数 学 年 刊 A 辑
2025, 46(4):351–366
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2025.0023

Hilbert C^*-模上具有伴随的 2×2 模映射矩阵的范数和数值半径估计*

刘 晶[1] 吴德玉[2] 阿拉坦仓[3]

提要 给出了 Hilbert C^*-模上具有伴随的 2×2 模映射矩阵的范数上界. 进一步利用具有伴随的有界模映射的 Cartesian 分解, 得到了该有界模映射数值半径的下界, 即

$$\omega_{\mathcal{A}}^2(T)\geqslant \frac{1}{8}[\max\{\|T+T^*\|^4,\|T-T^*\|^4\}+3\|T+T^*\|^2\|T-T^*\|^2]^{\frac{1}{2}}$$

和

$$\omega_{\mathcal{A}}^2(T)\geqslant \frac{1}{4}[\max\{\|\mathrm{Re}(T)+\mathrm{Im}(T)\|^4,\|\mathrm{Re}(T)-\mathrm{Im}(T)\|^4\} + 3\|\mathrm{Re}(T)+\mathrm{Im}(T)\|^2\|\mathrm{Re}(T)-\mathrm{Im}(T)\|^2]^{\frac{1}{2}},$$

其中 $\mathrm{Re}(T)=\frac{T+T^*}{2}$ 和 $\mathrm{Im}(T)=\frac{T-T^*}{2\mathrm{i}}$ 分别为 T 的实部和虚部. 最后利用 Buzano 不等式得到了 Hilbert C^*-模上具有伴随的 2×2 模映射矩阵的数值半径上界. 此外, 当 Hilbert C^*-模退化为 Hilbert 空间且参数取特殊值时, 结论改进了 Bani-Domi W 和 Kittaneh F 得到的关于 Hilbert 空间中 2×2 有界线性算子矩阵数值半径上界的结论.

关键词 数值半径, Cartesian 分解, Buzano 不等式, Hilbert C^*-模
MR (2020) 主题分类 47A12, 46C05, 47C10
中图法分类 O175.3
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2025)04-0351-16

§1 引 言

模理论是代数学的重要组成部分. Hilbert C^*-模概念最早是由 Kaplansky I[1] 于 20 世纪 50 年代引入的, 他给出了交换 C^*-代数的 Hilbert C^*-模概念, 并以此为工具证明了 I 型 AW^*-代数上的导子均为内导子. 一般非交换 C^*-代数上的 Hilbert C^*-模概念直到 20 世纪 70 年代才分别由 Paschke W[2] 和 Rieffel M A[3] 引入, 用于刻画 C^*-代数的表示理论及约化理论. 此后 Hilbert C^*-模理论蓬勃发展, 成为非交换几何、KK-理论、量子群论、广义指标理论的主要工具. Hilbert C^*-模基本理论是 Hilbert 空间理论与 C^*-代数理论交叉融合的结果. Hilbert 空间中有界线性算子数值域的研究不仅具有深厚的理论基础, 还具有广泛的实际应用价值, 如算子理论、泛函分析、扰动理论以及量子物理等领域.

本文 2025 年 6 月 11 日收到, 2025 年 11 月 25 日收到修改稿.
[1]包头师范学院数学科学学院, 内蒙古 包头 014030; 内蒙古大学数学科学学院, 呼和浩特 010021.
E-mail: 15848179592@163.com
[2]通信作者. 内蒙古大学数学科学学院, 呼和浩特 010021. E-mail: deyuwu@imu.edu.cn
[3]内蒙古师范大学数学科学学院, 呼和浩特 010022. E-mail: alatanca@imu.edu.cn
*本文受到国家自然科学基金 (No. 12561022) 和内蒙古自然科学基金 (No. 2022ZD05) 的资助.

