

ℓ_p 空间中的 Max-相位等距*

谭冬妮¹ 刘 健²

提要 设 X 和 Y 是实赋范线性空间. 如果映射 $f: X \rightarrow Y$ 满足

$$\max\{\|f(x) + f(y)\|, \|f(x) - f(y)\|\} = \max\{\|x + y\|, \|x - y\|\}, \quad x, y \in X,$$

则称 f 是 max-相位等距. 作者证明实 ℓ_p ($p > 2$) 空间之间的任意满 max-相位等距等价于一个线性等距, 即存在相位函数 $\varepsilon: X \rightarrow \{-1, 1\}$, 使得 $\varepsilon \cdot f$ 是一个线性等距. 这可以看作是著名的 Wigner 定理在实 ℓ_p 空间 ($p > 2$) 中的推广. 文中还举出反例说明此结论在 ℓ_1 空间, 甚至在有限维的 ℓ_∞ 空间是不成立的.

关键词 Max-相位等距, 相位等距, 相位等价, Wigner 定理, Mazur-Ulam 定理

MR (2020) 主题分类 46B20

中图法分类 O177.2

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2025)02-0201-10

§1 引言及预备知识

设 X 和 Y 是赋范空间, $f, g: X \rightarrow Y$ 是映射, 如果存在一个相位函数 $\varepsilon: X \rightarrow \mathbb{T}$, 使得

$$f(x) = \varepsilon(x)g(x), \quad x \in X,$$

其中 $\mathbb{T}$ 在实数域的情形下取为 $\{-1, 1\}$; 在复数域的情形下取为 $\{c \in \mathbb{C} : |c| = 1\}$, 则称 f 和 g 是相位等价的.

映射 f 被称为相位等距, 如果其满足

$$\{\|f(x) + f(y)\|, \|f(x) - f(y)\|\} = \{\|x + y\|, \|x - y\|\}, \quad x, y \in X;$$

如果映射 f 满足

$$\min\{\|f(x) + f(y)\|, \|f(x) - f(y)\|\} = \min\{\|x + y\|, \|x - y\|\}, \quad x, y \in X, \quad (1.1)$$

则称其为 min-相位等距; 如果映射 f 满足

$$\max\{\|f(x) + f(y)\|, \|f(x) - f(y)\|\} = \max\{\|x + y\|, \|x - y\|\}, \quad x, y \in X,$$

则称其为 max-相位等距. 显然, 映射 f 是相位等距必然是 min-相位等距和 max-相位等距, 反之不一定成立.

本文 2024 年 3 月 7 日收到, 2025 年 2 月 8 日收到修改稿.

¹天津理工大学计算机科学与工程学院, 天津 300384. E-mail: tandongni0608@sina.cn

²通信作者. 天津理工大学理学院, 天津 300384. E-mail: jianliu1205@stud.tjut.edu.cn

*本文受到国家自然科学基金 (No. 12271402) 和天津市自然科学基金面上项目 (No. 22JCYBJC00420) 的资助.

著名的 Wigner 定理是量子力学数学表述的基石,它在物理学和量子理论的各个领域有广泛应用.随着量子力学不断地向前发展,其研究背景已经从传统的 Hilbert 空间拓展至更为广泛的非线性空间结构.这些新的空间在量子物理学中扮演着日益重要的角色,从而,将 Wigner 定理推广到这类更广泛的空间中显得尤为重要.文 [1-2] 指出, Wigner 定理实际上刻画了 Hilbert 空间中保内积绝对值的一类映射.也就是说,对于 Hilbert 空间 H, K , 映射 $f: H \rightarrow K$ 满足

$$|\langle f(x), f(y) \rangle| = |\langle x, y \rangle| \quad (1.2)$$

当且仅当 f 相位等价于一个线性或共轭线性等距.在文 [3] 中, Maksa 和 Páles 指出,在实 Hilbert 空间的情况下,通过极化恒等式可以证明 f 满足 (1.2), 则 f 是一个相位等距.

