ? \\ 0 & B \end{bmatrix}$ Fredholm 补的充要条件, 并且分别得到了存在左(右) Fredholm 补的充要条件; 文[19]在 Banach 空间中对给定算子 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ 和 $B \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$, 基于正则算子的等价分解条件和空间分解技巧, 刻画了存在 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, 使得算子矩阵 $M_X = \begin{bmatrix} A & X \\ 0 & B \end{bmatrix}$ 是左(右) Fredholm 算子和 Fredholm 算子的充要条件.

近 10 年来, 学者们开始研究上三角缺项关系矩阵的谱补问题. 在 Hilbert 空间背景下, 文[20]研究了上三角关系矩阵的左(右) Fredholm 补问题. 文[21]对给定关系 $A \in \mathcal{BR}(H)$

和 $B \in \mathcal{BR}(K)$, 刻画了存在 $X \in \mathcal{B}(K, H)$, 使得上三角关系矩阵 M_X 值域闭或值域不闭的充要条件以及闭值域谱的扰动结论. 文 [22] 对给定关系 $A \in \mathcal{BR}(H)$ 和 $B \in \mathcal{BR}(K)$, 刻画了存在 $X \in \mathcal{BR}(K, H)$, 使得上三角关系矩阵 M_X 是左 (右) Fredholm 关系、Fredholm 关系的充要条件. 另外, 文 [23] 讨论了二阶上三角关系矩阵的本质谱的性质. 文 [24] 对给定关系 $A \in \mathcal{BR}(H)$ 和 $B \in \mathcal{BR}(K)$, 刻画了存在 $X \in \mathcal{BR}(K, H)$, 使得上三角关系矩阵 M_X 是左 (右) 可逆关系、可逆关系的充要条件, 在此基础上刻画了左 (右) 谱、谱的扰动以及谱的包含关系. 上述研究发现, 在算子理论中有 $\sigma_{le}(M_X) \subseteq \sigma_{le}(A) \cup \sigma_{le}(B)$ 成立, 然而在 A, B, X 均为线性关系的情况下, 上述包含关系不一定成立. 因此, 我们有必要研究关系矩阵的补问题. 在已有的研究结论中还未见 Banach 空间上对缺项关系矩阵 $\begin{bmatrix} A & ? \\ 0 & B \end{bmatrix}$ 的左 (右) Fredholm 补、Fredholm 补的研究工作.

本文主要研究 Banach 空间上二阶上三角关系矩阵的左 (右) Fredholm 补、Fredholm 补问题, 对给定关系 $A \in \mathcal{BR}(\mathcal{X})$ 和 $B \in \mathcal{BR}(\mathcal{Y})$, 利用关系矩阵分块技巧给出了存在 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, 使得关系矩阵

$$M_X = \begin{bmatrix} A & X \\ 0 & B \end{bmatrix} : \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$$

是左 (右) Fredholm 关系、Fredholm 补的充要条件. 作为推论, 本文推导了已有的 3 个结论. (1) 推导了文 [19] 在 Banach 空间上对给定算子 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ 和 $B \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$, 存在 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, 使得二阶上三角算子矩阵 M_X 是左 (右) Fredholm 算子、Fredholm 算子的充要条件的结论; (2) 推导了文 [22] 在 Hilbert 空间上对给定关系 $A \in \mathcal{BR}(H)$ 和 $B \in \mathcal{BR}(K)$, 给出了存在 $X \in \mathcal{B}(K, H)$, 使得二阶上三角关系矩阵 M_X 是左 (右) Fredholm 关系、Fredholm 关系的充要条件的结论; (3) 推导了文 [17] 在 Banach 空间上二阶上三角算子矩阵左 (右) Fredholm 补、Fredholm 补充分条件成立的结论.

下面给出本文采用的记号. 本文中 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ 表示 Banach 空间. 记 $\mathcal{LR}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 为所有从 $\mathcal{X}$ 到 $\mathcal{Y}$ 且定义域 $D(T)$ 为全空间 $\mathcal{X}$ 的线性关系, $\mathcal{LR}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ 可简记为 $\mathcal{LR}(\mathcal{X})$. 另外, 记 $\mathcal{BR}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\mathcal{CR}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 和 $\mathcal{BCR}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 分别为所有从 $\mathcal{X}$ 到 $\mathcal{Y}$ 的有界线性关系、闭线性关系和有界闭线性关系构成的集合, 相应地, $\mathcal{BR}(\mathcal{X}) = \mathcal{BR}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$, $\mathcal{CR}(\mathcal{X}) = \mathcal{CR}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ 和 $\mathcal{BCR}(\mathcal{X}) = \mathcal{BCR}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$. 设 $T \in \mathcal{LR}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, 用 $\ker T, \operatorname{ran} T$ 分别表示关系 T 的零空间和值域, 记 $\alpha(T) = \dim \ker T$, $\beta(T) = \dim(\mathcal{Y}/\operatorname{ran} T)$. 若 $\ker T$ 在 $\mathcal{X}$ 中可补, 则用 $\mathcal{O}_{\ker T}$ 表示 $\ker T$ 在 $\mathcal{X}$ 中的补子空间. 若 $\operatorname{ran} T, T(0)$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补, 用 $\mathcal{O}_{\operatorname{ran} T}, \mathcal{O}_{T(0)}$ 分别表示 $\operatorname{ran} T, T(0)$ 在 $\mathcal{Y}$ 中的补子空间. 值得一提的是, 本文中 H, K 表示 Hilbert 空间.

§2 预备知识

下面给出本文涉及的定义和引理.

定义 2.1^[25] 设关系 $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ 是一个映射, 它将非空子集 $D(T) \subseteq \mathcal{X}$ 中的元素映为 $\mathcal{Y}$ 的某个非空子集. 若关系 T 满足对任意的 $x_1, x_2 \in D(T)$ 及不全为零的标量 λ_1, λ_2 , 都有 $T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 T(x_1) + \lambda_2 T(x_2)$, 则称 T 为线性关系. 显然, 线性关系 T 的定义域 $D(T)$ 是 $\mathcal{X}$ 的线性子空间.

注 2.1 若线性关系 T 将其定义域中的每一点都映成单点集, 则称 T 是单值线性关系或算子. 因此, T 为单值线性关系当且仅当 $T(0) = \{0\}$.

定义 2.2^[25] 设 $T \in \mathcal{LR}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 的图为 $G(T) = \{(u, v) \in \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y} : u \in D(T), v \in T(u)\}$. 若 M 是 $D(T)$ 的子空间, 则 $T|_M$ 为 $G(T|_M) = \{(u, v) \in \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y} : u \in M, v \in T(u)\}$ 确定的线性关系.

定义 2.3^[26] 若 $T \in \mathcal{LR}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 且 $\|T\| < +\infty$, 则称 T 是有界线性关系.

定义 2.4^[12, 27] 设 $\mathcal{M}$ 是 Banach 空间 $\mathcal{X}$ 的闭子空间, 若存在另一闭子空间 $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{X}$, 使得 $\mathcal{M} + \mathcal{N} = \mathcal{X}$ 且 $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \{0\}$, 则称 $\mathcal{M}$ 在 $\mathcal{X}$ 中拓扑可补或简称可补, 记为 $\mathcal{X} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$.

定义 2.5^[26] 设 $T \in BCR(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 且 $\text{ran } T$ 是闭的.

- (i) 若 $\alpha(T) < \infty$, $\text{ran } T$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补, 则称 T 为左 Fredholm 关系;
- (ii) 若 $\beta(T) < \infty$, $\ker T$ 在 $\mathcal{X}$ 中可补, 则称 T 为右 Fredholm 关系;
- (iii) 若 $\alpha(T) < \infty$, $\beta(T) < \infty$, 则称 T 为 Fredholm 关系.

定义 2.6^[28] 设 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 且 $\text{ran } T$ 是闭的.

- (i) 若 $\alpha(T) = 0$, $\text{ran } T$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补, 则称 T 为左可逆算子;
- (ii) 若 $\beta(T) = 0$, $\ker T$ 在 $\mathcal{X}$ 中可补, 则称 T 为右可逆算子;
- (iii) 若 $\alpha(T) = 0$, $\beta(T) = 0$, 则称 T 为可逆算子.

定义 2.7^[28-30] 设 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ 是 Banach 空间 $\mathcal{X}$ 的子空间, 若存在有限维子空间 $\mathcal{F} \subset \mathcal{X}$, 使得 $\mathcal{M} \subset \mathcal{N} + \mathcal{F}$, 则 $\mathcal{M}$ 本质包含于 $\mathcal{N}$, 记为 $\mathcal{M} \subseteq_e \mathcal{N}$. 类似地, 若存在有限维子空间 $\mathcal{F} \subset \mathcal{X}$, 使得 $\mathcal{N} \subset \mathcal{M} + \mathcal{F}$, 则 $\mathcal{N}$ 本质包含于 $\mathcal{M}$, 记为 $\mathcal{N} \subseteq_e \mathcal{M}$.

定义 2.8^[25] 设 $T \in \mathcal{LR}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, Q_T 为从 $\mathcal{Y}$ 到 $\mathcal{Y}/\overline{T(0)}$ 的商映射, 则 $Q_T T$ 是单值的, 并且对任意的 $x \in \mathcal{X}$, 定义 $\|Tx\| = \|Q_T Tx\|$, 且定义 T 的范数为 $\|T\| = \|Q_T T\|$.

定义 2.9^[17] 设 $T \in \mathcal{LR}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. 若存在左可逆算子 $J: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, 则称 $\mathcal{X}$ 可以嵌入 $\mathcal{Y}$, 记为 $\mathcal{X} \preceq \mathcal{Y}$.

定义 2.10^[17] 我们称 Banach 空间 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是差有限维同构, 如果下列叙述之一成立:

- (i) 存在左可逆算子 $J: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, 使得 $\dim \mathcal{Y}/J(\mathcal{X}) < \infty$;
- (ii) 存在左可逆算子 $S: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$, 使得 $\dim \mathcal{X}/S(\mathcal{Y}) < \infty$.

