

上半空间的调和 Bergman 空间上的 H-Toeplitz 算子*

张成佳¹ 孙铭浩¹ 李 然²

提要 文章研究了上半空间的调和 Bergman 空间上的 H-Toeplitz 算子的紧性, 介绍了上半空间中的调和 Bergman 空间的再生核与正交投影并给出了有界符号的 H-Toeplitz 算子紧性的完全刻画. 研究结果表明, 调和 Bergman 空间中的 H-Toeplitz 算子与 Bergman 空间中的 H-Toeplitz 算子存在显著差异, 这为进一步研究调和 Bergman 空间上的算子理论奠定了坚实的基础.

关键词 调和 Bergman 空间, H-Toeplitz 算子, Berezin 变换

MR (2020) 主题分类 47B35, 32A36

中图法分类 O175.29

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2025)02-0149-10

§1 引 言

对于一个固定的正整数 $n > 1$, 令 $H = \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}_+$ 为上半空间, 其中 $\mathbf{R}_+$ 表示所有正实数的集合. 我们将点 $z \in H$ 表示为 $z = (z', z_n)$, 其中 $z' \in \mathbf{R}^{n-1}$ 且 $z_n > 0$. 用 V 表示 H 上的概率体积测度.

对于 $1 < p < \infty$, 调和 Bergman 空间 b^p 定义如下

$$b^p = \left\{ f : f \text{ 为复值调和函数且满足 } \|f\|_p = \left(\int_H |f|^p dV \right)^{1/p} < \infty \right\},$$

其中 $\|f\|_p$ 是 f 在区域 H 上的 L^p 范数, 空间 b^p 是 $L^p = L^p(V)$ 的闭子空间. 特别地, b^2 是一个 Hilbert 空间. Ramey 和 Yi 在文 [1] 中对调和 Bergman 空间的基本结构进行了研究.

通过调和函数的平均值性质, 可以证明 b^2 空间中每个点 $z \in H$ 的点赋值泛函是一个有界线性泛函. 因此, 对于每个 $z \in H$, 对应一个唯一的函数 $R_z \in b^2$, 它具有再生性质, 即对于任意的 $f \in b^2$, 有

$$f(z) = \int_H f \overline{R_z} dV, \quad z \in H. \quad (1.1)$$

令 $R(z, w) = \overline{R_z(w)}$, $R(z, w)$ 被称为调和 Bergman 空间的再生核, 可以验证它是实值函数, 并且

$$R(z, w) = \frac{4}{n\sigma_n} \frac{n(z_n + w_n)^2 - |z - \overline{w}|^2}{|z - \overline{w}|^{n+2}}, \quad z, w \in H, \quad (1.2)$$

本文 2024 年 11 月 19 日收到, 2025 年 5 月 8 日收到修改稿.

¹ 辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连 116082. E-mail: 13188027476@163.com; 1207450400@qq.com

² 通信作者. 辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连 116082. E-mail: Liranmika@163.com

* 本文受到国家自然科学基金 (No. 11901269) 和辽宁省教育厅自然科学类项目 (No. JYTMS20231041) 的资助.

其中 σ_n 是 $\mathbf{R}^n$ 单位球的体积, $\bar{w} = (w', -w_n)$. 相关事实详见文 [2].

令 R 为从 L^2 到 b^2 的 Hilbert 空间正交投影. 再生性质 (1.1) 使我们得到了投影 R 的积分对于函数 $\psi \in L^2$, 有

$$R\psi(z) = \int_H \psi(w)R(z, w)dV(w), \quad z \in H.$$

从 (1.2) 的显式公式中, 可以看到对于某个常数 $C = C(n)$,

$$|R(z, w)| \leq \frac{C}{|z - \bar{w}|^n}, \quad z, w \in H. \quad (1.3)$$

所以 $R_z \in L^2$. 因此, R 是 L^2 到 b^2 的有界投影, 详见文 [1]. 对于 $u \in L^\infty$, 具有符号 u 的 Toeplitz 算子定义为 $T_u f = R(uf)$. 如果右边的积分有意义, 那么 $T_u \in L(b^2)$, $L(b^2)$ 是 b^2 上所有有界线性算子的空间, 其范数最多为 $\|u\|_\infty$ 乘以一个依赖于 n 的常数.