Hilbert 空间中有界线性算子数值半径不仅是刻画数值域范围的有力工具, 也在双曲型初值问题的有限差分近似解的稳定性理论方面有非常重要的应用. 因此, Hilbert C^*-模上数值域及数值半径的研究具有极高的理论意义. 目前 Hilbert C^*-模上数值域及数值半径的研究已经受到广泛的关注, 比如文 [1–2, 4–10]. 接下来我们给出 Hilbert C^*-模的定义.

定义 1.1 [1] 设 $\mathcal{A}$ 是一个 C^*-代数, 若线性空间 E 是一个右 $\mathcal{A}$-模且兼容数乘运算 (即满足 $\lambda(xa)=(\lambda x)a=x(\lambda a)$, $x\in E$, $a\in\mathcal{A}$, $\lambda\in\mathbb{C}$), 在 E 上定义映射

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_E : E\times E\to\mathcal{A},$$

使得对任意 $x,y,z\in E$, $a\in\mathcal{A}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, 有

(1) $\langle x,x\rangle_E\geqslant 0$, 且若 $\langle x,x\rangle_E=0$, 则 $x=0$;

(2) $\langle x,y\rangle_E^*=\langle y,x\rangle_E$;

(3) $\langle x,\alpha y+\beta z\rangle_E=\alpha\langle x,y\rangle_E+\beta\langle x,z\rangle_E$;

(4) $\langle x,ya\rangle_E=\langle x,y\rangle_E a$,

则称 E 是 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 上的准 Hilbert C^*-模.

对任意 $x\in E$, 定义范数 $\|x\|_E=\|\langle x,x\rangle_E\|^{\frac{1}{2}}$, 若 E 关于范数 $\|\cdot\|$ 完备, 则称 E 为 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 上的 Hilbert C^*-模, 简称为 Hilbert C^*-模.

注 1.1 (1) 若任给 C^*-代数 $\mathcal{A}$, 定义映射:

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A},\quad \langle a,b\rangle_{\mathcal{A}}=a^*b,\quad \forall a,b\in\mathcal{A}.$$

容易验证该映射满足定义 1.1 的条件. 因此 $\mathcal{A}$ 自身关于内积

$$\langle a,b\rangle_{\mathcal{A}}=a^*b,$$

也成为一个 Hilbert C^*-模;

(2) 若 $\mathcal{A}$ 退化为复数域 $\mathbb{C}$, 则定义 1.1 的 Hilbert C^*-模成为 Hilbert 空间.

显然 C^*-代数和 Hilbert 空间是最简单的 Hilbert C^*-模.

假设 E,F 是 Hilbert C^*-模. 记 $\mathcal{B}(E,F)$ 是 E 到 F 的有界模映射全体的集合. 用 T 表示有界模映射, 即对任意 $x\in E$, $a\in\mathcal{A}$, 有 $T(xa)=(Tx)a$. 记 $\mathcal{L}(E,F)$ 是 E 到 F 的具有伴随的模映射全体的集合. 当 T 具有伴随的模映射时, 记为 T^*, 即对任意 $x\in E$, $y\in F$, 有 $\langle Tx,y\rangle_F=\langle x,T^*y\rangle_E$. 若 $E=F$, 则 $\mathcal{L}(E)$ 是一个 C^*-代数.

定义 1.2 [8] 设 $\mathcal{A}$ 为 C^*-代数, 若作用于 $\mathcal{A}$ 上的线性泛函 φ 满足对所有 $a\in\mathcal{A}$, 均有 $\varphi(a^*a)\geqslant 0$, 则 φ 称为正线性泛函. 若正线性泛函 φ, 进一步满足 $\|\varphi\|=1$, 则称 φ 为态. 特别地, 对于含幺 C^*-代数 $\mathcal{A}$ (即存在单位元 1) 上的正线性泛函 φ, 若 $\varphi(1)=\|\varphi\|=1$, 则 φ 自动成为态. 我们将 $\mathcal{A}$ 上的全体态构成的集合记为 $S(\mathcal{A})$.

