

弱对偶 Drazin 逆的性质及刻画*

王宏兴¹ 凌秋丽² 蒋添合³ LIU Shuangzhe⁴

提要 对偶 Drazin 逆是一种重要的对偶广义逆. 作者为了推广它, 引入了对任意对偶方阵都唯一存在的弱对偶 Drazin 逆. 当对偶 Drazin 逆存在时, 它与弱对偶 Drazin 逆等价. 此外, 作者还引入了弱对偶群逆, 并将其应用于一类约束对偶矩阵方程的研究.

关键词 对偶 Drazin 逆, 对偶群逆, 弱对偶 Drazin 逆, 弱对偶群逆

MR (2020) 主题分类 15A66, 15A09, 15A24

中图法分类 O151

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2025)02-0169-18

§1 引 言

对偶数及其代数作为一个强有力的且便捷的数学工具, 广泛应用于运动学分析^[1–4]和机器人学^[5–8]. 此外, 它还可以用于解决在螺旋运动^[9]和刚体运动^[10–11]中的线性方程.

在本文中, 对偶数 $\hat{a} = a + \varepsilon a_0$ 是由实部 a 和对偶部 εa_0 组成, 其中 a 和 a_0 是实数; ε 是对偶元且满足 $\varepsilon^2 = 0$, $0\varepsilon = \varepsilon 0 = 0$, 和 $1\varepsilon = \varepsilon 1 = \varepsilon$, 但 $\varepsilon \neq 0$. 记 $\mathbb{D}$ 为对偶数集, $\mathbb{D}^{m \times n}$ 为 $m \times n$ 阶对偶矩阵集. 因为对偶矩阵的每一项元素都是对偶数, 对偶矩阵 $\widehat{M} \in \mathbb{D}^{m \times n}$ 可表示为 $\widehat{M} = M + \varepsilon M_0$, 其中 $M, M_0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 记 I_n 为 $n \times n$ 阶单位矩阵. 如果 k 是 $\text{rank}(M^{k+1}) = \text{rank}(M^k)$ 成立的最小正整数, 则称 k 为 M 的指标, 记为 $\text{Ind}(M) = k$. 设对偶矩阵 $\widehat{M} \in \mathbb{D}^{n \times n}$ 和 $\widehat{L} \in \mathbb{D}^{n \times n}$, 如果 $\widehat{M}\widehat{B} = \widehat{B}\widehat{M} = I_n$, 则 $\widehat{M}$ 可逆, 且 $\widehat{L}$ 是 $\widehat{M}$ 的对偶逆矩阵, 记为 $\widehat{L} = \widehat{M}^{-1}$. 然而, 对偶矩阵的逆并不总是存在的, 只有它存在时, 我们才能用于解决相关的实际问题, 如机械工程领域^[2,12–13]的相关线性系统等问题. 因此, 引入对偶广义逆就是为了解决此类问题.

最近, 对偶矩阵的对偶广义逆矩阵引起了人们的广泛关注, 特别是对偶 Moore-Penrose 广义逆. 给定一个 $m \times n$ 阶对偶矩阵 $\widehat{M}$, 若存在一个对偶矩阵 $\widehat{X} \in \mathbb{D}^{n \times m}$, 满足 Penrose

本文 2024 年 4 月 28 日收到, 2025 年 4 月 1 日收到修改稿.

¹通信作者. 广西民族大学数学科学学院; 广西民族大学应用数学中心, 南宁 530006.

E-mail: winghongxing0902@163.com

²广西民族大学数学科学学院; 广西民族大学应用数学中心, 南宁 530006. E-mail: l13211322247@163.com

³广西卫生职业技术学院公共基础部, 南宁 530023. E-mail: Yeoljiang@163.com

⁴Faculty of Science and Technology, University of Canberra, Canberra, 10587, ACT 2617, Australia.

E-mail: shuangzhe.liu@canberra.edu.au

*本文受到广西科技计划项目 (No. 桂科 AA24010005), 广西科技基地和人才专项基金 (No. 桂科 AD19245148) 和广西民族大学科研基金项目 (No. 2019KJQD03) 的资助.

条件:

$$\widehat{M}\widehat{X}\widehat{M} = \widehat{M}, \quad \widehat{X}\widehat{M}\widehat{X} = \widehat{X}, \quad (\widehat{M}\widehat{X})^T = \widehat{M}\widehat{X}, \quad (\widehat{X}\widehat{M})^T = \widehat{X}\widehat{M}, \quad (1.1)$$

则称 $\widehat{X}$ 为 $\widehat{M}$ 的对偶 Moore-Penrose 逆 (简称 DMPI), 记 $\widehat{X} = \widehat{M}^\dagger$. Wang^[14] 给了两个对偶矩阵有 DMPI 的充分必要条件.

在文 [15] 中, Zhong 和 Zhang 介绍对偶群逆并考虑了对偶群逆的存在性、计算和应用. 给定一个 $m \times n$ 阶对偶矩阵 $\widehat{M} = M + \varepsilon M_0$, 其中 $\text{ind}(M) = 1$. 若存在一个对偶矩阵 $\widehat{X} \in \mathbb{D}^{n \times n}$, 满足

$$\widehat{M}\widehat{X}\widehat{M} = \widehat{M}, \quad \widehat{X}\widehat{M}\widehat{X} = \widehat{X}, \quad \widehat{M}\widehat{X} = \widehat{X}\widehat{M}, \quad (1.2)$$

则称 $\widehat{X}$ 为 $\widehat{M}$ 的对偶群逆 (DGI), 记 $\widehat{X} = \widehat{M}^\#$. 对偶群逆可用于解决对偶线性系统的最小二乘问题. Wang 和 Gao^[16] 引入了对偶指标和对偶 core 逆. 给定一个 $n \times n$ 阶对偶矩阵 $\widehat{M} = M + \varepsilon M_0$, 其中 $\text{ind}(M) = 1$. 若存在一个对偶矩阵 $\widehat{X} \in \mathbb{D}^{n \times n}$, 满足

$$\widehat{M}\widehat{X}\widehat{M} = \widehat{M}, \quad \widehat{X}\widehat{M}\widehat{X} = \widehat{X}, \quad (\widehat{M}\widehat{X})^T = \widehat{M}\widehat{X}, \quad (1.3)$$

则称 $\widehat{X}$ 为 $\widehat{M}$ 的对偶 core 逆 (DCI), 记 $\widehat{X} = \widehat{M}^\oplus$. Wang 和 Gao^[16] 指出 $\widehat{M}$ 的对偶 core 逆存在当且仅当 $\widehat{M}$ 的指标为 1, 并给出对偶 core 逆的一些刻画和性质. 此外, Zhong 和 Zhang^[17] 引入了对偶 Drazin 逆. 给定一个 $n \times n$ 阶对偶矩阵 $\widehat{M} = M + \varepsilon M_0$, 其中 $\text{ind}(M) = k$. 若存在一个对偶矩阵 $\widehat{X} \in \mathbb{D}^{n \times n}$, 满足

$$\widehat{M}\widehat{X}\widehat{M}^k = \widehat{M}^k, \quad \widehat{X}\widehat{M}\widehat{X} = \widehat{X}, \quad \widehat{M}\widehat{X} = \widehat{X}\widehat{M}, \quad (1.4)$$

则称 $\widehat{X}$ 为 $\widehat{M}$ 的对偶 Drazin 逆 (简称 DDI), 记 $\widehat{X} = \widehat{M}^D$. 当对偶 Drazin 逆存在时, Zhong 和 Zhang^[17] 证明了 DDI 是唯一的, 给出了其存在的一些充要条件, 并给出一个简洁的计算 DDI 的公式.