因此,根据 Wigner 定理,对于实 Hilbert 空间 H 和 K ,映射 $f: H \rightarrow K$ 是一个相位等距当且仅当 f 相位等价于一个线性等距.这样就产生一个很自然的问题:对于非 Hilbert 空间的赋范空间,同样的结论是否仍成立?一般来说,我们考虑满射的情况,因为对于非满射的情况存在反例,例如设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \ell_\infty^2$ 满足当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = (x, \sin x)$; 当 $x < 0$ 时, $f(x) = (-x, -\sin x)$. Huang 和 Tan [4] 首次在原子 L^p 空间利用满相位等距的表示定理肯定回答了这个问题,接着在 X 是 CL 空间, Y 是任意 Banach 空间的条件下 [5] 以及更一般地,当 X 是光滑空间时, Y 是任意的 Banach 空间时,文 [6] 给出了肯定的回答.紧接着 Ilišević, Omladić 和 Turnšek 在文 [7] 中通过巧妙运用 Mazur-Ulam 定理的证明和文 [6] 中的部分结论对这个问题给出了彻底的肯定回答.在文 [8] 中, Huang 和本文第一作者证明了这个结论对于满的 min-相位等距也是成立的.这表明上述的研究结果在较弱的条件下同样成立.然而,在文 [9] 中的反例指出一般情况下, min-相位等距不一定是相位等距,因此也不能相位等价于线性等距.

在本文中,作者们对另一个自然的问题产生了兴趣:在 (1.1) 中将 min 换成 max,也就是如果考虑 max-相位等距能否得到同样的结论?本文的结论表明,从实 $\ell_p(\Gamma)$ 空间到另一个 $\ell_p(\Delta)$ 空间中的任意满 max-相位等距当 $p \geq 2$ 时相位等价于一个线性等距,此结果同时也说明了这样的 max-相位等距也是相位等距.在文中也举出反例说明这个结论在 $p = 1$ 和 $p = \infty$ 是不成立的,即使是有限维也是不成立的.

§2 主要定理及其证明

在本文中,考虑的都是实数域上的赋范空间.设 X 和 Y 是赋范空间,它们的单位球面分别记为 S_X 和 S_Y .假设 Γ 是非空指标集,空间 $\ell_p(\Gamma)$ 定义为

$$\ell_p(\Gamma) = \left\{ x = \sum_{\gamma \in \Gamma} \xi_\gamma e_\gamma : \|x\| = \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} |\xi_\gamma|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \xi_\gamma \in \mathbb{R} \right\},$$

这里 $e_\gamma: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个函数,且 $e_\gamma(\gamma) = 1$, $e_\gamma(\gamma') = 0$, $\forall \gamma' \in \Gamma, \gamma' \neq \gamma$. 对每一个 $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} \xi_\gamma e_\gamma \in \ell_p(\Gamma)$, 我们将 x 的支撑记为 Γ_x , 即

$$\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma : \xi_\gamma \neq 0\}.$$

这样, x 可以被改写成 $x = \sum_{\gamma \in \Gamma_x} \xi_\gamma e_\gamma$. 假设指标集 $\Gamma_1 \subset \Gamma_x$, 那么符号 $x|_{\Gamma_1}$ 表示元素 x 限制在 Γ_1 上, 即

$$x|_{\Gamma_1} = \sum_{\gamma \in \Gamma_1} \xi_\gamma e_\gamma.$$

对所有 $x, y \in \ell_p(\Gamma)$, 如果 $\Gamma_x \cap \Gamma_y = \emptyset$, 则称 x 正交于 y , 记为 $x \perp y$.

我们首先介绍一个有趣的结果, 它表明严格凸空间之间的 max-相位等距是一个单的、奇的、保范的和正负齐次的映射.

引理 2.1 设 X, Y 是实的严格凸赋范空间. 如果 f 是从 X 到 Y 的满的 max-相位等距, 则 f 是保范的、单的奇映射. 特别地, 对任意的 $x \in X, \lambda \in \mathbb{R}$, 有 $f(\lambda x) \in \{\lambda f(x), -\lambda f(x)\}$.

证 首先, 证明 f 是保范的. 令 $y = x$, 由于 f 是 max-相位等距, 则有

$$\begin{aligned} 2\|f(x)\| &= \max\{\|f(x) + f(x)\|, \|f(x) - f(x)\|\} \\ &= \max\{\|x + x\|, \|x - x\|\} = 2\|x\|. \end{aligned}$$

那么, 对任意的 $x \in X$, 有 $\|f(x)\| = \|x\|$. 因此, f 具有保范性质. 其次, 证明 f 是奇的. 因为 f 是满射, 不妨设 $f(y) = -f(x) \neq 0$. 由于 f 是保范的, 则有

$$\begin{aligned} 2\|x\| &= 2\|f(x)\| = \max\{\|f(x) - f(x)\|, \|f(x) + f(x)\|\} \\ &= \max\{\|f(x) + f(y)\|, \|f(x) - f(y)\|\} \\ &= \max\{\|x + y\|, \|x - y\|\}. \end{aligned}$$