对任意 $x\in E$, 定义 $|x|$ 为

$$|x|=\langle x,x\rangle_E^{\frac{1}{2}},$$

则 $W_{\mathcal{A}}(T)$, $\omega_{\mathcal{A}}(T)$, $\|T\|$ 分别表示 $T\in\mathcal{L}(E)$ 的数值域、数值半径及范数. 它们的定义为

$$W_{\mathcal{A}}(T)=\{\varphi(\langle x,Tx\rangle_E) : x\in E,\ \varphi\in S(\mathcal{A}),\ \varphi(|x|^2)=1\},$$

$$\omega_{\mathcal{A}}(T)=\sup\{|\varphi(\langle x,Tx\rangle_E)|:x\in E,\ \varphi\in S(\mathcal{A}),\ \varphi(|x|^2)=1\},$$
$$\|T\|=\sup\{|\varphi(\langle x,Ty\rangle_E)|:x,y\in E,\ \varphi\in S(\mathcal{A}),\ \varphi(|x|^2)=\varphi(|y|^2)=1\}.$$

在文 [6] 中, Mehrazin M, Amyari M 和 Omidvar M E 给出了如下不等式, 即对任意 $T\in\mathcal{L}(E)$, 有

$$\frac{1}{2}\|T\|\leqslant\omega_{\mathcal{A}}(T)\leqslant\|T\|. \tag{1.1}$$

若 T 是自共轭的模映射, 则 $\omega_{\mathcal{A}}(T)=\|T\|$.

在文 [6] 中, Mehrazin M, Amyari M 和 Omidvar M E 得到了 (1.1) 的改进形式

$$\frac{1}{4}\|T^*T+TT^*\|\leqslant\omega_{\mathcal{A}}^2(T)\leqslant\frac{1}{2}\|T^*T+TT^*\|. \tag{1.2}$$

本文给出了 Hilbert C^*-模上具有伴随的 2×2 模映射矩阵的范数上界 (见定理 3.1–3.2). 作为 Hilbert C^*-模上具有伴随的 2×2 模映射矩阵的范数不等式应用, 我们利用具有伴随的模映射的 Cartesian 分解得到了该有界模映射数值半径的下界并改进了 (1.2), 即

$$\frac{1}{4}\|T^*T+TT^*\|\leqslant\frac{1}{8}[\max\{\|T+T^*\|^4,\|T-T^*\|^4\}+3\|T+T^*\|^2\|T-T^*\|^2]^{\frac{1}{2}}\leqslant\omega_{\mathcal{A}}^2(T)$$

和

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\|T^*T+TT^*\|&\leqslant\frac{1}{4}[\max\{\|\mathrm{Re}(T)+\mathrm{Im}(T)\|^4,\|\mathrm{Re}(T)-\mathrm{Im}(T)\|^4\}\\&\quad+3\|\mathrm{Re}(T)+\mathrm{Im}(T)\|^2\|\mathrm{Re}(T)-\mathrm{Im}(T)\|^2]^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant\omega_{\mathcal{A}}^2(T),\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{Re}(T)=\frac{T+T^*}{2}$ 和 $\mathrm{Im}(T)=\frac{T-T^*}{2\mathrm{i}}$ 分别为 T 的实部和虚部. 最后我们利用 Buzano 不等式得到了 Hilbert C^*-模上具有伴随的 2×2 模映射矩阵的数值半径上界 (见定理 4.1). 此外, 当 Hilbert C^*-模退化为 Hilbert 空间且参数取特殊值时, 文中定理 4.1 改进了文 [11] 中 Bani-Domi W 和 Kittaneh F 得到的关于 Hilbert 空间中 2×2 有界线性算子矩阵数值半径上界的结论.

§2 预备知识

为了证明主要结论, 需要如下几个引理.

