

双边生灭过程的 Ray-Knight 紧化

王荟锡¹ 应坚刚¹

提要 在王梓坤先生等人的工作中, 生灭过程可以通过一种解析构造的方法得以完整的刻画. 在本文中, 作者用 Ray-Knight 紧化的方式从概率角度描述首次飞越时间之后的生灭过程. 通过引入一个额外的状态, 将一个生灭过程转化为一个 Ray 过程, 这使得该过程的行为更加直观. 特别地, Doob 过程 (一大类双边生灭过程) 的边界条件将从 Ray 过程中的分支分布的角度来进行刻画. 与此同时, 还将与王梓坤先生等人工作中解析的构造方法进行比较.

关键词 双边生灭过程, Ray 过程, Ray-Knight 紧化

MR (2020) 主题分类 60G07

中图法分类 O211.62

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2025)02-0187-14

§1 双边生灭过程

首先, 让我们介绍一下本文中使用的术语. 与传统的生灭过程不同, 双边生灭过程的最小状态空间是全体整数集 $\mathbb{Z}$. 对应的密度矩阵 $Q = (q_{ij})(i, j \in \mathbb{Z})$ 有以下形式,

$$\begin{cases} q_{ij} = 0 & (|i - j| > 1), \\ q_{ii-1} = a_i > 0, \\ q_{ii+1} = b_i > 0, \\ -q_{ii} = a_i + b_i < \infty & (\forall i \in \mathbb{Z}), \end{cases}$$

意味着我们所关注的密度矩阵始终是保守的且完全稳定的. 一个连续时间马尔可夫链, 如果其转移矩阵 $(p_{ij}(t))$ 是标准的, 即 $\lim_{t \downarrow 0} p_{ii}(t) = 1$ (对于任意 $i \in \mathbb{Z}$), 并且其密度矩阵是我们上面所定义的 (q_{ij}) , 即 $p'_{ij}(0) = q_{ij}$ (对于任意 $i, j \in \mathbb{Z}$), 那么这个连续时间马尔可夫链就被称为双边生灭过程. 一个具有最小状态空间 $\mathbb{Z}$ 的转移矩阵 $(p_{ij}(t))$ ($i, j \in \mathbb{Z}$), 如果对于所有的 $i \in \mathbb{Z}$ 以及 $t \geq 0$, 都有 $\sum_{j \in \mathbb{Z}} p_{ij}(t) = 1$, 则称其为诚实的. 对于一个非诚实的转移矩阵, 通过标准的处理, 将状态空间变为 $E = \mathbb{Z} \cup \{\partial\}$, 它总是可以被当作一个诚实的转移矩阵来处理, 其中 $\{\partial\}$ 是所谓的“坟墓点”. 对于一个生灭过程, 不会发生在内部被杀死的情况.

接下来我们介绍双边生灭过程的一些数值特征. 我们所使用的术语参考了 Wang 和 Yang 的文 [1]. 一个具有转移矩阵 $(p_{ij}(t))$ 的生灭过程, 如果在整数集 $\mathbb{Z}$ 上存在一个 σ 有限测度 μ , 使得对于任意的 $i, j \in \mathbb{Z}$ 以及 $t \geq 0$, 都有 $\mu_i p_{ij}(t) = \mu_j p_{ji}(t)$, 那么这个生灭过

本文 2024 年 3 月 30 日收到, 2025 年 5 月 8 日收到修改稿.

¹复旦大学数学科学学院, 上海 200433. E-mail: hxwang20@fudan.edu.cn; jgying@fudan.edu.cn

程就被称为对称的. 在这种情况下, μ 也被称为 Q 的速度测度. 在本文中, 我们总是取 μ 为

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_i = \frac{a_{-1}a_{-2} \cdots a_{i+1}}{b_0b_{-1} \cdots b_i} \quad (i < -1), \\ \mu_{-1} = \frac{1}{b_0b_{-1}}, \\ \mu_0 = \frac{1}{a_0b_0}, \\ \mu_1 = \frac{1}{a_0a_1}, \\ \mu_i = \frac{b_1b_2 \cdots b_{i-1}}{a_0a_1 \cdots a_i} \quad (i > 1), \end{array} \right.$$

其中 μ_i 自然地表示 $\mu(\{i\})$ ($i \in \mathbb{Z}$), 并且它在相差一个乘法常数的意义下是唯一的.

对于上面定义的密度矩阵 $Q = (q_{ij})$ ($i, j \in \mathbb{Z}$), 我们将尺度函数 Z_i 定义为

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_i = -b_0 \left(1 + \sum_{k=-1}^{i+1} \frac{b_{-1}b_{-2} \cdots b_k}{a_{-1}a_{-2} \cdots a_k} \right) \quad (i < -1), \\ Z_{-1} = -b_0, \\ Z_0 = 0, \\ Z_1 = a_0, \\ Z_i = a_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{a_1a_2 \cdots a_k}{b_1b_2 \cdots b_k} \right) \quad (i > 1), \end{array} \right.$$

并将边界点定义为

$$r_1 = \lim_{i \rightarrow -\infty} Z_i, \quad r_2 = \lim_{i \rightarrow +\infty} Z_i.$$

如果上述极限中有一个是有限的, 那么相应的边界就被称为有限边界. 双边生灭过程, 如同扩散过程一样, 通常由尺度函数和速度测度所决定 (见文 [2]). 状态空间 $\mathbb{Z}$ 将通过尺度函数映射到 $\{Z_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ 上.

尺度函数是具有概率意义的. 对于一个具有密度矩阵 $Q = (q_{ij})$ ($i, j \in \mathbb{Z}$) 的双边生灭过程 $(X_t)_{t \geq 0}$, 如果初始分布是 $\mathbf{1}_{\{k\}}$ ($k \in \mathbb{Z}$), 我们将概率律记为 $\mathbb{P}^k(\cdot)$. 对于 $m < k < n$ ($m, k, n \in \mathbb{Z}$), $\mathbb{P}^k(\eta_m > \eta_n)$ 表示从 k 出发的生灭过程沿着其轨道在首次到达 n 之前到达 m 的概率, 其中 η_i 表示到达状态 $i \in \mathbb{Z}$ 的首次击中时间. 则有

$$\mathbb{P}^k(\eta_m > \eta_n) = \frac{Z_k - Z_m}{Z_n - Z_m}.$$

令

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 = \sum_{i \leq 0} (Z_i - r_1) \mu_i = \sum_{i \leq 0} (Z_i - Z_{i-1}) \sum_{i \leq j \leq 0} \mu_j, \\ R_2 = \sum_{i \geq 0} (r_2 - Z_i) \mu_i = \sum_{i \geq 0} (Z_i - Z_{i-1}) \sum_{0 \leq j \leq i} \mu_j \end{array} \right.$$

和

$$\begin{cases} S_1 = - \sum_{i \leq 0} Z_i \mu_i, \\ S_2 = \sum_{i \geq 0} Z_i \mu_i. \end{cases}$$