引理 2.1^[12] 设 $\mathcal{M}$ 是 Banach 空间 $\mathcal{X}$ 的线性子空间, 则

- (i) 若 $\dim \mathcal{M} < \infty$, 则称 $\mathcal{M}$ 在 $\mathcal{X}$ 中拓扑可补;
- (ii) 若 $\dim \mathcal{X}/\mathcal{M} < \infty$, 则称 $\mathcal{M}$ 在 $\mathcal{X}$ 中拓扑可补.

引理 2.2^[25] 设 $T \in \mathcal{LR}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

- (i) 若 T 是闭的, 则 $T(0)$ 是闭的;
- (ii) T 是闭的当且仅当 $Q_T T$ 且 $T(0)$ 都是闭的;
- (iii) 若 T 连续, 并且 $D(T)$ 和 $T(0)$ 都是闭的, 则 T 是闭的.

引理 2.3^[30] 设 $T \in \mathcal{LR}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $S \in \mathcal{LR}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 都是闭的.

- (i) 若 S, T 是左 Fredholm 关系且 $ST(0)$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补, 则 ST 是左 Fredholm 关系;
(ii) 若 ST 是左 Fredholm 关系且 $T(0)$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补, 则 T 是左 Fredholm 关系.

引理 2.4 设 $A \in \mathcal{LR}(\mathcal{X})$, $B \in \mathcal{LR}(\mathcal{Y})$, $X \in \mathcal{LR}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ 为给定关系且 $X(0) \subseteq A(0)$, 则

$$Q_{M_X} M_X = \begin{bmatrix} Q_{(AX)}A & Q_{(AX)}X \\ 0 & Q_B B \end{bmatrix}.$$

证 设 $(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}) \in G(M_X)$, 则存在 $u_1 \in Ax$, $u_2 \in Xy$, 使得 $u = u_1 + u_2$ 且 $v \in By$. 因此

$$Q_{M_X} M_X \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = Q_{M_X} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

注意到 $\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} \in Q_{M_X} M_X \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$, 当且仅当 $\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in \overline{M_X(0)}$, 即 $u' - u \in \overline{A(0) + X(0)}$ 且 $v' - v \in \overline{B(0)}$, 这等价于 $u' \in Q_{(AX)}u = Q_{(AX)}(u_1 + u_2) = Q_{(AX)}u_1 + Q_{(AX)}u_2$ 且 $v' \in Q_B v$, 故

$$Q_{M_X} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{(AX)}u_1 + Q_{(AX)}u_2 \\ Q_B v \end{bmatrix}.$$

因为 $u_1 \in Ax$, $u_2 \in Xy$, 且 $v \in By$, 所以 $Q_{(AX)}u_1 = Q_{(AX)}Ax$, $Q_{(AX)}u_2 = Q_{(AX)}Xy$ 且 $Q_B v = Q_B By$. 进而

$$Q_{M_X} M_X \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{(AX)}Ax + Q_{(AX)}Xy \\ Q_B By \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{(AX)}A & Q_{(AX)}X \\ 0 & Q_B B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

即

$$Q_{M_X} M_X = \begin{bmatrix} Q_{(AX)}A & Q_{(AX)}X \\ 0 & Q_B B \end{bmatrix}.$$

引理 2.5 设 $A \in \mathcal{BR}(\mathcal{X})$, $B \in \mathcal{BR}(\mathcal{Y})$, $X \in \mathcal{BR}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ 为给定关系, 则 M_X 是闭的当且仅当 $A(0) + X(0)$ 和 $B(0)$ 都是闭的.

证 充分性 设 $A(0) + X(0)$ 和 $B(0)$ 都是闭的, 则 $M_X(0)$ 是闭的, 由引理 2.2(ii), 只需证明 $Q_{M_X} M_X$ 是闭的. 显然, $Q_{M_X} M_X$ 是一个单值关系, 由引理 2.4 可知

$$Q_{M_X} M_X = \begin{bmatrix} Q_{(AX)}A & Q_{(AX)}X \\ 0 & Q_B B \end{bmatrix}.$$

因为 A 是定义在全空间上的有界关系, 所以 $\|Q_{(AX)}Ax\| < \|Q_{(AX)}A\| \|x\| < \|A\| \|x\| < \infty$, $x \in \mathcal{X}$, 进而 $\|Q_{(AX)}A\| < \infty$, 即 $Q_{(AX)}A$ 是有界的. 类似地, $\|Q_B B\| < \infty$, 可知 $Q_B B$ 是有界的. 因此 $Q_{M_X} M_X$ 是定义在全空间上的有界算子, 显然 $Q_{M_X} M_X$ 是闭的.

必要性 由 M_X 的闭性及引理 2.2(i) 可知 $M_X(0)$ 是闭的, 因此 $A(0) + X(0)$, $B(0)$ 都是闭的.

引理 2.6^[30] 设 M, N 是 Banach 空间 $\mathcal{X}$ 的闭子空间且满足 $N \subset M$. 若 M/N 和 N 分别在 $\mathcal{X}/N$ 和 $\mathcal{X}$ 中可补, 则 M 在 $\mathcal{X}$ 中可补.

引理 2.7^[26] 设 $T \in \mathcal{LCR}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, 则 $\text{ran } T$ 是闭的当且仅当 $\text{ran } Q_T T$ 是闭的. 在此情况下, $\ker T = \ker Q_T T$ 且 $\beta(T) = \beta(Q_T T)$.

引理 2.8^[28] 设 $T \in \mathcal{LR}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 且 $U \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}), V \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ 均可逆, 则

(i) $\text{ran}(UT)$ 是闭的当且仅当 $\text{ran } T$ 是闭的;

(ii) $\text{ran}(TV)$ 是闭的当且仅当 $\text{ran } T$ 是闭的.

引理 2.9^[19] 设 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}), B \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}), X \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ 为给定算子.

(i) 若 M_X 是左 Fredholm 算子, 则 A 是左 Fredholm 算子;

(ii) 若 M_X 是右 Fredholm 算子, 则 B 是右 Fredholm 算子.

引理 2.10^[30] 设 $T \in \mathcal{BCR}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

(i) 若 T 是左 Fredholm 关系, 则 $Q_T T$ 是左 Fredholm 关系;

(ii) 若 $Q_T T$ 是左 Fredholm 关系且 $T(0)$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补, 则 T 是左 Fredholm 关系;

(iii) 若 T 是右 Fredholm 关系当且仅当 $Q_T T$ 是左 Fredholm 关系.

引理 2.11^[25] 设 M 是 Banach 空间 $\mathcal{X}$ 的一个闭子空间. 若存在 $\mathcal{X}$ 的另一个子空间 $N \subseteq M$, 则 N 是闭的当且仅当 N/M 是闭的.

§3 主要结果及证明

定理 3.1 设 $A \in \mathcal{BR}(\mathcal{X}), B \in \mathcal{BR}(\mathcal{Y})$ 为给定关系. 若 $A(0)$ 在 $\mathcal{X}$ 中可补, 则存在 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, 使得 M_X 是左 Fredholm 关系当且仅当下列条件成立:

(i) A 是左 Fredholm 关系;

(ii) $B(0)$ 是闭的;

(iii) 存在 $J \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{O}_{\text{ran } A})$, 使得 $\text{ran}([\begin{smallmatrix} I \\ B \end{smallmatrix}])$ 在 $\mathcal{O}_{\text{ran } A} \oplus \mathcal{Y}$ 中可补, $\ker([\begin{smallmatrix} I \\ B \end{smallmatrix}])$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补且 $\mathcal{Y} \subset_e \mathcal{O}_{\ker([\begin{smallmatrix} I \\ B \end{smallmatrix}])}.$

证 充分性 设条件 (i)–(iii) 成立. 因为 A 是左 Fredholm 关系, 所以 A 是闭的, $\alpha(A) < \infty$, $\text{ran } A$ 是闭的且在 $\mathcal{X}$ 中可补. 由 A 的闭性及引理 2.2(i) 可得 $A(0)$ 是闭的, 结合 $B(0)$ 的闭性及引理 2.5 可知, 对任意的 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ 有 M_X 是闭的.

根据 $\mathcal{Y}$ 的维数可分为以下两种情形.

情形 1: $\dim \mathcal{Y} < \infty$. 这种情形下, M_X 可写成如下形式

$$M_X = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

注意到 $B(0)$ 是闭的且 B 有界, 由引理 2.2(iii) 知 B 是闭的. 因为 $\text{ran } B \subseteq \mathcal{Y}$, 所以 $\dim \text{ran } B \leq \dim \mathcal{Y} < \infty$, 根据引理 2.1 可得, $\text{ran } B$ 是闭的且在 $\mathcal{Y}$ 中可补. 又因为 $\ker B \subseteq \mathcal{Y}$, 所以 $\dim \ker B \leq \dim \mathcal{Y} < \infty$, 即 $\alpha(B) < \infty$, 因此 B 是左 Fredholm 关系. 显然 $[\begin{smallmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}]$ 是闭的, $\text{ran} [\begin{smallmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}] = \mathcal{X} \oplus \text{ran } B$ 是闭的且在 $\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$ 中可补, $\alpha([\begin{smallmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}])$ $< \infty$, 故 $[\begin{smallmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}]$ 是左 Fredholm 关系. 由于 $[\begin{smallmatrix} I & X \\ 0 & I \end{smallmatrix}]$ 是可逆的, 从而 $[\begin{smallmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}] = [\begin{smallmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}] [\begin{smallmatrix} I & X \\ 0 & I \end{smallmatrix}]$ 是左 Fredholm 关系.

观察到 $A(0)$ 是闭的, $\text{ran } A$ 是闭的且在 $\mathcal{X}$ 中可补, $\alpha(A) < \infty$. 显然 $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ 是闭的, $\text{ran} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \text{ran } A \oplus \mathcal{Y}$ 是闭的且在 $\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$ 中可补, $\alpha(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}) < \infty$, 因此 $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ 是左 Fredholm 关系. 结合 $A(0)$ 在 $\mathcal{X}$ 中可补, 根据引理 2.3(i), 可推出对任意的 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, 都有 M_X 是左 Fredholm 关系.

