

关于复微分方程 $(a_0f + a_1f' + a_2f'')^2 + (b_0f + b_1f' + b_2f'')^2 = 1$ 的整函数解*

胡斌斌¹ 杨 刘²

提要 结合 Nevanlinna 值分布理论和常微分方程研究了 $\mathbb{C}$ 上的 Fermat 型复微分方程 $(a_0f + a_1f' + a_2f'')^2 + (b_0f + b_1f' + b_2f'')^2 = 1$ 的有穷级超越整函数解, 其中 a_i, b_i ($i = 0, 1, 2$) 是 $\mathbb{C}$ 上的常数, 给出了这类方程有穷级超越整函数解的具体形式. 同时, 通过一些例子进一步说明了这类方程有穷级超越整函数解的存在性.

关键词 复微分方程, Nevanlinna 理论, 超越整函数解, 有穷级

MR (2020) 主题分类 30D35, 34M05, 39B32

中图法分类 O174.5

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2025)02-0211-14

§1 引 言

本文假定读者熟知 Nevanlinna 值分布理论的通用记号和基本定理^[1–5], 如特征函数 $T(r, f)$ 、均值函数 $m(r, f)$ 、计数函数 $N(r, f)$ (计重级) 和小函数 $S(r, f) = o\{T(r, f)\}$ ($r \rightarrow +\infty, r \notin E$), 其中 E 是一个有穷线性测度集, 以及 Nevanlinna 第一、二基本定理. 另外, 用 $\rho(f)$ 表示亚纯函数的增长级, $\rho(f)$ 定义为

$$\rho(f) := \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log^+ T(r, f)}{\log r}.$$

在复平面内, Nevanlinna 值分布理论已经广泛地应用于研究 Fermat 型函数方程、复微分方程、复偏微分以及复差分方程的整函数解 (或亚纯函数解) 的存在性中. 1927 年, Montel^[6] 首次研究了 Fermat 型函数方程

$$f^n(z) + g^n(z) = 1, \quad (1.1)$$

他指出, 当正整数 $n \geq 3$ 时, 没有超越整函数 $f(z), g(z)$ 满足 (1.1). 之后, Baker^[7] 和 Gross^[8–9] 分别独立地对方程 (1.1) 的亚纯函数解进行研究, 并给出了所有亚纯函数解的刻画形式. 特别地, 在方程 (1.1) 中, 当正整数 $n = 2$ 时, 方程 (1.1) 退化为 $f^2(z) + g^2(z) = 1$, Iyer^[10] 对退化后的方程进行了研究, 并得到如下结论.

本文 2023 年 4 月 22 日收到, 2025 年 1 月 16 日收到修改稿.

¹安徽工业大学应用数学系, 安徽马鞍山 243032. E-mail: hubinbin1104@126.com

²通信作者. 安徽工业大学应用数学系, 安徽马鞍山 243032. E-mail: yangliu6@ahut.edu.cn

*本文受到安徽省高校自然科学研究重点项目 (No. 2022AH050329, No. 2022AH050290) 和云南省教育厅科学研究基金项目 (No. 2025J0376) 的资助.

定理 1.1^[10] Fermat 型函数方程 $f^2(z) + g^2(z) = 1$ 的整函数解为 $f(z) = \cos(h(z))$, $g(z) = \sin(h(z))$, 其中 $h(z)$ 为任意整函数, 且不存在其他形式的整函数解.

自此之后, 关于 Fermat 型函数方程及其广义形式的相关研究引起了国内外众多学者的关注, 并且取得了丰硕的成果. 例如, Yang^[11] 对复函数方程 $a(z)f^n(z) + b(z)g^m(z) = 1$ (其中 $T(r, a(z)) = S(r, f)$, $T(r, b(z)) = S(r, g)$) 的整函数解进行了研究, 他证明了当正整数 n, m 满足 $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} < 1$ 时, 该方程没有非常值的整函数解.

与此同时, Nevanlinna 值分布理论的发展, 引起了众多学者对 Fermat 型复微分方程的整函数解 (或亚纯函数解) 的研究. 2004 年, Yang 和 Li^[12] 对 Fermat 型复微分方程 $f^2 + (L(f))^2 = 1$ 超越整函数解进行了研究, 并得到下述定理.

定理 1.2^[12] 设 $b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ 为常数且 $b_n \neq 0$, n 为正整数, $L(f) = \sum_{k=0}^n b_k f^{(k)}$, 则 Fermat 型复微分方程

$$f^2 + (L(f))^2 = 1 \quad (1.2)$$

的超越整函数解为 $f(z) = \frac{1}{2}(pe^{\lambda z} + \frac{1}{p}e^{-\lambda z})$, $p \in \mathbb{C}$ 为非零常数, λ 满足以下等式

$$\sum_{k=0}^n b_k \lambda^k = \frac{1}{i}, \quad \sum_{k=0}^n b_k (-\lambda)^k = -\frac{1}{i}.$$

2015 年, Liu 和 Dong^[13] 研究了二阶 Fermat 型复微分方程 $(af + bf')^2 + (cf + df'')^2 = 1$ 的超越亚纯函数解, 其中 $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ 为常值, 并得到如下定理 1.3.

定理 1.3^[13] 设 $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ 为常值, 若 $f(z)$ 为复微分方程

$$(af + bf')^2 + (cf + df'')^2 = 1 \quad (1.3)$$

的超越亚纯函数解, 则 $f(z)$ 可以刻画为以下形式之一:

(i) 若 $a = 0$, $c = 0$, $b \neq 0$, $d \neq 0$, 则 $f(z) = \frac{id}{b^2} \sinh(\frac{ib}{d}z - A) + B$, 其中 $A, B \in \mathbb{C}$ 为常值.

(ii) 若 a, b, c, d 都不为零且 $\frac{c}{a} = i(\frac{1-e^{2p}}{1+e^{2p}})$, 则 $f(z) = De^{-\frac{c}{b}z} + \frac{e^p + e^{-p}}{2a}$, 其中 $p \in \mathbb{C}$ 为常数, $D \in \mathbb{C}$ 为非零常数.

(iii) 若 $a = 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, 则 $f(z) = \frac{bi+d}{bc} \sinh(\frac{c}{bi+d}z - A) + B$, 其中 $d + \frac{dc}{b^2i+bd} = 0$, $A, B \in \mathbb{C}$ 为常数.