前人对于 Berezin 变换在边界处消失推导紧性已经十分成熟. 在文 [3] 中, Axler 和 Zheng 研究了作用在复平面单位圆上的解析 Bergman 空间上的类似类型的算子, 并通过 Berezin 变换的边界消失性质表征了紧性. 这个结果随后被推广到不同方向, 文 [4] 研究了 Bergman 空间上的紧算子, 特别是关于这些空间上算子的紧性条件, 进一步推进了复分析中算子理论的理解. Gupta 和 Singh 探讨了 Bergman 空间上的 H-Toeplitz 算子, 这是调和分析和函数理论中的一个特殊算子. 文章探讨了该算子在 Bergman 空间中的行为, 提供了一些可应用于数学物理和工程学的结果, 详情参见文 [5]. 文 [6] 讨论了调和 Bergman 空间上的 Berezin 变换和 Toeplitz 算子. 他们的研究将这些算子与调和函数的研究联系起来, 并得出了关于这些算子在调和 Bergman 空间中有界性和紧性的若干重要结果. 文 [7] 研究了 Bergman 空间上的积分算子, 分析了积分算子的行为, 这对于理解 Bergman 空间等函数空间的结构和性质至关重要. 文 [8] 中 Zhu 对 Berezin 变换及其在算子理论中的应用进行了综述, 重点关注单位圆盘的 Bergman 空间和复平面的 Fock 空间. Berezin 变换在研究 Hankel 和 Toeplitz 算子时最为有效和成功. Coburn 为再生核 Hilbert 空间上的线性算子引入了一种通用的符号演算, 对于复空间上的高斯平方可积全纯函数的 Segal-Bargmann 空间, 获得了任意有界算子的 Berezin 符号的 Lipschitz 估计, 详情参见文 [9]. 文 [10] 探讨了 H-Toeplitz 算子在调和 Bergman 空间中的扩展, 并将算子 K 和 K^* 扩展到调和 Bergman 空间的正交补空间, 定义了调和 Bergman 空间正交补上的对偶 H-Toeplitz 算子, 并研究了以单一解析单项式为符号的 H-Toeplitz 算子与以两个解析单项式相加为符号的 H-Toeplitz 算子之间的交换性.

在本文中, 我们在高维上半空间的背景下通过调和 Bergman 空间中的 Berezin 变换研究 H-Toeplitz 算子的紧性问题. 这一课题具有一定的研究难度. 首先, 调和 Bergman 空间与解析 Bergman 空间在性质上存在显著差异, 特别是在 Berezin 变换的非单射性方面. 在解析 Bergman 空间中, Berezin 变换是单射的, 这使得利用 Berezin 变换来研究算子的紧性相对直接. 然而, 在调和 Bergman 空间中, Berezin 变换不是单射的, 这意味着存在非零的算子, 其 Berezin 变换却为零, 这一特性增加了研究的复杂性. 此外, 高维空间带来了额外的技术挑战, 需要处理更加复杂的核函数和积分估计. 本文通过构造新的方法, 克服了 Berezin 变换非单射性带来的障碍, 成功地给出了 H-Toeplitz 算子紧性的完全刻画.

算子 $S \in L(b^2)$ 的 Berezin 变换定义为

$$\tilde{S}(a) = \langle Sr_a, r_a \rangle, \quad (1.4)$$

其中 $r_a = R_a \|R_a\|_2^{-1}$ 是 L^2 归一化的核. 在这里, 我们使用内积记号 $\langle f, g \rangle = \int_H f(z) \overline{g(z)} dz$. 因为 $r_a \in b^2$, Berezin 变换的定义中的积分无论 p 为何都定义良好. 显然, $\tilde{S}$ 在 H 上是连续的.

设 $L^p(H)$ 是 H 上的 p 次方可积函数, $L_a^p(H)$ 是 $L^p(H)$ 上的解析函数空间. 定义 M_ϕ 是乘法算子, $M_\phi = \phi f$, $f \in L_H^2$. $\{e_n(z)\}_{n \geq 0}$ 为 $L_a^2(H)$ 的规范正交基, K 为 $L_a^2(H) \rightarrow b^2$ 的算子, 使得

$$K(e_{2n}(z)) = e_n(z), \quad K(e_{2n+1}(z)) = \overline{e_{n+1}(z)}$$

成立. K^* 为 K 的对偶算子, 即 K^* 为 $b^2 \rightarrow L_a^2(H)$ 的算子, 使得

$$K^*(e_n(z)) = e_{2n}(z), \quad K^*(\overline{e_{n+1}(z)}) = e_{2n+1}(z)$$

成立. 对所有的 $n \geq 0$, $\phi \in L^\infty(H)$, 定义调和 Bergman 空间上的 H-Toeplitz 算子, 对所有的 $f \in b^2$, $B_\phi : b^2 \rightarrow b^2$, 其中 $B_\phi(f) = RM_\phi K^*(f)$.

令 $\hat{H} = H \cup \{\infty\}$ 表示 H 的一点处的紧化. 我们用 $C_0(\hat{H})$ 表示在 $\partial\hat{H} = \hat{H} \setminus H$ 上消失的所有在 $\hat{H}$ 上连续函数的空间, 对于一个函数 $f \in C_0(\hat{H})$ 意味着 f 能连续扩展到整个 $\hat{H}$ 并且在 $\partial\hat{H}$ 上趋于 0. 因此, $f \in C_0(\hat{H})$ 当且仅当 $z \rightarrow \partial\hat{H}$ 时 $f(z) \rightarrow 0$, 其中 $z \rightarrow \partial\hat{H}$ 意味着 $|z| \rightarrow \infty$ 或 $z_n \rightarrow 0$.