情形 2: $\dim \mathcal{Y} = \infty$. 注意到 $\text{ran } A$ 是闭的且在 $\mathcal{X}$ 中可补, 则 $\mathcal{X}$ 有如下分解式

$$\mathcal{X} = \text{ran } A \oplus \mathcal{O}_{\text{ran } A}, \quad (3.2)$$

因此

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ 0 \end{bmatrix} : \mathcal{X} \rightarrow \text{ran } A \oplus \mathcal{O}_{\text{ran } A}. \quad (3.3)$$

定义

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ J \end{bmatrix} : \mathcal{Y} \rightarrow \text{ran } A \oplus \mathcal{O}_{\text{ran } A}, \quad (3.4)$$

其中 $J \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{O}_{\text{ran } A})$ 是条件 (iii) 中的 J . M_X 作为从 $\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$ 到 $\text{ran } A \oplus \mathcal{O}_{\text{ran } A} \oplus \mathcal{Y}$ 的关系具有以下分块矩阵形式

$$M_X = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & J \\ 0 & B \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

由 $\text{ran } A$ 的闭性可知 A_1 是满的, 结合 $\text{ran}(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix})$ 在 $\mathcal{O}_{\text{ran } A} \oplus \mathcal{Y}$ 中可补, 得到 $\text{ran } M_X = \text{ran } A \oplus \text{ran}(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix})$ 是闭的且在 $\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$ 中可补. 又由 $\ker(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix})$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补且 $\mathcal{Y} \subset_e \mathcal{O}_{\ker(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix})}$, 根据定义 2.7 可知, 存在有限维子空间 $\mathcal{F} \subset \mathcal{Y}$, 使得 $\mathcal{Y} \subset \mathcal{O}_{\ker(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix})} + \mathcal{F}$, 显然 $\mathcal{O}_{\ker(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix})} + \mathcal{F} \subset \mathcal{Y}$, 故 $\mathcal{Y} = \mathcal{O}_{\ker(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix})} + \mathcal{F}$. 易证存在子空间 $\tilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}$, 使得 $\mathcal{Y} = \mathcal{O}_{\ker(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix})} \oplus \tilde{\mathcal{F}}$. 注意到 $\ker(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix}) \subset \mathcal{Y} = \mathcal{O}_{\ker(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix})} \oplus \tilde{\mathcal{F}}$, 因此 $\ker(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix})$ 是有限维空间, 即 $\alpha(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix}) < \infty$, 故 $\alpha(M_X) = \alpha(A) + \alpha(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix}) < \infty$. 综上, M_X 是左 Fredholm 关系.

必要性 假设存在 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, 使得 M_X 是左 Fredholm 关系. 注意到 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, 根据引理 2.4 及引理 2.10, 得

$$Q_{M_X} M_X = \begin{bmatrix} Q_{(AX)} A & Q_{(AX)} X \\ 0 & Q_B B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_A A & Q_A X \\ 0 & Q_B B \end{bmatrix} : \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y} \rightarrow (\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}) / M_X(0) \quad (3.6)$$

是左 Fredholm 关系. 因为 $A(0)$ 在 $\mathcal{X}$ 中可补, 这蕴含着 $A(0)$ 是闭的, 结合 A 的有界性, 由引理 2.2(iii) 可知 A 是闭的. 又因为 $Q_{M_X} M_X$ 的左 Fredholm 性, 根据引理 2.9 可得 $Q_A A$ 是左 Fredholm 算子, 这意味着 $\alpha(Q_A A) < \infty$, 所以 $\alpha(A) < \infty$. 为证明 (i), 只需证 $\text{ran } A$ 是闭的且在 $\mathcal{X}$ 中可补. 事实上, 由于 $Q_A A$ 是左 Fredholm 算子, 则 $\text{ran } Q_A A$ 是闭的且可补. 注意到 $\text{ran } Q_A A = \text{ran } A / \overline{A(0)}$, 由 $\text{ran } Q_A A$ 的闭性, 结合 $A(0)$ 是闭的, 根据引理 2.11 可得 $\text{ran } A$ 是闭的. 又由 $\text{ran } Q_A A$ 的可补性, 结合 $\text{ran } A$ 是闭的, $A(0)$ 在 $\mathcal{X}$ 中可补, 根据引理 2.6 可得 $\text{ran } A$ 在 $\mathcal{X}$ 中可补, 综上 (i) 成立. 因为 M_X 是左 Fredholm 关系, 所以 M_X 是闭的, 由引理 2.5 可得 $B(0)$ 是闭的, 即 (ii) 成立.

注意到, $\text{ran } A$ 在 $\mathcal{X}$ 中可补, 故 $\mathcal{X}$ 有分解形式 $\mathcal{X} = \text{ran } A \oplus \mathcal{O}_{\text{ran } A}$, 则 M_X 作为从 $\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$ 到 $\text{ran } A \oplus \mathcal{O}_{\text{ran } A} \oplus \mathcal{Y}$ 的关系具有以下分块矩阵形式

$$M_X = \begin{bmatrix} A_1 & X_1 \\ 0 & X_2 \\ 0 & B \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

由 $\text{ran } A$ 的闭性可知 A_1 是满的, 取 $J = X_2$, 显然 $\text{ran } M_X = \text{ran } A \oplus \text{ran}(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix})$, 故 $\text{ran}(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix})$ 在 $\mathcal{O}_{\text{ran } A} \oplus \mathcal{Y}$ 中可补. 假设 $\alpha(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix}) = \infty$, 此时, 对任意 $x \in \ker J$ 都有 $X_1 x \subseteq \text{ran } A$, 则存在 $x_0 \in \mathcal{X}$, 使得 $A_1 x_0 \cap Jx \neq \emptyset$, 即 $0 \in A_1 x_0 - Jx$, 进而 $(x_0 - x)^T \in \ker M_X$. 因为 $\alpha(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix}) = \infty$, 所以 $\alpha(M_X) = \infty$, 这与 M_X 的 Fredholm 性有矛盾, 因此 $\alpha(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix}) < \infty$ 成立, 即 $\ker(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix})$ 是有限维子空间且 $\ker(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix})$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补, 故 $\mathcal{Y} \subset \mathcal{O}_{\ker(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix})} + \ker(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix})$ 成立, 从而 $\mathcal{Y} \subset_e \mathcal{O}_{\ker(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix})}$. 综上条件 (iii) 成立.

推论 3.1 设 $A \in \mathcal{BR}(\mathcal{X})$, $B \in \mathcal{BR}(\mathcal{Y})$ 为给定关系. 若 $A(0)$ 在 $\mathcal{X}$ 中可补, 则存在 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, 使得 M_X 是左 Fredholm 关系当且仅当 A 是左 Fredholm 关系, $B(0)$ 闭且下列条件之一成立:

- (i) 当 $\beta(A) < \infty$ 时, $\text{ran } B$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补, $\ker B$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补且 $\mathcal{Y} \subset_e \mathcal{O}_{\ker B}$;
- (ii) 当 $\beta(A) = \infty$ 时, 存在 $J \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{O}_{\text{ran } A})$, 使得 $\text{ran}(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix})$ 在 $\mathcal{O}_{\text{ran } A} \oplus \mathcal{Y}$ 中可补, $\ker(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix})$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补且 $\mathcal{Y} \subset_e \mathcal{O}_{\ker(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix})}$.

证 充分性 设 A 是左 Fredholm 关系, $B(0)$ 是闭的. 若 (ii) 成立, 由定理 3.1 可证结论成立. 若 (i) 成立, 定义 X 形如 (3.4), 其中取 $J = 0$. 因为 $\text{ran } B$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补, 所以 $\text{ran}(\begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix})$ 在 $\mathcal{O}_{\text{ran } A} \oplus \mathcal{Y}$ 中可补. 又由 $\ker B$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补且 $\mathcal{Y} \subset_e \mathcal{O}_{\ker B}$, 可知 $\ker(\begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix})$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补且 $\mathcal{Y} \subset_e \mathcal{O}_{\ker(\begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix})}$, 综上由定理 3.1 可证结论成立.

必要性 假设存在 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, 使得 M_X 是左 Fredholm 关系. 由定理 3.1 可知 A 是左 Fredholm 关系, $B(0)$ 是闭的, 存在 $J \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{O}_{\text{ran } A})$, 使得 $\text{ran}(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix})$ 在 $\mathcal{O}_{\text{ran } A} \oplus \mathcal{Y}$ 中可补, $\ker(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix})$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补且 $\mathcal{Y} \subset_e \mathcal{O}_{\ker(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix})}$, 故 (ii) 成立. 下证条件 (i) 成立. 当 $\beta(A) < \infty$ 时, 因为 $\text{ran } J \subseteq \mathcal{O}_{\text{ran } A}$, 所以 $\dim \text{ran } J \leq \dim \mathcal{O}_{\text{ran } A} = \beta(A) < \infty$, 进而由引理 2.1 可知 $\text{ran } J$ 在 $\mathcal{O}_{\text{ran } A}$ 中可补. 注意到, $\text{ran}(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix})$ 在 $\mathcal{O}_{\text{ran } A} \oplus \mathcal{Y}$ 中可补, 因此 $\text{ran } B$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补. 又因为 M_X 的左 Fredholm 性, 所以 $\alpha(B) < \infty$, 故 $\ker B$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补且 $\mathcal{Y} \subset_e \mathcal{O}_{\ker B}$, 综上 (i) 成立.

推论 3.2^[19] 设 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$ 为给定算子, 则存在 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, 使得 M_X 是左 Fredholm 算子当且仅当 A 是左 Fredholm 算子且下列条件之一成立:

- (i) $\text{ran } B$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补, $\ker B$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补且 $\mathcal{Y} \subset_e \mathcal{O}_{\ker B}$;
- (ii) $\beta(A) = \infty$, 存在 $J \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{O}_{\text{ran } A})$, 使得 $\text{ran}(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix})$ 在 $\mathcal{O}_{\text{ran } A} \oplus \mathcal{Y}$ 中可补, $\ker(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix})$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补且 $\mathcal{Y} \subset_e \mathcal{O}_{\ker(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix})}$.