2019 年, Han 和 Lü^[14] 对 Fermat 型复微分方程 $f^2(z) + (f'(z))^2 = e^{\alpha z + \beta}$ 的整函数解进行了研究, 并得到如下结果.

定理 1.4^[14] Fermat 型复微分方程

$$f^2(z) + (f'(z))^2 = e^{\alpha z + \beta} \quad (1.4)$$

的整函数解为 $f(z) = e^{\frac{\beta}{2}} \sin(z + b)$, $\alpha = 0$, 或者 $f(z) = de^{\frac{\alpha z + \beta}{2}}$, 其中 $\alpha, \beta, b, d \in \mathbb{C}$ 且 $(d + \frac{\alpha d}{2})^2 = 1$.

另一方面,一些数学工作者在 Fermat 型复偏微分方程领域也取得了大量有意义且有趣的研究成果.

Khavinson^[15] 采用最基本的分析方法对方程 $f_{z_1}^2 + f_{z_2}^2 = 1$ 进行了研究,并且证明了该方程的整函数解一定是线性的.后来, Li^[16-17] 对两类 Fermat 型复偏微分方程 $f_{z_1}^2 + f_{z_2}^2 = e^g$ 和 $f_{z_1}^2 + f_{z_2}^2 = p$ (其中 g, p 是 $\mathbb{C}^2$ 上的多项式) 的整函数解进行了研究,并给出了整函数解的刻画形式,相关结果可以参考文 [16-17].

2021 年, Chen 和 Xu^[18] 研究了 Fermat 型复偏微分方程 $(a_1f + a_2f_{z_1})^2 + (a_3f + a_4f_{z_2})^2 = 1$ 的有穷级超越整函数解,并得到下述定理.

定理 1.5^[18] 设 a_1, a_2, a_3, a_4 是 $\mathbb{C}$ 上四个非零的常数,则复偏微分方程

$$(a_1f + a_2f_{z_1})^2 + (a_3f + a_4f_{z_2})^2 = 1 \quad (1.5)$$

的有穷级超越整函数解 $f(z_1, z_2)$ 可以刻画为以下形式之一:

$$(i) f(z_1, z_2) = \pm \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_3^2}} + \eta e^{-\left(\frac{a_1}{a_2}z_1 + \frac{a_3}{a_4}z_2\right)};$$

$$(ii) f(z_1, z_2) = \frac{a_3 + ia_1}{2(\alpha_1 a_2 a_3 - \alpha_2 a_1 a_4)} e^{L(z) + B} - \frac{a_3 - ia_1}{2(\alpha_1 a_2 a_3 - \alpha_2 a_1 a_4)} e^{-L(z) - B} + \eta e^{-\left(\frac{a_1}{a_2}z_1 + \frac{a_3}{a_4}z_2\right)},$$

其中 $L(z) = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2$, $\alpha_1 = i\frac{a_3}{a_2}$, $\alpha_2 = -i\frac{a_1}{a_4}$, $\eta, B \in \mathbb{C}$ 为常值.

与此同时,随着 Nevanlinna 差分理论的建立,有关 Fermat 型复差分方程的研究也受到了一些学者的关注. Liu^[19] 证明了复微分差分方程 $(f'(z))^2 + (f(z+c))^2 = 1$ 的超越整函数解为 $f(z) = \sin(z + iA)$, 其中 $A \in \mathbb{C}$ 为常数, $c = 2k\pi$ 或者 $c = \pi + 2k\pi$, k 为整数. Xu 和 Cao^[20] 利用多变量 Nevanlinna 差分理论,研究了复偏微分差分方程 $f_{z_1}^2 + f_{z_2}^2(z_1 + c_1, z_2 + c_2) = 1$ 的有穷级超越整函数解,并证明了该方程的有穷级超越整函数解为 $f(z_1, z_2) = \sin(Az_1 + Bz_2 + H(z_2))$, 其中 $A, B \in \mathbb{C}$ 为常值且满足 $A^2 = 1$, $Ae^{i(Ac_1 + Bc_2)} = 1$, $H(z_2)$ 为仅关于 z_2 的多项式且 $H(z_2) \equiv H(z_2 + c_2)$.

§2 主要结果

受以上研究成果的启发,本文研究了 Fermat 型复微分方程

$$(a_0f + a_1f' + a_2f'')^2 + (b_0f + b_1f' + b_2f'')^2 = 1 \quad (2.1)$$

的有穷级超越整函数解, a_i, b_i ($i = 0, 1, 2$) 是 $\mathbb{C}$ 上的常数,构成矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix}, \quad \text{rank}(A) = 2$$

以及行列式 $D_0 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$, $D_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ b_2 & b_0 \end{vmatrix}$, $D_2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}$.

为了方便叙述,记 $L_1(f) = a_0f + a_1f' + a_2f''$, $L_2(f) = b_0f + b_1f' + b_2f''$. 下文中出现的 $L_1(f), L_2(f), D_0, D_1, D_2$ 与上述定义一致,之后不再一一说明.

对于一般的复微分方程

$$(L_1(f))^m + (L_2(f))^n = 1 \quad (2.2)$$

的有穷级超越整函数解而言, 其中 m, n 为正整数. 如果 m, n 不同时为 2, 那么有以下情况:

(i) 若正整数 m, n 满足 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1$, 由 Yang^[11] 的结果可知, 则 $L_1(f) = c_1, L_2(f) = c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ 为常值且 $c_1^m + c_2^n = 1$.

(ii) 若 $m > n = 1$ 或者 $n > m = 1$. 当 $m > n = 1$ 时, 类似于文 [19, Theorem 1.2] 的证明, 可得 $m(r, (L_1(f))') = S(r, f)$, 因为 f 是超越整函数的, 则 $(L_1(f))'$ 为多项式, 进而 $L_1(f)$ 也为多项式, $L_2(f)$ 也为多项式. 又因为 $(L_1(f))^m + L_2(f) = 1$, 那么 $L_1(f), L_2(f)$ 只能为常值. 同理可得, 当 $n > m = 1$ 时, $L_1(f), L_2(f)$ 也都为常值.