值得注意的是, 上述对偶广义逆并非对每一个对偶矩阵都存在. 因此, 由进一步工作的需要, 在文 [18–19] 中, 学者引入了弱对偶广义逆, 每个对偶矩阵都有该对偶广义逆. 给定一个 $m \times n$ 阶对偶矩阵 $\widehat{M}$, 若存在唯一对偶矩阵 $\widehat{X} \in \mathbb{D}^{n \times m}$, 满足

$$\widehat{M}^T \widehat{M} \widehat{X} \widehat{M} \widehat{M}^T = \widehat{M}^T \widehat{M} \widehat{M}^T, \quad \widehat{X} \widehat{M} \widehat{X} = \widehat{X}, \quad (\widehat{M} \widehat{X})^T = \widehat{M} \widehat{X}, \quad (\widehat{X} \widehat{M})^T = \widehat{X} \widehat{M}, \quad (1.5)$$

则称 $\widehat{X}$ 为 $\widehat{M}$ 的弱对偶广义逆 (简称 WDGI), 记 $\widehat{X} = \widehat{M}_W^\dagger$. 易证 $\widehat{M}_W^\dagger = (\widehat{M}^T \widehat{M})^\dagger \widehat{M}^T = \widehat{M}^T (\widehat{M} \widehat{M}^T)^\dagger$. WDGI 是更广义的 DMPI, 它可以用来解决更一般的对偶线性系统问题 [18–19].

在本文中, 基于上述成果, 我们考虑对 DDI 进行推广, 得到一种新的广义逆, 使其对任意的对偶方阵都存在. 在 DDI 存在的条件下, 这个新逆与 DDI 等价. 同时, 讨论它的刻画与性质. 进一步, 我们引入广义 DGI, 给出它的刻画, 并将其应用于讨论约束对偶矩阵方程等问题.

§2 预备知识

在本节中, 我们介绍一些初步结果, 第一个是 core-EP 分解, 这是研究 Drazin 逆的最有力的工具.

定理 2.1^[20] 设 $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\text{ind}(M) = k$, $\text{rank}(M^k) = r$, 则存在一个可逆矩阵 P , 使得

$$M = P \begin{bmatrix} C & O \\ O & N \end{bmatrix} P^{-1}, \quad (2.1)$$

其中 $C \in \mathbb{R}^{r \times r}$ 是非奇异的, N 是幂零的.

根据上述分解, 下面给出 Drazin 逆的一个清晰而简洁的刻画.

引理 2.1^[20] 设 $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的核心-幂零分解如 (2.1) 所示, 则

$$M^D = P \begin{bmatrix} C^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1}. \quad (2.2)$$

根据 (2.1) 和 (2.2), Zhong 等人^[15,17] 分别得出了 DGI 和 DDI 的刻画.

引理 2.2^[15] 设 $\widehat{M} = M + \varepsilon M_0 \in \mathbb{D}^{n \times n}$, $\text{ind}(M) = 1$ 且 $(I_n - MM^\#)M_0(I_n - M^\#M) = O$, 则 $\widehat{M}$ 的 DGI $\widehat{M}^\#$ 存在, 且

$$\widehat{M}^\# = M^\# + \varepsilon((M^\#)^2 M_0(I_n - MM^\#) + (I_n - MM^\#)M_0(M^\#)^2 - M^\#M_0M^\#).$$

引理 2.3^[17] 设 $\widehat{M} = M + \varepsilon M_0 \in \mathbb{D}^{n \times n}$, 其中 $M, M_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\text{ind}(M) = k$. 令 $\widehat{M}^k = M^k + \varepsilon K_0$, 其中 $K_0 = \sum_{i=1}^k M^{k-i} M_0 M^{i-1}$, 则下列条件等价:

- (a) $\widehat{M}$ 的对偶 Drazin 逆存在;
- (b) $\widehat{M} = P \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} P^{-1} + \varepsilon P \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix} P^{-1}$, 其中 P 和 C 为非奇异矩阵, N 为幂零矩阵, 即 $N^k = 0$, 且 $\sum_{i=1}^k N^{k-i} M_4 N^{i-1} = 0$;
- (c) $(I_n - MM^D)K_0(I_n - MM^D) = 0$;
- (d) $\text{rank} \begin{bmatrix} K_0 & M^k \\ M^k & 0 \end{bmatrix} = 2\text{rank}(M^k)$;
- (e) $(\widehat{M}^k)^\dagger$ 存在.

此外, 若 $\widehat{M}$ 的对偶 Drazin 逆存在, 则

$$\widehat{M}^D = M^D + \varepsilon S,$$

其中

$$\begin{aligned} S &= (M^D)^2 \left(\sum_{i=0}^{k-1} (M^D)^i M_0 M^i \right) (I_n - MM^D) \\ &\quad + (I_n - MM^D) \left(\sum_{i=0}^{k-1} M^i M_0 (M^D)^i \right) (M^D)^2 - M^D M_0 M^D. \end{aligned}$$

设 $\widehat{M} = M + \varepsilon M_0 \in \mathbb{D}^{n \times n}$. 记 $\widehat{M}$ 的可观测秩为 $\text{ARank}(\widehat{M}) = \text{rank}(M)$, 记 $\widehat{M}$ 的秩为 $\text{Rank}(\widehat{M}) = \text{rank} \begin{bmatrix} M_0 & M \\ M & O \end{bmatrix} - \text{rank}(M)$, 记 $\widehat{M}$ 的可观指标为 $\text{AInd}(\widehat{M}) = \text{ind}(M)$, 并且记 $\widehat{M}$ 的指标为 $\text{Ind}(\widehat{M})$, 其中 t 是最小的正整数 ($k \leq t \leq 2k$, $k = \text{ind}(M)$), 使得 $\text{ARank}(\widehat{M}^t) = \text{Rank}(\widehat{M}^t)$, 更详细的描述可见文 [21].

引理 2.4 ^[21] 设 $\widehat{M} = M + \varepsilon M_0 \in \mathbb{D}^{n \times n}$, $\text{Ind}(\widehat{M}) = t$, $\text{Rank}(\widehat{M}^t) = r$, 则存在一个可逆对偶矩阵 $\widehat{P} \in \mathbb{D}^{n \times n}$, 使得

$$\widehat{M} = \widehat{P} \begin{bmatrix} \widehat{C} & O \\ O & \widehat{N} \end{bmatrix} \widehat{P}^{-1}, \quad (2.3)$$

其中 $\widehat{C} \in \mathbb{D}^{r \times r}$ 是可逆的, 且 $\widehat{N}$ 是幂零的, 即 $\widehat{N}^t = O$.

此外, 当 $\text{Ind}(\widehat{M}) = \text{AInd}(\widehat{M})$ 时, $\widehat{M}$ 的 DDI $\widehat{M}^D$ 存在, 并且

$$\widehat{M}^D = \widehat{P} \begin{bmatrix} \widehat{C}^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} \widehat{P}^{-1}. \quad (2.4)$$

§3 弱对偶 Drazin 逆

在本节中, 我们引入广义 DDI. 任意的对偶方阵都有广义 DDI.