证 因为 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$, 所以 $A(0) = \{0\}$ 在 $\mathcal{X}$ 中可补, $B(0) = \{0\}$ 是闭的, 根据推论 3.1 可证结论成立.

推论 3.3^[17] 设 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}), B \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$ 为给定算子. 若 A 是左 Fredholm 算子, $\text{ran } B$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补, $\ker B$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补且 $\ker B \preceq \mathcal{X}/\overline{\text{ran } A}$, 则存在 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, 使得 M_X 是左 Fredholm 算子.

证 设 A 是左 Fredholm 算子, 所以 $\text{ran } A$ 是闭的且在 $\mathcal{X}$ 中可补, 定义 X 形如 (3.4). 注意到 $\ker B \preceq \mathcal{X}/\overline{\text{ran } A}$, 由定义 2.9 可知, 存在左可逆算子 $J_1 : \ker B \rightarrow \mathcal{O}_{\text{ran } A}$. 取 $J = \begin{bmatrix} 0 & J_1 \end{bmatrix} : \mathcal{O}_{\ker B} \oplus \ker B \rightarrow \mathcal{O}_{\text{ran } A}$, 结合 $\text{ran } B$ 和 $\ker B$ 都是闭的且在 $\mathcal{Y}$ 中可补, 由定理 3.1 可证结论成立.

由于 Hilbert 空间是特殊的 Banach 空间, 接下来我们将 Banach 空间上的结果推导到 Hilbert 空间上.

推论 3.4^[22] 设 $A \in \mathcal{BR}(H), B \in \mathcal{BR}(K)$ 为给定关系, 则存在 $X \in \mathcal{B}(K, H)$, 使得 M_X 是左 Fredholm 关系当且仅当 A 是左 Fredholm 关系, $B(0)$ 闭且下列条件之一成立:

- (i) 当 $\text{ran } B$ 是闭的时, $\alpha(B) < \infty$ 或 $\alpha(B) = \beta(A) = \infty$;
- (ii) 当 $\text{ran } B$ 不是闭的时, $\beta(A) = \infty$.

证 充分性 设 A 是左 Fredholm 关系, 所以 $\text{ran } A$ 是闭的, 定义 X 形如 (3.4). 若 (i) 成立, 以下分两种情形进行讨论:

情形 1: $\text{ran } B$ 是闭的且 $\alpha(B) < \infty$. 取 $J = 0$, 由定理 3.1 可证结论成立.

情形 2: $\text{ran } B$ 是闭的且 $\alpha(B) = \beta(A) = \infty$. 取 $J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \end{bmatrix} : \ker B \oplus \ker B^\perp \rightarrow \text{ran } A^\perp$, 其中 J_1 是可逆算子, 由定理 3.1 可证结论成立.

若 (ii) 成立, 取 $J : K \rightarrow \text{ran } A^\perp$ 是可逆算子, 由定理 3.1 可得结论成立.

必要性 假设存在 $X \in \mathcal{B}(K, H)$, 使得 M_X 是左 Fredholm 关系, 由定理 3.1 可知, A 是左 Fredholm 关系, $B(0)$ 是闭的且存在 $J \in \mathcal{B}(K, \text{ran } A^\perp)$, 使得 $\text{ran}(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix})$ 是闭的, $\ker(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix})$ 是闭的, $\alpha(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix}) < \infty$. 以下分两种情形进行讨论:

情形 1: $\text{ran } B$ 是闭的. 注意到 $B(0)$ 是闭的蕴含着 $\ker B$ 是闭的, 则 $\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix}$ 作为从 $\ker B^\perp \oplus \ker B$ 到 $\text{ran } A^\perp \oplus (\text{ran } B \cap B(0)^\perp) \oplus B(0)$ 的关系可写成如下分块矩阵形式

$$\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ B_1 & 0 \\ B - B & B - B \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

其中 B_1 是可逆算子. 因此, 存在可逆算子 $U \in \mathcal{B}(\text{ran } A^\perp \oplus \text{ran } B \cap B(0)^\perp \oplus B(0))$, 使得

$$U \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ B_1 & 0 \\ B - B & B - B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & J_2 \\ B_1 & 0 \\ B - B & B - B \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

因为 $\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix}$ 是左 Fredholm 关系, 所以 $J_2 = P_{\text{ran } A^\perp} J|_{\ker B}$ 是左 Fredholm 算子, 故 $\alpha(B) < \infty$ 或 $\alpha(B) = \beta(A) = \infty$, 即 (i) 成立.

情形 2: $\text{ran } B$ 不是闭的. 用反证法, 假设 $\beta(A) < \infty$, 所以 $\text{ran } J$ 是闭的, 结合 $\text{ran} \begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix}$ 是闭的可得 $\text{ran } B$ 是闭的. 这与条件矛盾, 故 (ii) 成立.

推论 3.5^[22] 设 $A \in \mathcal{B}(H), B \in \mathcal{B}(K)$ 为给定算子, 则存在 $X \in \mathcal{B}(K, H)$, 使得 M_X 是左 Fredholm 算子当且仅当 A 是左 Fredholm 算子, $B(0)$ 闭且下列条件之一成立:

- (i) 当 $\text{ran } B$ 是闭的时, $\alpha(B) < \infty$ 或 $\alpha(B) = \beta(A) = \infty$;
- (ii) 当 $\text{ran } B$ 不是闭的时, $\beta(A) = \infty$.

证 类似于定理 3.1 的证明可得结论成立.

定理 3.2 设 $A \in \mathcal{BR}(\mathcal{X}), B \in \mathcal{BR}(\mathcal{Y})$ 为给定关系. 若 $B(0)$ 在 $\mathcal{X}$ 中可补, 则存在 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, 使得 M_X 是右 Fredholm 关系当且仅当下列条件成立:

- (i) B 是右 Fredholm 关系;
- (ii) $A(0)$ 是闭的;
- (iii) 存在 $S \in \mathcal{B}(\ker B, \mathcal{X})$, 使得 $\text{ran}([A \ S])$ 在 $\mathcal{X}$ 中可补且 $\mathcal{X} \subset_e \text{ran}([A \ S]), \ker([A \ S])$ 在 $\mathcal{X} \oplus \ker B$ 中可补.

证 充分性 设条件 (i)–(iii) 成立. 因为 B 是右 Fredholm 关系, 所以 B 是闭的, $\text{ran } B$ 是闭的, $\beta(B) < \infty$ 且 $\ker B$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补. 由 B 的闭性及引理 2.2(i) 可得 $B(0)$ 是闭的, 结合 $A(0)$ 是闭的及引理 2.5 可知, 对任意的 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, 使得 M_X 是闭的.

注意到 $\beta(B) < \infty$, 根据引理 2.1(ii), 可得 $\text{ran } B$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补, 结合 $\ker B$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补, 故 $\mathcal{Y}$ 有如下分解形式

$$\mathcal{Y} = \mathcal{O}_{\ker B} \oplus \ker B, \quad \mathcal{Y} = \text{ran } B \oplus \mathcal{O}_{\text{ran } B}. \quad (3.10)$$

定义

$$X = [0 \ S] : \mathcal{O}_{\ker B} \oplus \ker B \rightarrow \oplus \mathcal{X}, \quad (3.11)$$

其中 $S \in \mathcal{B}(\ker B, \mathcal{X})$ 是条件 (iii) 中的 S . M_X 作为从 $\mathcal{X} \oplus \mathcal{O}_{\ker B} \oplus \ker B$ 到 $\mathcal{X} \oplus \text{ran } B \oplus \mathcal{O}_{\text{ran } B}$ 的关系具有以下分块矩阵形式

$$M_X = \begin{bmatrix} A & 0 & S \\ 0 & B_1 & B - B \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

因为 $\text{ran}([A \ S])$ 在 $\mathcal{X}$ 中可补, 这蕴含着 $\text{ran}([A \ S])$ 是闭的, 所以 $\text{ran } M_X = \text{ran}([A \ S]) \oplus \text{ran } B$ 是闭的. 又因为 $\ker([A \ S])$ 在 $\mathcal{X} \oplus \ker B$ 中可补, 所以 $\ker M_X = \ker([A \ S]) \oplus \ker B$ 在 $\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$ 中可补. 一方面, 由于 $\text{ran}([A \ S])$ 在 $\mathcal{X}$ 中可补且 $\mathcal{X} \subset_e \text{ran}([A \ S])$, 则由定义 2.7 可知, 存在 $\mathcal{X}$ 的有限维子空间 $\mathcal{F}$, 使得 $\mathcal{X} \subset \text{ran}([A \ S]) + \mathcal{F}$. 另一方面, 由于 $\text{ran}([A \ S]) + \mathcal{F} \subset \mathcal{X}$, 所以 $\mathcal{X} = \text{ran}([A \ S]) + \mathcal{F}$, 从而存在有限维子空间 $\tilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}$, 使得 $\mathcal{O}_{\text{ran}([A \ S])} \subset \mathcal{X} = \text{ran}([A \ S]) \oplus \tilde{\mathcal{F}}$. 因此 $\mathcal{O}_{\text{ran}([A \ S])}$ 是有限维空间, 即 $\beta([A \ S]) < \infty$. 从而 $\beta(M_X) = \beta([A \ S]) + \beta(B_1) + \dim \mathcal{O}_{\text{ran } B} = \beta([A \ S]) + \beta(B) < \infty$, 综上 M_X 是右 Fredholm 关系.

必要性 假设存在 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, 使得 M_X 是右 Fredholm 关系. 注意到 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, 根据引理 2.4 及引理 2.10, 得

$$Q_{M_X} M_X = \begin{bmatrix} Q_{AA} & Q_{AX} \\ 0 & Q_{BB} \end{bmatrix} : \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y} \rightarrow (\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y})/M_X(0) \quad (3.13)$$

是右 Fredholm 关系. 因为 $B(0)$ 是闭的, 结合 B 的有界性, 根据引理 2.2(iii) 可知 B 是闭的. 又因为 $Q_{M_X} M_X$ 的右 Fredholm 性, 由引理 2.9 可得 $Q_B B$ 是右 Fredholm 算子, 这意味着 $\text{ran } Q_B B$ 是闭的, $\beta(Q_B B) < \infty$ 且 $\ker Q_B B$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补. 由 $\text{ran } Q_B B$ 的闭性结合引理 2.7, 可得 $\text{ran } B$ 是闭的. 在此条件下, $\beta(B) = \beta(Q_B B)$ 且 $\ker B = \ker Q_B B$ 成立. 因此, $\beta(B) < \infty$ 且 $\ker B$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补. 综上 B 是右 Fredholm 关系, 故 (i) 成立. 注意到 M_X 是右 Fredholm 关系, 所以 M_X 是闭的, 由引理 2.5 可知 $A(0)$ 是闭的, 故 (ii) 成立.