引理 2.1 [6] 设 $T\in\mathcal{L}(E)$ 且 T 是自共轭的模映射, 则

$$\|T\|=\sup\{|\varphi(\langle x,Tx\rangle_E)|:x\in E,\ \varphi\in S(\mathcal{A}),\ \varphi(|x|^2)=1\}.$$

引理 2.2 [4] (McCarthy 不等式) 设 $T\in\mathcal{L}(E)$ 且 $T\geqslant 0$, 则对任意 $\varphi\in S(\mathcal{A})$, $x\in E$ 且 $\varphi(|x|^2)=1$, 有

(1) $\varphi^r(\langle x,Tx\rangle_E)\leqslant\varphi(\langle x,T^rx\rangle_E),\ r\geqslant 1$.

(2) $\varphi^r(\langle x,Tx\rangle_E)\geqslant\varphi(\langle x,T^rx\rangle_E),\ 0<r\leqslant 1$.

引理 2.3 [12] 设 $a,b\geqslant 0,\ 0<\alpha<1$, 且 $r\neq 0$, 令 $M_r(a,b,\alpha)=(\alpha a^r+(1-\alpha)b^r)^{\frac{1}{r}}$,

$M_0(a,b,\alpha)=a^{\alpha}b^{(1-\alpha)}$, 则

$$M_r(a,b,\alpha)\leqslant M_s(a,b,\alpha),$$

其中 $r\leqslant s$.

引理 2.4 [13] 设 T,S 是 Hilbert 空间中的正算子, $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是凸函数, 则有

$$\Big\|f\Big(\frac{T+S}{2}\Big)\Big\|\leqslant\Big\|\frac{f(T)+f(S)}{2}\Big\|.$$

特别地, 若 $r\geqslant 1$, 有

$$\Big\|\Big(\frac{T+S}{2}\Big)^r\Big\|\leqslant\Big\|\frac{T^r+S^r}{2}\Big\|.$$

引理 2.5 [14] 设 $x,y,z\in E$, $\varphi\in S(\mathcal{A})$ 且 $\varphi(|z|^2)=1$, 则

$$|\varphi(\langle z,x\rangle_E)|^2+|\varphi(\langle z,y\rangle_E)|^2\leqslant\max\{\varphi(\langle x,x\rangle_E),\varphi(\langle y,y\rangle_E)\}+|\varphi(\langle x,y\rangle_E)|.$$

引理 2.6 [15] 设 $x,y,z\in E$, $\varphi\in S(\mathcal{A})$ 且 $\varphi(|z|^2)=1$, 则

$$\begin{aligned}&(|\varphi(\langle z,x\rangle_E)|+|\varphi(\langle z,y\rangle_E)|)^2\\ \leqslant&(\sqrt{\varphi(\langle x,x\rangle_E)}+\sqrt{\varphi(\langle y,y\rangle_E)})\times\max\{\sqrt{\varphi(\langle x,x\rangle_E)},\sqrt{\varphi(\langle y,y\rangle_E)}\}+2|\varphi(\langle x,y\rangle_E)|.\end{aligned}$$

引理 2.7 [9] (Buzano 不等式) 设 $f,g:\mathbb{D}\to[0,\infty)$ 是映射且 $f(\beta)+g(\beta)=1$, $\forall\beta\in\mathbb{D}\subseteq\mathbb{R}$. 令 E 是一个准的 Hilbert C^*-模, 若 $x,y,z\in E$, $\varphi\in S(\mathcal{A})$ 且 $\varphi(|z|^2)=1$, 则

$$\begin{aligned}&|\varphi(\langle x,z\rangle_E)\varphi(\langle z,y\rangle_E)|^2\\ \leqslant&\frac{1}{4}\varphi(\langle x,x\rangle_E)\varphi(\langle y,y\rangle_E)+\frac{g(\beta)}{4}|\varphi(\langle x,y\rangle_E)|^2+\frac{f(\beta)+2}{4}\sqrt{\varphi(\langle x,x\rangle_E)\varphi(\langle y,y\rangle_E)}|\varphi(\langle x,y\rangle_E)|.\end{aligned}$$

引理 2.8 [8] 设 $T,S\in\mathcal{L}(E)$, 则

(1) $\left\|\begin{bmatrix}T&0\\0&S\end{bmatrix}\right\|=\max\{\|T\|,\|S\|\}$.