因为 X 是严格凸的, 故 $y = \pm x$. 当 $y = x$ 时, 这与 $f(x) \neq 0$ 矛盾. 因此 $f(-x) = -f(x)$, 即 f 是奇的. 然后, 证明 f 是单的. 令 $f(x_1) = f(x_2) \neq 0$, 则有

$$\begin{aligned} \|2x_1\| &= \|2f(x_1)\| = \max\{\|f(x_1) + f(x_2)\|, \|f(x_1) - f(x_2)\|\} \\ &= \max\{\|x_1 + x_2\|, \|x_1 - x_2\|\}. \end{aligned}$$

同样因为 X 是严格凸的, 从而可得 $x_2 \in \{-x_1, x_1\}$. 应用 f 的奇映射性质, 可得 $x_2 = x_1$, 所以 f 是单射. 最后, 对于任意的 $0 \neq x \in X, \lambda \in \mathbb{R}$. 因为 f 是 max-相位等距, 则有

$$\begin{aligned} &\max\{\|f(x) + f(\lambda x)\|, \|f(x) - f(\lambda x)\|\} \\ &= \max\{\|x + \lambda x\|, \|x - \lambda x\|\} \\ &= \max\{|1 + \lambda|\|x\|, |1 - \lambda|\|x\|\} \\ &= (1 + |\lambda|)\|x\|. \end{aligned}$$

由于 f 具有保范性质, 则

$$\max\{\|f(x) + f(\lambda x)\|, \|f(x) - f(\lambda x)\|\} = (1 + |\lambda|)\|f(x)\|$$

因为 Y 是严格凸的, 则 $f(\lambda x) \in \{\lambda f(x), -\lambda f(x)\}$.

如果 X, Y 不是严格凸的, 那么引理 2.1 的结论不一定成立. 下面举例子进行说明.

例 2.1 设映射 $f: l_1 \rightarrow l_1$ 定义为

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \notin \bigcup_{i=2}^{\infty} \{e_i\}, \\ e_{i-1}, & x = e_i \quad (i \geq 2), \end{cases}$$

则 f 是一个满的 max-相位等距, 但 f 既不是单的, 也不是奇的, 并且也不是相位等距. 此外, f 不相位等价于任何一个线性等距.

证 首先, 验证 f 是满的 max-相位等距. 显然 f 是满射. 其他的情况是显然的, 只需验证一种情况, 即对于任意的 $x \in l_1$ 且 $x \notin \bigcup_{i=2}^{\infty} \{e_i\}$ 和 $j \geq 2$,

$$\begin{aligned} \max\{\|x + e_j\|, \|x - e_j\|\} &= 1 + \|x\| \\ &= \max\{\|x + e_{j-1}\|, \|x - e_{j-1}\|\} \\ &= \max\{\|f(x) + f(e_j)\|, \|f(x) - f(e_j)\|\}, \end{aligned}$$

因此 f 是满的 max-相位等距. 显然, f 既不是单的, 也不是奇的, 且

$$\{\|f(e_1) - f(e_2)\|, \|f(e_1) + f(e_2)\|\} = \{\|e_1 - e_1\|, \|e_1 + e_1\|\} = \{0, 2\},$$

然而 $\{\|e_1 - e_2\|, \|e_1 + e_2\|\} = \{2, 2\}$, 故 f 不是相位等距. 另外, 因为

$$f(2e_2) = 2e_2 \notin \{2e_1, -2e_1\} = \{2f(e_2), -2f(e_2)\},$$

所以 f 不可能线性等价于任何一个线性等距.

下面的引理是根据文 [10, Theorem 3.2.2] 中 Clarkson 不等式得到的结果.

引理 2.2 设 x, y 是 $\ell_p(\Gamma)$ 中的两个不同的元素, $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$, 则有

$$\|x + y\|^p + \|x - y\|^p \geq 2(\|x\|^p + \|y\|^p), \quad p > 2$$

和

$$\|x + y\|^p + \|x - y\|^p \leq 2(\|x\|^p + \|y\|^p), \quad 1 \leq p < 2$$

当且仅当 $x \perp y$ 时, 等号成立.

下面的引理是由通过 max-相位等距的保范性质和引理 2.2 得到的结果, 它阐述了在 ℓ_p 空间中 ($p > 2$) max-相位等距保正交性的性质.