注意到 $\text{ran } B$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补, $\ker B$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补且 $B(0)$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补. 事实上, 易知 $\text{ran } B = (\text{ran } B \cap \mathcal{O}_{B(0)}) \oplus B(0)$. 一方面, 因为 $B(0) \subset \text{ran } B$, $\text{ran } B \cap \mathcal{O}_{B(0)} \subset \text{ran } B$, 显然 $(\text{ran } B \cap \mathcal{O}_{B(0)}) \oplus B(0) \subset \text{ran } B$. 另一方面, 对任意 $x \in \text{ran } B$, 存在 $x_1 \in \mathcal{O}_{B(0)}$, $x_2 \in B(0)$, 使得 $x = x_1 + x_2$, 进而 $x_1 = (x - x_2) \in \text{ran } B$, 故 $x_1 \in \text{ran } B \cap \mathcal{O}_{B(0)}$, 因此 $\text{ran } B \subset (\text{ran } B \cap \mathcal{O}_{B(0)}) \oplus B(0)$. 从而 $\text{ran } B = (\text{ran } B \cap \mathcal{O}_{B(0)}) \oplus B(0)$ 成立, 则 $\mathcal{Y}$ 有如下分解形式

$$\mathcal{Y} = \mathcal{O}_{\ker B} \oplus \ker B, \quad \mathcal{Y} = (\text{ran } B \cap \mathcal{O}_{B(0)}) \oplus B(0) \oplus \mathcal{O}_{\text{ran } B}, \quad (3.14)$$

M_X 作为从 $\mathcal{X} \oplus \mathcal{O}_{\ker B} \oplus \ker B$ 到 $\mathcal{X} \oplus (\text{ran } B \cap \mathcal{O}_{B(0)}) \oplus B(0) \oplus \mathcal{O}_{\text{ran } B}$ 的关系具有以下分块矩阵形式

$$M_X = \begin{bmatrix} A_1 & X_1 & X_2 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & B - B & B - B \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

由于

$$B|_{\mathcal{O}_{\ker B}} = [B_1 \quad B - B \quad 0]^T : \mathcal{O}_{\ker B} \rightarrow (\text{ran } B \cap \mathcal{O}_{B(0)}) \oplus B(0) \oplus \mathcal{O}_{\text{ran } B}, \quad (3.16)$$

显然算子 B_1 是单的. 另外, 对任意的 $y \in \text{ran } B \cap \mathcal{O}_{B(0)}$, 存在 $x \in \mathcal{Y}$, 使得 $y \in Bx$. 令 $x_1 \in \mathcal{O}_{\ker B}$, $x_2 \in \ker B$ 满足 $x = x_1 + x_2$, 则 $y \in B(x_1 + x_2) = Bx_1 + B(0) = Bx_1$, 进而 $y = B_1 x_1$, 即 B_1 是满的, 这意味着算子 B_1 是可逆的. 因此, 存在可逆算子 $U \in \mathcal{B}(\mathcal{X} \oplus (\text{ran } B \cap \mathcal{O}_{B(0)}) \oplus B(0) \oplus \mathcal{O}_{\text{ran } B})$, 使得

$$UM_X = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & X_2 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & B - B & B - B \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

取 $S = X_2$. 显然 $\text{ran}(UM_X) = \text{ran}([A \ S]) \oplus \text{ran } B$. 因此, 由 M_X 的右 Fredholm 性可得 $\beta([A \ S]) < \infty$, 即 $\text{ran}([A \ S])$ 在 $\mathcal{X}$ 中可补且 $\mathcal{O}_{\text{ran}([A \ S])}$ 是有限维子空间. 从而 $\mathcal{X} \subset \text{ran}([A \ S]) + \mathcal{O}_{\text{ran}([A \ S])}$, 即 $\mathcal{X} \subset_e \text{ran}([A \ S])$. 又因为 $\ker(UM_X) = \ker([A \ S]) \oplus \ker B$, 结合 M_X 的右 Fredholm 性, 所以 $\ker([A \ S])$ 在 $\mathcal{X} \oplus \ker B$ 中可补, 综上条件 (iii) 成立.

推论 3.6 设 $A \in \mathcal{BR}(\mathcal{X})$, $B \in \mathcal{BR}(\mathcal{Y})$ 为给定关系. 若 $B(0)$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补, 则存在 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, 使得 M_X 是右 Fredholm 关系当且仅当 B 是右 Fredholm 关系, $A(0)$ 闭且下列条件之一成立:

(i) 当 $\alpha(B) < \infty$ 时, $\text{ran } A$ 在 $\mathcal{X}$ 中可补且 $\mathcal{X} \subset_e \text{ran } A$, $\ker A$ 在 $\mathcal{X}$ 中可补;

(ii) 当 $\alpha(B) = \infty$ 时, 存在 $S \in \mathcal{B}(\ker B, \mathcal{X})$, 使得 $\text{ran}([A S])$ 在 $\mathcal{X}$ 中可补且 $\mathcal{X} \subset_e \text{ran}([A S])$, $\ker([A S])$ 在 $\mathcal{X} \oplus \ker B$ 中可补.

证 充分性 设 B 是右 Fredholm 关系, $A(0)$ 是闭的. 若 (ii) 成立, 由定理 3.2 可证结论成立. 若 (i) 成立, 定义算子 X 形如 (3.11), 其中取 $S = 0$. 因为 $\text{ran } A$ 在 $\mathcal{X}$ 中可补且 $\mathcal{X} \subset_e \text{ran } A$, 可得 $\text{ran}([A 0])$ 在 $\mathcal{X}$ 中可补且 $\mathcal{X} \subset_e \text{ran}([A 0])$. 又因为 $\ker A$ 在 $\mathcal{X}$ 中可补, 所以 $\ker([A 0])$ 在 $\mathcal{X} \oplus \ker B$ 中可补, 综上由定理 3.2 可证结论成立.

必要性 假设存在 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, 使得 M_X 是右 Fredholm 关系. 由定理 3.2 可知 B 是右 Fredholm 关系, $A(0)$ 是闭的, 存在 $S \in \mathcal{B}(\ker B, \mathcal{X})$, 使得 $\text{ran}([A S])$ 在 $\mathcal{X}$ 中可补且 $\mathcal{X} \subset_e \text{ran}([A S])$, $\ker([A S])$ 在 $\mathcal{X} \oplus \ker B$ 中可补, 故 (ii) 成立. 下证条件 (i) 成立. 当 $\alpha(B) < \infty$ 时, 因为 $\ker S \subseteq \ker B$, 所以 $\dim \ker S \leq \dim \ker B = \alpha(B) < \infty$, 进而由引理 2.1 可知 $\ker S$ 在 $\ker B$ 中可补. 注意到, $\ker([A S])$ 在 $\mathcal{X} \oplus \ker B$ 中可补, 因此, $\ker A$ 在 $\mathcal{X}$ 中可补. 又因为 $\text{ran}([A S])$ 在 $\mathcal{X}$ 中可补且 $\mathcal{X} \subset_e \text{ran}([A S])$, 这蕴含着 $\beta([A S]) < \infty$, 注意到 $\dim \text{ran } S \leq \alpha(B) < \infty$. 因此, $\text{ran } A$ 在 $\mathcal{X}$ 中可补且 $\mathcal{X} \subset_e \text{ran } A$, 综上条件 (i) 成立.

推论 3.7^[19] 设 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}), B \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$ 为给定算子, 则存在 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, 使得 M_X 是右 Fredholm 算子当且仅当 B 是右 Fredholm 算子且下列条件之一成立:

- (i) $\text{ran } A$ 在 $\mathcal{X}$ 中可补, $\mathcal{X} \subset_e \text{ran } A$, $\ker A$ 在 $\mathcal{X}$ 中可补;
- (ii) 当 $\alpha(B) = \infty$ 时, 存在 $S \in \mathcal{B}(\ker B, \mathcal{X})$, 使得 $\mathcal{X} \subset_e \text{ran}([A S])$, $\ker([A S])$ 在 $\mathcal{X} \oplus \ker B$ 中可补.

证 因为 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}), B \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$, 所以 $B(0) = \{0\}$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补, $A(0) = \{0\}$ 是闭的, 根据推论 3.5 可证结论成立.

推论 3.8^[17] 设 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}), B \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$ 为给定算子. 若 B 是右 Fredholm 算子, $\text{ran } A$ 是闭的且在 $\mathcal{X}$ 中可补并且 $\mathcal{X}/\text{ran } A \preceq \ker B$, 则存在 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, 使得 M_X 是右 Fredholm 算子.

证 设 B 是右 Fredholm 算子, 则 $\ker B$ 是闭的且在 $\mathcal{Y}$ 中可补. 因为 $\text{ran } A$ 是闭的且在 $\mathcal{X}$ 中可补, 所以 $\mathcal{X}$ 有分解式 (3.2), 定义 X 形如 (3.11). 注意到 $\mathcal{X}/\text{ran } A \preceq \ker B$, 由定义 2.9 可知, 存在右可逆算子

$$S_1 : \ker B \rightarrow \mathcal{O}_{\text{ran } A}.$$

取

$$S = \begin{bmatrix} 0 \\ S_1 \end{bmatrix} : \ker B \rightarrow \text{ran } A \oplus \mathcal{O}_{\text{ran } A},$$

由定理 3.2 可证结论成立.

类似地, 我们将 Banach 空间上的结果推导出 Hilbert 空间上.