定理 3.1 设 $\widehat{M} = M + \varepsilon M_0 \in \mathbb{D}^{n \times n}$, $\text{Ind}(\widehat{M}) = t$. 记 $K = \sum_{i=1}^t M^{t-i} M_0 M^{i-1}$, 则 $\widehat{M}^t = M^t + \varepsilon K$, 且存在一个 $n \times n$ 对偶矩阵 $\widehat{X} = X + \varepsilon S$, 满足

$$\widehat{M} \widehat{X} \widehat{M}^t = \widehat{M}^t, \quad \widehat{X} \widehat{M} \widehat{X} = \widehat{X}, \quad \widehat{M} \widehat{X} = \widehat{X} \widehat{M} \quad (3.1)$$

当且仅当

$$X = M^D, \quad (3.2)$$

$$K = M M^D K + M S M^t + M_0 M^D M^t, \quad (3.3)$$

$$S = M^D M S + M^D M_0 M^D + S M M^D, \quad (3.4)$$

$$M S + M_0 M^D = S M + M^D M_0. \quad (3.5)$$

证 设 $\widehat{M} = M + \varepsilon M_0 \in \mathbb{D}^{n \times n}$, $\text{AInd}(\widehat{M}) = k$, $\text{Ind}(\widehat{M}) = t$, 且 $\widehat{X} = X + \varepsilon S \in \mathbb{D}^{n \times n}$. 记 $K = \sum_{i=1}^t M^{t-i} M_0 M^{i-1}$. 易证 $\widehat{M}^t = M^t + \varepsilon K$. 将 $\widehat{X}$ 代入 $\widehat{M} \widehat{X} \widehat{M}^t = \widehat{M}^t$, $\widehat{X} \widehat{M} \widehat{X} = \widehat{X}$ 和 $\widehat{M} \widehat{X} = \widehat{X} \widehat{M}$, 可得

$$(M + \varepsilon M_0)(X + \varepsilon S)(M^t + \varepsilon K) = M X M^t + \varepsilon(M X K + M S M^t + M_0 X M^t) = M^t + \varepsilon K,$$

$$(X + \varepsilon S)(M + \varepsilon M_0)(X + \varepsilon S) = X M X + \varepsilon(X M S + X M_0 X + S M X) = X + \varepsilon S,$$

$$M X + \varepsilon(M S + M_0 X) = X M + \varepsilon(X M_0 + S M).$$

因此, $M X M^t = M^t$, $X M X = X$, $M X = X M$, $K = M X K + M S M^t + M_0 X M^t$, $S = X M S + X M_0 X + S M X$, $M S + M_0 X = S M + X M_0$. 由于 $\text{AInd}(\widehat{M}) = k$, $\text{Ind}(\widehat{M}) = t$, $t \geq k$, 可得 $M X M^t = M^t$, $X M X = X$ 和 $M X = X M$, 即 $X = M^D$. 所以可得 (3.2)–(3.5).

定理 3.2 设 $\widehat{M} = M + \varepsilon M_0 \in \mathbb{D}^{n \times n}$, $\text{Ind}(\widehat{M}) = t$, 则 (3.1) 的解是唯一的, 且

$$\widehat{X} = M^D + \varepsilon S, \quad (3.6)$$

其中

$$\begin{aligned} S &= (M^D)^2 \left(\sum_{i=0}^{t-1} (M^D)^i M_0 M^i \right) (I_n - M M^D) \\ &\quad + (I_n - M M^D) \left(\sum_{i=0}^{t-1} M^i M_0 (M^D)^i \right) (M^D)^2 - M^D M_0 M^D. \end{aligned} \quad (3.7)$$

证 设 $\widehat{M} = M + \varepsilon M_0 \in \mathbb{D}^{n \times n}$, $\text{AInd}(\widehat{M}) = k$, $\text{Ind}(\widehat{M}) = t$, $\text{rank}(M^k) = r$, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的核心-幂零分解如 (2.1) 所示, $\widehat{X} = M^D + \varepsilon S$ 为 (3.1) 的解. 设 $P^{-1}M_0P$ 和 $P^{-1}SP$ 的分块如下:

$$P^{-1}M_0P = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix}, \quad P^{-1}SP = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

其中 P 如 (2.1) 所示, $M_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $S_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}$. 根据 (2.1) 和 (3.8), 易证

$$\widehat{M}^t = M^t + \varepsilon K,$$

其中

$$K = \sum_{i=1}^t M^{t-i} M_0 M^{i-1} = P \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^t C^{t-i} M_1 C^{i-1} & \sum_{i=0}^{t-1} C^{t-1-i} M_2 N^i \\ \sum_{i=0}^{t-1} N^i M_3 C^{t-1-i} & O \end{bmatrix} P^{-1}. \quad (3.9)$$

记

$$\widehat{G} = P \begin{bmatrix} C^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1} + \varepsilon P \begin{bmatrix} -C^{-1} M_1 C^{-1} & \sum_{i=0}^{t-1} C^{-i-2} M_2 N^i \\ \sum_{i=0}^{t-1} N^i M_3 C^{-i-2} & O \end{bmatrix} P^{-1}. \quad (3.10)$$

根据 (2.1), (3.8)–(3.10), 可得

$$\begin{aligned} \widehat{M}\widehat{G} &= P \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1} + \varepsilon P \begin{bmatrix} O & \sum_{i=0}^{t-1} C^{-i-1} M_2 N^i \\ \sum_{i=0}^{t-1} N^i M_3 C^{-i-1} & O \end{bmatrix} P^{-1}, \\ \widehat{G}\widehat{M} &= P \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1} + \varepsilon P \begin{bmatrix} O & \sum_{i=0}^{t-1} C^{-i-1} M_2 N^i \\ \sum_{i=0}^{t-1} N^i M_3 C^{-i-1} & O \end{bmatrix} P^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{M}\widehat{G}\widehat{M}^t &= \left(P \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1} + \varepsilon P \begin{bmatrix} O & \sum_{i=0}^{t-1} C^{-i-1} M_2 N^i \\ \sum_{i=0}^{t-1} N^i M_3 C^{-i-1} & O \end{bmatrix} P^{-1} \right) \\
&\times \left(P \begin{bmatrix} C^t & O \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1} + \varepsilon P \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^t C^{t-i} M_1 C^{i-1} & \sum_{i=0}^{t-1} C^{t-1-i} M_2 N^i \\ \sum_{i=0}^{t-1} N^i M_3 C^{t-1-i} & O \end{bmatrix} P^{-1} \right) \\
&= P \begin{bmatrix} C^t & O \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1} + \varepsilon P \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^t C^{t-i} M_1 C^{i-1} & \sum_{i=0}^{t-1} C^{t-1-i} M_2 N^i \\ \sum_{i=0}^{t-1} N^i M_3 C^{t-1-i} & O \end{bmatrix} P^{-1} \\
&= \widehat{M}^t, \\
\widehat{G}\widehat{M}\widehat{G} &= (\widehat{G}\widehat{M})\widehat{G} = P \begin{bmatrix} C^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1} + \varepsilon P \begin{bmatrix} -C^{-1} A_1 C^{-1} & \sum_{i=0}^{t-1} C^{-i-2} M_2 N^i \\ \sum_{i=0}^{t-1} N^i M_3 C^{-i-2} & O \end{bmatrix} P^{-1} \\
&= \widehat{G}.
\end{aligned}$$

由此可知 $\widehat{G}$ 是 (3.1) 的解. 此外, 由于

$$\begin{aligned}
P \begin{bmatrix} -C^{-1} M_1 C^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1} &= M^D M_0 M^D, \\
P \begin{bmatrix} O & \sum_{i=0}^{t-1} C^{-i-2} M_2 N^i \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1} &= (M^D)^2 \left(\sum_{i=0}^{t-1} (M^D)^i M_0 M^i \right) (I_n - M M^D), \\
P \begin{bmatrix} O & O \\ \sum_{i=0}^{t-1} N^i M_3 C^{-i-2} & O \end{bmatrix} P^{-1} &= (I_n - M M^D) \left(\sum_{i=0}^{t-1} M^i M_0 (M^D)^i \right) (M^D)^2,
\end{aligned}$$

可得 (3.6)–(3.7).

接下来, 证明 $\widehat{G}$ 的唯一性.