(iii) 若 $m = n = 1$, 则方程 (2.2) 退化为 $(a_0f + a_1f' + a_2f'') + (b_0f + b_1f' + b_2f'') = 1$, 即 $\alpha f + \beta f' + \gamma f'' = 1$, 其中 $\alpha = a_0 + b_0, \beta = a_1 + b_1, \gamma = a_2 + b_2$.

综上 (i)–(iii) 可知, 如果 m, n 不同时为 2, 那么方程 (2.2) 可以归纳为研究 $L_1(f) = c_1$ 和 $L_2(f) = c_2$ 时的有穷级超越整函数解, 这里 $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ 为常数. 类似于定理 2.1 的证明, 不难得到 $L_1(f)$ 和 $L_2(f)$ 都为常值时的解. 因此, 本文主要研究 $m = n = 2$ 的情况, 即研究方程 (2.1) 的有穷级超越整函数解.

首先我们考虑 $D_0 \neq 0$, 那么有如下定理.

定理 2.1 设 a_i, b_i ($i = 0, 1, 2$) 是 $\mathbb{C}$ 上的常数, $D_0 \neq 0$ 且 $a_1a_2 + b_1b_2 \neq 0$. 若 $f(z)$ 是方程 (2.1) 的有穷级超越整函数解, 则 $f(z)$ 可以刻画为以下形式之一:

(i)

$$f(z) = \alpha e^{\frac{D_1}{D_0}z} + \left(\frac{1}{a_0^2 + b_0^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

其中 $\alpha \in \mathbb{C}$ 为非零常数, $D_1^2 = D_0D_2$.

(ii)

$$f(z) = e^{\frac{D_1}{D_0}z} \left(\frac{1}{2D_0} \int e^{-\frac{D_1}{D_0}z} (A_1 e^{-\frac{2iD_1}{E}z + c_1} + A_2 e^{\frac{2iD_1}{E}z - c_1}) dz + c_2 \right),$$

其中 $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ 为任意常数, $A_1 = b_2 + ia_2, A_2 = b_2 - ia_2, E = -2(a_1a_2 + b_1b_2), D_1^2 = \frac{2D_1E(a_1^2 + b_1^2) - D_2E^2}{4D_0}$.

下面通过两个具体的例子, 进一步说明定理 2.1 中有穷级超越整函数解的存在性.

例 2.1 考虑方程

$$(f + f')^2 + (f - f' - 2f'')^2 = 1.$$

通过简单的计算, 可得 $D_0 = -2, D_1 = 2, D_2 = -2, E = -4$, 满足 $D_1^2 = D_0D_2$, 但 $D_1^2 \neq \frac{2D_1E(a_1^2 + b_1^2) - D_2E^2}{4D_0}$. 根据定理 2.1(i) 中解的形式, 易得该方程的有穷级超越整函数解为

$$f(z) = \alpha e^{-z} \pm \frac{\sqrt{2}}{2},$$

这里 $\alpha \in \mathbb{C}$ 为非零常数.

例 2.2 考虑方程

$$(f - f' - f'')^2 + (f + \sqrt{5}f' + f'')^2 = 1.$$

通过简单的计算, 可得 $D_0 = \sqrt{5} - 1$, $D_1 = -2$, $D_2 = \sqrt{5} + 1$, $E = -2(\sqrt{5} + 1)$, 满足 $D_1^2 = D_0D_2$ 且 $D_1^2 = \frac{2D_1E(a_1^2+b_1^2)-D_2E^2}{4D_0}$. 根据定理 2.1 (i) 和 (ii) 中解的形式, 不难得到该方程的有穷级超越整函数解为

$$f(z) = \alpha e^{-\frac{\sqrt{5}+1}{2}z} \pm \frac{\sqrt{2}}{2},$$

其中 $\alpha \in \mathbb{C}$ 为非零常数; 或者

$$f(z) = c_1 e^{-\frac{\sqrt{5}+1}{2}z} + \frac{5 + \sqrt{5} + i(1 + \sqrt{5})}{24} e^{\frac{i(1-\sqrt{5})}{2}z + c_2} + \frac{5 + \sqrt{5} - i(1 + \sqrt{5})}{24} e^{-\frac{i(1-\sqrt{5})}{2}z - c_2},$$

其中 $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ 为任意常数.

根据定理 2.1, 我们可以得到如下推论.

推论 2.1 若 $D_1^2 \neq D_0D_2$ 且 $D_1^2 \neq \frac{2D_1E(a_1^2+b_1^2)-D_2E^2}{4D_0}$, 那么方程 (2.1) 没有有穷级超越整函数解.

例 2.3 考虑方程

$$(f + f' + f'')^2 + (f - if' + if'')^2 = 1.$$

通过简单的计算, 可得 $D_0 = 2i$, $D_1 = 1 - i$, $D_2 = -i - 1$, $E = -4$, 容易验证 $D_1^2 \neq D_0D_2$ 且 $D_1^2 \neq \frac{2D_1E(a_1^2+b_1^2)-D_2E^2}{4D_0}$, 那么由推论 2.1 可知, 该方程没有有穷级超越整函数解.

接下来考虑 $D_0 = 0$ 的情况, 这时我们只需考虑方程 $(a_0f + a_1f')^2 + (b_0f + b_1f')^2 = 1$ 的有穷级超越整函数解, 那么得到如下定理.

定理 2.2 设 a_i, b_i ($i = 0, 1$) 是 $\mathbb{C}$ 上的常数, $D_2 \neq 0$. 若 $f(z)$ 是方程

$$(a_0f + a_1f')^2 + (b_0f + b_1f')^2 = 1 \quad (2.3)$$

的有穷级超越整函数解, 则有 $a_0a_1 = -b_0b_1$,

$$f(z) = \frac{1}{2D_2} ((b_1 + ia_1)e^{\frac{b_0 - ia_0}{b_1 - ia_1}z + c} + (b_1 - ia_1)e^{-\frac{b_0 - ia_0}{b_1 - ia_1}z - c}),$$

其中 $c \in \mathbb{C}$ 为任意常数.

下面给出一个例子, 进一步说明定理 2.2 中有穷级超越整函数解的存在性.