推论 3.9^[22] 设 $A \in \mathcal{BR}(H), B \in \mathcal{BR}(K)$ 为给定关系, 则存在 $X \in \mathcal{B}(K, H)$, 使得 M_X 是右 Fredholm 关系当且仅当 B 是右 Fredholm 关系, $A(0)$ 闭且下列条件之一成立:

- (i) 当 $\text{ran } A$ 是闭的时, $\beta(A) < \infty$ 或 $\beta(A) = \alpha(B) = \infty$;
- (ii) 当 $\text{ran } A$ 不是闭的时, $\alpha(B) = \infty$.

证 充分性 设 B 是右 Fredholm 关系, 则 $B(0)$ 是闭的, 这意味着 $\ker B$ 也是闭的, 定义 X 形如 (3.11). 若 (i) 成立, 以下分两种情形进行讨论:

情形 1: $\operatorname{ran} A$ 是闭的且 $\beta(A) < \infty$. 取 $S = 0$, 由定理 3.2 可证结论成立.

情形 2: $\operatorname{ran} A$ 是闭的且 $\beta(A) = \alpha(B) = \infty$. 取

$$S = \begin{bmatrix} 0 \\ S_1 \end{bmatrix} : \ker B \rightarrow \operatorname{ran} A \oplus \operatorname{ran} A^\perp,$$

其中 S_1 是可逆算子, 由定理 3.2 可得结论成立.

若 (ii) 成立, 取 $S : \ker B \rightarrow H$ 是可逆算子, 由定理 3.2 可证结论成立.

必要性 假设存在 $X \in \mathcal{B}(K, H)$, 使得 M_X 是右 Fredholm 关系. 由定理 3.2 可知 B 是右 Fredholm 关系, $A(0)$ 是闭的且存在 $S \in \mathcal{B}(\ker B, H)$, 使得 $\operatorname{ran}([A \ S])$ 是闭的, $\beta([A \ S]) < \infty$, $\ker([A \ S])$ 是闭的. 以下分两种情形进行讨论.

情形 1: $\operatorname{ran} A$ 是闭的. M_X 作为从 $H \oplus \ker B^\perp \oplus \ker B$ 到

$$\operatorname{ran} A \oplus \operatorname{ran} A^\perp \oplus (\operatorname{ran} B \cap B(0)^\perp) \oplus B(0) \oplus \operatorname{ran} B$$

的关系具有以下分块矩阵形式

$$M_X = \begin{bmatrix} A_1 & X_1 & X_2 \\ 0 & X_3 & X_4 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & B - B & B - B \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

其中 B_1 是可逆算子. 因此, 存在可逆算子

$$U \in \mathcal{B}(\operatorname{ran} A \oplus \operatorname{ran} A^\perp \oplus (\operatorname{ran} B \cap B(0)^\perp) \oplus B(0) \oplus \operatorname{ran} B),$$

使得

$$UM_X = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & X_2 \\ 0 & 0 & X_4 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & B - B & B - B \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

取

$$S = \begin{bmatrix} X_2 \\ X_4 \end{bmatrix} : \ker B \rightarrow \operatorname{ran} A \oplus \operatorname{ran} A^\perp.$$

注意到 $[A \ S]$ 是右 Fredholm 关系, 所以

$$X_4 = P_{\operatorname{ran} A^\perp} J|_{\ker B}$$

是右 Fredholm 算子, 故可证 $\beta(A) < \infty$ 或 $\alpha(B) = \beta(A) = \infty$, 即 (i) 成立.

情形 2: $\text{ran } A$ 不是闭的. 用反证法, 假设 $\alpha(B) < \infty$, M_X 作为从 $H \oplus \ker B^\perp \oplus \ker B$ 到 $H \oplus (\text{ran } B \cap B(0)^\perp) \oplus B(0) \oplus \text{ran } B$ 的关系具有以下分块矩阵形式

$$M_X = \begin{bmatrix} A_1 & X_1 & X_2 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & B - B & B - B \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

其中 B_1 是可逆算子. 因此, 存在可逆算子 $U \in (H \oplus (\text{ran } B \cap B(0)^\perp) \oplus B(0) \oplus \text{ran } B)$, 使得

$$UM_X = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & X_2 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & B - B & B - B \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

取 $S_2 = X_2$. 若 $\alpha(B) < \infty$, 则 $S_2 : \ker B \rightarrow H$ 是有限秩算子, 显然 $\text{ran}([A \ S])$ 是闭的, 所以 $\text{ran } A$ 是闭的. 这与条件矛盾, 故 (ii) 成立.

推论 3.10^[22] 设 $A \in \mathcal{B}(H), B \in \mathcal{B}(K)$ 为给定算子, 则存在 $X \in \mathcal{B}(K, H)$, 使得 M_X 是右 Fredholm 算子当且仅当 B 是右 Fredholm 算子, $A(0)$ 是闭的且下列条件之一成立:

- (i) 当 $\text{ran } A$ 是闭的时, $\beta(A) < \infty$ 或 $\beta(A) = \alpha(B) = \infty$;
- (ii) 当 $\text{ran } A$ 不是闭的时, $\alpha(B) = \infty$.

证 类似于定理 3.2 可得结论成立.

定理 3.3 设 $A \in \mathcal{BR}(\mathcal{X}), B \in \mathcal{BR}(\mathcal{Y})$ 为给定关系. 若 $A(0)$ 在 $\mathcal{X}$ 中可补, $B(0)$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补, 则存在 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, 使得 M_X 是 Fredholm 关系当且仅当 A 是左 Fredholm 关系, B 是右 Fredholm 关系且存在 $J \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{O}_{\text{ran } A}), S \in \mathcal{B}(\ker B, \mathcal{X})$, 使得下列条件成立:

- (i) $P_{\mathcal{O}_{\text{ran } A}} J|_{\ker B} = P_{\mathcal{O}_{\text{ran } A}} S|_{\ker B}$ 是 Fredholm 算子;
- (ii) $\text{ran}([J_B])$ 在 $\mathcal{O}_{\text{ran } A} \oplus \mathcal{Y}$ 中可补, $\ker([J_B])$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补且 $\mathcal{Y} \subset_e \mathcal{O}_{\ker([J_B])}$, $\text{ran}([A \ S])$ 在 $\mathcal{X}$ 中可补, $\mathcal{X} \subset_e \text{ran}([A \ S])$ 且 $\ker([A \ S])$ 在 $\mathcal{X} \oplus \ker B$ 中可补.

证 充分性 因为 $A(0)$ 在 $\mathcal{X}$ 中可补, $B(0)$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补, 蕴含着 $A(0)$ 是闭的且 $B(0)$ 是闭的, 由引理 2.5 可得 M_X 是闭的. 设 A 是左 Fredholm 关系, B 是右 Fredholm 关系, 则 $\mathcal{X}$ 有分解形式 (3.2), $\mathcal{Y}$ 有分解形式 (3.10). 另外, $J \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{O}_{\text{ran } A})$ 和 $S \in \mathcal{B}(\ker B, \mathcal{X})$ 分别有如下分解形式

$$J = [J_1 \ J_2] : \mathcal{O}_{\ker B} \oplus \ker B \rightarrow \mathcal{O}_{\text{ran } A}, \quad (3.22)$$

$$S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} : \ker B \rightarrow \text{ran } A \oplus \mathcal{O}_{\text{ran } A}. \quad (3.23)$$

由条件 (i) 可知 $J_2 = S_2$. 定义

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} : \mathcal{O}_{\ker B} \oplus \ker B \rightarrow \operatorname{ran} A \oplus \mathcal{O}_{\operatorname{ran} A}, \quad (3.24)$$

此时, M_X 作为由 $\mathcal{X} \oplus \mathcal{O}_{\ker B} \oplus \ker B$ 到 $\operatorname{ran} A \oplus \mathcal{O}_{\operatorname{ran} A} \oplus (\operatorname{ran} B \cap \mathcal{O}_{B(0)}) \oplus B(0) \oplus \mathcal{O}_{\operatorname{ran} B}$ 的关系具有以下分块矩阵形式

$$M_X = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_2 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & B - B & B - B \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

因为 $\operatorname{ran}(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix})$ 在 $\mathcal{O}_{\operatorname{ran} A} \oplus \mathcal{Y}$ 中可补蕴含着 $\operatorname{ran}(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix})$ 是闭的, 所以 $\operatorname{ran} M_X = \operatorname{ran} A \oplus \operatorname{ran}(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix})$ 是闭的. 又因为 $\ker(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix})$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补且 $\mathcal{Y} \subset_e \mathcal{O}_{\ker(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix})}$, 由定理 3.1 可知 $\alpha(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix}) < \infty$. 另外, $\operatorname{ran}(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix})$ 在 $\mathcal{X}$ 中可补且 $\mathcal{X} \subset_e \operatorname{ran}(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix})$, 由定理 3.2 可知 $\beta(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix}) < \infty$, 因此 $\alpha(M_X) = \alpha(A) + \alpha(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix}) < \infty$, $\beta(M_X) = \beta(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix}) + \beta(B) < \infty$, 综上 M_X 是 Fredholm 关系.

必要性 假设存在 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, 使得 M_X 是 Fredholm 关系, 由定理 3.1 和定理 3.2 可知 A 是左 Fredholm 关系, B 是右 Fredholm 关系, 存在 $J \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{O}_{\operatorname{ran} A})$ 和 $S \in \mathcal{B}(\ker B, \mathcal{X})$, 使得 $\operatorname{ran}(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix})$ 在 $\mathcal{O}_{\operatorname{ran} A} \oplus \mathcal{Y}$ 中可补, $\ker(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix})$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补且 $\mathcal{Y} \subset_e \mathcal{O}_{\ker(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix})}$. 另外, $\ker(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix})$ 在 $\mathcal{X} \oplus \ker B$ 中可补, $\operatorname{ran}(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix})$ 在 $\mathcal{X}$ 中可补且 $\mathcal{X} \subset_e \operatorname{ran}(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix})$, 即 (ii) 成立. 由 $\mathcal{Y} \subset_e \mathcal{O}_{\ker(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix})}$, 所以 $\alpha(P_{\mathcal{O}_{\operatorname{ran} A}} J|_{\ker B}) = \alpha(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix}) < \infty$. 又因为 $\mathcal{X} \subset_e \operatorname{ran}(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix})$, 所以 $\beta(P_{\mathcal{O}_{\operatorname{ran} A}} S|_{\ker B}) < \infty$. 因此, $P_{\mathcal{O}_{\operatorname{ran} A}} J|_{\ker B} = P_{\mathcal{O}_{\operatorname{ran} A}} S|_{\ker B}$ 是 Fredholm 算子, 即 (i) 成立.