下面对于边界点 $r_a (a = 1, 2)$ 的分类, 与 Feller 的分类 (文 [2]) 等价, 见 [1, §8.1, 定理 1],

$$\begin{cases} R_a < +\infty, & S_a < +\infty, & \text{那么 } r_a \text{ 是正则的,} \\ R_a < +\infty, & S_a = +\infty, & \text{那么 } r_a \text{ 是流出的,} \\ R_a = +\infty, & S_a < +\infty, & \text{那么 } r_a \text{ 是流入的,} \\ R_a = +\infty, & S_a = +\infty, & \text{那么 } r_a \text{ 是自然的.} \end{cases}$$

当且仅当两个边界点 r_1 和 r_2 均为流入的或自然的时, 双边生灭过程才是唯一的. 值得注意的是, 如果 r_a 是正则的或流出的, 那么 r_a 必定是有限的; 如果 r_a 是流入的, 那么 r_a 必定是无限的; 如果 r_a 是自然的, 那么 r_a 可以是有限的, 也可以是无限的. 如果边界点 $r_a (a = 1, 2)$ 中有一个是正则的或流出的, 那么由密度矩阵 Q 所决定的过程就不是唯一的.

在本文中, 我们关注 Ray-Knight 紧化后的双边生灭过程的状态空间. 我们给出了一个对这些过程进行正则化的标准程序. 在这个框架下, 可以与文 [1] 中 Doob 过程的解析构造进行比较.

§2 双边生灭过程的正则化

对于一个双边生灭过程, 初始分布始终是整数集 $\mathbb{Z}$ 上的一个概率测度. 给定一个标准转移矩阵 $(p_{ij}(t))$ 及其密度矩阵 (q_{ij}) , 该密度矩阵是保守且完全稳定的, 我们可以利用柯尔莫哥洛夫一致性定理在状态空间 $\mathbb{Z}$ 上构造一个双边生灭过程. 然而, 这样的过程无法保证在“飞越时间”处具有良好的轨道性质, 比如拟左连续性. 因此, 我们需要对其进行修正. 根据文 [3], 我们有如下定理.

定理 2.1 (Doob) 如果 $(X_t)_{t \geq 0}$ 是定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的实值过程, 那么在同一个概率空间上存在一个随机过程 $(\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$, 它是可分的, 并且具有性质

$$\mathbb{P}(\tilde{X}_t(\omega) = X_t(\omega)) = 1, \quad \forall t \geq 0,$$

其中, 过程 $(\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$ 可能取值为 $+\infty$ 或 $-\infty$.

我们称过程 $(\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$ 为原过程的 Doob 可分修正. 对于双边生灭过程, 我们有更精细的刻画.

对于一个具有密度矩阵 $Q = (q_{ij}) (i, j \in \mathbb{Z})$ 的双边生灭过程 $(X_t)_{t \geq 0}$, 我们需要定义 $(X_t)_{t \geq 0}$ 的不连续点 τ_n , 以说明其在边界上的行为. 我们定义 $\tau_0 = 0$, 并且 $\tau_1 = \inf\{t : X_t \neq X_0, t \geq 0\}$. 我们将 τ_1 定义为 $(X_t)_{t \geq 0}$ 的第一个不连续点. 根据密度矩阵的定义,

$$\mathbb{P}^i(\tau_1 > t) = e^{-q_{ii}t},$$

这意味着 $(X_t)_{t \geq 0}$ 的第一个不连续点是存在的. 我们将 τ_2 记为 τ_1 之后的第一个不连续点. 那么 τ_2 就是 $(X_t)_{t \geq 0}$ 的第二个不连续点, 并且根据强马氏性, τ_2 是存在的, 以此类推. 由此可知, τ_n 是良好定义的.

设 ζ 为 $(X_t)_{t \geq 0}$ 的寿命. 对于 $t \in (0, \zeta)$, 如果 X_{t-} (左极限) 和 X_{t+} (右极限) 都存在但不相等, 我们就称时刻 t 为 $(X_t)_{t \geq 0}$ 的一个跳跃点. 令 $\eta := \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n$ 为 $(X_t)_{t \geq 0}$ 的第一个飞越点. 假设 τ_i 是第一个属于不连续点但不是跳跃点的时刻, 那么 $\eta = \tau_i$. 类似地, 由于 $\tau_n (n \in \mathbb{N}^+)$ 总是存在的, 所以 η 是良好定义的.

引理 2.1 设 η 为双边生灭过程 $(X_t)_{t \geq 0}$ 的首次飞越时间, 那么

$$\eta = \inf\{t > 0 : \lim_{s \rightarrow t} |X_s| = +\infty\}.$$

证 设 $m := \sup\{n : \tau_{n-1} < \eta\}$. 注意到左极限是

$$|X_{\eta-}| = \lim_{t \rightarrow \eta} |X_t| \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}.$$

根据 τ_0 和 τ_1 的定义, $m < \infty$ 这种情况只会在 $X_0 = 0$ 时发生. 因为在这种情况下, τ_1 是一个不连续点, 但不是跳跃点. 如果 $m = \infty$, 根据 η 的定义, 可知

$$|X_{\eta-}| = \lim_{t \rightarrow \eta} |X_t| = +\infty.$$

推论 2.1 设 $(X_t)_{t \geq 0}$ 是一个双边生灭过程. 如果 r_1 是流入的或自然的, r_2 是正则的或流出的, 那么 $(X_t)_{t \geq 0}$ 的 Doob 可分修正定义在 $\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ 上.

证 Doob 可分修正仅在飞越时间可能取值为 $\pm\infty$. 我们所关注的过程始终是保守的, 因此按如下方式定义的飞越时间 η 是存在的:

对于 $n \in \mathbb{Z}$, 令 $\eta_n := \inf\{t > 0 : |X_t| = n\}$, 并且 $\eta = \lim_{n \rightarrow +\infty} \eta_n$.

引理 2.1 成立, 这表明 η 是该过程的首次飞越时间.

根据 [1, §8.8, 定理 7], 如果 r_1 是无穷大,

$$\mathbb{P}^n(X_{\eta-} = +\infty) = 1, \quad \mathbb{P}^n(X_{\eta-} = -\infty) = 0,$$

这意味着

$$\mathbb{P}^n(\lim_{t \rightarrow \eta} X_t(\omega) = -\infty) = 0.$$

我们把零测集记为

$$\mathcal{N}_n = \{\omega : \lim_{t \rightarrow \eta} X_t(\omega) = -\infty, X_0(\omega) = n\} \quad \text{和} \quad \mathcal{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{N}_n.$$

那么对于 $t > 0$,

$$\{\omega : \lim_{t_i \rightarrow t} X_{t_i}(\omega) = -\infty\} \subset \mathcal{N},$$

这意味着在 r_1 是无穷大时, $-\infty$ 不会影响 Doob 修正的可分性.