例 2.4 考虑方程

$$(f - f')^2 + (f + f')^2 = 1.$$

不难检验 $f(z) = \frac{1-i}{4}e^{-iz+c} + \frac{1+i}{4}e^{iz-c}$ 是该方程的一个有穷级超越整函数解, 这里 $c \in \mathbb{C}$ 为任意常数.

根据定理 2.2, 直接可得如下推论.

推论 2.2 若 $a_0a_1 + b_0b_1 \neq 0$, 则方程 (2.3) 没有有穷级超越整函数解.

例 2.5 考虑方程

$$(f + if')^2 + (f - 2if')^2 = 1.$$

容易计算出 $a_0a_1 + b_0b_1 = -i \neq 0$, 由推论 2.2 可知, 该方程没有有穷级超越整函数解.

定理 2.1 和定理 2.2 考虑了方程 (2.1) 的有穷级超越整函数解, 那么对于方程 (2.1) 的无穷级整函数解, 我们有如下结论.

定理 2.3 设 a_i, b_i ($i = 0, 1, 2$) 是 $\mathbb{C}$ 上的常数. 若 $D_1^2 = D_0D_2$, 那么方程 (2.1) 没有无穷级整函数解.

§3 相关引理

下述引理在定理的证明过程中起着重要的作用.

引理 3.1^[1,4-5] 假设 f 为 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数, f 与其导函数 f' 有相同的增长级, 即 $\rho(f) = \rho(f')$. 如果 f 是一个超越亚纯函数, g 是一个非常值的整函数, 那么 $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{T(r, f(g))}{T(r, g)} = +\infty$.

引理 3.2^[21-22] 假设 F 是 $\mathbb{C}^n$ 上的整函数, $F(0) \neq 0$, $\rho(n_F) = \rho < \infty$, $\rho(n_F)$ 表示 F 的零点计数函数的级, 那么在 $\mathbb{C}^n$ 上存在一个典型的函数 f_F 和 g_F , 使得 $F(z) = f_F(z)e^{g_F(z)}$. 特别地, 当 $n = 1$ 时, f_F 是 Weierstrass 典型乘积.

引理 3.3^[23] 如果函数 g 和 h 是 $\mathbb{C}$ 上的整函数, $g(h)$ 是一个有穷级整函数, 那么只有以下两种情况发生:

- (1) 函数 h 为多项式, $\rho(g) < +\infty$.
- (2) 函数 h 不为多项式, $\rho(h) < +\infty$, $\rho(g) = 0$.

§4 定理的证明

§4.1 定理 2.1 的证明

证 假设 f 是方程 (2.1) 的有穷级超越整函数解, 下面对 $L_1(f)$ 分两种情形进行考虑.

情形 1 $L_1(f) = \eta_1 \in \mathbb{C}$ 为常数.

由方程 (2.1), 则 $L_2(f)$ 也是 $\mathbb{C}$ 上的常数. 不妨假设 $L_2(f) = \eta_2$, $\eta_2 \in \mathbb{C}$ 为常数, 则 $\eta_1^2 + \eta_2^2 = 1$. 将 $L_1(f), L_2(f)$ 展开, 即

$$a_0f + a_1f' + a_2f'' = \eta_1, \quad (4.1)$$

$$b_0f + b_1f' + b_2f'' = \eta_2. \quad (4.2)$$

注意到 $D_0 \neq 0$, 联立 (4.1) 和 (4.2), 可得

$$f' = \frac{1}{D_0}(b_2\eta_1 - a_2\eta_2 + D_1f), \quad (4.3)$$

$$f'' = \frac{1}{D_0}(a_1\eta_2 - b_1\eta_1 + D_2f). \quad (4.4)$$

对 (4.3) 两边连续求两次导, 得

$$f''' = \frac{D_1}{D_0}f''. \quad (4.5)$$

对 (4.4) 两边求一次导, 得

$$f''' = \frac{D_2}{D_0}f'. \quad (4.6)$$

将 (4.4) 代入 (4.5), (4.3) 代入 (4.6), 再联立可得

$$D_0(b_0\eta_1 - a_0\eta_2) = 0. \quad (4.7)$$

因为 $D_0 \neq 0$, 所以 $b_0\eta_1 - a_0\eta_2 = 0$. 由 (4.3), 若 $D_1 = 0$, 则 f 为次数小于或等于 1 的多项式, 这与 f 超越矛盾, 故 $D_1 \neq 0$. 因此 $D_1 = a_2b_0 - a_0b_2 \neq 0$, 进而 a_0, b_0 不能同时为零.

若 $a_0 \neq 0$, 则 $\eta_2 = \frac{b_0}{a_0}\eta_1$. 再结合 $\eta_1^2 + \eta_2^2 = 1$, 可得 $a_0^2 + b_0^2 \neq 0$, $\eta_1^2 = \frac{a_0^2}{a_0^2 + b_0^2}$, $\eta_2^2 = \frac{b_0^2}{a_0^2 + b_0^2}$. 若 $b_0 \neq 0$, 同样可得 $a_0^2 + b_0^2 \neq 0$, $\eta_1^2 = \frac{a_0^2}{a_0^2 + b_0^2}$, $\eta_2^2 = \frac{b_0^2}{a_0^2 + b_0^2}$. 故

$$\eta_1^2 = \frac{a_0^2}{a_0^2 + b_0^2}, \quad \eta_2^2 = \frac{b_0^2}{a_0^2 + b_0^2}.$$

再利用 (4.3), 解得

$$f(z) = \alpha e^{\frac{D_1}{D_0}z} + \left(\frac{1}{a_0^2 + b_0^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中 $\alpha \in \mathbb{C}$ 为非零常数. 将 $f(z)$ 代入 (4.4), 可得

$$\alpha \left(\frac{D_1^2 - D_0D_2}{D_0^2}\right) e^{\frac{D_1}{D_0}z} = 0. \quad (4.8)$$

由于 $\alpha \neq 0$, 所以 $D_1^2 = D_0D_2$. 由前面讨论知 $D_1 \neq 0$, 从而 $D_2 \neq 0$.

情形 2 $L_1(f)$ 不为 $\mathbb{C}$ 上的常数.