在本文中, 我们的主要问题是探索对于所有 $\phi \in L^\infty$ 时的 H-Toeplitz 算子 B_ϕ , 若 $\tilde{B}_\phi \in C_0(\hat{H})$ 当且仅当 B_ϕ 在 b^2 上是紧的.

Berezin 变换在函数空间的算子理论中一直起着核心作用. 本文中研究的 H-Toeplitz 算子在 Berezin 变换下满足的条件与紧性等价. 在第 2 节中总结了预备知识. 在第 3 节中, 我们得到了一些可积性条件, 确保 H-Toeplitz 算子满足对于所有 $\phi \in L^\infty$ 时的 H-Toeplitz 算子 B_ϕ , 若 $\tilde{B}_\phi \in C_0(\hat{H})$ 当且仅当 B_ϕ 在 b^2 上是紧的.

§2 预备知识

在本节中, 我们简要回顾一些将在后续章节中使用的基本事实. 本文中, 字母 a 表示 H 中的任意一点. 我们用 ψ_a 表示 H 上的映射, 定义为 $\psi_a(z) = a_n^{-1}(z - a')$, 其中 $a' \in \mathbf{R}^{n-1}$ 与 $(a', 0) \in \mathbf{R}^n$ 相同. 注意 $\psi_a(a) = \mathbf{e}$, 其中 $\mathbf{e} = (0', 1)$ 是 H 的标准点. 此外, $\psi_a : H \rightarrow H$ 是一个双射, 其逆为 $\psi_a^{-1}(z) = a_n z + a'$, 其中 $\zeta \in \partial H$. 注意 $a = (a', a_n) \rightarrow \zeta$ 当且仅当 $a_n \rightarrow 0$ 且 $a' \rightarrow \zeta$. 因此, $a \rightarrow \zeta$ 时 $\psi_a^{-1} \rightarrow \zeta$ 在 H 的每个紧子集上成立. 同样地, 对于 $\zeta = \infty$ 也是如此. 类似地, 当 $a \rightarrow \partial\hat{H}$ 时 $\psi_a^{-1} \rightarrow \partial\hat{H}$ 在 H 的每个紧子集上是一致成立的.

对于 H 上的可测函数 f , 与 ψ_a 相关的线性算子 U_a 定义为 $U_a f = (f \circ \psi_a) a_n^{-n/2}$. 每个 U_a 都是一个可逆算子, 其逆为 $U_a^{-1} f = (f \circ \psi_a^{-1}) a_n^{n/2}$. 注意 ψ_a 的雅可比行列式值为常数 a_n^{-n} . 因此, 对于任意 $f, g \in L^2$ 通过变量替换, 可得

$$\langle U_a f, g \rangle = \langle f, U_a^{-1} g \rangle. \quad (2.1)$$

在接下来的内容中, 注意 U_a 将调和函数映射到调和函数. 因此, 每个 U_a 在限制到 b^2 时, 是依赖于 a_n 常数乘以一个满射等距算子.

核 $R(z, w)$ 在两个变量中都是 n 阶齐次的, 并且在水平平移下不变. 由此可得

$$R(\psi_a(z), \psi_a(w)) = a_n^n R(z, w), \quad (2.2)$$

对于所有 $z, w \in H$ 成立. 特别地, 取 $z = a$, 有

$$R_{\mathbf{e}} \circ \psi_a = a_n^n R_a, \quad (2.3)$$

使用这个关系并进行变量替换, 可得

$$\|R_a\|_2 = a_n^{-n/2} \|R_{\mathbf{e}}\|_2, \quad (2.4)$$

同时得到

$$U_a R_{\mathbf{e}} = a_n^{n/2} R_a \Leftrightarrow U_a r_{\mathbf{e}} = r_a. \quad (2.5)$$

定义 $B_{\phi,a}$ 为 $B_{\phi,a} = U_a^{-1} B_{\phi} U_a$. 通过 (2.1) 和 (2.5), 有

$$\tilde{B}_{\phi}(a) = \langle B_{\phi,a} r_{\mathbf{e}}, r_{\mathbf{e}} \rangle. \quad (2.6)$$

我们先证明 B_{ϕ} 一个重要的性质, 由于投影算子 R 是有界线性的, K^* 也是有界线性且范数为 1, M_{ϕ} 是乘法算子且范数有界. 显然 B_{ϕ} 有界, 即 $B_{\phi} \in L(b^2)$.

引理 2.1 令 $\phi \in L^{\infty}$, 任取 $z \in H$, 有 $\tilde{B}_{\phi} = \tilde{B}_{\phi,z} \circ \psi_z$.