如果 r_1 是有限的, r_1 只能是自然的边界. 根据 [1, §8.8, 定理 11], 有

$$\mathbb{P}^n(\eta < +\infty \mid X_{\eta-} = -\infty) = 0,$$

那么

$$\mathbb{P}^n(\eta < +\infty, X_{\eta-} = -\infty) = 0.$$

因此, 当 r_1 为有限值时, $-\infty$ 也不会影响 Doob 修正的可分性. 根据定理 2.1 以及 $\mathbb{P}^n(X_{\eta-} = +\infty) = 1$, $+\infty$ 可以作为该修正过程的一个取值.

以下推论可以用类似的方法证明.

推论 2.2 设 $(X_t)_{t \geq 0}$ 为一个双边生灭过程. 若 r_2 是流入的或自然的, r_1 是正则的或流出的, 那么 $(X_t)_{t \geq 0}$ 的 Doob 可分修正定义在整数集 $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ 上.

推论 2.3 设 $(X_t)_{t \geq 0}$ 为一个双边生灭过程. 若两个边界 r_1 和 r_2 都是正则的或流出的, 那么 $(X_t)_{t \geq 0}$ 的 Doob 可分修正定义在整数集 $\mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$ 上.

接下来, Ray-Knight 紧化从这个典范版本开始操作. 由 Ray [4] 和 Knight [5] 提出的 Ray-Knight 紧化, 是一种对马尔可夫过程进行正则化的方法.

设 $\mathbf{F}$ 是一个紧致可分的度量空间, $\mathbf{C}(\mathbf{F})$ 是 $\mathbf{F}$ 上的连续函数空间. 设 S 是连续的 1-上平均函数类, 即

$$S = \{f \in \mathbf{C}(\mathbf{F}) : f > 0, \alpha R_{\alpha+1} f \leq f, \forall \alpha > 0\}.$$

众所周知, 一个 Feller 半群将 $\mathbf{C}(\mathbf{F})$ 映射到 $\mathbf{C}(\mathbf{F})$. 一个 Ray 预解也有同样的作用.

在 $\mathbf{F}$ 上的一个预解 (R_α) 称为一个 Ray 预解, 如果满足

- (1) $\forall \alpha > 0, R_\alpha : \mathbf{C}(\mathbf{F}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{F})$;
- (2) S 可以分离 $\mathbf{F}$ 中的点.

对于上述定义的 Ray 预解 R_α , 存在两个 Borel 可测的马尔可夫半群, 它们都以 R_α 作为预解式, 其中一个是左连续的, 另一个是右连续的. 由于存在分支点, Ray 半群可能不是 Feller 半群, 这样一来, 左连续过程就显得尤为重要.

对于在 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上具有联合可测转移函数 $p(t, x, dy)$ 的马尔可夫过程, 存在一个“良好”的版本, 除了在一个可数集内的 t 值之外, 在每个 t 时刻, 该版本与原过程以概率 1 相等. 由于 Doob 修正的可分性, 经过 Ray-Knight 紧化后的过程 $(\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$ 满足 $P(\tilde{X}_t(\omega) = X_t(\omega)) = 1, \forall t \geq 0$.

这种技术利用一个稍微大一些的拓扑空间, 将原来的生灭过程修改为一个右连左极且具有强马氏性的 Ray 过程. 需要注意的是, 对于一般的马尔可夫过程, 这种嵌入并非真正是对状态空间中原始拓扑的紧化.

在下一节中, 对于双边生灭过程, 我们将推导出扩展空间的具体构造.

§3 双边生灭过程的 Ray-Knight 紧化

对于一个双边生灭过程 $(X_t)_{t \geq 0}$, 通过之前的讨论, 我们总是可以将其视为在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的一个可分过程. 考虑一个生灭过程 $(X_t)_{t \geq 0}$, 其转移矩阵为 $(p_{ij}(t))$, 密度矩阵为 $Q = (q_{ij})$, 其中 $i, j \in E$ ($\mathbb{Z} \subset E$ 且 E 可能包含无穷大). 一般来说, 由于状态空间可能包含无穷且内部不存在被杀死的情况, 我们无需假设该过程是诚实的. 按照常规方法, 我们可以通过在状态空间 E 中添加一个吸收态 $\{\partial\}$, 将其扩展为一个诚实的转移矩阵.

如果初始分布是对于某个 $i \in \mathbb{Z}$ 的单位测度 $\mathbf{1}_{\{i\}}$, 我们将 $\mathbb{P}$ 记为 $\mathbb{P}^i$, 将期望 $\mathbb{E}(\cdot)$ 记为 $\mathbb{E}^i(\cdot)$. X 的转移半群记为 P_t , 相应的预解式 $(R_\alpha)_{\alpha>0}$ 对于 $\mathbb{Z}$ 上所有有界且非负的 Borel 函数 $f(\cdot)$ 定义为

$$R_\alpha f(i) := \mathbb{E}^i \int_0^\infty e^{-\alpha t} f(X_t) dt,$$

特别地, 对于 $i, j \in \mathbb{Z}$, $P_t(i, \{j\}) = p_{ij}(t)$, 并且根据文 [6] 中的记号,

$$R_\alpha(i, \{j\}) := \int_0^\infty e^{-\alpha t} p_{ij}(t) dt.$$

有时在不会引起歧义的情况下, 我们将 $R_\alpha(i, \{j\})$ 记为 $R_{ij}(\alpha)$.

预解式 $(R_\alpha)_{\alpha>0}$ 在 Ray-Knight 紧化中起着关键作用. 文 [1, 7] 中所提出的处理方式给出了预解式矩阵一个复杂且完整的解析特征描述. 对于双边生灭过程, 解析构造需要求解方程

$$\lambda f = (D_\mu f)^+. \quad (3.1)$$

具体地说, $f(i)$ 是一个在整数集 $\mathbb{Z}$ 上的函数, 并且

$$\begin{cases} f^+(i) = \frac{f(i+1) - f(i)}{Z_{i+1} - Z_i} & (i \in \mathbb{Z}), \\ (D_\mu f)(i) = \frac{f(i) - f(i-1)}{\mu_i} & (i \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

根据 [1, §8.2, 定理 3], 方程 (3.1) 有一个严格递减的正解 $f_{1,\lambda}(i)$ 以及一个严格递增的解 $f_{2,\lambda}(i)$, 它们满足以下性质.

(1) $f_{1,\lambda}^+(i) < 0$ 并且 $f_{1,\lambda}^+(i)$ 是严格递增的, $f_{2,\lambda}^+(i) > 0$ 并且 $f_{2,\lambda}^+(i)$ 是严格递增的. 对于 $\lambda > 0$, $f_{1,\lambda}(i)f_{2,\lambda}^+(i) - f_{1,\lambda}^+(i)f_{2,\lambda}(i) = 1$.