引理 2.3 如果 $f: \ell_p(\Gamma) \rightarrow \ell_p(\Delta)$ 是满的 max-相位等距, 那么当 $p > 2$ 时, 对于任意的 $x, y \in \ell_p(\Gamma)$, 有

$$x \perp y \Leftrightarrow f(x) \perp f(y).$$

证 充分性. 对任意的 $x, y \in \ell_p(\Gamma)$, 因为 $x \perp y$ 且 f 具有保范性质, 所以

$$\|x + y\|^p = \|x - y\|^p = \|x\|^p + \|y\|^p = \|f(x)\|^p + \|f(y)\|^p.$$

当 $p > 2$ 时, 由于 f 是满的 max-相位等距, 则有

$$\max\{\|f(x) + f(y)\|^p, \|f(x) - f(y)\|^p\} = \max\{\|x + y\|^p, \|x - y\|^p\} = \|f(x)\|^p + \|f(y)\|^p.$$

由此可得

$$\|f(x) + f(y)\|^p + \|f(x) - f(y)\|^p \leq 2(\|f(x)\|^p + \|f(y)\|^p).$$

又由引理 2.2, 可知

$$\|f(x) + f(y)\|^p + \|f(x) - f(y)\|^p \geq 2(\|f(x)\|^p + \|f(y)\|^p).$$

则有

$$\|f(x) + f(y)\|^p + \|f(x) - f(y)\|^p = 2(\|f(x)\|^p + \|f(y)\|^p).$$

结合引理 2.2 的结论即可得到 $f(x) \perp f(y)$.

必要性. 由引理 2.1 易知, f^{-1} 也是 max-相位等距. 由于 $f(x) \perp f(y)$, 将 f^{-1} 替换 f , 与充分性同理得证.

问题 2.1 在引理 2.3 中, 如果当 $1 < p < 2$ 时, $f: \ell_p(\Gamma) \rightarrow \ell_p(\Delta)$ 是满的 max-相位等距, 那么对 $x, y \in X$, 我们不知道 $x \perp y \Leftrightarrow f(x) \perp f(y)$ 是否成立.

引理 2.4 如果 $f: \ell_p(\Gamma) \rightarrow \ell_p(\Delta)$ 是满的 max-相位等距, 那么当 $p > 2$ 时, 存在一个双射 $\tau: \Gamma \rightarrow \Delta$, 使得对任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$, 有 $f(\lambda e_\gamma) \in \{-\lambda e_{\tau(\gamma)}, \lambda e_{\tau(\gamma)}\}$.

证 因为 f 是满射, 则对任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$ 和 $\delta \in \Gamma_{f(e_\gamma)}$, 存在 $x \in X$, 使得 $f(x) = \lambda e_\delta$. 由于 f 是保范的, 故 $\|x\| = \lambda$. 对任意的 $\gamma' \in \Gamma$, 且 $\gamma' \neq \gamma$. 根据引理 2.3, 可知

$$f(e_\gamma) \perp f(e_{\gamma'}) \Rightarrow f(x) \perp f(e_{\gamma'}) \Rightarrow x \perp e_{\gamma'}.$$

这意味着 $x \in \{-\lambda e_\gamma, \lambda e_\gamma\}$, 因此, 由引理 2.1, 对任意 $\lambda > 0$, 都有 $f(\lambda e_\gamma) = \{-\lambda e_\delta, \lambda e_\delta\}$. 故 $\Gamma_{f(e_\gamma)}$ 是单点集. 定义一个双射 $\tau: \Gamma \rightarrow \Delta$ 满足 $\tau(\gamma) = \delta$. 现在我们将证明 τ 是双射. 先证明 τ 是单射. 令 $\tau(\gamma_1) = \tau(\gamma_2)$, 由引理 2.1, 可知 τ 是单射. 再证明 τ 是满射. 反之, 假设 τ 不是满射, 则存在 $\delta' \in \Delta$, 使得 $\delta' \notin \tau(\Gamma)$. 因为 f 是满射, 则存在 $z \in X$, 使得 $f(z) = e_{\delta'}$. 根据引理 2.3, 可知

$$f(z) \perp f(e_\gamma) \Rightarrow z \perp e_\gamma, \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

这意味着 $z = 0$. 然而, 这与 $\|z\| = \|e_{\delta'}\| \neq 0$ 矛盾, 因此 τ 是满射.

下面的引理是两个实 ℓ_p ($p > 2$) 空间之间的 max-相位等距的表示定理.

引理 2.5 设 $f: \ell_p(\Gamma) \rightarrow \ell_p(\Delta)$ 是满的 max-相位等距, $\tau: \Gamma \rightarrow \Delta$ 是引理 2.4 中的双射, 并且 $p > 2$, 那么对任意 $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} \xi_\gamma e_\gamma \in \ell_p(\Gamma)$, 都有 $f(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \eta_{\tau(\gamma)} e_{\tau(\gamma)}$, 满足 $|\xi_\gamma| = |\eta_{\tau(\gamma)}|$, 对所有的 $\gamma \in \Gamma$.