设 $\hat{X}_1 = M^D + \varepsilon S_1$ 和 $\hat{X}_2 = M^D + \varepsilon S_2$ 是 (3.1) 的两个解. 将 $\hat{X}_1$ 和 $\hat{X}_2$ 代入 (3.3)–(3.5), 得到

$$\begin{aligned} K &= MM^D K + MS_1 M^t + M_0 M^D M^t, & K &= MM^D K + MS_2 M^t + M_0 M^D M^t, \\ S_1 &= M^D M S_1 + M^D M_0 M^D + S_1 M M^D, & S_2 &= M^D M S_2 + M^D M_0 M^D + S_2 M M^D, \\ MS_1 + M_0 M^D &= S_1 M + M^D M_0, & MS_2 + M_0 M^D &= S_2 M + M^D M_0. \end{aligned}$$

因此

$$M(S_1 - S_2)M^t = O, \quad (3.11)$$

$$S_1 - S_2 = M^D M(S_1 - S_2) + (S_1 - S_2)MM^D, \quad (3.12)$$

$$M(S_1 - S_2) = (S_1 - S_2)M. \quad (3.13)$$

将 (3.13) 代入 (3.11), 可得 $(S_1 - S_2)M^{t+1} = O$ 和 $M^{t+1}(S_1 - S_2) = O$. 由 $MM^D = M^D M = (MM^D)^{t+1}$ 推导可得 $(S_1 - S_2)MM^D = MM^D(S_1 - S_2) = O$. 此外, 将 $M^D(S_1 - S_2) = O$ 和 $(S_1 - S_2)MM^D = O$ 代入 (3.12), 得到 $S_1 - S_2 = O$. 因此, (3.1) 的解是唯一的.

定义 3.1 设 $\widehat{M} \in \mathbb{D}^{n \times n}$, 那么 (3.1) 的唯一解称为 $\widehat{M}$ 的弱 DDI (简称 WDDI), 记为 $\widehat{M}_{\text{W}}^D$.

下面的例子表明 $\widehat{M}$ 的 WDDI 总是存在, 即使 $\widehat{M}$ 的 DDI 不存在.

例 3.1 设

$$\widehat{M} = M + \varepsilon M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

则 $\text{AInd}(\widehat{M}) = k = 2$, $\text{Ind}(\widehat{M}) = t = 4$, 且

$$M^D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad M^D M_0 M^D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$K_0 = \sum_{i=1}^2 M^{2-i} M_0 M^{i-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(I_4 - MM^D)K_0(I_4 - MM^D) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \neq O.$$

由引理 2.3 可知, $\widehat{M}$ 的 DDI 不存在.

根据 (3.7) 可得

$$S = (M^D)^2 \left(\sum_{i=0}^3 (M^D)^i M_0 M^i \right) (I_4 - MM^D) + (I_4 - MM^D) \left(\sum_{i=0}^3 M^i M_0 (M^D)^i \right) (M^D)^2 - M^D M_0 M^D = \begin{bmatrix} -4 & -4 & 6 & 6 \\ 3 & 3 & -6 & -6 \\ -4 & -4 & 8 & 8 \\ 4 & 4 & -8 & -8 \end{bmatrix}.$$

再根据 (3.6) 可得

$$\widehat{M}_W^D = M^D + \varepsilon S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} -4 & -4 & 6 & 6 \\ 3 & 3 & -6 & -6 \\ -4 & -4 & 8 & 8 \\ 4 & 4 & -8 & -8 \end{bmatrix}.$$

注 3.1 设

$$\widehat{M} = M + \varepsilon M_0 \in \mathbb{D}^{n \times n}, \quad \text{AInd}(\widehat{M}) = k, \quad \text{Ind}(\widehat{M}) = t.$$

根据引理 2.3, 可知 $\widehat{M}$ 的 DDI 存在当且仅当 $\widehat{M}^k$ 的 DMPI 存在. 因此, 由引理 2.2, 得到 $\widehat{M}^k$ 的 DCI 存在, 即 $\widehat{M}^k$ 的指标为 1. 因此 $\text{Ind}(\widehat{M}^k) = \text{AInd}(\widehat{M}^k)$. 所以 $\widehat{M}$ 的指标为 k . 此外, 根据 (1.4) 和 (3.1), 可得 $\widehat{M}$ 的 DDI 存在时, $\widehat{M}^D = \widehat{M}_W^D$.

注 3.2 设 $\widehat{M} = M + \varepsilon M_0 \in \mathbb{D}^{n \times n}$, 其中 $\text{AInd}(\widehat{M}) = k$, $\text{Ind}(\widehat{M}) = t$. 由注 3.1, 文 [17, 定理 2.2] 和文 [16, 定理 2.6, 定理 3.3], 以下条件等价的:

- (1) $\widehat{M}$ 的 DDI 存在, $\widehat{M}^D = \widehat{M}_W^D$;
- (2) $\widehat{M}^k$ 的 DMPI(或 DCI, 或 DGI) 存在;
- (3) $\widehat{M}^k$ 的指标为 1;
- (4) $\widehat{M}^k$ 的秩等于 $\widehat{M}^k$ 的可观测秩;
- (5) $\widehat{M}$ 的指标等于 $\widehat{M}$ 的可观测指标;
- (6) $(I_n - MM^D)K_0(I_n - MM^D) = O$, 其中 $K_0 = \sum_{i=1}^k M^{k-i} M_0 M^{i-1}$.

注 3.3 由定理 3.1–3.2 和定义 3.1, 可得任意对偶方阵都有唯一的 WDDI. 又由于当 $\widehat{M}$ 的 DDI 存在时, $\widehat{M}^D = \widehat{M}_W^D$, 即 WDDI 是一个广义的 DDI.

下面的例子说明 $\widehat{M}$ 的 DDI 存在时, $\widehat{M}^D = \widehat{M}_W^D$.

例 3.2 设

$$\widehat{M} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 & 10 \\ 2 & 8 & 10 & 8 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & -6 & -6 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} -4 & 3 & -3 & 2 \\ 5 & 4 & 0 & 2 \\ -7 & 7 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

由于

$$\text{AInd}(\widehat{M}) = k = 2,$$

$$M^D = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad M^D A_0 M^D = \begin{bmatrix} \frac{29}{2} & 10 & -\frac{9}{2} & -\frac{9}{2} \\ -\frac{11}{2} & 10 & \frac{9}{2} & \frac{9}{2} \\ 4 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$K_0 = \sum_{i=1}^2 M^{2-i} M_0 M^{i-1} = \begin{bmatrix} -54 & 88 & -4 & 6 \\ 2 & 148 & 108 & 98 \\ -10 & -24 & -18 & -18 \\ 18 & -62 & -28 & -28 \end{bmatrix},$$

可得

$$(I_4 - MM^D)K_0(I_4 - MM^D) = O.$$

因此, 根据引理 2.3 可知 $\widehat{M}$ 的 DDI 存在, 且

$$\begin{aligned} S &= (M^D)^2 \left(\sum_{i=0}^1 (M^D)^i M_0 M^i \right) (I_4 - MM^D) \\ &\quad + (I_4 - MM^D) \left(\sum_{i=0}^1 M^i M_0 (M^D)^i \right) (M^D)^2 - M^D M_0 M^D \\ &= \begin{bmatrix} 48 & -\frac{55}{4} & \frac{163}{4} & \frac{213}{4} \\ \frac{97}{4} & -\frac{57}{2} & -2 & \frac{17}{4} \\ -17 & 19 & \frac{1}{4} & -\frac{7}{2} \\ -\frac{27}{2} & \frac{15}{4} & -\frac{23}{2} & -\frac{61}{4} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

则

$$\widehat{M}^D = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 48 & -\frac{55}{4} & \frac{163}{4} & \frac{213}{4} \\ \frac{97}{4} & -\frac{57}{2} & -2 & \frac{17}{4} \\ -17 & 19 & \frac{1}{4} & -\frac{7}{2} \\ -\frac{27}{2} & \frac{15}{4} & -\frac{23}{2} & -\frac{61}{4} \end{bmatrix}.$$

由 (3.7), 可得

$$\widehat{M}_W^D = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 48 & -\frac{55}{4} & \frac{163}{4} & \frac{213}{4} \\ \frac{97}{4} & -\frac{57}{2} & -2 & \frac{17}{4} \\ -17 & 19 & \frac{1}{4} & -\frac{7}{2} \\ -\frac{27}{2} & \frac{15}{4} & -\frac{23}{2} & -\frac{61}{4} \end{bmatrix} = \widehat{M}^D.$$

在例 3.1–3.2 中, WDDI 的计算方法是基于定理 3.2 (3.6)–(3.7) 的. 值得注意的是, 在计算过程中, WDDI 的标准部和对偶部是分开的. 本质上, 这是将对偶矩阵问题转化为实矩阵问题.