方程 (2.1) 可以改写为

$$\{L_1(f) + iL_2(f)\}\{L_1(f) - iL_2(f)\} = 1. \quad (4.9)$$

注意到 f 为有穷级超越整函数, 那么 $L_1(f) + iL_2(f)$, $L_1(f) - iL_2(f)$ 没有零点和极点. 利用引理 3.2-3.3, 那么存在一个非常值的多项式 $p(z)$, 使得 $L_1(f) + iL_2(f) = e^p$, $L_1(f) - iL_2(f) = e^{-p}$, 进而有

$$a_0f + a_1f' + a_2f'' = \frac{e^p + e^{-p}}{2}, \quad (4.10)$$

$$b_0f + b_1f' + b_2f'' = \frac{e^p - e^{-p}}{2i}. \quad (4.11)$$

联立 (4.10) 和 (4.11), 可得

$$f' = \frac{1}{2D_0}\{(b_2 + ia_2)e^p + (b_2 - ia_2)e^{-p}\} + \frac{D_1}{D_0}f, \quad (4.12)$$

$$f'' = \frac{1}{2D_0}\{-(b_1 + ia_1)e^p + (-b_1 + ia_1)e^{-p}\} + \frac{D_2}{D_0}f. \quad (4.13)$$

对 (4.12) 两边连续求两次导, 得

$$f''' = \frac{1}{2D_0} \{ (b_2 + ia_2)((p')^2 + p'')e^p + (b_2 - ia_2)((p')^2 - p'')e^{-p} \} + \frac{D_1}{D_0} f''. \quad (4.14)$$

对 (4.13) 两边求一次导, 得

$$f''' = \frac{1}{2D_0} \{ -(b_1 + ia_1)e^p - (-b_1 + ia_1)e^{-p} \} p' + \frac{D_2}{D_0} f'. \quad (4.15)$$

将 (4.13) 代入 (4.14), (4.12) 代入 (4.15), 再联立得

$$e^{2p} I_1 = I_2, \quad (4.16)$$

这里

$$I_1 = \left\{ (b_2 + ia_2)(p')^2 + (b_1 + ia_1)p' + (b_2 + ia_2)p'' - \frac{D_1}{D_0}(b_1 + ia_1) - \frac{D_2}{D_0}(b_2 + ia_2) \right\},$$

$$I_2 = \left\{ (b_2 - ia_2)(p')^2 - (b_1 - ia_1)p' - (b_2 - ia_2)p'' - \frac{D_1}{D_0}(b_1 - ia_1) - \frac{D_2}{D_0}(b_2 - ia_2) \right\}.$$

下面断言: $I_1 \equiv 0, I_2 \equiv 0$. 否则, 若 $I_1 \neq 0$, 根据 (4.16), 可得 $e^{2p} = \frac{I_2}{I_1}$. 利用 Nevanlinna 第一基本定理及引理 3.1, 可得 $T(r, e^{2p}) = O\{T(r, p)\}$, 可能需除去一个 Lebesgue 测度有限例外集, 显然这是矛盾的. 因为 e^{2p} 是超越整函数, 而 p 为非常值的多项式, 利用引理 3.1, 则

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{T(r, e^{2p})}{T(r, p)} = +\infty,$$

所以 $T(r, e^{2p}) \neq O\{T(r, p)\}$. 因此上述断言: $I_1 \equiv 0, I_2 \equiv 0$ 成立. 进而有

$$(b_2 + ia_2)(p')^2 + (b_1 + ia_1)p' + (b_2 + ia_2)p'' = \frac{D_1}{D_0}(b_1 + ia_1) + \frac{D_2}{D_0}(b_2 + ia_2), \quad (4.17)$$

$$(b_2 - ia_2)(p')^2 - (b_1 - ia_1)p' - (b_2 - ia_2)p'' = \frac{D_1}{D_0}(b_1 - ia_1) + \frac{D_2}{D_0}(b_2 - ia_2). \quad (4.18)$$

由 (4.17) 或者 (4.18) 可以推断出 p' 必为常值. 若 p' 不为常值, 则 (4.17) 和 (4.18) 的左边为非常值多项式, 而右边为常数, 显然这是矛盾, 因此 p' 必为常值. 又因为 p 为非常值多项式, 则 p 只能为一次多项式. 不妨假设 $p' = \lambda, \lambda \in \mathbb{C}$ 为非零常数. 记 $A_1 = b_2 + ia_2, B_1 = b_1 + ia_1, A_2 = b_2 - ia_2, B_2 = b_1 - ia_1$, 那么 (4.17) 和 (4.18) 可以改写为

$$A_1 \lambda^2 + B_1 \lambda = \frac{D_1 B_1 + D_2 A_1}{D_0}, \quad (4.19)$$

$$A_2 \lambda^2 - B_2 \lambda = \frac{D_1 B_2 + D_2 A_2}{D_0}. \quad (4.20)$$

令 $E = -A_1 B_2 - A_2 B_1 = -2(a_1 a_2 + b_1 b_2)$. 因为 $a_1 a_2 + b_1 b_2 \neq 0$, 即 $E \neq 0$. 联立 (4.19) 和 (4.20), 不难解得

$$\begin{cases} \lambda^2 = \frac{D_2 E - 2D_1(a_1^2 + b_1^2)}{D_0 E}, \\ \lambda = -\frac{2iD_1}{E}. \end{cases}$$

进而可得

$$D_1^2 = \frac{2D_1 E(a_1^2 + b_1^2) - D_2 E^2}{4D_0}. \quad (4.21)$$

又因为 $p' = \lambda = -\frac{2iD_1}{E}$, 不妨设 $p(z) = -\frac{2iD_1}{E}z + c_1$, 这里 $c_1 \in \mathbb{C}$ 为任意常数. 同时 (4.12) 可以改写为

$$f' = \frac{1}{2D_0}\{A_1e^p + A_2e^{-p}\} + \frac{D_1}{D_0}f. \quad (4.22)$$

由 (4.22) 解得

$$f(z) = e^{\frac{D_1}{D_0}z} \left(\frac{1}{2D_0} \int e^{-\frac{D_1}{D_0}z} (A_1e^{-\frac{2iD_1}{E}z+c_1} + A_2e^{\frac{2iD_1}{E}z-c_1}) dz + c_2 \right),$$

其中 $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ 为任意常数, $A_1 = b_2 + ia_2$, $A_2 = b_2 - ia_2$.