(2) 当且仅当边界点 r_1 (对应地, r_2) 是正则的或者流出的时,

$$f_{1,\lambda}(-\infty) := \lim_{i \rightarrow -\infty} f_{1,\lambda}(i) < +\infty, \quad (3.2)$$

$$(\text{对应地, } f_{2,\lambda}(+\infty) := \lim_{i \rightarrow +\infty} f_{2,\lambda}(i) < +\infty). \quad (3.3)$$

(3) 当且仅当边界点 r_1 (对应地, r_2) 是正则的或者流入的时,

$$f_{1,\lambda}^+(-\infty) := \lim_{i \rightarrow -\infty} f_{1,\lambda}^+(i) > -\infty, \quad (3.4)$$

$$(\text{对应地, } f_{2,\lambda}^+(+\infty) := \lim_{i \rightarrow +\infty} f_{2,\lambda}^+(i) < +\infty). \quad (3.5)$$

(4) 当边界点 r_1 是正则的或者流出的时,

$$\lim_{i \rightarrow -\infty} f_{2,\lambda}(i) = 0. \quad (3.6)$$

类似地, 当边界点 r_2 是正则的或者流出的时,

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} f_{1,\lambda}(i) = 0. \quad (3.7)$$

根据引理 2.1, 对于 $n \in \mathbb{Z}$, 定义 $\eta_n := \inf\{t > 0 : |X_t| = n\}$ 以及 $\eta = \lim_{n \rightarrow +\infty} \eta_n$, 那么 η 就是 $(X_t)_{t \geq 0}$ 的首次飞越时间. 对于 $\alpha > 0$, 在 $\mathbb{Z} \cup \{\partial\}$ 上定义函数

$$u_\alpha(i) := \mathbb{E}^i e^{-\alpha \eta} \quad (i \in \mathbb{Z}), \quad (3.8)$$

并且自然地要求 $u_\alpha(\partial) = 0$.

当两个边界点均为流入的或自然的时, 预解式是极小的. 相应的过程是极小 Q 过程, 该过程在首次飞越时间 η 处停止. 这样的过程的性质可以完全由密度矩阵 Q 来确定. 因此, 实际上我们需要处理两种情况.

在第一种情况中, 我们假设 r_2 是流出的或正则的, 且 r_1 是自然的或流入的. 根据推论 2.1, 该过程在状态空间 $\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ 上有一个可分修正. 在接下来的讨论中, 我们不会区分这两个过程, 就是说 $(X_t)_{t \geq 0}$ 总是被视为一个可分过程. 相反地, 当 r_1 是流出的或正则的且 r_2 是自然的或流入的时, 可以归结为上述情况. 以下是本文的主要结果.

定理 3.1 对于一个双边生灭过程 X , 如果 r_2 是流出的或者正则的, r_1 是自然的或者流入的, 那么 Ray-Knight 紧化可以得到一个右连左极的修正 $(\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$, 并且是一个 $\mathbf{F} = \mathbb{Z} \cup \{+\infty\} \cup \{\partial\}$ 上的 Ray 过程.

开始证明以前, 我们需要如下引理.

引理 3.1 令 $u_\alpha(i)$ 定义如 (3.8). 对于一个双边生灭过程 $(X_t)_{t \geq 0}$, 如果 r_2 是流出的或者正则的, r_1 是自然的或者流入的, 那么

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} u_\alpha(i) = 1.$$

证 根据 [1, §8.8, 定理 11], 对于 $i \in \mathbb{Z}$, 有 $\mathbb{P}^i(\eta < \infty) = 1$.

显然, $u_\alpha(i) = \mathbb{E}^i e^{-\alpha\eta} = \mathbb{E}^i(e^{-\alpha\eta}; X_{\eta-} = +\infty)$, 其中 $X_{\eta-}$ 表示轨道在时刻 η 的左极限. 根据 [1, §8.8, 定理 7, §8.4],

$$\mathbb{E}^i(e^{-\alpha\eta}; X_{\eta-} = +\infty) = \frac{f_{2,\lambda}(i)}{f_{2,\lambda}(+\infty)},$$

其中 $f_{2,\lambda}(i)$ 的定义如 (3.3) 所示. 则有

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{f_{2,\lambda}(i)}{f_{2,\lambda}(+\infty)} = 1.$$

现在可以证明定理 3.1 了. 上述引理帮助我们得到一族 1-上平均函数

$$G := \{R_1 1_i : i \in \mathbb{Z} \cup \{\partial\}\} \cup \{u_1\}.$$

令 $\mathcal{Z}_b^+$ 是 $\mathbb{Z}$ 上非负有界的 Borel 函数全体. 根据 Knight [5], 存在一个唯一的最小的凸锥 $S(G)$ 叫做 Ray 锥, 使得

(1) 如果 $f, g \in S(G)$, 那么 $f \wedge g \in S(G)$;

(2) $1_{\mathbb{Z} \cup \{\partial\}} \in S(G)$, $G \subset S(G)$;

(3) 如果 $f \in S(G)$, 那么 $R_\alpha f \in S(G)$ 对于 $\alpha > 0$ 都成立;

(4) $S(G)$ 是可分的 $\mathcal{Z}_b^+$ 并且 $S(G)$ 可以分离 $\mathbb{Z} \cup \{\partial\} \cup \{+\infty\}$. 这里可分性是说存在一个 $S(G)$ 的可数子集, 其在 $\mathcal{Z}_b^+$ 中的一致范数意义下的闭包包含 $S(G)$.

将 $u_1(i)$ 引入到 $S(G)$ 中的目的是将 $\{+\infty\}$ 与 $\mathbb{Z}$ 分离开. 然后, 根据 [8, 定理 8.25], 在 $\mathbf{F}$ 上存在一个右连左极的 Ray 过程 $\tilde{X} = (\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$, 它满足以下性质

(1) $\mathbb{Z} \cup \{\partial\}$ 是 $\mathbf{F}$ 的一个稠的 Borel 子集;

(2) 对每个 $i \in \mathbb{Z} \cup \{\partial\}$ 和 $A \subset \mathbb{Z} \cup \{\partial\}$, $R_\alpha(i, A) = \tilde{R}_\alpha(i, A)$, 其中 $\tilde{R}_\alpha(i, A)$ 是 $\tilde{X} = (\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$ 的预解;

(3) $\mathbb{P}(\tilde{X}_t = X_t) = 1$, 对于 a.e. t (这里 $\mathbb{P}(\cdot)$ 是关于 $(\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$).

我们需要强调一下为什么拓展后的空间 $\mathbf{F}$ 是 $\mathbb{Z} \cup \{+\infty\} \cup \{\partial\}$ 并且拓扑保持不变.