证 令 $z, w \in H$. 因为

$$\tilde{B}_{\phi,z} \circ \psi_z(w) = \langle U_z^{-1} B_{\phi} U_z r_{\psi_z(w)}, r_{\psi_z(w)} \rangle = \langle B_{\phi} U_z r_{\psi_z(w)}, U_z r_{\psi_z(w)} \rangle,$$

通过 (2.1), 可以知道 $U_z r_{\psi_z(w)} = r_w$. 根据 U_z 的定义和 (2.2), 有

$$U_z r_{\psi_z(w)} = \frac{[R_{\psi_z(w)} \circ \psi_z] z_n^{-n/2}}{\sqrt{R(\psi_z(w), \psi_z(w))}} = \frac{z_n^{n/2} R_w}{\sqrt{z_n^n R(w, w)}} = r_w.$$

引理得证.

第三部分会用到文 [6] 的重要引理.

引理 2.2 [6] 令 $1 < p < \infty$, $\{f_j\}$ 是 b^p 中的一个序列. 那么 f_j 在 b^p 中弱收敛于 0, 当且仅当 $f_j \rightarrow 0$ 在 H 的每个紧子集上一致收敛且 $\sup_j \|f_j\|_p < \infty$.

引理 2.3 [6] 对于 $1 < p < \infty$, 当 $z \rightarrow \partial \hat{H}$ 时, $R_z \|R_z\|_p^{-1}$ 在 b^p 中弱收敛于 0.

§3 H-Toeplitz 算子紧性

命题 3.1 设 $\phi \in L^{\infty}$, 若 B_{ϕ} 在 b^2 上是紧的, 则 $\tilde{B}_{\phi} \in C_0(\hat{H})$.

证 假设 B_{ϕ} 是 b^2 上的紧算子. 由于紧算子会将任意弱收敛的序列映射到一个范数收敛的序列, 由引理 2.3 得到当 $z \rightarrow \partial \hat{H}$ 时, 有

$$\langle B_{\phi} R_z \|R_z\|_2^{-1}, R_z \|R_z\|_2^{-1} \rangle \rightarrow 0.$$

注意, 通过 (2.4) 可知上式左边乘以一个常数等于 $\tilde{B}_{\phi}(z)$. 证毕.

在本节中, 我们得到 H-Toeplitz 算子 $B_{\phi} \in L(b^2)$ 上的充分条件, 以确保命题 3.1 的逆成立.

经过 Berezin 变换, $L(b^2)$ 中的一些非平凡算子会变为 0. 设 $L_0(b^2) = \{S \in L(b^2) : \tilde{S} = 0 \text{ 但 } S \neq 0\}$. 这样 $L(b^2) \setminus L_0(b^2)$ 中的算子在 Berezin 变换后化为 0 的只能是零算子. 给定

序列 $\{S_j\}$ 在 $L(b^2)$ 中和 $S \in L(b^2)$, 我们称在 b^2 上 S_j 弱收敛于 S , 即, 如果对所有 $f \in b^2$, 有 $S_j f \rightarrow S f$, 则记之为 $S_j \xrightarrow{w} S$.

命题 3.2 设 $\phi \in L^\infty$, B_ϕ 满足以下两个条件:

- (1) 对于每个 $\zeta \in \partial\hat{H}$ 和一个序列 $z_k \in H \rightarrow \zeta$, 存在一个子序列 $\{z_{k_j}\}$ 和一个算子 $B_{\phi, \zeta} \in L(b^2)$, 使得在 $L(b^2)$ 中序列 $B_{\phi, z_{k_j}} \xrightarrow{w} B_{\phi, \zeta}$.
- (2) 存在 $\zeta_0 \in \partial\hat{H}$ 满足 $B_{\phi, \zeta_0} \notin L_0(b^2)$.

证 先证明 B_ϕ 满足条件 (1), 由于 $B_\phi = RM_\phi K^*$, 其中 ϕ 属于 L^∞ . 由于算子 K^* 是线性的, M_ϕ 是乘法算子, 投影 R 也是线性的, 那么 B_ϕ 是线性的显然成立.

已知 K 是有界的, 且 $\|K\| = 1$, 那么 $\|K\| = \|K^*\| = 1$. 由 R 为投影算子, 必然有界, M_ϕ 中 ϕ 属于 L^∞ , 那么 $\|B_\phi\| = \|R\|\|\phi\|_\infty\|K\| \leq \|\phi\|_\infty$, 因此 B_ϕ 是连续的. 下面证明弱收敛成立, 任取 $\zeta \in \partial\hat{H}$ 和一个序列 $z_k \in H \rightarrow \zeta$. 证明任取 f, g 属于 b^2 时, 有 $(B_{\phi, z_{k_j}} f, g) = (B_{\phi, \zeta} f, g)$ 即可.

$$\begin{aligned} (B_{\phi, z_{k_j}} f, g) &= (U_{z_{k_j}}^{-1} B_\phi U_{z_{k_j}} f, g) = (B_\phi U_{z_{k_j}} f, U_{z_{k_j}} g) \\ &\rightarrow (B_\phi U_\zeta f, U_\zeta g) = (U_\zeta^{-1} B_\phi U_\zeta f, g) = (B_{\phi, \zeta} f, g). \end{aligned}$$

综上所述, B_ϕ 满足条件 (1).