Wang 等^[21] 介绍对偶方阵的分解 (2.4). 在接下来的定理 3.3 中, 通过应用此分解得到 WDDI 的一个新的刻画. 这里, 我们不列出方阵 $\widehat{M}$ 的对偶部和实部.

定理 3.3 设 $\widehat{M} \in \mathbb{D}^{n \times n}$, $\text{Ind}(\widehat{M}) = t$, $\text{Rank}(\widehat{M}^t) = r$, $\widehat{M}$ 的分解如 (2.4) 所示, 则

$$\widehat{M}_W^D = \widehat{P} \begin{bmatrix} \widehat{C}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \widehat{P}^{-1}, \quad (3.14)$$

其中 $\widehat{P} \in \mathbb{D}^{n \times n}$ 和 $\widehat{C} \in \mathbb{D}^{r \times r}$ 是可逆的.

证 设 $\widehat{M} = M + \varepsilon M_0 \in \mathbb{D}^{n \times n}$, $\text{Ind}(\widehat{M}) = t$, $\text{Rank}(\widehat{M}^t) = r$. $\widehat{M}$ 的分解如 (2.4). 由于 $\widehat{N}^t = O$, 则

$$\widehat{M}^t = \widehat{P} \begin{bmatrix} \widehat{C}^t & O \\ O & \widehat{N}^t \end{bmatrix} \widehat{P}^{-1} = \widehat{P} \begin{bmatrix} \widehat{C}^t & O \\ O & O \end{bmatrix} \widehat{P}^{-1}.$$

此外, 记

$$\widehat{X}_0 = \widehat{P} \begin{bmatrix} \widehat{C}^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} \widehat{P}^{-1},$$

则可得

$$\begin{aligned} \widehat{M} \widehat{X}_0 \widehat{M}^t &= \widehat{P} \begin{bmatrix} \widehat{C} & O \\ O & \widehat{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{C}^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{C}^t & O \\ O & O \end{bmatrix} \widehat{P}^{-1} = \widehat{P} \begin{bmatrix} \widehat{C}^t & O \\ O & O \end{bmatrix} \widehat{P}^{-1} = \widehat{M}^t, \\ \widehat{X}_0 \widehat{M} \widehat{X}_0 &= \widehat{P} \begin{bmatrix} \widehat{C}^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{C} & O \\ O & \widehat{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{C}^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} \widehat{P}^{-1} = \widehat{P} \begin{bmatrix} \widehat{C}^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} \widehat{P}^{-1} = \widehat{X}_0, \\ \widehat{M} \widehat{X}_0 &= \widehat{P} \begin{bmatrix} \widehat{C} & O \\ O & \widehat{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{C}^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} \widehat{P}^{-1} = \widehat{P} \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} \widehat{P}^{-1}, \\ \widehat{X}_0 \widehat{M} &= \widehat{P} \begin{bmatrix} \widehat{C}^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{C} & O \\ O & \widehat{N} \end{bmatrix} \widehat{P}^{-1} = \widehat{P} \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} \widehat{P}^{-1}. \end{aligned}$$

因此, $\widehat{X}_0$ 是 (3.1) 的解. 此外, 由定理 3.2 可得 $\widehat{X}_0 = \widehat{A}_W^D$, 即 (3.14).

§4 弱对偶群逆

Zhong 和 Zhang^[17] 研究了 DGI. 接下来我们研究一个广义的 DGI.

定义 4.1 设 $\widehat{M} \in \mathbb{D}^{n \times n}$, $\text{AInd}(\widehat{M}) = 1$, 则

$$\widehat{M}\widehat{X}\widehat{M}^2 = \widehat{M}^2, \quad \widehat{X}\widehat{M}\widehat{X} = \widehat{X}, \quad \widehat{M}\widehat{X} = \widehat{X}\widehat{M} \quad (4.1)$$

的解是唯一的. 我们称该唯一解为 $\widehat{M}$ 的弱 DGI (简称 WDGI), 并记 $\widehat{X} = \widehat{M}_W^\#$.

定理 4.1 设 $\widehat{M} = M + \varepsilon M_0 \in \mathbb{D}^{n \times n}$, $\text{AInd}(\widehat{M}) = 1$, 则

$$\widehat{M}_W^\# = M^\# + \varepsilon R, \quad (4.2)$$

其中 $R = (M^\#)^2 M_0 (I_n - M M^\#) + (I_n - M M^\#) M_0 (M^\#)^2 - M^\# M_0 M^\#$.

证 设 $\widehat{M} = M + \varepsilon M_0 \in \mathbb{D}^{n \times n}$, 其中 $\text{AInd}(\widehat{M}) = 1$, $\text{rank}(M) = r$. 由于 $\text{AInd}(\widehat{M}) = 1$, 则 $\text{ind}(M) = 1$. 根据定理 2.1, 可得

$$M = P \begin{bmatrix} C & O \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1}, \quad (4.3)$$

其中 P 和 C 是非奇异的. 记

$$M_0 = P \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix} P^{-1}, \quad (4.4)$$

其中 $M_1 \in \mathbb{C}^{r \times r}$. 此外, 记

$$\widehat{H} = P \begin{bmatrix} C^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1} + \varepsilon P \begin{bmatrix} -C^{-1}M_1C^{-1} & C^{-2}M_2 \\ M_3C^{-2} & O \end{bmatrix} P^{-1}. \quad (4.5)$$

根据 (4.3)-(4.5), 可得

$$\begin{aligned} \widehat{M}\widehat{H} &= P \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1} + \varepsilon P \begin{bmatrix} O & C^{-1}M_2 \\ M_3C^{-1} & O \end{bmatrix} P^{-1} = \widehat{H}\widehat{M}, \\ \widehat{M}\widehat{H}\widehat{M}^2 &= P \begin{bmatrix} C^2 & O \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1} + \varepsilon P \begin{bmatrix} CM_1 + M_1C & CM_2 \\ M_3C & O \end{bmatrix} P^{-1} = \widehat{M}^2, \\ \widehat{H}\widehat{M}\widehat{H} &= P \begin{bmatrix} C^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1} + \varepsilon P \begin{bmatrix} -C^{-1}M_1C^{-1} & C^{-2}M_2 \\ M_3C^{-2} & O \end{bmatrix} P^{-1} = \widehat{H}. \end{aligned}$$

因此, 由定义 4.1, 可知 $\widehat{M}_W^\#$ 存在且 $\widehat{M}_W^\# = \widehat{H}$. 此外, 由 (4.5) 和

$$M^\# M_0 M^\# = P \begin{bmatrix} -C^{-1}M_1C^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1}, \quad (4.6)$$

$$(M^\#)^2 M_0 (I_n - M M^\#) = P \begin{bmatrix} O & C^{-2}M_2 \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1}, \quad (4.7)$$

$$(I_n - M M^\#) M_0 (M^\#)^2 = P \begin{bmatrix} O & O \\ M_3C^{-2} & O \end{bmatrix} P^{-1}, \quad (4.8)$$

可得 (4.2).