根据 Ray 锥 $S(G)$ 的可分性, 可以取一个可数的 (在一致范数意义下的) 稠密子集 $S_0 = \{f_k\} \subset S(G)$, 且 $u_1 \in S_0$. 由于 $S(G)$ 能分离 $\mathbb{Z} \cup \{\partial\}$ 中的点, 所以 S_0 也能做到. 然后通过以下方式定义度量 d

$$d(m, n) = \sum_k 2^{-k} \frac{|f_k(n) - f_k(m)|}{1 + \|f_k\|} \quad (n, m \in \mathbb{Z} \cup \{\partial\}).$$

设 $\mathbf{F}$ 是 $\mathbb{Z} \cup \{\partial\}$ 关于这个度量的完备化空间. 由于度量 d 是有界的, 所以 $\mathbf{F}$ 是紧的, 并且 S_0 中的每个 f_k 关于这个度量都是一致连续的. 记集合 $\tilde{S}_0 := \{\tilde{f} : f \in S_0\}$, 其中 $\tilde{f}$ 是 f 在 $C(\mathbf{F})$ 中的扩张, 则 $\tilde{S}_0$ 能分离 $\mathbf{F}$ 中的点. 由于 $\mathbb{P}(\eta < \infty) = 1$ 且 $\tilde{X}$ 是右连左极的. 因此, 对于 $f \in S_0$, 有

$$\lim_{t \rightarrow \eta} \tilde{f}(\tilde{X}_t) = \tilde{f}(\tilde{X}_{\eta-}).$$

由 $\tilde{f}$ 的定义, 有

$$\tilde{f}(\tilde{X}_{\eta-}) = \lim_{t \rightarrow \eta} f(\tilde{X}_t).$$

因为 X_t 在到达状态 $n+1$ 前一定会经过 n , 则

$$\lim_{t \rightarrow \eta} f(X_t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n).$$

Ray 过程 $\tilde{X}$ 的性质表明

$$\mathbb{P}(\tilde{f}(\tilde{X}_t) = f(X_t)) = 1 \quad (\text{对于 a.e. } t).$$

由于 $\tilde{S}_0$ 能区分 $\mathbf{F}$ 中的点, 存在一个额外的点 $\xi \notin \mathbb{Z}$ 但 $\xi \in \mathbf{F}$, 使得

$$\tilde{f}(\xi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{f}(n).$$

这也表明, $\mathbf{F}$ 上限制在 $\mathbb{Z}$ 上的拓扑与 $\mathbb{Z}$ 本身同构, 进而 $\xi = +\infty$. 对于 ξ 的唯一性, 可以通过反证法来推导. 这样就完成了定理 3.1 的证明.

在这种情况下, 我们将紧化后添加到 $\mathbb{Z} \cup \{\partial\}$ 中的额外点记为 $\{+\infty\}$. 这是因为我们假设 r_2 是流出的或正则的. 直观地说, 在这种情况下, 过程 $\tilde{X}_t$ 更像是在区间 (r_1, r_2) 内的一种扩散, 并且以概率 1 能够到达 r_2 .

在第二种情况下, 我们假设边界点 r_1 和 r_2 都是流出的或正则的, 则有如下结果.

定理 3.2 对于一个双边生灭过程 $(X_t)_{t \geq 0}$, 如果两个边界点 r_1 和 r_2 都是流出的或者正则的, Ray-Knight 紧化提供了一个右连左极修正 $(\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$, 它在 $\mathbf{F} = \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \cup \{\partial\}$ 或者 $\mathbf{F} = \mathbb{Z} \cup \{+\infty, -\infty\} \cup \{\partial\}$ 上是一个 Ray 过程.

我们使用不同符号 $\{\infty\}$ 和 $\{+\infty, -\infty\}$ 的原因将在下面给出. 与定理 3.1 的证明类似, 首先需要有一个引理来构造一族 1-上平均函数.

引理 3.2 设 $u_\alpha(i)$ 按 (3.8) 定义. 对于双边生灭过程 $(X_t)_{t \geq 0}$, 若两个边界 r_1 和 r_2 均为流出的或正则的, 那么

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} u_\alpha(i) = \lim_{i \rightarrow -\infty} u_\alpha(i) = 1.$$

证 根据 [1, §8.8, 定理 7, §8.4], 对于 $\alpha > 0$, 有

$$u_\alpha(i) = \mathbb{E}^i(e^{-\alpha\gamma}; X_{\gamma-} = +\infty) + \mathbb{E}^i(e^{-\alpha\gamma}; X_{\gamma-} = -\infty) = 1 - \frac{f_{1,\lambda}(i)}{f_{1,\lambda}(-\infty)} - \frac{f_{2,\lambda}(i)}{f_{2,\lambda}(+\infty)},$$

其中 $f_{a,\lambda}(i), f_{a,\lambda}(+\infty)$ ($a = 1, 2$) 定义如 (3.2) 和 (3.3). 对上述方程两边取极限, 依据 (3.6) 和 (3.7), 该引理得证.

第二种情况中有一些不同的细节需要声明. 在第二种情况中, 假设正无穷 $(+\infty)$ 和负无穷 $(-\infty)$ 都是流出的或者正则的. 复制前面定理的证明, 可以看到扩展空间与 1-上平均函数族的选择直接相关. 如果选择 1-上平均函数族

$$G = \{R_1 1_i : i \in \mathbb{Z}\} \cup \{u_1(i)\},$$

上述引理意味着, 在正无穷和负无穷处的 $u_1(i)$ 具有相同的值, 但肯定要向原始空间中添加一个新的点. 在这种情况下, 用符号 $\{\infty\}$ 来表示这个新的点. 然而, 在 1-上平均函数族

$$\{R_1 1_i : i \in \mathbb{Z}\} \subset G$$

中可能存在一个函数 $s_i(k)$. 设添加的两个点为 $\{+\infty\}$ 和 $\{-\infty\}$, 那么它们可以被这个函数 $s_i(k)$ 分开, 这意味着

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} s_i(k) \neq \lim_{k \rightarrow -\infty} s_i(k).$$

选择函数 $s_i(k) := R_1 1_i(k) \in G$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} s_i(k) = \int_0^\infty e^{-t} P_t(+\infty, \{i\}) dt, \quad (3.9)$$

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} s_i(k) = \int_0^\infty e^{-t} P_t(-\infty, \{i\}) dt. \quad (3.10)$$

我们可以看到, 当且仅当对于 $i \in \mathbb{Z} \cup \{\partial\}$, 有 $P_t(+\infty, \{i\}) = P_t(-\infty, \{i\})$ 时, G 才无法分离 $\{+\infty\}$ 和 $\{-\infty\}$. 在这种情况下, 扩张后的空间是 $\mathbf{F} = \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \cup \{\partial\}$. 如果对于 $i \in \mathbb{Z} \cup \{\partial\}$, $P_t(+\infty, \{i\}) = P_t(-\infty, \{i\})$ 不成立, 则扩张后的空间为 $\mathbf{F} = \mathbb{Z} \cup \{+\infty, -\infty\} \cup \{\partial\}$.

第 4 节中的讨论将不会区分原始过程和紧化后的右连左极修正过程. 在不同情况下, 扩张后的状态空间都用 $\mathbf{F}$ 表示.