(2) $\left\|\begin{bmatrix}T&S\\S&T\end{bmatrix}\right\|=\max\{\|T+S\|,\|T-S\|\}$.

(3) $\left\|\begin{bmatrix}0&T\\S&0\end{bmatrix}\right\|=\max\{\|T\|,\|S\|\}$.

引理 2.9 [8] 设 $T,S\in\mathcal{L}(E)$, 则

(1) $\omega_{\mathcal{A}}\left(\begin{bmatrix}T&0\\0&S\end{bmatrix}\right)=\max\{\omega_{\mathcal{A}}(T),\omega_{\mathcal{A}}(S)\}$.

(2) $\omega_{\mathcal{A}}\left(\begin{bmatrix}T&S\\S&T\end{bmatrix}\right)=\max\{\omega_{\mathcal{A}}(T+S),\omega_{\mathcal{A}}(T-S)\}$.

特别地,

$$\omega_{\mathcal{A}}\left(\begin{bmatrix}0&T\\T&0\end{bmatrix}\right)=\omega_{\mathcal{A}}(T).$$

§3 主要结果及其证明

本节首先给出了 Hilbert C^*-模上具有伴随的 2×2 模映射矩阵的范数上界. 其次利用具有伴随的模映射的 Cartesion 分解得到了该有界模映射数值半径的下界, 并改进了不等式 (1.2).

定理 3.1 设 $A,B,C,D\in\mathcal{L}(E)$, 则

$$\left\|\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\right\|^2\leqslant \max\{\|A\|^2,\|B\|^2,\|C\|^2,\|D\|^2\}+\omega_{\mathcal{A}}\left(\begin{bmatrix}0 & A^*B\\ D^*C & 0\end{bmatrix}\right)$$
$$+2\max\{\|A\|,\|D\|\}\max\{\|B\|,\|C\|\}.$$

证 对任意 $x,y\in E$, $\varphi\in S(\mathcal{A})$ 且 $\varphi(|x|^2)=\varphi(|y|^2)=1$, 有

$$\left|\varphi\left(\left\langle x,\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}y\right\rangle_E\right)\right|^2$$
$$\leqslant\left(\left|\varphi\left(\left\langle x,\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & D\end{bmatrix}y\right\rangle_E\right)\right|+\left|\varphi\left(\left\langle x,\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}y\right\rangle_E\right)\right|\right)^2$$

(由三角不等式)

$$=\left|\varphi\left(\left\langle x,\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & D\end{bmatrix}y\right\rangle_E\right)\right|^2+\left|\varphi\left(\left\langle x,\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}y\right\rangle_E\right)\right|^2$$
$$+2\left|\varphi\left(\left\langle x,\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & D\end{bmatrix}y\right\rangle_E\right)\right|\cdot\left|\varphi\left(\left\langle x,\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}y\right\rangle_E\right)\right|$$
$$\leqslant\max\left\{\varphi\left(\left\langle\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & D\end{bmatrix}y,\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & D\end{bmatrix}y\right\rangle_E\right),\varphi\left(\left\langle\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}y,\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}y\right\rangle_E\right)\right\}$$
$$+\left|\varphi\left(\left\langle\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & D\end{bmatrix}y,\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}y\right\rangle_E\right)\right|+2\left|\varphi\left(\left\langle x,\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & D\end{bmatrix}y\right\rangle_E\right)\right|\cdot\left|\varphi\left(\left\langle x,\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}y\right\rangle_E\right)\right|$$