下面证明 B_ϕ 满足条件 (2). 我们需要证明对于 B_ϕ , 存在 $\zeta_0 \in \partial\hat{H}$, 使得 $B_{\phi, \zeta_0} \notin L_0(b^2)$. 这里的关键是证明一个边界点 ζ_0 , 使得 B_{ϕ, ζ_0} 的 Berezin 变换不恒为零. 首先, 我们知道 $B_\phi = RM_\phi K^*$. 假设对所有 $\zeta \in \partial\hat{H}$, $B_{\phi, \zeta} \in L_0(b^2)$. 这意味着对所有 $\zeta \in \partial\hat{H}$, $\tilde{B}_{\phi, \zeta}(z) = 0$.

根据 Berezin 变换的定义, 有

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{\phi, \zeta}(z) &= \langle B_{\phi, \zeta} r_z, r_z \rangle \\ &= \langle U_\zeta^{-1} B_\phi U_\zeta r_z, r_z \rangle \\ &= \langle RM_\phi K^* U_\zeta r_z, U_\zeta r_z \rangle \\ &= \langle M_\phi K^* U_\zeta r_z, U_\zeta r_z \rangle \\ &= \langle K^* U_\zeta r_z, \bar{\phi} U_\zeta r_z \rangle. \end{aligned}$$

如果对所有 $\zeta \in \partial\hat{H}$ 和所有 $z \in H$, 这个内积都为零, 那么 $K^* U_\zeta r_z = 0$ 或 $\phi = 0$. 但是, 我们知道 K^* 是有界的且非零, U_ζ 是可逆的, r_z 是非零的. 因此, $K^* U_\zeta r_z \neq 0$. 这意味着, 如果 $\tilde{B}_{\phi, \zeta}(z) = 0$ 对所有 ζ 和 z 成立, 那么 ϕ 必须几乎处处为零. 然而, 这与我们的假设 $\phi \in L^\infty$ 且非零矛盾. 因此, 假设错误. 也就是说, 必然存在至少一个 $\zeta_0 \in \partial\hat{H}$, 使得 $B_{\phi, \zeta_0} \notin L_0(b^2)$. 这就完成了对条件 2 的证明.

命题 3.3 设 $\phi \in L^\infty$, 那么 $\tilde{B}_\phi \in C_0(\hat{H})$ 当且仅当 $z \rightarrow \partial\hat{H}$ 时, $B_{\phi, z} \xrightarrow{w} 0$.

证 充分性由 $\tilde{B}_\phi(z) = \langle B_{\phi, z} r_e, r_e \rangle$ 得到. 下面只需证明必要性. 设 $\tilde{B}_\phi \in C_0(\hat{H})$, 为了得到矛盾, 假设当 $z \rightarrow \partial\hat{H}$ 时, $B_{\phi, z} \notin L(b^2)$ 中弱收敛到 0. 那么存在函数 $f, g \in b^2$, 使得

$$\limsup_{z \rightarrow \partial\hat{H}} |\langle B_{\phi, z} f, g \rangle| > 0.$$

由于命题 3.2, 以及 $\hat{H}$ 的紧性得到一个序列 $\{z_k\}$ 收敛到某个 $\zeta \in \partial\hat{H}$ 和一个算子 $B_{\phi,\zeta} \in L(b^2) \setminus L_0(b^2)$, 使得在 $L(b^2)$ 上 $|\langle B_{\phi,z_k}f, g \rangle|$ 收敛到某个正数且 $B_{\phi,z_k} \xrightarrow{w} B_{\phi,\zeta}$, 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\langle B_{\phi,z_k}f, g \rangle| = |\langle B_{\phi,\zeta}f, g \rangle| > 0,$$

同时, 给定 $z, w \in H$, 我们由引理 2.1 得到 $\tilde{B}_\phi(\varphi_z^{-1}(w)) = \tilde{B}_{\phi,z}(w) = \langle B_{\phi,z}r_w, r_w \rangle$. 固定 w , 当 $z \rightarrow \partial\hat{H}$ 时 $\varphi_z^{-1}(w) \rightarrow \partial\hat{H}$. 在上述显示表达式中用 z_k 替换 z , 然后取极限 $k \rightarrow \infty$, 可得

$$\langle B_{\phi,\zeta}r_w, r_w \rangle = \tilde{B}_{\phi,\zeta}(w) = 0.$$

由 $\tilde{B}_{\phi,\zeta}(w) = 0$ 和 w 的任意性可知 $B_{\phi,\zeta} = 0$, 但是 $B_{\phi,\zeta} \in L(b^2) \setminus L_0(b^2)$, 由此得到矛盾. 命题得证.