由 (3.1), 定义 3.1, (4.1) 和定义 4.1, 易知 WDGI 是 WDDI 的一种特殊情况, 不同之处在于定义 4.1, 我们采用的是可观测指标而不是对偶矩阵的指标. 接下来, 通过一个例子说明当 $\text{AInd}(\widehat{M}) = 1$ 时, $\widehat{M} \in \mathbb{D}^{n \times n}$ 的 WDGI 总是存在的.

例 4.1 设 $\widehat{M} = M + \varepsilon M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $\text{AInd}(\widehat{M}) = 1$. 显然

$$M^\# = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

并且

$$(I_2 - MM^\#)M_0(I_2 - MM^\#) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq O.$$

因此, 由引理 2.2 可得 $\widehat{M}$ 的 DGI 是不存在的, $\widehat{M}$ 的 WDGI 是存在的. 由定理 4.1, 可得

$$R = (M^\#)^2 M_0 (I_2 - MM^\#) + (I_2 - MM^\#) M_0 (M^\#)^2 - M^\# M_0 M^\# = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

因此

$$\widehat{M}_W^\# = M^\# + \varepsilon R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

注 4.1 由 (1.3), 引理 2.2, 定义 4.1 和定理 4.1, 易证当 $\widehat{M}$ 的 DGI 存在时, $\widehat{M}^\# = \widehat{M}_W^\#$.

例 4.2 设 $\widehat{M} = M + \varepsilon M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 则可得 $\text{ind}(M) = 1$,

$$M^\# = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

和

$$(I_2 - MM^\#)M_0(I_2 - MM^\#) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = O.$$

因此, 由引理 2.2 可知 $\widehat{M}$ 的 DGI 存在, 且

$$\begin{aligned} \widehat{M}^\# &= M^\# + \varepsilon((M^\#)^2 M_0 (I_2 - MM^\#) + (I_2 - MM^\#) M_0 (M^\#)^2 - M^\# M_0 M^\#) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

根据定理 4.1, 可得

$$R = (M^\#)^2 M_0 (I_2 - MM^\#) + (I_2 - MM^\#) M_0 (M^\#)^2 - M^\# M_0 M^\# = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

因此

$$\widehat{M}_W^\# = M^\# + \varepsilon R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \widehat{M}^\#.$$

由引理 2.4 可得, 当 $\text{AInd}(\widehat{M}) = 1$ 时, 则 $\widehat{N}$ 的标准部为 O . 记 $\widehat{N} = \varepsilon N$, 其中 $N \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$. 因此, 当 $\widehat{M} \in \mathbb{D}^{n \times n}$ 且 $\text{AInd}(\widehat{M}) = 1$, $\text{ARank}(\widehat{M}) = r$ 时, 存在一个可逆对偶矩阵 $\widehat{P} \in \mathbb{D}^{n \times n}$, 使得 $\widehat{M}$ 有如下形式:

$$\widehat{M} = \widehat{P} \begin{bmatrix} \widehat{C} & O \\ O & \varepsilon N \end{bmatrix} \widehat{P}^{-1}, \quad (4.9)$$

其中 $\widehat{C} \in \mathbb{D}^{r \times r}$ 是可逆的, $N \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$. 因此, 由定义 4.1, 可得

$$\widehat{M}_W^\# = \widehat{P} \begin{bmatrix} \widehat{C}^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} \widehat{P}^{-1}. \quad (4.10)$$

接下来, 考虑对偶矩阵方程

$$\widehat{M}\widehat{x} = \widehat{b}, \quad (4.11)$$

其中 $\widehat{M} \in \mathbb{D}^{n \times n}$, $\text{ARank}(\widehat{M}) = r$, $\text{AInd}(\widehat{M}) = 1$ 和 $\widehat{b} \in \mathbb{D}^{n \times 1}$.

定理 4.2 设 $\widehat{M} \in \mathbb{D}^{n \times n}$, $\text{AInd}(\widehat{M}) = 1$, $\text{ARank}(\widehat{M}) = r$, $\widehat{b} \in \mathbb{D}^{n \times 1}$, 则 (4.11) 相容当且仅当

$$\varepsilon(I_n - \widehat{M}_W^\# \widehat{M})\widehat{b} = O, \quad (4.12)$$

$$(I_n - \widehat{M}_W^\# \widehat{M})\widehat{b} \in \mathcal{R}(\widehat{M} - (\widehat{M}_W^\#)^\#). \quad (4.13)$$

此外, 设 $\widehat{M}$ 的分解如 (4.9) 所示, $\widehat{P}^{-1}\widehat{b}$ 分块为

$$\widehat{P}^{-1}\widehat{b} = \begin{bmatrix} \widehat{b}_1 \\ \widehat{b}_2 \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

则 (4.11) 的通解为

$$\widehat{x} = \widehat{P} \begin{bmatrix} \widehat{C}^{-1}\widehat{b}_1 \\ N^\dagger \widehat{b}_2 + (I_{n-r} - N^\dagger N)y_2 + \varepsilon z_2 \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

其中 $y_2 \in \mathbb{R}^{(n-r) \times 1}$, $z_2 \in \mathbb{R}^{(n-r) \times 1}$ 是任意的.

证 设 $\widehat{M} \in \mathbb{D}^{n \times n}$, $\text{AInd}(\widehat{M}) = 1$, $\text{ARank}(\widehat{M}) = r$, $\widehat{M}$ 的分解如 (4.9). 易证

$$\begin{cases} I_n - \widehat{M}_W^\# \widehat{M} = \widehat{P} \begin{bmatrix} O & O \\ O & I_{n-r} \end{bmatrix} \widehat{P}^{-1}, \\ (\widehat{M}_W^\#)^\# = \widehat{P} \begin{bmatrix} \widehat{C} & O \\ O & O \end{bmatrix} \widehat{P}^{-1}, \\ \widehat{M} - (\widehat{M}_W^\#)^\# = \widehat{P} \begin{bmatrix} O & O \\ O & \varepsilon N \end{bmatrix} \widehat{P}^{-1}. \end{cases} \quad (4.16)$$

此外, 设 $\widehat{P}^{-1}\widehat{x}$ 分块为

$$\widehat{P}^{-1}\widehat{x} = \begin{bmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{x}_2 \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

由 (4.14) 和 (4.17), 有

$$\begin{aligned}\widehat{M}\widehat{x} - \widehat{b} &= \widehat{P} \left(\begin{bmatrix} \widehat{C} & O \\ O & \varepsilon N \end{bmatrix} \widehat{P}^{-1}\widehat{x} - \widehat{P}^{-1}\widehat{b} \right) = \widehat{P} \left(\begin{bmatrix} \widehat{C} & O \\ O & \varepsilon N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{x}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \widehat{b}_1 \\ \widehat{b}_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \widehat{P} \left(\begin{bmatrix} \widehat{C}\widehat{x}_1 - \widehat{b}_1 \\ \varepsilon N\widehat{x}_2 - \widehat{b}_2 \end{bmatrix} \right).\end{aligned}\quad (4.18)$$

因此, $\widehat{M}\widehat{x} = \widehat{b}$ 相容当且仅当存在 $\widehat{x}_1, \widehat{x}_2$, 满足 $\widehat{C}\widehat{x}_1 = \widehat{b}_1, \varepsilon N\widehat{x}_2 = \widehat{b}_2$.

由于 $\widehat{C}$ 可逆, 则显然有 $\widehat{C}\widehat{x}_1 = \widehat{b}_1$ 是相容的.

由于 $\varepsilon N\widehat{x}_2 = \widehat{b}_2$, 则 $\widehat{b}_2$ 的标准部等于 O , 即 $\varepsilon\widehat{b}_2 = O$. 此外, 根据 (4.14), (4.16) 和 (4.17), 可得 $\varepsilon(I_n - \widehat{M}_W^\# \widehat{M})\widehat{b} = O$, 即 (4.12). 此外, 当 $\varepsilon\widehat{b}_2 = O$ 时, 存在 $\widehat{x}_2$ 满足 $\varepsilon N\widehat{x}_2 = \widehat{b}_2$ 当且仅当 $(I_n - \widehat{M}_W^\# \widehat{M})\widehat{b} \in \mathcal{R}(\widehat{M} - (\widehat{M}_W^\#)^\#)$, 即 (4.13).