综上, 定理 2.1 证毕.

§4.2 定理 2.2 的证明

证 假设 f 是方程 (2.3) 的有穷级超越整函数解. 如果 $a_0f + a_1f'$ 为常值, 不妨设

$$a_0f + a_1f' = \eta_1, \quad \eta_1 \in \mathbb{C}. \quad (4.23)$$

那么由 (2.3), 可知 $b_0f + b_1f'$ 也为常值, 设

$$b_0f + b_1f' = \eta_2, \quad \eta_2 \in \mathbb{C}. \quad (4.24)$$

并且 $\eta_1^2 + \eta_2^2 = 1$. 注意到 $D_2 = a_0b_1 - a_2b_1 \neq 0$, 由 (4.23) 和 (4.24), 解得 f 和 f' 均为常数, 显然这与 f 超越矛盾, 故 $a_0f + a_1f'$ 不为常值. 类似于定理 2.1 情形 2 的证明, 存在非常值的多项式 $p(z)$, 使得

$$a_0f + a_1f' = \frac{e^p + e^{-p}}{2}, \quad (4.25)$$

$$b_0f + b_1f' = \frac{e^p - e^{-p}}{2i}. \quad (4.26)$$

联立 (4.25) 和 (4.26), 有

$$f = \frac{1}{2D_2}\{(b_1 + ia_1)e^p + (b_1 - ia_1)e^{-p}\}, \quad (4.27)$$

$$f' = \frac{1}{2D_2}\{-(b_0 + ia_0)e^p + (-b_0 + ia_0)e^{-p}\}. \quad (4.28)$$

对 (4.27) 两边求导, 再结合 (4.28), 可得

$$e^{2p}\{(b_1 + ia_1)p' + b_0 + ia_0\} = \{(b_1 - ia_1)p' - b_0 + ia_0\}. \quad (4.29)$$

类似于定理 2.1 中情形 2 的证明, 可得

$$(b_1 + ia_1)p' + b_0 + ia_0 \equiv 0, \quad (4.30)$$

$$(b_1 - ia_1)p' - b_0 + ia_0 \equiv 0. \quad (4.31)$$

那么

$$p' = \frac{-(b_0 + ia_0)}{b_1 + ia_1} = \frac{b_0 - ia_0}{b_1 - ia_1}. \quad (4.32)$$

进一步可得 $a_0a_1 = -b_0b_1$. 不妨假设 $p(z) = \frac{b_0 - ia_0}{b_1 - ia_1}z + c$, 其中 $c \in \mathbb{C}$ 为任意常数. 由 (4.27), 可得

$$f(z) = \frac{1}{2D_2}((b_1 + ia_1)e^{\frac{b_0 - ia_0}{b_1 - ia_1}z+c} + (b_1 - ia_1)e^{-\frac{b_0 - ia_0}{b_1 - ia_1}z-c}).$$

综上, 定理 2.2 证毕.

§4.3 定理 2.3 的证明

证 利用反证法, 假设 f 是方程 (2.1) 的无穷级整函数解, 类似于定理 2.1 的证明, 对 $L_1(f)$ 分两种情形进行考虑.

情形 1 $L_1(f) = \eta_1 \in \mathbb{C}$ 为常数.

由方程 (2.1), 不难得到 $L_2(f) = \eta_2$ 也为常数. 进而有

$$a_0 f + a_1 f' + a_2 f'' = \eta_1, \quad (4.33)$$

$$b_0 f + b_1 f' + b_2 f'' = \eta_2, \quad (4.34)$$

这里 $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{C}$, 满足 $\eta_1^2 + \eta_2^2 = 1$.

联立 (4.33) 和 (4.34), 分别消去 f'' , f' 以及 f 可得

$$D_1 f - D_0 f' = \eta_2 a_2 - \eta_1 b_2, \quad (4.35)$$

$$D_2 f - D_0 f'' = \eta_1 b_1 - \eta_2 a_1 \quad (4.36)$$

以及

$$D_2 f' - D_1 f'' = \eta_2 a_0 - \eta_1 b_0. \quad (4.37)$$

下面断言: $D_0 \neq 0, D_1 \neq 0, D_2 \neq 0$.

若 $D_0 = 0$, 由 $D_0 D_2 = D_1^2$ 可知 $D_1 = 0$. 又因为 $\text{rank}(A) = 2$, 所以必须有 $D_2 \neq 0$. 此时, 根据 (4.36) 可知 f 为常数, 这是矛盾的, 因此 $D_0 \neq 0$. 若 $D_1 = 0$, 而 $D_0 \neq 0$, 根据 (4.35) 可知 f 为 $\mathbb{C}$ 上次数小于或等于 1 的多项式, 显然这也是矛盾的, 因此 $D_1 \neq 0$. 由上述分析可知 $D_0 \neq 0, D_1 \neq 0$. 再结合 $D_0 D_2 = D_1^2$ 可得断言: $D_0 \neq 0, D_1 \neq 0, D_2 \neq 0$ 成立.

对 (4.35) 两边求导, 则有

$$D_1 f' - D_0 f'' = 0,$$

解得 $f(z) = \alpha_1 e^{\frac{D_1}{D_0} z} + \beta_1$, 其中 $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{C}$ 为常数且 $\alpha_1 \neq 0$. 将 $f(z)$ 代入 (4.33), 整理可得

$$\alpha_1 e^{\frac{D_1}{D_0} z} \left(\frac{a_0 D_0^2 + a_1 D_0 D_1 + a_2 D_1^2}{D_0^2} \right) + a_0 \beta_1 = \eta_1. \quad (4.38)$$

因为 $D_0 D_2 = D_1^2$, 所以 (4.38) 变为

$$\alpha_1 e^{\frac{D_1}{D_0} z} \left(\frac{a_0 D_0 + a_1 D_1 + a_2 D_2}{D_0} \right) + a_0 \beta_1 = \eta_1. \quad (4.39)$$

利用矩阵的基本性质, 可知 $a_0 D_0 + a_1 D_1 + a_2 D_2 = 0$, 那么由 (4.39) 可得 $a_0 \beta_1 = \eta_1$. 类似地, 将 $f(z)$ 代入 (4.34), 可得 $b_0 \beta_1 = \eta_2$. 因为 $\eta_1^2 + \eta_2^2 = 1$, 所以 $(a_0^2 + b_0^2) \beta_1^2 = 1$, 从而 $\beta_1 = \left(\frac{1}{a_0^2 + b_0^2} \right)^{\frac{1}{2}}$, 那么在这一情形下的整函数解为

$$f(z) = \alpha_1 e^{\frac{D_1}{D_0} z} + \left(\frac{1}{a_0^2 + b_0^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

此时 $f(z)$ 是有穷级超越整函数, 这与 $f(z)$ 无穷级矛盾.