证 由引理 2.1, f 具有保范性质, 故有 $f(0) = 0$, 并且, 对于所有的 $\lambda \in \mathbb{R}$ 和 $x \in \ell_p(\Gamma)$, 都有 $f(\lambda x) \in \{-\lambda f(x), \lambda f(x)\}$. 因此只需考虑单位球面上的元素 x , 记 $x = \sum_{\gamma \in \Gamma_x} \xi_\gamma e_\gamma$, 其中 $\sum_{\gamma \in \Gamma_x} |\xi_\gamma|^p = 1$. 根据引理 2.3, 可知对任意 $\gamma' \notin \Gamma_x$, 有 $f(x) \perp f(e_{\gamma'})$. 因此, 可以记 $f(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma_x} \eta_{\tau(\gamma)} e_{\tau(\gamma)}$, 其中 $\sum_{\gamma \in \Gamma_x} |\eta_{\tau(\gamma)}|^p = 1$. 对任意 $\gamma \in \Gamma_x$, 由于 f 是 max-相位等距, 可

得

$$\begin{aligned}
 & \max\{\|f(x) + f(e_\gamma)\|^p, \|f(x) - f(e_\gamma)\|^p\} \\
 &= \max\{\|x + e_\gamma\|^p, \|x - e_\gamma\|^p\} \\
 &= \max\{(1 - |\xi_\gamma|^p + |\xi_\gamma + 1|^p), (1 - |\xi_\gamma|^p + |\xi_\gamma - 1|^p)\} \\
 &= 1 - |\xi_\gamma|^p + (|\xi_\gamma| + 1)^p.
 \end{aligned}$$

另一方面, 由引理 2.4, 可知 $f(-e_\gamma) \in \{-e_{\tau(\gamma)}, e_{\tau(\gamma)}\}$, 则有

$$\begin{aligned}
 & \max\{\|f(x) + f(e_\gamma)\|^p, \|f(x) - f(e_\gamma)\|^p\} \\
 &= \max\{(1 - |\eta_{\tau(\gamma)}|^p + |\eta_{\tau(\gamma)} + 1|^p), (1 - |\eta_{\tau(\gamma)}|^p + |\eta_{\tau(\gamma)} - 1|^p)\} \\
 &= 1 - |\eta_{\tau(\gamma)}|^p + (|\eta_{\tau(\gamma)}| + 1)^p.
 \end{aligned}$$

结合两个式子, 则有

$$1 - |\xi_\gamma|^p + (|\xi_\gamma| + 1)^p = 1 - |\eta_{\tau(\gamma)}|^p + (|\eta_{\tau(\gamma)}| + 1)^p.$$

当 $p > 2$ 时, 函数 $\varphi(t) = (1 + t)^p - t^p$ 在 $[0, 1]$ 上是严格单调递增. 因此, 对任意 $\gamma \in \Gamma$, 有 $|\xi_\gamma| = |\eta_{\tau(\gamma)}|$.

下面的结果表明 ℓ_p 空间中的满的 max-相位等距具有类似可加的性质.

引理 2.6 设 $f: \ell_p(\Gamma) \rightarrow \ell_p(\Delta)$ 是满的 max-相位等距, 并且 $p > 2$, 则对于任意的 $x, y \in \ell_p$ 满足 $x \perp y$, 存在两个实数 $\alpha(x, y), \beta(x, y) \in \{-1, 1\}$, 使得

$$f(x + y) = \alpha(x, y)f(x) + \beta(x, y)f(y).$$

证 对于任意的 $x, y \in \ell_p$ 满足 $x \perp y$, 由引理 2.3, 可知 $f(x) \perp f(y)$. 根据引理 2.5, 对任意 $x, y \in X$, 记

$$f(x + y) = f(x + y)|_{\Gamma_{f(x)}} + f(x + y)|_{\Gamma_{f(y)}}.$$

由 f 是 max-相位等距, 则有

$$\begin{aligned}
 & \max\{\|f(x + y)|_{\Gamma_{f(x)}} + f(x)\|^p + \|f(y)\|^p, \|f(x + y)|_{\Gamma_{f(x)}} - f(x)\|^p + \|f(y)\|^p\} \\
 &= \max\{\|f(x + y)|_{\Gamma_{f(x)}} + f(x + y)|_{\Gamma_{f(y)}} + f(x)\|^p, \\
 & \quad \|f(x + y)|_{\Gamma_{f(x)}} + f(x + y)|_{\Gamma_{f(y)}} - f(x)\|^p\} \\
 &= \max\{\|f(x + y) + f(x)\|^p, \|f(x + y) - f(x)\|^p\} \\
 &= \max\{\|x + y + x\|^p, \|x + y - x\|^p\} \\
 &= \max\{\|2x + y\|^p, \|y\|^p\} = \|2x + y\|^p = \|2x\|^p + \|y\|^p.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