设 (4.11) 是相容的, 则根据 (4.14) 和 (4.18), 显然有

$$\widehat{x}_1 = \widehat{C}^{-1}\widehat{b}_1, \quad \widehat{x}_2 = N^\dagger \widehat{b}_2 + (I - N^\dagger N)y_2 + \varepsilon z_2,$$

其中 $y_2 \in \mathbb{R}^{(n-r) \times 1}, z_2 \in \mathbb{R}^{(n-r) \times 1}$ 是任意的. 因此, 由 (4.17) 可得 (4.15).

应用定理 4.2 推导出推论 4.1.

推论 4.1^[15] 设 $\widehat{M} \in \mathbb{D}^{n \times n}$, $\text{Ind}(\widehat{M}) = 1$, $\widehat{b} \in \mathbb{D}^{n \times 1}$, 则 (4.11) 相容当且仅当 $(I_n - \widehat{M}^\# \widehat{M})\widehat{b} = O$.

此外, (4.11) 的通解为

$$\widehat{x} = \widehat{M}^\# \widehat{b} + (I_n - \widehat{M}^\# \widehat{M})\widehat{y},$$

其中 $\widehat{y} \in \mathbb{D}^{n \times 1}$ 是任意的.

证 设 $\widehat{M} \in \mathbb{D}^{n \times n}$, $\text{Ind}(\widehat{M}) = 1$, $\text{ARank}(\widehat{M}) = r$, $\widehat{M}$ 的分解如 (4.9). 由于 $\text{Ind}(\widehat{M}) = 1$, 则 $N = O$. 根据 (4.18) 可知, $\widehat{M}\widehat{x} = \widehat{b}$ 相容当且仅当存在 $\widehat{b}_2 = O$. 因此, 根据 (4.16), 可知 $\widehat{b}_2 = O$ 当且仅当 $(I_n - \widehat{M}^\# \widehat{M})\widehat{b} = O$.

由于 $N = O$, 则根据 (4.15), 可知 $\widehat{x} = \widehat{P} \begin{bmatrix} \widehat{C}^{-1}\widehat{b}_1 \\ y_2 + \varepsilon z_2 \end{bmatrix}$, 其中 $y_2 \in \mathbb{R}^{(n-r) \times 1}, z_2 \in \mathbb{R}^{(n-r) \times 1}$ 是任意的. 根据 (4.16), 可得

$$\widehat{x} = \widehat{M}^\# \widehat{b} + (I_n - \widehat{M}^\# \widehat{M})\widehat{y},$$

其中 $\widehat{y} \in \mathbb{D}^{n \times 1}$ 是任意的.

在文 [22] 中, Campbell 和 Meyer 给出了 $x = M^\# b$ 是约束矩阵方程 $Mx = b$ ($x \in \mathcal{R}(M)$, $\text{ind}(M) = 1$) 的唯一解. 在文 [15] 中, Zhong 和 Zhang 根据 DGI, 研究了在约束条件 $\widehat{x} \in \mathcal{R}(\widehat{M})$ 和 $\text{Ind}(\widehat{M}) = 1$ 下的对偶矩阵方程 (4.11). 在以下定理 4.3 中, 使用 WDGI 研究在约束条件 $\widehat{x} \in \mathcal{R}(\widehat{M})$ 和 $\text{AInd}(\widehat{M}) = 1$ 下的对偶矩阵方程 (4.11).

定理 4.3 设 $\widehat{M} \in \mathbb{D}^{n \times n}$, $\text{AInd}(\widehat{M}) = 1$, $\widehat{b} \in \mathbb{D}^{n \times 1}$, 则在约束条件 $\widehat{x} \in \mathcal{R}(\widehat{M})$ 下, (4.11) 的解存在当且仅当

$$(I_n - \widehat{M}_W^\# \widehat{M})\widehat{b} = O. \quad (4.19)$$

此外, 当 (4.11) 的约束解存在时,

$$\hat{x} = \widehat{M}_W^\# \hat{b} + (\widehat{M} - (\widehat{M}_W^\#)^\#) \hat{y}, \quad (4.20)$$

其中 $\hat{y} \in \mathbb{D}^{n \times 1}$ 是任意的.

证 设 $\widehat{M} = M + \varepsilon M_0 \in \mathbb{D}^{n \times n}$, $\text{AInd}(\widehat{M}) = 1$, $\text{ARank}(\widehat{M}) = r$, $\widehat{M}$ 的分解如 (4.9). 由于 $\hat{x} \in \mathcal{R}(\widehat{M})$, 则记 $\hat{x} = \widehat{M} \hat{y}$. 因此, 对偶矩阵方程 (4.11) 在 $\hat{x} \in \mathcal{R}(\widehat{M})$ 约束下是相容的当且仅当对偶矩阵方程 $\widehat{M}^2 \hat{y} = \hat{b}$ 是相容的. 设 $\widehat{P}^{-1} \hat{b}$ 的分块如 (4.14), $\widehat{P}^{-1} \hat{y}$ 的分块为

$$\widehat{P}^{-1} \hat{y} = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

因此

$$\widehat{M}^2 \hat{y} - \hat{b} = \widehat{P} \left(\begin{bmatrix} \widehat{C}^2 & O \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix} \right) = \widehat{P} \left(\begin{bmatrix} \widehat{C}^2 \hat{y}_1 - \hat{b}_1 \\ -\hat{b}_2 \end{bmatrix} \right). \quad (4.22)$$

由于 $\widehat{C}$ 可逆, 则 $\widehat{M}^2 \hat{y} = \hat{b}$ 是相容的当且仅当 $\hat{b}_2 = O$. 因此

$$(I_n - \widehat{M}_W^\# \widehat{M}) \hat{b} = O,$$

即 (4.19).

此外, 设 (4.11) 的约束解存在, 则

$$\hat{y} = \widehat{P} \begin{bmatrix} \widehat{C}^{-2} \hat{b}_1 \\ \hat{y}_2 \end{bmatrix}.$$

因此

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \widehat{M} \hat{y} = \widehat{P} \begin{bmatrix} \widehat{C} & O \\ O & \varepsilon N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{C}^{-2} \hat{b}_1 \\ \hat{y}_2 \end{bmatrix} = \widehat{P} \begin{bmatrix} \widehat{C}^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix} + \widehat{P} \begin{bmatrix} O & O \\ O & \varepsilon N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \end{bmatrix} \\ &= \widehat{M}_W^\# \hat{b} + (\widehat{M} - (\widehat{M}_W^\#)^\#) \hat{y}, \end{aligned}$$

即 (4.20).

例 4.3 设 $\widehat{M} = M + \varepsilon M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\hat{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. 易知

$$\widehat{M}_W^\# = M^\# + \varepsilon R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

并且

$$(I_2 - \widehat{M}_W^\# \widehat{M}) \hat{b} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = O,$$

则在约束条件 $\hat{x} \in \mathcal{R}(\widehat{M})$ 下, (4.11) 的解存在, 且

$$\hat{x} = \widehat{M}_W^\# \hat{b} + (\widehat{M} - (\widehat{M}_W^\#)^\#) \hat{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \hat{y},$$

其中 $\hat{y} \in \mathbb{D}^{n \times 1}$ 是任意的.

当 $\hat{y} = O$ 时,

$$\hat{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \in \mathcal{R}(\widehat{M}).$$

当 $\hat{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 时,

$$\hat{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right) \in \mathcal{R}(\widehat{M}).$$

显然 $\hat{x}_1 \neq \hat{x}_2$. 因此, 定理 4.3 中 (4.11) 的约束解不唯一.