(由引理 2.5)

$$=\max\left\{\varphi\left(\left\langle y,\begin{bmatrix}A^*A & 0\\ 0 & D^*D\end{bmatrix}y\right\rangle_E\right),\varphi\left(\left\langle y,\begin{bmatrix}C^*C & 0\\ 0 & B^*B\end{bmatrix}y\right\rangle_E\right)\right\}$$
$$+\left|\varphi\left(\left\langle y,\begin{bmatrix}0 & A^*B\\ D^*C & 0\end{bmatrix}y\right\rangle_E\right)\right|+2\left|\varphi\left(\left\langle x,\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & D\end{bmatrix}y\right\rangle_E\right)\right|\cdot\left|\varphi\left(\left\langle x,\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}y\right\rangle_E\right)\right|$$

(由引理 2.1)

$$\leqslant\max\left\{\left\|\begin{bmatrix}A^*A & 0\\ 0 & D^*D\end{bmatrix}\right\|,\left\|\begin{bmatrix}C^*C & 0\\ 0 & B^*B\end{bmatrix}\right\|\right\}+\omega_{\mathcal{A}}\left(\begin{bmatrix}0 & A^*B\\ D^*C & 0\end{bmatrix}\right)$$
$$+2\left\|\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & D\end{bmatrix}\right\|\left\|\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}\right\|$$

(由引理 2.8)

$$= \max\{\|A\|^2, \|B\|^2, \|C\|^2, \|D\|^2\} + \omega_{\mathcal{A}}\left(\begin{bmatrix} 0 & A^*B \\ D^*C & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$+ 2\max\{\|A\|, \|D\|\}\max\{\|B\|, \|C\|\}.$$

于是

$$\left\|\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right\|^2 \leqslant \max\{\|A\|^2, \|B\|^2, \|C\|^2, \|D\|^2\} + \omega_{\mathcal{A}}\left(\begin{bmatrix} 0 & A^*B \\ D^*C & 0 \end{bmatrix}\right) + 2\max\{\|A\|, \|D\|\}\max\{\|B\|, \|C\|\}.$$

注 3.1 当 $A = D$, $B = C$ 时, 有

$$\left\|\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}\right\|^2 = \max\{\|A + B\|^2, \|A - B\|^2\}$$

(由引理 2.8)

$$\leqslant \max\{\|A\|^2, \|B\|^2\} + \omega_{\mathcal{A}}(A^*B) + 2\|A\|\|B\|.$$

(由引理 2.9)

特别地, 若 $A \geqslant 0$, $B \geqslant 0$, 有

$$\|A + B\|^2 \leqslant \max\{\|A\|^2, \|B\|^2\} + \omega_{\mathcal{A}}(A^*B) + 2\|A\|\|B\|.$$

定理 3.2 设 $A, B, C, D \in \mathcal{L}(E)$, 则

$$\left\|\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right\|^2 \leqslant \max\{\|A\|^2, \|B\|^2, \|C\|^2, \|D\|^2\} + 2\omega_{\mathcal{A}}\left(\begin{bmatrix} 0 & A^*B \\ D^*C & 0 \end{bmatrix}\right) + \max\{\|A\|, \|D\|\}\max\{\|B\|, \|C\|\}.$$

证 对任意 $x, y \in E$, $\varphi \in S(\mathcal{A})$ 且 $\varphi(|x|^2) = \varphi(|y|^2) = 1$, 有

$$\left|\varphi\left(\left\langle x, \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} y\right\rangle_E\right)\right|^2$$

$$\leqslant \left(\left|\varphi\left(\left\langle x, \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} y\right\rangle_E\right)\right| + \left|\varphi\left(\left\langle x, \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix} y\right\rangle_E\right)\right|\right)^2$$

(由三角不等式)

$$\leqslant \left(\sqrt{\varphi\left(\left\langle \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} y, \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} y\right\rangle_E\right)} + \sqrt{\varphi\left(\left\langle \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix} y, \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix} y\right\rangle_E\right)}\right)$$

$$\times \max\left\{\sqrt{\varphi\left(\left\langle \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} y, \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} y\right\rangle_E\right)}, \sqrt{\varphi\left(\left\langle \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix} y, \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix} y\right\rangle_E\right)}\right\}$$

$$+ 2\left|\varphi\left(\left\langle \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} y, \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix} y\right\rangle_E\right)\right|$$