情形 2 $L_1(f)$ 不为 $\mathbb{C}$ 上的常数.

由于 $L_1(f)$ 不为常数, 那么 $L_2(f)$ 也不为常值. 根据定理 1.1 可知, 存在非常值整函数 h , 使得 $L_1(f) = \cos h$, $L_2(f) = \sin h$, 即

$$a_0f + a_1f' + a_2f'' = \cos h, \quad (4.40)$$

$$b_0f + b_1f' + b_2f'' = \sin h. \quad (4.41)$$

联立 (4.40) 和 (4.41), 分别消去 f'' , f' 以及 f 可得

$$D_1f - D_0f' = a_2 \sin h - b_2 \cos h, \quad (4.42)$$

$$D_2f - D_0f'' = b_1 \cos h - a_1 \sin h \quad (4.43)$$

以及

$$D_2f' - D_1f'' = a_0 \sin h - b_0 \cos h. \quad (4.44)$$

下面对 D_0 进行分类讨论.

情形 2.1 $D_0 = 0$.

因为 $D_0D_2 = D_1^2$, 所以 $D_1 = 0$. 由 (4.42) 可得 $a_2 = b_2 = 0$. 又因为 $\text{rank}(A) = 2$, 则必须有 $D_2 \neq 0$. 同时, (4.43) 可以改写为

$$D_2f = b_1 \cos h - a_1 \sin h, \quad (4.45)$$

(4.44) 可以改写为

$$D_2f' = a_0 \sin h - b_0 \cos h. \quad (4.46)$$

对 (4.45) 两边求导有

$$D_2f' = (-b_1 \sin h - a_1 \cos h)h'. \quad (4.47)$$

联立 (4.46) 和 (4.47), 可得

$$(a_0 + b_1h') \tan h = b_0 - a_1h'. \quad (4.48)$$

因为 h 为非常值整函数, 类似于定理 2.1 中情形 2 的证明, 由 (4.48) 可得

$$a_0 + b_1h' \equiv 0, \quad b_0 - a_1h' \equiv 0.$$

由于 $D_2 \neq 0$, 那么 a_1, b_1 不能同时为零. 接下来对 a_1, b_1 分情况进行讨论:

(i) 当 $a_1 = 0$, $b_1 \neq 0$. 因为 $b_0 - a_1h' \equiv 0$, 所以 $b_0 = 0$. 又因为 $D_2 \neq 0$, 所以 $a_0 \neq 0$, 进而 $h' = -\frac{a_0}{b_1}$, 说明整函数 h 是 $\mathbb{C}$ 上的一次多项式;

(ii) 当 $a_1 \neq 0$, $b_1 = 0$. 因为 $a_0 + b_1h' \equiv 0$, 所以 $a_0 = 0$. 又因为 $D_2 \neq 0$, 所以 $b_0 \neq 0$, 进而 $h' = \frac{b_0}{a_1}$, 说明整函数 h 是 $\mathbb{C}$ 上的一次多项式;

(iii) 当 $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$. 则 $h' = -\frac{a_0}{b_1} = \frac{b_0}{a_1}$, 说明整函数 h 是 $\mathbb{C}$ 上的一次多项式.

综上 (i)-(iii), 可知整函数 h 是 $\mathbb{C}$ 上的一次多项式. 不妨假设 $h(z) = k_1z + c_1$, 其中 $k_1 = -\frac{a_0}{b_1}$ 或者 $k_1 = \frac{b_0}{a_1}$ 或者 $k_1 = -\frac{a_0}{b_1} = \frac{b_0}{a_1}$, $c_1 \in \mathbb{C}$ 为任意常数.

由 (4.45) 解得

$$f(z) = \frac{b_1}{D_2} \cos(k_1z + c_1) - \frac{a_1}{D_2} \sin(k_1z + c_1),$$

显然 $f(z)$ 还是有穷级超越整函数, 这与 $f(z)$ 无穷级矛盾.

情形 2.2 $D_0 \neq 0$.

由 (4.42), 可得

$$f' = \frac{1}{D_0} \{H_1 + D_1 f\}. \quad (4.49)$$

由 (4.43), 可得

$$f'' = \frac{1}{D_0} \{H_2 + D_2 f\}, \quad (4.50)$$

这里 $H_1 = \begin{vmatrix} \cosh a_2 \\ \sinh b_2 \end{vmatrix}$, $H_2 = \begin{vmatrix} a_1 \cosh h \\ b_1 \sinh h \end{vmatrix}$.

对 (4.42) 两边求导, 可得

$$D_1 f' - D_0 f'' = (a_2 \cosh h + b_2 \sinh h) h'. \quad (4.51)$$

将 (4.49) 和 (4.50) 代入 (4.51), 整理可得

$$(D_1 a_2 + D_0 a_1 + D_0 b_2 h') \tanh h = D_1 b_2 + D_0 b_1 - D_0 a_2 h'. \quad (4.52)$$

类似于定理 2.1 中情形 2 的证明, 由 (4.52) 可得

$$D_1 a_2 + D_0 a_1 + D_0 b_2 h' \equiv 0, \quad D_1 b_2 + D_0 b_1 - D_0 a_2 h' \equiv 0. \quad (4.53)$$

由于 $D_0 \neq 0$, 所以 a_2, b_2 不能同时为零. 下面对 a_2, b_2 分情况讨论:

(i) 当 $a_2 = 0, b_2 \neq 0$ 时, 由 (4.53), 可得 $b_2 D_1 + b_1 D_0 = 0$ 且 $h' = -\frac{a_1}{b_2}$, 说明整函数 h 是 $\mathbb{C}$ 上的一次多项式;

(ii) 当 $b_2 = 0, a_2 \neq 0$ 时, 由 (4.53), 可得 $a_2 D_1 + a_1 D_0 = 0$ 且 $h' = \frac{b_1}{a_2}$, 说明整函数 h 是 $\mathbb{C}$ 上的一次多项式;

(iii) 当 $a_2 \neq 0, b_2 \neq 0$ 时, 由 (4.53), 可得 $h' = -\frac{D_1 a_2 + D_0 a_1}{D_0 b_2} = \frac{D_1 b_2 + D_0 b_1}{D_0 a_2}$, 说明整函数 h 是 $\mathbb{C}$ 上的一次多项式.