当 $\text{Ind}(\widehat{M}) = 1$ 时, 显然可知

$$\widehat{M}_W^\# = \widehat{M}^\#, \quad \widehat{M} - (\widehat{M}_W^\#)^\# = O.$$

因此, 根据定理 4.3, 可得以下推论 4.2.

推论 4.2 设 $\widehat{M} \in \mathbb{D}^{n \times n}$, $\text{Ind}(\widehat{M}) = 1$, $\hat{b} \in \mathbb{D}^{n \times 1}$, 则在约束条件 $\hat{x} \in \mathcal{R}(\widehat{M})$ 下, (4.11) 的解存在当且仅当

$$(I_n - \widehat{M}^\# \widehat{M}) \hat{b} = O.$$

此外, 当 (4.11) 的约束解存在时, $\hat{x} = \widehat{M}^\# \hat{b}$.

§5 小结

本文引入广义的 DDI, 称之为 WDDI, 得到了 WDDI 的一些性质与刻画. 应该注意的是, 任何对偶方阵都有唯一的 WDDI. 此外, 本文引入广义的 DGI, 称之为 WDGI, 并将其应用于一类约束对偶矩阵方程问题. 这些结果为对偶广义逆的广泛应用提供了理论基础.

在文 [16] 中, 当 $\text{DCI} \widehat{M}$ 的存在时, Wang 和 Gao 得到 $\widehat{M}^\oplus = \widehat{M}^\# \widehat{M} \widehat{M}^\dagger$. 因此, 当 $\widehat{M} \in \mathbb{D}^{n \times n}$ 的可观测指标为 1 时, 我们记 $\widehat{M}_W^\oplus = \widehat{M}_W^\# \widehat{M} \widehat{M}_W^\dagger$, 且称之为弱对偶 core 逆 (WDCI). 在 (1.5) 和 (4.1) 中, 通过应用对偶矩阵方程分别得到了 WDGI 和 WDCI 的刻画. 因此, 似乎存在一个既困难又有趣的问题: 如何应用对偶矩阵方程给出 WDCI 的刻画?

参 考 文 献

- [1] Angeles J. The dual generalized inverses and their applications in kinematic synthesis [M]//Lenarčič J, Husty M (eds). Latest Advances in Robot Kinematics. Netherlands: Springer-Verlag, 2012, 1–10.
- [2] Angeles J. The application of dual algebra to kinematic analysis [M]//Angeles J, Zakhariyev E (eds). Computational Methods in Mechanical Systems: Mechanism Analysis, Synthesis, and Optimization. Berlin: Springer-Verlag, 1998, 3–32.
- [3] Wei T, Ding W Y, Wei Y M. Singular value decomposition of dual matrices and its application to traveling wave identification in the brain [J]. *SIAM J Matrix Anal Appl*, 2024, 45(1):634–660.

- [4] Xu R J, Wei T, Wei Y M, Yan H. UTV decomposition of dual matrices and its applications [J]. *Comput Appl Math*, 2024, 43(1):41.
- [5] Chen Z M, Ling C, Qi L Q, Yan H. A regularization-patching dual quaternion optimization method for solving the hand-eye calibration problem [J]. *J Optim Theory Appl*, 2024, 200(3):1193–1215.
- [6] Gu Y, Luh J. Dual-number transformation and its applications to robotics [J]. *IEEE J Robot Autom*, 1987, 3(6):615–623.
- [7] Heiss H. Homogeneous and dual matrices for treating the kinematic problem of robots [J]. *JFAC Proceedings Volumes*, 1986, 19(4):51–55.
- [8] Qi L Q. Standard dual quaternion optimization and its applications in hand-eye calibration and SLAM [J]. *Commun Appl Math Comput*, 2023, 5:1469–1483.
- [9] Jin Y, Wang X R. The application of the dual number methods to SCARA kinematics [J]. *Proc 2010 Int Conf Mech Autom Control Eng*, 2010:3871–3874.
- [10] Pennestrì E, Valentini P P. Linear dual algebra algorithms and their application to kinematics [M]//Bottasso C L (ed). *Multibody Dynamics: Comput Methods Appl*. Netherlands: Springer-Verlag, 2009, 207–229.
- [11] Ling C, He H J, Qi L Q. Singular values of dual quaternion matrices and their low-rank approximations [J]. *Numer Funct Anal Optim*, 2022, 43(12):1423–1458.
- [12] Falco D de, Pennestrì E, Udwadia F E. On generalized inverses of dual matrices [J]. *Mech Mach Theory*, 2018, 123:89–106.
- [13] Udwadia F E, Pennestrì E, Falco D de. Do all dual matrices have dual Moore-Penrose generalized inverses? [J]. *Mech Mach Theory*, 2020, 151:103878.
- [14] Wang H X. Characterizations and properties of the MPDGI and DMPGI [J]. *Mech Mach Theory*, 2021, 158:104212.
- [15] Zhong J, Zhang Y L. Dual group inverses of dual matrices and their applications in solving systems of linear dual equations [J]. *AIMS Math*, 2022, 7(5):7606–7624.
- [16] Wang H X, Gao J. The dual index and dual core generalized inverse [J]. *Open Math*, 2023, 21(1):20220592.
- [17] Zhong J, Zhang Y L. Dual Drazin inverses of dual matrices and dual Drazin-inverse solutions of systems of linear dual equations [J]. *Filomat*, 2023, 37(10):3075–3089.
- [18] Cui C F, Qi L Q. A genuine extension of the Moore-Penrose inverse to dual matrices [J]. *J Comput Appl Math*, 2025, 454:116185.
- [19] Li H, Wang H X. Weak dual generalized inverse of a dual matrix and its applications [J]. *Heliyon*, 2023, 9(6):e16624.

- [20] Ben-Israel A, Greville T N. Generalized inverses: Theory and applications [M]. New York: Springer-Verlag, 2003.
- [21] Wang H X, Jiang T H, Ling Q L, Wei Y M. Dual core-nilpotent decomposition and dual binary relation [J]. *Linear Algebra Appl*, 2024, 684:127–157.
- [22] Campbell S L, Meyer C D. Generalized inverses of linear transformations [M]. Philadelphia: SIAM, 2009.

Weak Dual Drazin Inverse and Its Characterizations and Properties

WANG Hongxing¹ LING Qiuli² JIANG Tianhe³ LIU Shuangzhe⁴

¹Corresponding author. School of Mathematical Sciences, Center for Applied Mathematics of Guangxi, Guangxi Minzu University, Nanning 530006, China.
E-mail: winghongxing0902@163.com

²School of Mathematical Sciences; Center for Applied Mathematics of Guangxi, Guangxi Minzu University, Nanning 530006, China.
E-mail: 113211322247@163.com

³Department of General Education, Computer and Mathematical Teaching & Research Section, Guangxi Medical College, Nanning 530023, China.
E-mail: Yeoljiang@163.com

⁴Faculty of Science and Technology, University of Canberra, Canberra, 10587, ACT 2617, Australia. E-mail: shuangzhe.liu@canberra.edu.au

Abstract The dual Drazin inverse is an important dual generalized inverse. In this paper, to extend it the authors introduce the weak dual Drazin inverse which is unique and exists for any square dual matrix. When the dual Drazin inverse exists, it coincides with the weak dual Drazin inverse. In addition, the authors introduce the weak dual group inverse and apply it to studying a type of restricted dual matrix equation.

Keywords Dual Drazin inverse, Dual group inverse, Weak dual Drazin inverse, Weak dual group inverse

2020 MR Subject Classification 15A66, 15A09, 15A24

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 46 No. 2, 2025
by ALLERTON PRESS, INC., USA