推论 3.11 设 $A \in \mathcal{BR}(\mathcal{X}), B \in \mathcal{BR}(\mathcal{Y})$ 为给定关系. 若 $A(0)$ 在 $\mathcal{X}$ 中可补, $B(0)$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补, 则存在 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, 使得 M_X 是 Fredholm 关系当且仅当 A 是左 Fredholm 关系, B 是右 Fredholm 关系且下列条件之一成立:

- (i) $\mathcal{X} \subset_e \operatorname{ran} A, \mathcal{Y} \subset_e \mathcal{O}_{\ker B}$;
- (ii) 存在 $J \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{O}_{\operatorname{ran} A}), S \in \mathcal{B}(\ker B, \mathcal{X})$, 使得 $\operatorname{ran}(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix})$ 在 $\mathcal{O}_{\operatorname{ran} A} \oplus \mathcal{Y}$ 中可补, $\ker(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix})$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补且 $\mathcal{Y} \subset_e \mathcal{O}_{\ker(\begin{bmatrix} J \\ B \end{bmatrix})}$, $\operatorname{ran}(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix})$ 在 $\mathcal{X}$ 中可补, $\mathcal{X} \subset_e \operatorname{ran}(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix})$ 且 $\ker(\begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix})$ 在 $\mathcal{X} \oplus \ker B$ 中可补, 同时 $P_{\mathcal{O}_{\operatorname{ran} A}} S|_{\ker B} = P_{\mathcal{O}_{\operatorname{ran} A}} J|_{\ker B}$ 是 Fredholm 算子.

证 充分性 设 A 是左 Fredholm 关系, B 是右 Fredholm 关系. 若 (i) 成立, 由定理 3.3 可证结论成立. 若 (ii) 成立, 定义 J 形如 (3.17), S 形如 (3.18), 其中取 $J = S = 0$, 结合 $\operatorname{ran} B$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补, 可知 $\operatorname{ran}(\begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix})$ 在 $\mathcal{O}_{\operatorname{ran} A} \oplus \mathcal{Y}$ 中可补. 因为 $\ker B$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补且 $\mathcal{Y} \subset_e \mathcal{O}_{\ker B}$, 所以 $\ker(\begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix})$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补且 $\mathcal{Y} \subset_e \mathcal{O}_{\ker(\begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix})}$. 又因为 $\operatorname{ran} A$ 在 $\mathcal{X}$ 中可补且 $\mathcal{X} \subset_e \operatorname{ran} A$, 所以 $\operatorname{ran}(\begin{bmatrix} A & 0 \end{bmatrix})$ 在 $\mathcal{X}$ 中可补且 $\mathcal{X} \subset_e \operatorname{ran}(\begin{bmatrix} A & 0 \end{bmatrix})$. 另外, 由 $\ker A$ 在 $\mathcal{X}$ 中可补, 因此 $\ker(\begin{bmatrix} A & 0 \end{bmatrix})$ 在 $\mathcal{X} \oplus \ker B$ 中可补, 综上由定理 3.3 可证结论成立.

必要性 假设存在 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, 使得 M_X 是 Fredholm 关系. 由定理 3.3 可证 A 是左 Fredholm 关系, B 是右 Fredholm 关系, 存在 $J \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{O}_{\text{ran } A})$, $S \in \mathcal{B}(\ker B, \mathcal{X})$, 使得 $\text{ran}([\begin{smallmatrix} J \\ B \end{smallmatrix}])$ 在 $\mathcal{O}_{\text{ran } A} \oplus \mathcal{Y}$ 中可补, $\ker([\begin{smallmatrix} J \\ B \end{smallmatrix}])$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补且 $\mathcal{Y} \subset_e \mathcal{O}_{\ker([\begin{smallmatrix} J \\ B \end{smallmatrix}])}$, $\text{ran}([A \ S])$ 在 $\mathcal{X}$ 中可补且 $\mathcal{X} \subset_e \text{ran}([A \ S])$, $\ker([A \ S])$ 在 $\mathcal{X} \oplus \ker B$ 中可补, 同时 $P_{\mathcal{O}_{\text{ran } A}} S|_{\ker B} = P_{\mathcal{O}_{\text{ran } A}} J|_{\ker B}$ 是 Fredholm 算子, 即 (ii) 成立. 从而由推论 3.1 和推论 3.5 可知 $\mathcal{X} \subset_e \text{ran } A$, $\mathcal{Y} \subset_e \mathcal{O}_{\ker B}$, 即 (i) 成立.

推论 3.12^[19] 设 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}), B \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$ 为给定算子, 则存在 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, 使得 M_X 是 Fredholm 算子当且仅当 A 是左 Fredholm 算子, B 是右 Fredholm 算子且下列条件之一成立:

- (i) $\mathcal{X} \subset_e \text{ran } A$, $\mathcal{Y} \subset_e \mathcal{O}_{\ker B}$;
- (ii) $\alpha(B) = \beta(A) = \infty$, 存在 $J \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{O}_{\text{ran } A})$, $S \in \mathcal{B}(\ker B, \mathcal{X})$, 使得 $\text{ran}([\begin{smallmatrix} J \\ B \end{smallmatrix}])$ 在 $\mathcal{O}_{\text{ran } A} \oplus \mathcal{Y}$ 中可补, $\ker([\begin{smallmatrix} J \\ B \end{smallmatrix}])$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补且 $\mathcal{Y} \subset_e \mathcal{O}_{\ker([\begin{smallmatrix} J \\ B \end{smallmatrix}])}$, $\text{ran}([A \ S])$ 在 $\mathcal{X}$ 中可补, $\mathcal{X} \subset_e \text{ran}([A \ S])$ 且 $\ker([A \ S])$ 在 $\mathcal{X} \oplus \ker B$ 中可补, 同时 $P_{\mathcal{O}_{\text{ran } A}} S|_{\ker B} = P_{\mathcal{O}_{\text{ran } A}} J|_{\ker B}$ 是 Fredholm 算子.

证 因为 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}), B \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$, 所以 $A(0) = \{0\}$ 在 $\mathcal{X}$ 中可补, $B(0) = \{0\}$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可补, 因此由推论 3.9 可得出结论.

推论 3.13^[17] 设 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}), B \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$ 为给定算子, 则存在 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, 使得 M_X 是 Fredholm 算子当且仅当 A 是左 Fredholm 算子, B 是右 Fredholm 算子且 $\ker B$ 和 $\mathcal{X}/\overline{\text{ran } A}$ 差有限维空间同构.

证 充分性 设 A 是左 Fredholm 算子, B 是右 Fredholm 算子, 则 $\mathcal{X}$ 有分解形式 (3.2), $\mathcal{Y}$ 有分解形式 (3.10). 因为 $\ker B$ 和 $\mathcal{X}/\overline{\text{ran } A}$ 差有限维空间同构, 即 $\ker B$ 和 $\mathcal{O}_{\text{ran } A}$ 是差有限维空间同构, 由定义 2.10 知下列情形之一成立.

情形 1: 存在左可逆算子 $J_1 : \ker B \rightarrow \mathcal{O}_{\text{ran } A}$, 使得

$$\dim \mathcal{O}_{\text{ran } A} / J_1(\ker B) < \infty. \quad (3.26)$$

取

$$J = [0 \quad J_1 \quad J_2]^T : \ker B \rightarrow \text{ran } A \oplus J_1(\ker B) \oplus \mathcal{O}_{J_1}, \quad (3.27)$$

其中 $J_2 \in \mathcal{B}(\ker B, \mathcal{O}_{J_1})$ 为任意算子, 由定理 3.3 可证结论成立.

情形 2: 存在左可逆算子 $S_1 : \mathcal{O}_{\text{ran } A} \rightarrow \ker B$, 使得

$$\dim \ker B / S_1(\mathcal{O}_{\text{ran } A}) < \infty. \quad (3.28)$$

取

$$S = [0 \quad S_{12} \quad S_2] : \mathcal{O}_{\ker B} \oplus S_1(\mathcal{O}_{\text{ran } A}) \oplus \mathcal{O}_{S_1} \rightarrow \mathcal{O}_{\text{ran } A}, \quad (3.29)$$

其中 $S_{12} \in \mathcal{B}(S_1(\mathcal{O}_{\text{ran } A}), \mathcal{O}_{\text{ran } A})$, $S_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{O}_{S_1}, \mathcal{O}_{\text{ran } A})$ 为任意算子, 由定理 3.3 可证结论成立.

必要性 假设存在 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, 使得 M_X 是 Fredholm 算子. 由定理 3.1 和定理 3.3 可证 A 是左 Fredholm 算子, B 是右 Fredholm 算子, 则 M_X 作为由 $\mathcal{X} \oplus \mathcal{O}_{\ker B} \oplus \ker B$ 到 $\text{ran } A \oplus \mathcal{O}_{\text{ran } A} \oplus \text{ran } B \oplus \mathcal{O}_{\text{ran } B}$ 的关系具有以下分块矩阵形式

$$M_X = \begin{bmatrix} A_1 & X_1 & X_2 \\ 0 & X_3 & X_4 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

其中 A_1, B_1 是可逆算子. 因此, 存在可逆算子 $U \in \mathcal{B}(\text{ran } A \oplus \mathcal{O}_{\text{ran } A} \oplus \text{ran } B \oplus \mathcal{O}_{\text{ran } B})$, $V \in \mathcal{B}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{O}_{\ker B} \oplus \ker B)$, 使得

$$UM_XV = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_4 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

由定理 3.3 可知 $P_{\mathcal{O}_{\text{ran } A}} J|_{\ker B} = X_4 = P_{\mathcal{O}_{\text{ran } A}} S|_{\ker B}$ 是 Fredholm 算子, 进而存在可逆算子 $J_1 : \mathcal{O}_{\ker X_4} \rightarrow \text{ran } X_4$. 以下分两种情形进行讨论.