从而可得

$$\max\{\|f(x + y)|_{\Gamma_{f(x)}} + f(x)\|, \|f(x + y)|_{\Gamma_{f(x)}} - f(x)\|\} = \|2x\|.$$

因为 Y 是严格凸的, 可得 $f(x + y)|_{\Gamma_{f(x)}} \in \{-f(x), f(x)\}$. 将 (2.1) 中 $f(x)$ 替换为 $f(y)$, 同理即得 $f(x + y)|_{\Gamma_{f(y)}} \in \{-f(y), f(y)\}$.

下面的定理是我们主要的结果.

定理 2.1 设 $f: \ell_p(\Gamma) \rightarrow \ell_p(\Delta)$ 是满的 max-相位等距, 且 $p > 2$, 那么 f 相位等价于一个线性等距.

证 根据选择公理, 存在一个集合 $L \subset \ell_p(\Gamma)$, 使得对任意的非零元素 $x \in \ell_p(\Gamma)$, 存在唯一的 $y \in L$ 和某个 $\lambda_x \in \mathbb{R}$, 使得 $x = \lambda_x y$. 定义 $g: \ell_p(\Gamma) \rightarrow \ell_p(\Delta)$, 满足 $g(0) = 0$ 且

$$g(x) = g(\lambda_x y) = \lambda_x f(y), \quad x = \lambda_x y \in \ell_p(\Gamma),$$

则 g 是合理的, 并且 g 是齐次的. 由引理 2.1, g 和 f 是相位等价的.

因此不妨假设 f 是齐次的. 固定 $\gamma_0 \in \Gamma$, 设 $Z := \{x \in X : x \perp e_{\gamma_0}\}$. 根据引理 2.6, 则对任意 $z \in Z$, 有

$$f(z + e_{\gamma_0}) = \alpha(z)f(z) + \beta(z)f(e_{\gamma_0}), \quad \alpha(z), \beta(z) \in \{-1, 1\}. \quad (2.2)$$

下面证明对任意 $0 \neq z \in Z$ 和 $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$, 有

$$\alpha(z)\beta(z) = \alpha(\lambda z)\beta(\lambda z). \quad (2.3)$$

因为 f 是齐次的, 只需要证明对于 Z 的单位球面上的点, (2.3) 都成立即可. 很容易验证

$$f(\lambda z + e_{\gamma_0}) = \lambda \alpha(\lambda z)f(z) + \beta(\lambda z)f(e_{\gamma_0}), \quad \alpha(\lambda z), \beta(\lambda z) \in \{-1, 1\}. \quad (2.4)$$

对任意 $z \in S_Z$, 由 (2.2) 和 (2.4), 因为 f 是 max-相位等距, 则有

$$\begin{aligned} & \max\{|\lambda + 1|^p + 2^p, |\lambda - 1|^p\} \\ &= \max\{\|\lambda z + e_{\gamma_0} + z + e_{\gamma_0}\|^p, \|\lambda z + e_{\gamma_0} - (z + e_{\gamma_0})\|^p\} \\ &= \max\{\|f(\lambda z + e_{\gamma_0}) + f(z + e_{\gamma_0})\|^p, \|f(\lambda z + e_{\gamma_0}) - f(z + e_{\gamma_0})\|^p\} \\ &= \max\{\|\beta(\lambda z)f(\lambda z + e_{\gamma_0}) + \beta(z)f(z + e_{\gamma_0})\|^p, \\ & \quad \|\beta(\lambda z)f(\lambda z + e_{\gamma_0}) - \beta(z)f(z + e_{\gamma_0})\|^p\} \\ &= \max\{|\lambda \alpha(\lambda z)\beta(\lambda z) + \alpha(z)\beta(z)|^p \|f(z)\|^p + \|2f(e_{\gamma_0})\|^p, \\ & \quad |\lambda \alpha(\lambda z)\beta(\lambda z) - \alpha(z)\beta(z)|^p \|f(z)\|^p\} \\ &= \max\{|\lambda \alpha(\lambda z)\beta(\lambda z) + \alpha(z)\beta(z)|^p + 2^p, |\lambda \alpha(\lambda z)\beta(\lambda z) - \alpha(z)\beta(z)|^p\}. \end{aligned}$$

这意味着对任意 $z \in S_Z$, $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$, 有

$$\alpha(z)\beta(z) = \alpha(\lambda z)\beta(\lambda z).$$

因此, (2.3) 成立.