综上 (i)–(iii), 可知整函数 h 为一次多项式. 不妨假设 $h(z) = k_2 z + c_2$, 其中 $k_2 = -\frac{a_1}{b_2}$, 或者 $k_2 = \frac{b_1}{a_2}$, 或者 $k_2 = -\frac{D_1 a_2 + D_0 a_1}{D_0 b_2} = \frac{D_1 b_2 + D_0 b_1}{D_0 a_2}$, $c_2 \in \mathbb{C}$ 为任意常数.

由 (4.49) 解得

$$f(z) = \alpha_2 e^{\frac{D_1}{D_0} z} + \frac{k_2 a_2 D_0 - b_2 D_1}{D_1^2 + (k_2 D_0)^2} \cos(k_2 z + c_2) + \frac{k_2 b_2 D_0 + a_2 D_1}{D_1^2 + (k_2 D_0)^2} \sin(k_2 z + c_2),$$

这里 $\alpha_2, c_2 \in \mathbb{C}$ 为任意常数. 此时 $f(z)$ 仍是有穷级超越整函数, 这与 $f(z)$ 无穷级矛盾.

综上, 定理 2.3 证毕.

参 考 文 献

- [1] Hayman W K. Meromorphic functions [M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.
- [2] Laine I. Nevanlinna theory and complex differential equations [M]. Berlin: Walter de Gruyter & Co, 1993.
- [3] Yang L. Value distribution theory [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

- [4] Stoll W. Introduction to value distribution theory of meromorphic maps [M]// Complex Analysis. Lecture Notes in Mathematics, vol 950, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1982.
- [5] Chang D C, Li B Q, Yang C C. On composition of meromorphic functions in several complex variables [J]. *Forum Math*, 1995, 7:77–94.
- [6] Montel P. Lecons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications [M]. Paris: Gauthier-Villars, 1927.
- [7] Baker I N. On a class of meromorphic functions [J]. *Proc Amer Math Soc*, 1996, 17:819–822.
- [8] Gross F. On the equation $f^n + g^n = 1$ I [J]. *Bull Amer Math Soc*, 1966, 72:86–88.
- [9] Gross F. On the equation $f^n + g^n = 1$ II [J]. *Bull Amer Math Soc*, 1968, 74:647–648.
- [10] Iyer G. On certain functional equations [J]. *Indian J Math Soc*, 1939, 3:312–315.
- [11] Yang C C. A generalization of a theorem of P. Montel on entire functions [J]. *Proc Amer Math Soc*, 1970, 26(2):332–334.
- [12] Yang C C, Li P. On the transcendental solutions of a certain type of nonlinear differential equations [J]. *Arch Math*, 2004, 82:442–448.
- [13] Liu K, Dong X J. Fermat type differential and difference equations [J]. *Electron J Differential Equations*, 2015, 159:1–10.
- [14] Han Q, Lü F. On the equation $f^n(z) + g^n(z) = e^{az+b}$ [J]. *J Contemp Math Anal*, 2019, 54:98–102.
- [15] Khavinson D. A note on entire solutions of the eikonal equation [J]. *Amer Math Monthly*, 1995, 102:159–161.
- [16] Li B Q. Entire solutions of $u_{z_1}^m + u_{z_2}^n = e^g$ [J]. *Nagoya Math J*, 2005, 178:151–162.
- [17] Li B Q. Entire solutions of eikonal type equations [J]. *Arch Math (Basel)*, 2007, 89:350–357.
- [18] Chen Y X, Xu H Y. Exact forms of entire solutions for Fermat type partial differential equations in $\mathbb{C}^2$ [J]. *Electron J Differential Equations*, 2021, 18:1–11.
- [19] Liu K, Cao T B, Cao H Z. Entire solutions of Fermat type differential-difference equations [J]. *Arch Math*, 2012, 99:147–155.
- [20] Xu L, Cao T B. Correction to: solutions of complex Fermat-type p -artial difference and differential-difference equations [J]. *Mediterr J Math*, 2020, 17:1–4.

- [21] Ronkin L I. Introduction to the theory of entire functions of several variables [M]. Moscow: Nauka 1971. Providence, RI: American Mathematical Society, 1974 (in Russian).
- [22] Stoll W. Holomorphic functions of finite order in several complex variables [M]. Providence, RI: American Mathematical Society, 1974.
- [23] Pólya G. On an integral function of an integral function [J]. *J Lond Math Soc*, 1926, 1:12–15.

On Entire Solutions of the Complex Differential Equation $(a_0f + a_1f' + a_2f'')^2$ $+ (b_0f + b_1f' + b_2f'')^2 = 1$

HU Binbin¹ YANG Liu²

¹Department of Applied Mathematics, Anhui University of Technology,
Maanshan 243032, Anhui, China. E-mail: hubinbin1104@126.com

²Corresponding author. Department of Applied Mathematics, Anhui University
of Technology, Maanshan 243032, Anhui, China. E-mail: yangliu6@ahut.edu.cn

Abstract In this paper, the authors investigate the precise expression form of transcendental entire solutions of finite order to the Fermat-type differential equation $(a_0f + a_1f' + a_2f'')^2 + (b_0f + b_1f' + b_2f'')^2 = 1$ by making use of the Nevanlinna theory and ordinary differential equations, where a_i, b_i ($i = 0, 1, 2$) are constants in $\mathbb{C}$. In addition, the authors also give several examples to illustrate the existence of solutions to the equation.

Keywords Complex differential equation, Nevanlinna theory, Transcendental entire solutions, Finite order

2020 MR Subject Classification 30D35, 34M05, 39B32

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 46 No. 2, 2025

by ALLERTON PRESS, INC., USA