引理 3.1 令 α 为实数, 任取 $\phi \in L^\infty$, 对于所有 $z \in H$, 有

$$\int_H |B_\phi R_z(w)| w_n^\alpha dw = z_n^\alpha \|B_{\phi,z}R_e\|_{L_\alpha^1}.$$

对于所有 $w \in H$, 有

$$\int_H |B_\phi R_z(w)| z_n^\alpha dz = w_n^\alpha \|B_{\phi,w}^*R_e\|_{L_\alpha^1}.$$

证 令 $z \in H$, 由于 $R_z = z_n^{-n/2}U_zR_e$, 根据 (2.5), 有

$$B_\phi R_z = z_n^{-n/2}B_\phi U_zR_e = z_n^{-n/2}U_zB_{\phi,z}R_e = z_n^{-n}(B_{\phi,z}R_e) \circ \phi_z,$$

因此对两边积分, 得到

$$\int_H |B_\phi R_z(w)| w_n^\alpha dV(w) = z_n^{-n} \int_H |(B_{\phi,z}R_e) \circ \phi_z(w)| w_n^\alpha dV(w),$$

将 w 替换为 $\phi_z^{-1}(x)$ 在右边的积分中, 得到

$$\int_H |B_\phi R_z(w)| w_n^\alpha dV(w) = z_n^\alpha \int_H |B_{\phi,z}R_e(x)| x_n^\alpha dV(x),$$

这证明了对于所有 $z \in H$,

$$\int_H |B_\phi R_z(w)| w_n^\alpha dw = z_n^\alpha \|B_{\phi,z}R_e\|_{L_\alpha^1}.$$

因此 $B_\phi^*R_w(z) = \langle B_\phi^*R_w, R_z \rangle = \langle R_w, B_\phi R_z \rangle = B_\phi R_z(w)$. 此外对所有 $z \in H$, 有

$$\int_H |B_\phi R_z(w)| w_n^\alpha dw = z_n^\alpha \|B_{\phi,z}R_e\|_{L_\alpha^1}$$

对于所有 B_ϕ 都成立. 因此, 用 B_ϕ^* 代替 B_ϕ , 并交换上式中的 z 和 w , 可得对于所有 $w \in H$, 有

$$\int_H |B_\phi R_z(w)| z_n^\alpha dz = w_n^\alpha \|B_{\phi,w}^*R_e\|_{L_\alpha^1}.$$

引理 3.2 设 $\phi \in L^\infty$, 给定一个可测集 $E \subset H$, 定义

$$G_E f(w) = \int_E f(z) B_\phi R_z(w) dV(z), \quad w \in H.$$

对于 $f \in L^2$, 若存在某个 α , 使得

$$C_1 = \sup_{z \in E} \|B_{\phi,z}R_e\|_{L_{\alpha/2}^1} < \infty \quad \text{且} \quad C_2 = \sup_{z \in H} \|B_{\phi,z}^*R_e\|_{L_{\alpha/2}^1} < \infty,$$

则 G_E 在 L^2 上有界, 并且 $\|G_E\| \leq C_1^{1/2} C_2^{1/2}$.

证 固定 $f \in L^2$. 选择一个 α 使得上述条件成立. 对于任意 $w \in H$, 有

$$\begin{aligned} |G_E f(w)| &\leq \int_E |f(z)| |B_\phi R_z(w)| dV(z) \\ &= \int_E |f(z)| |B_\phi R_z(w)|^{1/2} z^{-\alpha} \cdot |B_\phi R_z(w)|^{1/2} z^\alpha dV(z). \end{aligned}$$

应用 Hölder 不等式, 通过前面的引理中的第二个等式, 可得

$$\begin{aligned} |G_E f(w)|^2 &\leq \left(\int_E |f(z)|^2 |B_\phi R_z(w)| z_n^{-\alpha/2} dV(z) \right) \left(\int_H |B_\phi R_z(w)| z_n^{\alpha/2} dV(z) \right) \\ &\leq C_2 w_n^{\alpha/2} \int_E |f(z)|^2 |B_\phi R_z(w)| z_n^{-\alpha/2} dV(z). \end{aligned}$$

因此, 将两边对测度 $dV(w)$ 积分, 然后交换积分顺序, 通过前面引理的第一个等式, 可得

$$\begin{aligned} \int_H |G_E f(w)|^2 dV(w) &\leq C_2^{2/2} \int_E |f(z)|^2 z_n^{-\alpha/2} \left(\int_H |B_\phi R_z(w)| w^{\alpha/2} dV(w) \right) dV(z) \\ &\leq C_1 C_2^{2/2} \int_H |f(z)|^2 dV(z). \end{aligned}$$

因此

$$\|G_E f\|_2 \leq C_1^{1/2} C_2^{1/2} \|f\|_2.$$

证毕.

引理 3.3 设 $\phi \in L^\infty$, 若 $\sup_{z \in H} \|B_{\phi, z}^* R_e\|_{L_{\alpha/2}^1} < \infty$, 且当 $z \rightarrow \partial \hat{H}$ 时, 对于某个 α , 有 $\|B_{\phi, z} R_e\|_{L_{\alpha/2}^1} \rightarrow 0$, 则 B_ϕ 在 b^2 上是紧的.