借助 (2.3), 定义一个映射 $g: X \rightarrow Y$, 对任意 $z \in Z$ 和 $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$, 满足

$$g(z) = \alpha(z)\beta(z)f(z), \quad g(z + \lambda e_{\gamma_0}) = g(z) + \lambda f(e_{\gamma_0}).$$

由 (2.3) 和 (2.4) 可知, g 相位等价于 f . 因此, g 也是 max-相位等距. 易知 g 是齐次的, 所以 g 是一个满射. 另一方面, 对任意 $x, y \in S_Z$, 有

$$\max\{\|g(x) + g(y)\|^p, \|g(x) - g(y)\|^p\} = \max\{\|x + y\|^p, \|x - y\|^p\},$$

而且有

$$\begin{aligned} & \max\{\|g(x) + g(y)\|^p + 2^p, \|g(x) - g(y)\|^p\} \\ &= \max\{\|g(x + e_{\gamma_0}) + g(y + e_{\gamma_0})\|^p, \|g(x + e_{\gamma_0}) - g(y + e_{\gamma_0})\|^p\} \\ &= \max\{\|x + y\|^p + 2^p, \|x - y\|^p\}. \end{aligned}$$

因此, 对任意 $x, y \in S_Z$, 有 $\|g(x) + g(y)\| = \|x + y\|$. 又因为 g 也是奇的, 则有

$$\|g(x) - g(y)\| = \|g(x) + g(-y)\| = \|x - y\|, \quad x, y \in S_Z.$$

由于 g 是齐次的, 从而可得对任意的 $x, y \in Z$, $\|g(x) - g(y)\| = \|x - y\|$. 故 $g: \ell_p(\Gamma) \rightarrow \ell_p(\Delta)$ 是一个满等距. Mazur-Ulam 定理证明了 g 是一个线性等距.

在本文中, 我们证明了在 ℓ_p ($p > 2$) 空间中, 满的 max-相位等距 f 相位等价于一个线性等距, 因此这样的 max-相位等距实际上是相位等距. 但是, 当 $p = \infty$ 时, 得不到上述结论, 即使是有限维的也不行.

例 2.2 设 $f: l_\infty^{(2)} \rightarrow l_\infty^{(2)}$ 是满射, 其中 $l_\infty^{(2)} = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.

定义

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \notin \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}; \\ \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), & x = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \\ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), & x = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \end{cases}$$

则 f 是 max-相位等距, 但 f 不是相位等距, 而且 f 也不相位等价任何一个等距.

证 首先证明 f 是 max-相位等距. 分 4 种情况:

(1) 设 $x, y \notin \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$, 由 f 的定义, 有

$$\max\{\|f(x) + f(y)\|, \|f(x) - f(y)\|\} = \max\{\|x + y\|, \|x - y\|\}.$$

(2) $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $y = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 可得

$$\max\{\|f(x) + f(y)\|_\infty, \|f(x) - f(y)\|_\infty\} = 1 = \max\{\|x + y\|_\infty, \|x - y\|_\infty\}.$$

(3) $x = (\xi_1, \xi_2)$, $y = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 且 $x \notin \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$, 有

$$\begin{aligned} & \{\|f(x) + f(y)\|_\infty, \|f(x) - f(y)\|_\infty\} \\ &= \left\{\left\|\left(\xi_1, \xi_2\right) + \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\|_\infty, \left\|\left(\xi_1, \xi_2\right) - \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\|_\infty\right\} \\ &= \left\{\left\|\left(\xi_1 - \frac{1}{2}, \xi_2 + \frac{1}{2}\right)\right\|_\infty, \left\|\left(\xi_1 + \frac{1}{2}, \xi_2 - \frac{1}{2}\right)\right\|_\infty\right\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

且

$$\begin{aligned} & \{\|x + y\|_\infty, \|x - y\|_\infty\} \\ &= \left\{\left\|\left(\xi_1, \xi_2\right) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\|_\infty, \left\|\left(\xi_1, \xi_2\right) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\|_\infty\right\} \\ &= \left\{\left\|\left(\xi_1 + \frac{1}{2}, \xi_2 + \frac{1}{2}\right)\right\|_\infty, \left\|\left(\xi_1 - \frac{1}{2}, \xi_2 - \frac{1}{2}\right)\right\|_\infty\right\}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

因此

$$\begin{aligned} & \max\{\|f(x) + f(y)\|_\infty, \|f(x) - f(y)\|_\infty\} \\ &= \max\{\|x + y\|_\infty, \|x - y\|_\infty\}. \end{aligned}$$

(4) 情况 $x = (\xi_1, \xi_2)$, $y = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 且 $x \notin \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$ 的证明可以类似 (3) 的证明.