§4 Doob 生灭过程的构造与概率含义

Ray-Knight 紧化能为我们提供一种从概率角度理解双边生灭过程的方法, 尤其是该过程在边界处的行为. Ray 过程是 Feller 过程的一类重要的推广. 与 Feller 过程的一个显著不同点在于, 可能会出现 $\lim_{t \rightarrow 0} P_t(x, \{x\}) < 1$ 这种情况. 这样的点 $x \in \mathbf{F}$ 被称为分支点, 而 $P_0(x, \cdot)$ 则是 x 处的分支测度. 在 Feller 过程和 Hunt 过程中不会出现分支点. 依据

Ray 过程中的这些概念, 我们有了一种前所未有的方式来构造一个著名的双边生灭过程, 即 Doob 过程.

Doob(Q, π) 过程的概念可参考 [1, §2.3]. 直观地说, 一个 Doob(Q, π) 过程意味着在每次飞越时间之后, 该过程会根据一个进入分布迅速重新进入状态空间. 这个进入分布是在状态空间 $E = \mathbb{Z} \cup \{\partial\}$ 上的一个概率测度 π . 这种在飞越时间后给出补充定义的方法是由 Doob 在文 [9] 中提出的. 我们把这样的边界称为 Doob 型边界. 这种被称为“拼接”的技术在具有分支结构的右连续强马氏过程中被广泛应用 (见文 [10]).

现在考虑一个双边生灭过程, 其密度矩阵为 $Q = (q_{ij})$ ($i, j \in \mathbb{Z}$), 以及极小过程的预解矩阵 $R_{ij}(\alpha)$ ($\alpha > 0$). 为了将 Ray 过程与原始过程区分开来, 我们将 Ray 过程的半群记为 $\tilde{P}_t$, Ray 过程的预解式记为 $\tilde{R}_\alpha(i, \{j\})$. 要注意的是, 这里不需要 $\tilde{P}_t$ 是诚实的, 也就是说, 该过程会在无穷远处被“杀死”.

定理 4.1 令 ν 是一个 $\mathbb{Z} \cup \{\partial\}$ 上的概率测度. $X = (X_t)_{t \geq 0}$ 是一个双边生灭过程且只有一个流出的或正则的边界 r_2 . 那么, 以下论断是等价的:

- (1) X 是一个 Doob(Q, ν) 过程;
- (2) $\{+\infty\}$ 是一个分支点并且分支测度是 $\tilde{P}_0(+\infty, \{k\}) = \nu_k$, $k \in \mathbb{Z} \cup \{\partial\}$ (在后续证明中, 将简记为 $\mathbb{Z}_\partial$).

证 当 $X = (X_t)_{t \geq 0}$ 只有一个流出的或正则的边界 r_2 时, 令 η 是首次飞越时间. 由于 η 是一个 $\tilde{\mathcal{F}}_t$ -停时, 也就是说关于 $(\mathcal{F}_t)_{(t \geq \eta)}$ 可测.

由 Ray 过程的强马氏性, 通过 Dynkin 公式可以得到

$$\tilde{R}_\alpha(i, \{j\}) = R_{ij}(\alpha) + \mathbb{E}^i \left[e^{-\alpha\eta} \int_\eta^{+\infty} e^{-\alpha(t-\eta)} \delta_{X_t, j} dt \right].$$

这里 $\delta_{i,j}$ 是 Kronecker 记号, 即如果 $i = j$, 那么 $\delta_{i,j} = 1$, 其他情况值为 0. 令 $u_\alpha(i) = \mathbb{E}^i e^{-\alpha\eta}$, 如 (3.8). 由定义可知

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^i \left[e^{-\alpha\eta} \int_\eta^{+\infty} e^{-\alpha(t-\eta)} \delta_{X_t, j} dt \right] &= \mathbb{E}^i \left[e^{-\alpha\eta} \mathbb{E}^{X_\eta} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \delta_{X_t, j} dt \right) \right] \\ &= \mathbb{E}^i (e^{-\alpha\eta} \mathbb{E}^i [\tilde{R}_\alpha(X_\eta, \{j\}) | \mathcal{F}_{\eta-}]) \\ &= u_\alpha(i) \sum_{k \in \mathbb{Z}_\partial} \tilde{R}_\alpha(k, \{j\}) \tilde{P}_0(+\infty, \{k\}). \end{aligned}$$

关于分支测度 $\tilde{P}_0(+\infty, \{k\})$ 积分, 可以看到

$$\begin{aligned} &\sum_{i \in \mathbb{Z}_\partial} \tilde{R}_\alpha(i, \{j\}) \tilde{P}_0(+\infty, \{i\}) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}_\partial} \tilde{P}_0(+\infty, \{i\}) R_{ij}(\alpha) + \sum_{i \in \mathbb{Z}_\partial} \tilde{P}_0(+\infty, \{i\}) u_\alpha(i) \sum_{k \in \mathbb{Z}_\partial} \tilde{R}_\alpha(k, \{j\}) \tilde{P}_0(+\infty, \{k\}). \end{aligned}$$

这意味着

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_\partial} \tilde{R}_\alpha(k, \{j\}) \tilde{P}_0(+\infty, \{k\}) = \frac{\sum_{k \in \mathbb{Z}_\partial} \tilde{P}_0(+\infty, \{k\}) R_{kj}(\alpha)}{1 - \sum_{k \in \mathbb{Z}_\partial} \tilde{P}_0(+\infty, \{k\}) u_\alpha(k)}.$$

根据 [1, §8.5], 我们可以得到定义在 $\mathbb{Z}_\partial \cup \{+\infty\}$ 上的 Doob(Q, π) 过程对应的预解是

$$\tilde{R}_{ij}(\alpha) = R_{ij}(\alpha) + u_\alpha(i) \frac{\sum_{k \in \mathbb{Z}_\partial} \pi_k R_{kj}(\alpha)}{\gamma + \sum_{k \in \mathbb{Z}_\partial} \pi_k u_\alpha(k)}, \quad (4.1)$$

这里 $u_\alpha(i)$ 定义如 (3.8) 并且 γ 是一个非负实数. 根据 Ray-Knight 紧化的性质 (2), 我们用相同的记号表示 Doob(Q, π) 过程与 Ray 过程的预解. 通过比较, 可得

$$\tilde{P}_0(+\infty, \{k\}) = \frac{\pi_k}{\sum_{k \in \mathbb{Z}_\partial} \pi_k + \gamma} := \nu_k, \quad (4.2)$$

$$\tilde{P}_0(+\infty, \{\partial\}) = \frac{\gamma}{\sum_{k \in \mathbb{Z}_\partial} \pi_k + \gamma} := \nu_\partial. \quad (4.3)$$

接下来, 假设 $X = (X_t)_{t \geq 0}$ 是一个 Doob 过程, 并且 $\{+\infty\}$ 是一个 Doob 型的边界, 进入分布是 $(\pi_k)_{k \in \mathbb{Z}_\partial}$, 预解矩阵如 (4.1). 那么根据 $i \rightarrow +\infty$ 时, $R_{ij}(\alpha) = 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow +\infty} \tilde{R}_{ij}(\alpha) &= \lim_{i \rightarrow +\infty} R_{ij}(\alpha) + u_\alpha(i) \frac{\sum_{k \in \mathbb{Z}_\partial} \pi_k R_{kj}(\alpha)}{\gamma + \sum_{k \in \mathbb{Z}_\partial} \pi_k u_\alpha(k)} \\ &= \frac{\sum_{k \in \mathbb{Z}_\partial} \pi_k R_{kj}(\alpha)}{\gamma + \sum_{k \in \mathbb{Z}_\partial} \pi_k u_\alpha(k)}. \end{aligned}$$

由预解的性质, 有

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha \tilde{R}_\alpha(+\infty, j) = \pi_j \neq \delta_{+\infty, j}, \quad (4.4)$$

所以 $+\infty$ 是一个分支点. 再次使用 Dynkin 公式, 可以得到分支测度是 ν_k . 定理 4.1 得证.