证 对于 $w \in H$ 和 $f \in b^2$, 由

$$B_\phi^* R_w(z) = \langle B_\phi^* R_w, R_z \rangle = \langle R_w, B_\phi R_z \rangle = \overline{B_\phi R_z(w)},$$

有

$$\begin{aligned} B_\phi f(w) &= \langle B_\phi f, R_w \rangle \\ &= \langle f, B_\phi^* R_w \rangle \\ &= \int_H f(z) \overline{B_\phi^* R_w(z)} dV(z) \\ &= \int_H f(z) B_\phi R_z(w) dV(z). \end{aligned}$$

因此, 扩展 B_ϕ 作为作用于整个 L^2 的积分算子, 有 $B_\phi = G_H$. 给定一个紧集 $E \subset H$, 有 $B_\phi - G_E = G_{H \setminus E}$. 因此根据前面的引理,

$$\|B_\phi - G_E\| \leq \left(\sup_{z \in H \setminus E} \|B_{\phi, z} R_e\|_{L_{\alpha/2}^1} \right)^{1/2} \left(\sup_{z \in H} \|B_{\phi, z}^* R_e\|_{L_{\alpha/2}^1} \right)^{1/2}.$$

注意到上式右侧的量在 E 扩展到整个 H 时趋于 0. 因此算子 B_ϕ 可以用算子 G_E 在算子范数下逼近. 故只需证明每个 G_E 在 L^2 上是紧的, 就可以得出 B_ϕ 在 L^2 上是紧的, 从而在 b^2 上也是紧的.

现在, 我们证明每个 G_E 在 L^2 上是紧的. 固定 E , 并设

$$K(w, z) = B_\phi R_z(w) \chi_E(z),$$

其中 χ_E 是 E 的特征函数. 从而有

$$G_E f(w) = \int_H K(w, z) f(z) dV(z).$$

因此, 为了证明 G_E 是紧的, 需要证明 (见文 [11])

$$\int_H \left(\int_H |K(w, z)|^2 dV(w) \right)^{1/2} dV(z) < \infty.$$

记 M 为上式左侧的积分, 有

$$\begin{aligned} M &= \int_E \|B_\phi R_z\|_{L^2}^2 dV(z) \\ &\leq \|B_\phi\|^2 \int_E \|R_z\|_{L^2}^2 dV(z) \\ &= \|R_e\|_{L^2}^2 \|B_\phi\|^2 \int_E z^{-n} dV(z). \end{aligned}$$

由于 E 是紧集, 上式右侧的积分是有限的. 因此

$$\int_H \int_H |K(w, z)|^2 dV(w) dV(z) < \infty$$

成立且 G_E 是 L^2 上的紧算子. 证明完成.

给定一个算子 $\phi \in L^\infty$, 对于 $z \in H$, 它的极大函数 $\mathcal{M}[B_\phi]$ 定义为

$$\mathcal{M}[B_\phi] = \sup_{a \in H} |B_{\phi, a} R_e(z)|.$$

我们现在证明以下定理.

定理 3.1 设 $\phi \in L^\infty$, $\mathcal{M}[B_\phi] \in L^1_{\alpha/2}$ 且对于某个实数 α , 有

$$\sup_{z \in H} \|B_{\phi, z}^* R_e\|_{L^1_{\alpha/2}} < \infty.$$

以下陈述是等价的:

- (a) $\tilde{B}_\phi \in C_0(\hat{H})$.
- (b) 当 $z \rightarrow \partial \hat{H}$ 时, $B_{\phi, z} \xrightarrow{w} 0$ 在 $B_\phi \in L(b^2)$ 中.
- (c) 当 $z \rightarrow \partial \hat{H}$ 时, $B_{\phi, z} R_e \rightarrow 0$ 在 H 的每个紧子集上一致成立.
- (d) 当 $z \rightarrow \partial \hat{H}$ 时, $\|B_{\phi, z} R_e\|_{L^1_{\alpha/2}} \rightarrow 0$.
- (e) B_ϕ 在 b^2 上是紧的.

证 由命题 3.3 的证明可以知道 (a) 和 (b) 等价, 显然 (a) $\implies$ (b).

假设 (b) 是成立的, 那么在 b^2 中, 当 $z \rightarrow \partial \hat{H}$ 时, $B_{\phi, z}$ 弱收敛于 0 成立. 根据引理 2.2 可以知道 (c) 成立, 即 (b) $\implies$ (c).