上述 4 种情况证明 f 是 max-相位等距.

在情况 (3) 中取 $\xi_2 > \xi_1 > 0$, 则从 (2.5) 和 (2.6) 可以看出 f 不是一个相位等距.

最后证明 f 不相位等价于任何一个等距, 假设 f 相位等价于一个等距 g , 也就是说存在相位函数 $\varepsilon: X \rightarrow \{-1, 1\}$, 使得 $g = \varepsilon \cdot f$ 是一个等距, 则对于 $x = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $y = (1, 1)$, $\theta_1 = \varepsilon(x)$ 和 $\theta_2 = \varepsilon(y)$, 有

$$\frac{1}{2} = \|x - y\| = \|g(x) - g(y)\| = \left\| \theta_1 \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) - \theta_2 (1, 1) \right\| = \frac{3}{2}.$$

这个矛盾说明 f 不可能相位等价于任何一个等距.

参 考 文 献

- [1] Györy M. A new proof of Wigner's theorem [J]. *Rep Math Phys*, 2004, 54:159–167.
- [2] Sharma C S, Almeida D L. A direct proof of Wigner's theorem on maps which preserve transition probabilities between pure states of quantum systems [J]. *Ann Phys*, 1990, 197(2):300–309.
- [3] Maksa G, Páles Z. Wigner's theorem revisited [J]. *Publ Math Debrecen*, 2012, 81:243–249.
- [4] Huang X, Tan D. Wigner's theorem in atomic L_p -spaces ($p > 0$) [J]. *Publ Math Debrecen*, 2018, 92(3–4):411–418.
- [5] Tan D, Huang X. The Wigner property for CL-spaces and finite-dimensional polyhedral Banach spaces [J]. *P Edinburgh Math Soc*, 2021, 64(2):183–199.
- [6] Huang X, Tan D. Phase-isometries on real normed spaces [J]. *J Math Anal Appl*, 2020, 488(1):124058.
- [7] Ilišević D, Omladič M, Turnšek A. Phase-isometries between normed spaces [J]. *Linear Algebra Appl*, 2021, 612:99–111.
- [8] Huang X, Tan D. Min-phase-isometries and Wigner's theorem on real normed spaces [J/OL]. *Results Math*, 2022, 77(4), DOI: 10.1007/s00025-022-01702-8.
- [9] Tan D, Zhang F. Min-phase-isometries in strictly convex normed spaces [J]. *Bull Aust Math Soc*, 2024, 109(1):152–160.

- [10] Fleming R, Jamison J. Isometries on Banach spaces: function spaces [M]. Surv Pure Appl Math 129, New York: Chapman & Hall/CRC, 2003.

Max-Phase-Isometry in the ℓ_p Spaces

TAN Dongni¹ LIU Jian²

¹School of Computer Science and Engineering, Tianjin University of Technology, Tianjin 300384, China. E-mail: tandongni0608@sina.cn

²Corresponding author. School of Science, Tianjin University of Technology, Tianjin 300384, China. E-mail: jianliu1205@stud.tjut.edu.cn

Abstract Let X and Y be real normed spaces. A map $f : X \rightarrow Y$ is called a max-phase-isometry if

$$\max\{\|f(x) + f(y)\|, \|f(x) - f(y)\|\} = \max\{\|x + y\|, \|x - y\|\}, \quad x, y \in X.$$

It is shown that every surjective max-phase-isometry between two real ℓ_p ($p > 2$) spaces is phase-equivalent to a linear isometry, that is, there is a phase function $\varepsilon : X \rightarrow \{-1, 1\}$ such that $\varepsilon \cdot f$ is a linear isometry. This can be regarded as a generalization of the well-known Wigner's theorem to real ℓ_p -spaces where $p > 2$. This paper also provides counterexamples to show that this conclusion does not hold in ℓ_1 -spaces and even in finite-dimensional ℓ_∞ -spaces.

Keywords Max-phase-isometry, Phase-isometry, Phase-equivalent, Wigner's theorem, Mazur-Ulam theorem

2020 MR Subject Classification 46B20

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 46 No. 2, 2025

by ALLERTON PRESS, INC., USA