定理 4.1 还对解析构造与通过 Ray-Knight 紧化 (4.2)–(4.3) 进行的概率构造进行了比较. 另外两种情况可按类似方式处理. 我们将在定理 4.2 的证明中给出不同的细节. 需要注意的是, 在以下情形中, 根据可分修正, Doob 过程是定义在 $\mathbb{Z}_\partial \cup \{+\infty, -\infty\}$ 上的. 如果过程在 $\{-\infty\}$ 的进入分布为 (μ_k) , $\{+\infty\}$ 的进入分布为 (ν_k) , 我们就记为 Doob(Q, μ, ν) 过程, 其中 (μ_k) 和 (ν_k) 仍然是 $\mathbb{Z}_\partial$ 上的概率测度.

定理 4.2 令 ν 是一个 $\mathbb{Z}_\partial$ 上的概率测度. 定义在 $\mathbb{Z}_\partial \cup \{\infty\}$ 上的 $X = (X_t)_{t \geq 0}$ 是一个双边生灭过程且有两个流出的或正则的边界. 那么, 以下论断是等价的:

- (1) X 是一个 Doob(Q, ν, ν) 过程;
- (2) $\{\infty\}$ 是一个分支点并且分支测度是 $\tilde{P}_0(\infty, \{k\}) = \nu_k$.

证 设 $X = (X_t)_{t \geq 0}$ 是在 $\mathbb{Z}_\partial \cup \{\infty\}$ 上的双边生灭过程, 且具有两个流出或正则的边界. 设 η 为该过程的首次飞越时间. 记

$$u_\alpha^{(1)}(i) = \mathbb{E}^i(e^{-\alpha\eta}; X_{\eta-} = -\infty), \quad u_\alpha^{(2)}(i) = \mathbb{E}^i(e^{-\alpha\eta}; X_{\eta-} = +\infty), \quad (4.5)$$

并且

$$u_\alpha(i) := \mathbb{E}^i(e^{-\alpha\eta}) = u_\alpha^{(1)}(i) + u_\alpha^{(2)}(i).$$

在这种情况下, 扩大后的拓扑空间是 $\mathbb{Z}_\partial \cup \{\infty\}$. 根据强马氏性和 Dynkin 公式, Ray 过程 $X = (X_t)_{t \geq 0}$ 的预解式满足

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_\partial} \tilde{R}_\alpha(k, \{j\}) \tilde{P}_0(\infty, \{k\}) = \frac{\sum_{k \in \mathbb{Z}_\partial} \tilde{P}_0(\infty, \{k\}) R_{kj}(\alpha)}{1 - \sum_{k \in \mathbb{Z}_\partial} \tilde{P}_0(\infty, \{k\}) u_\alpha(k)}. \quad (4.6)$$

设 $\Phi_{ij}(\alpha)$ 为 Doob(Q, π, τ) 过程的预解式. 由于扩大后的空间仅在 $\mathbb{Z}_\partial$ 中添加了一个点, 这意味着

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \Phi_{ij}(\alpha) = \lim_{i \rightarrow -\infty} \Phi_{ij}(\alpha).$$

通过计算预解式的极限, 只有在 $\pi_k = \tau_k$ 的情况下, 这些条件才能得到满足. 仿照 (4.4), 可以证明 $\{\infty\}$ 是一个分支点.

接下来, 通过 Ray-Knight 紧化来比较解析构造和概率构造之间的参数. 根据 [1, §8.6, 定理 1], 设 γ 为一个非负常数, 我们可以得到 Doob(Q, π, π) 过程的预解式

$$\tilde{R}_{ij}(\alpha) = R_{ij}(\alpha) + \xi_\alpha(i) \frac{\sum_{k \in \mathbb{Z}_\partial} \pi_k R_{kj}(\alpha)}{\gamma + \sum_{k \in \mathbb{Z}_\partial} \pi_k (\xi(k) - \xi_\alpha(k))}, \quad (4.7)$$

其中 $\xi_\alpha(k) = d(u_\alpha^{(1)}(k) + u_\alpha^{(2)}(k))$ 并且 $\xi(k) = d(\frac{r_2 - Z_k}{r_2 - r_1} + \frac{Z_k - r_1}{r_2 - r_1}) = d$ (d 是一个非负的常数). 比较 (4.6) 与 (4.7), 有

$$\tilde{P}_0(+\infty, \{k\}) = \frac{\pi_k}{\sum_{k \in \mathbb{Z}_\partial} \pi_k + \frac{\gamma}{d}} := \nu_k, \quad (4.8)$$

$$\tilde{P}_0(+\infty, \{\partial\}) = \frac{\frac{\gamma}{d}}{\sum_{k \in \mathbb{Z}_\partial} \pi_k + \frac{\gamma}{d}} := \nu_\partial. \quad (4.9)$$

定理 4.2 证毕.

最后一种情况在解析构造方面可能会更加复杂. 可以通过概率构造来赋予这些参数一定的意义.

定理 4.3 设 $X = (X_t)_{t \geq 0}$ 是在 $\mathbb{Z}_\partial \cup \{+\infty, -\infty\}$ 上的双边生灭过程, 且具有两个退出或正则的边界. $\pi^{(1)}$ 和 $\pi^{(2)}$ 是 $\mathbb{Z}_\partial$ 上两个不同的概率测度. 那么以下论断是等价的:

- (1) X 是一个 Doob($Q, \pi^{(1)}, \pi^{(2)}$) 过程;
- (2) $\{+\infty, -\infty\}$ 都是分支点并且分支测度 $\tilde{P}_0(-\infty, \{k\}) = \pi_k^{(1)}$, $\tilde{P}_0(+\infty, \{k\}) = \pi_k^{(2)}$.