已知对所有 $z \in H$, $|B_{\phi, z} R_e| \leq \mathcal{M}[B_\phi] \in L^1_{\alpha/2}$, 由 (c) 成立可知当 $z \rightarrow \partial \hat{H}$ 时, $B_{\phi, z} R_e(w) \rightarrow 0$ 对于每个固定的 $w \in H$ 都成立. 因此 $|B_{\phi, z} R_e(w)| w_n^{\alpha/2} \rightarrow 0$. 由

$$M[B_\phi] \in L^1_{\alpha/2}, \quad M[B_\phi](w) = \sup_{a \in H} |B_{\phi, a} R_e(w)|$$

可知对于所有 $z \in H$ 和 $w \in H$, 有

$$|B_{\phi,z}R_{\mathbf{e}}(w)|w_n^{\alpha/2} \leq M[B_{\phi}](w)w_n^{\alpha/2}.$$

因为 $M[B_{\phi}](w)w_n^{\alpha/2}$ 是 L^1 可积的, 故对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在一个紧集 $K \subset H$, 使得

$$\int_{H \setminus K} M[B_{\phi}](w)w_n^{\alpha/2} dV(w) < \varepsilon.$$

应用控制收敛定理, 得

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \partial \hat{H}} \|B_{\phi,z}R_{\mathbf{e}}\|_{L^1_{\alpha/2}} &= \lim_{z \rightarrow \partial \hat{H}} \int_H |B_{\phi,z}R_{\mathbf{e}}R_{\mathbf{e}}(w)|w_n^{\alpha/2} dV(w) \\ &= \lim_{z \rightarrow \partial \hat{H}} \left(\int_K |B_{\phi,z}R_{\mathbf{e}}(w)|w_n^{\alpha/2} dV(w) + \int_{H \setminus K} |B_{\phi,z}R_{\mathbf{e}}(w)|w_n^{\alpha/2} dV(w) \right) \\ &\leq \lim_{z \rightarrow \partial \hat{H}} \int_K |B_{\phi,z}R_{\mathbf{e}}(w)|w_n^{\alpha/2} dV(w) + \varepsilon, \end{aligned}$$

第一个积分趋于零 (因为 $B_{\phi,z}R_{\mathbf{e}} \rightarrow 0$ 在 K 上一致收敛), 而 ε 可以任意小. 因此, 我们得出当 $z \rightarrow \partial \hat{H}$ 时, $\|B_{\phi,z}R_{\mathbf{e}}\|_{L^1_{\alpha/2}} \rightarrow 0$. 这就完成了 (c) $\Rightarrow$ (d) 的证明.

此外, 假设 (d) 成立和已知的

$$\sup_{z \in H} \|B_{\phi,z}^*R_{\mathbf{e}}\|_{L^1_{\alpha/2}} < \infty,$$

根据引理 3.3, 我们有 (d) $\Rightarrow$ (e). 最后由命题 3.1 得到 (e) $\Rightarrow$ (a), 证明完成.

参 考 文 献

- [1] Ramey W, Yi H. Harmonic Bergman functions on half-spaces [J]. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1996, 348(2):633–660.
- [2] Axler S, Bourdon P, Ramey W. Harmonic function theory [M]. New York: Springer-Verlag, 2001.
- [3] Axler S, Zheng D. Compact operators via the Berezin transform [J]. *Indiana University Mathematics Journal*, 1998, 47(2):387–400.
- [4] Miao J, Zheng D. Compact operators on Bergman spaces [J]. *Integral Equations and Operator Theory*, 2004, 48:61–79.
- [5] Gupta A, Singh S K. H-Toeplitz operators on the Bergman space [J]. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 2021, 58(2):327–347.
- [6] Choe B R, Nam K. Berezin transform and Toeplitz operators on harmonic Bergman spaces [J]. *Journal of Functional Analysis*, 2009, 257(10):3135–3166.
- [7] Aleman A, Siskakis A G. Integration operators on Bergman spaces [J]. *Indiana University Mathematics Journal*, 1997, 337–356.
- [8] Zhu K. The Berezin transform and its applications [J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2021, 41(6):1839–1858.
- [9] Coburn L. Sharp Berezin Lipschitz estimates [J]. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2007, 135(4):1163–1168.

- [10] Li R, Bing D, Sun M. Commuting H-Toeplitz operators and commuting dual H-Toeplitz operators [J]. *Advances in Mathematics*, to appear.
- [11] Dunford N, Schwartz J T. Linear operators, Part I [M]. New York: John Wiley Sons Inc., 1988.

The H-Toeplitz Operator on the Harmonic Bergman Space of the Upper Half-Space

ZHANG Chengjia¹ SUN Minghao¹ LI Ran²

¹School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian 116082, Liaoning, China. E-mail: 13188027476@163.com; 1207450400@qq.com

²Corresponding author. School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian 116082, Liaoning, China. E-mail: Liranmika@163.com

Abstract This paper studies the compactness of H-Toeplitz operators on the harmonic Bergman space over the upper half-space. It introduces the reproducing kernel and the orthogonal projection of the harmonic Bergman space in the upper half-space and provides a complete characterization of the compactness of H-Toeplitz operators with bounded symbols. The research results indicate that H-Toeplitz operators in the harmonic Bergman space differ significantly from those in the Bergman space, laying a solid foundation for further studies in operator theory on harmonic Bergman spaces.

Keywords Harmonic Bergman space, H-Toeplitz operator, Berezin transform

2020 MR Subject Classification 47B35, 32A36

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 46 No. 2, 2025

by ALLERTON PRESS, INC., USA