情形 1: $\alpha(X_4) \leq \beta(X_4) < \infty$. 存在左可逆算子 $J_2 : \ker X_4 \rightarrow \mathcal{O}_{\text{ran } X_4}$, 满足 $\dim \mathcal{O}_{J_2} = \beta(X_4) - \alpha(X_4) < \infty$, 因此定义左可逆算子

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} : \mathcal{O}_{\ker X_4} \oplus \ker X_4 \rightarrow \text{ran } X_4 \oplus \mathcal{O}_{\text{ran } X_4}, \quad (3.32)$$

使得 $\dim \mathcal{O}_{\text{ran } A} / J_1(\ker B) = \beta(X_4) - \alpha(X_4) < \infty$.

情形 2: $\beta(X_4) < \alpha(X_4) < \infty$. 存在左可逆算子 $J_2 : \mathcal{O}_{\text{ran } X_4} \rightarrow \ker X_4$, 满足 $\dim \mathcal{O}_{J_2} = \alpha(X_4) - \beta(X_4) < \infty$. 进而, 可以定义左可逆算子

$$J = \begin{bmatrix} J_1^{-1} & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} : \text{ran } X_4 \oplus \mathcal{O}_{\text{ran } X_4} \rightarrow \mathcal{O}_{\ker X_4} \oplus \ker X_4, \quad (3.33)$$

使得 $\dim \ker B / J_2(\mathcal{O}_{\text{ran } A}) = \alpha(X_4) - \beta(X_4) < \infty$. 综上, 可得 $\ker B$ 和 $\mathcal{X} / \overline{\text{ran } A}$ 差有限维空间同构.

类似地, 我们将 Banach 空间上的结果推导出 Hilbert 空间上.

推论 3.14^[22] 设 $A \in \mathcal{BR}(H), B \in \mathcal{BR}(K)$ 为给定关系, 则存在 $X \in \mathcal{B}(K, H)$, 使得 M_X 是 Fredholm 关系当且仅当 A 是左 Fredholm 关系, B 是右 Fredholm 关系且 $\max\{\alpha(B), \beta(A)\} < \infty$ 或 $\alpha(B) = \beta(A) = \infty$.

证 充分性 设 A 是左 Fredholm 关系, B 是右 Fredholm 关系. 定义 J 形如 (3.17), S 形如 (3.18). 以下分两种情形进行讨论.

情形 1: $\max\{\alpha(B), \beta(A)\} < \infty$. 取 $J = S = 0$, 由定理 3.3 可得结论成立.

情形 2: $\beta(A) = \alpha(B) = \infty$. 取 $J_1 = S_1 = 0, J_2 = S_2$ 是 $\ker B \rightarrow \text{ran } A^\perp$ 上的可逆算子, 由定理 3.3 可得结论成立.

必要性 假设存在 $X \in \mathcal{B}(K, H)$, 使得 M_X 是 Fredholm 关系. 由定理 3.3 可知 A 是左 Fredholm 关系, B 是右 Fredholm 关系且存在 $J \in \mathcal{B}(K, \text{ran } A^\perp)$, $S \in \mathcal{B}(\ker B, H)$, 使得 $P_{\mathcal{O}_{\text{ran } A}} S|_{\ker B} = P_{\mathcal{O}_{\text{ran } A}} J|_{\ker B}$ 是 Fredholm 算子, 进而 $\max\{\alpha(B), \beta(A)\} < \infty$ 或 $\alpha(B) = \beta(A) = \infty$ 成立.

推论 3.15^[22] 设 $A \in \mathcal{B}(H)$, $B \in \mathcal{B}(K)$ 为给定算子, 则存在 $X \in \mathcal{B}(K, H)$, 使得 M_X 是 Fredholm 关系当且仅当 A 是左 Fredholm 算子, B 是右 Fredholm 算子且 $\max\{\alpha(B), \beta(A)\} < \infty$ 或 $\alpha(B) = \beta(A) = \infty$.

证 类似于定理 3.1 和定理 3.2 可得结论成立.

参 考 文 献

- [1] von Neumann J. Functional operator II: The geometry of orthogonal spaces [M]. Princeton: Princeton University Press, 1950.
- [2] Favini A, Yagi A. Multivalued operators and degenerate evolution equations [J]. *Ann Math Pura Appl*, 1993, 163:353–384.
- [3] Shvydkoy R, Latushkin Y. Operator algebras and the Fredholm spectrum of mivective equations of linear hydrodynamics [J]. *J Funct Anal*, 2009, 257:3309–3328.
- [4] Ren G. On the density of the minimal subspaces generated by discrete linear Hamiltonian systems [J]. *Appl Math Lett*, 2014, 27:1–5.
- [5] Cross R W, Favini A, Yakukov Y. Perturbation results for multivalued linear operators [J]. *Progr Nonlinear Differ Equ Appl*, 2011, 80:111–130.
- [6] Górniewicz L. Topological fixed point theory of multivalued mappings [M]. New York: Kluwer, 1999.
- [7] Kamenskii M, Obukhovskii V, Zecca P. Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces [M]. *Nonlinear Anal Appl*, Vol 7, Walter, Berlin, New York: De Gruyter Saur, 2001.
- [8] Kamenskii M, Obukhovskii V. On peridic solutions of differential inclusions with unbounded operators in Banach spaces [J]. *Univ u Novom Sadu, Zb Rad Prirod-Mat Fak, Ser Mat*, 1991, 21(1):173–191.
- [9] Muresan M. On a boundary value problem for quasi-linear differential inclusions of evolution [J]. *Collect Math*, 1994, 45(2):165–175.
- [10] Kacynski T. Multivalued maps as a tool in modeling and rigorous numerics [J]. *J Fixed Point Theory Appl*, 2008, 4(2):151–176.
- [11] Conway J B. A course in functional analysis, Second Edition [M]. New York: Springer-Verlag, 1990.

- [12] 王玉文. 巴拿赫空间中算子广义逆理论及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2005.
- [13] Murray F J. On complementary manifolds and projections in spaces L_p and l_p [J]. *Trans Amer Math Soc*, 1937, 41(1):138–152.
- [14] 钟怀杰. 巴拿赫空间结构和算子理想 [M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [15] Gowers W T, Maurey B. The unconditional basic sequence problem [J]. *J Amer Math Soc*, 1993, 6(4):851–874.
- [16] Cao X H, Guo M Z, Meng B. Semi-Fredholm spectrum and Weyl's theorem for operator matrices [J]. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 2006, 22:169–178.
- [17] Djordjević D S. Perturbations of spectra of operator matrices [J]. *Operator Theory*, 2002, 48:467–486.
- [18] Han J K, Lee H Y, Lee W Y. Invertible completions of 2×2 upper triangular operator matrices [J]. *Proc Amer Math Soc*, 1999, 128(1):119–123.
- [19] Liu A, Huang J, Chen A. Right and left Weyl operator matrices in a Banach space setting [J/OL]. *J Math*, 2021, <https://doi.org/10.1155/2021/9959364>.
- [20] Souhir E, Maher M. Essential spectra of some matrix of linear relations [J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2013, 33(4):1187–1201.
- [21] Du Y, Huang J, Huo R. On the range of upper triangular relation matrices [J]. *Linear Multilinear Algebra*, 2022, 70:5750–5769.
- [22] Huang J, Du Y, Huo R. Fredholm properties of upper triangular matrices of relations [J]. *Annals of Functional Analysis*, 2023, (44)8:2639–7390.
- [23] Du Y, Huang J. Essential spectra of upper triangular relation matrices [J]. *Monatshefte für Mathematik*, 2023, 200:43–61.
- [24] Wu X, Chen A. Perturbation of Spectra for upper triangular relation matrices [J]. *J Complex Analysis and Operator Theory*, 2025, 19(18):1661–8254.
- [25] Cross R. Multivalued linear operators [M]. New York: Marcel Dekker, 1998.
- [26] Álvarez T. On the perturbation of semi-Fredholm relations with complemented ranges and null spaces [J]. *Acta Math Sinica, English Series*, 2010, 26:1545–1554.
- [27] Megginson R E. An introduction to Banach space theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1998.
- [28] Müller V. Spectral theory of linear operators and spectral systems in Banach algebras [M]. Basel: Birkhäuser-Verlag, 2003.
- [29] Kordula V, Müller V. On the axiomatic theory of spectrum [J]. *Studia Math*, 1996, 119(2):109–128.

- [30] Álvarez T, Chamkha Y, Mnif M. Left- and right-Atkinson linear relation matrices [J]. *Mediterr J Math*, 2015, 13:2039–2059.
- [31] Ammar A, Dhahri M Z, Jeribi A. Some properties spectra of some matrix of linear relations [J]. *Boll Unione Mat Ital*, 2015, 8(3):189–204.

Fredholmness of Two-Order Upper Triangular Relation Matrices

ZHAO Na¹ WU Xiufeng² HUANG Junjie³

¹School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia Normal University, Hohhot 010022, China. E-mail: zhaona221123@163.com

²Corresponding author. School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia Normal University, Hohhot 010022, China. E-mail: wuxiufeng68@163.com

³School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot 010021, China. E-mail: huangjunjie@imu.edu.com

Abstract Let $\mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}$ be Banach spaces. Given the relations $A \in \mathcal{BR}(\mathcal{X})$ and $B \in \mathcal{BR}(\mathcal{Y})$, the authors define the two-order upper triangular relation matrix with $X \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ as $M_X := \begin{bmatrix} A & X \\ 0 & B \end{bmatrix} \in \mathcal{BR}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y})$. In this paper, some necessary and sufficient conditions are given for M_X to be left (right) Fredholm relation and Fredholm relation for some $X \in \mathcal{BR}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, based on the block relation technique.

Keywords Relation matrix, Left (right) Fredholm relation, Fredholm relation

2020 MR Subject Classification 47A06, 47A10, 47A55

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 46 No. 2, 2025

by ALLERTON PRESS, INC., USA