证 使用定理 4.1 中的记号, 根据强马氏性和 Dynkin 公式,

$$\begin{aligned} \tilde{R}_\alpha(i, \{j\}) &= R_{ij}(\alpha) + \mathbb{E}^i \left[e^{-\alpha\eta} \int_\eta^{+\infty} e^{-\alpha(t-\eta)} \delta_{X_t, j} dt; X(\eta-) = -\infty \right] \\ &\quad + \mathbb{E}^i \left[e^{-\alpha\eta} \int_\eta^{+\infty} e^{-\alpha(t-\eta)} \delta_{X_t, j} dt; X(\eta-) = +\infty \right]. \end{aligned}$$

对于上述等式中的以下两项,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^i \left[e^{-\alpha\eta} \int_{\eta}^{+\infty} e^{-\alpha(t-\eta)} \delta_{X_{t,j}} dt; X(\eta-) = -\infty \right] \\ &= u_{\alpha}^{(1)}(i) \sum_{k \in \mathbb{Z}_{\partial}} \tilde{R}_{\alpha}(k, \{j\}) \tilde{P}_0(-\infty, \{k\}), \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^i \left[e^{-\alpha\eta} \int_{\eta}^{+\infty} e^{-\alpha(t-\eta)} \delta_{X_{t,j}} dt; X(\eta-) = +\infty \right] \\ &= u_{\alpha}^{(2)}(i) \sum_{k \in \mathbb{Z}_{\partial}} \tilde{R}_{\alpha}(k, \{j\}) \tilde{P}_0(+\infty, \{k\}). \end{aligned} \quad (4.11)$$

记 $\tilde{P}_0(-\infty, \{k\})$ 为 $P_0^{(1)}(k)$, 记 $\tilde{P}_0(+\infty, \{k\})$ 为 $P_0^{(2)}(k)$, 对于 $k \in \mathbb{Z}_{\partial}$. 使用与定理 4.1 证明中类似的技巧, 记 $[fg]_i = f(i)g(i)$, 可得

$$\tilde{R}_{\alpha}(i, \{j\}) = R_{ij}(\alpha) + u_{\alpha}^{(1)}(i)A_1(P_0^{(1)}, P_0^{(2)}) + u_{\alpha}^{(2)}(i)A_2(P_0^{(1)}, P_0^{(2)}), \quad (4.12)$$

其中

$$A_1(P_0^{(1)}, P_0^{(2)}) = \frac{(1 - P_0^{(2)}u_{\alpha}^{(2)})[P_0^{(1)}(k)R_{kj}]_j + P_0^{(1)}u_{\alpha}^{(2)}[P_0^{(2)}(k)R_{kj}]_j}{(1 - P_0^{(2)}u_{\alpha}^{(2)})(1 - P_0^{(1)}u_{\alpha}^{(1)}) - P_0^{(1)}u_{\alpha}^{(2)} \cdot P_0^{(2)}u_{\alpha}^{(1)}}, \quad (4.13)$$

$$A_2(P_0^{(1)}, P_0^{(2)}) = \frac{(1 - P_0^{(1)}u_{\alpha}^{(1)})[P_0^{(2)}(k)R_{kj}]_j + P_0^{(2)}u_{\alpha}^{(1)}[P_0^{(1)}(k)R_{kj}]_j}{(1 - P_0^{(2)}u_{\alpha}^{(2)})(1 - P_0^{(1)}u_{\alpha}^{(1)}) - P_0^{(1)}u_{\alpha}^{(2)} \cdot P_0^{(2)}u_{\alpha}^{(1)}}. \quad (4.14)$$

对于一个 Doob($Q, \pi^{(1)}, \pi^{(2)}$) 过程, $\pi^{(1)}$ 和 $\pi^{(2)}$ 均为 $\mathbb{Z}_{\partial}$ 上的概率测度. 根据文 [7], 可以得到该过程的预解

$$\tilde{R}_{\alpha} = R_{\alpha} + (u_{\alpha}^{(1)} \quad u_{\alpha}^{(2)})(\mathbf{I} - \mathbf{T}_{\alpha})^{-1} \begin{pmatrix} [\pi^{(1)} R_{\alpha}] \\ [\pi^{(2)} R_{\alpha}] \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

其中 $(\mathbf{T}_{\alpha})_{ab} = \pi^{(a)} \cdot u_{\alpha}^{(b)}$. 注意到 $u_{\alpha}^{(1)}(\partial) = u_{\alpha}^{(2)}(\partial) = 0$, 可以推出对于任意 $k \in \mathbb{Z}_{\partial}$, 通过比较 (4.13) 和 (4.14) 可知

$$\tilde{P}_0(-\infty, \{k\}) = \pi_k^{(1)}, \quad (4.16)$$

$$\tilde{P}_0(+\infty, \{k\}) = \pi_k^{(2)}. \quad (4.17)$$

参 考 文 献

- [1] Wang Z K, Yang X Q. Birth and death processes and Markov chains [M]. Berlin: Springer-Verlag, Beijing: Science Press Beijing, 1992.
- [2] Feller W. The birth and death processes as diffusion processes [J]. *J Math Pures Appl* (9), 1959, 38:301–345.
- [3] Doob J L. Stochastic processes [M]. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1953.
- [4] Ray D. Stationary Markov processes with continuous paths [J]. *Trans Amer Math Soc*, 1956, 82:452–493.

- [5] Knight F. Note on regularization of Markov processes [J]. *Illinois J Math*, 1965, 9:548–552.
- [6] Li L P. Ray-Knight compactification of birth and death processes [J]. *Stochastic Process Appl*, 2024, 177, Paper number 104456, 19 pp.
- [7] Yang X Q. Bilateral birth death processes [J]. *Acta Scientiarum Naturalium (Universitatis Nakaensis)*, 1964, 5(5):9–40.
- [8] Chung K L, Walsh J B. Markov processes, Brownian motion, and time symmetry [M]. vol 249, New York: Springer-Verlag, 2005.
- [9] Doob J L. Discrete potential theory and boundaries [M]. United States Air Force, Office of Scientific Research, 1958.
- [10] Ikeda N, Nagasawa M, Watanabe S. A construction of Markov processes by piecing out [J]. *Proc Japan Acad*, 1966, 42:370–375.

Ray-Knight Compactification of Bilateral Birth-Death Processes

WANG Huixi¹ YING Jiangang¹

¹School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, China.

E-mail: hxwang20@fudan.edu.cn; jgying@fudan.edu.cn

Abstract According to the work of Wang and Yang, birth and death processes were characterized completely by an analytic construction. In this article, Ray-Knight compactification is applied to describe birth and death processes after the first flying time probabilistically. Additional states are introduced to transform a birth and death process into a Ray process, making the behavior of the process more intuitive. In particular, the boundary conditions of Doob processes, a large class of bilateral birth and death processes, will be characterized in terms of branching distributions in Ray processes. Meanwhile a comparison to analytic construction in the work of Wang and Yang will be made.

Keywords Bilateral birth and death processes, Ray processes, Ray-Knight compactification

2020 MR Subject Classification 60G17

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 46 No. 2, 2025

by ALLERTON PRESS, INC., USA