(由引理 2.6)

$$= \max\left\{\varphi\left(\left\langle \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D\end{bmatrix} y, \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D\end{bmatrix} y\right\rangle_E\right), \varphi\left(\left\langle \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0\end{bmatrix} y, \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0\end{bmatrix} y\right\rangle_E\right)\right\}$$

$$+ \sqrt{\varphi\left(\left\langle \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D\end{bmatrix} y, \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D\end{bmatrix} y\right\rangle_E\right)} \times \sqrt{\varphi\left(\left\langle \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0\end{bmatrix} y, \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0\end{bmatrix} y\right\rangle_E\right)}$$

$$+ 2\left|\varphi\left(\left\langle \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D\end{bmatrix} y, \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0\end{bmatrix} y\right\rangle_E\right)\right|$$

(由 $\max\{a,b\}\cdot(a+b) = \max\{a^2,b^2\} + ab$, 其中 $a,b\in\mathbb{R}$)

$$= \max\left\{\varphi\left(\left\langle y, \begin{bmatrix} A^*A & 0 \\ 0 & D^*D\end{bmatrix} y\right\rangle_E\right), \varphi\left(\left\langle y, \begin{bmatrix} C^*C & 0 \\ 0 & B^*B\end{bmatrix} y\right\rangle_E\right)\right\}$$

$$+ \sqrt{\varphi\left(\left\langle y, \begin{bmatrix} A^*A & 0 \\ 0 & D^*D\end{bmatrix} y\right\rangle_E\right)} \times \sqrt{\varphi\left(\left\langle y, \begin{bmatrix} C^*C & 0 \\ 0 & B^*B\end{bmatrix} y\right\rangle_E\right)}$$

$$+ 2\left|\varphi\left(\left\langle y, \begin{bmatrix} 0 & A^*B \\ D^*C & 0\end{bmatrix} y\right\rangle_E\right)\right|$$

(由引理 2.1)

$$\leqslant \max\left\{\left\|\begin{bmatrix} A^*A & 0 \\ 0 & D^*D\end{bmatrix}\right\|, \left\|\begin{bmatrix} C^*C & 0 \\ 0 & B^*B\end{bmatrix}\right\|\right\} + 2\omega_{\mathcal{A}}\left(\begin{bmatrix} 0 & A^*B \\ D^*C & 0\end{bmatrix}\right)$$

$$+ \sqrt{\left\|\begin{bmatrix} A^*A & 0 \\ 0 & D^*D\end{bmatrix}\right\|} \times \sqrt{\left\|\begin{bmatrix} C^*C & 0 \\ 0 & B^*B\end{bmatrix}\right\|}$$

(由引理 2.8)

$$= \max\{\|A\|^2, \|B\|^2, \|C\|^2, \|D\|^2\} + 2\omega_{\mathcal{A}}\left(\begin{bmatrix} 0 & A^*B \\ D^*C & 0\end{bmatrix}\right)$$

$$+ \max\{\|A\|, \|D\|\}\max\{\|B\|, \|C\|\}.$$

于是

$$\left\|\begin{bmatrix} A & B \\ C & D\end{bmatrix}\right\|^2 \leqslant \max\{\|A\|^2, \|B\|^2, \|C\|^2, \|D\|^2\} + 2\omega_{\mathcal{A}}\left(\begin{bmatrix} 0 & A^*B \\ D^*C & 0\end{bmatrix}\right)$$

$$+ \max\{\|A\|, \|D\|\}\max\{\|B\|, \|C\|\}.$$

作为 Hilbert C^*-模上具有伴随的 2×2 模映射矩阵的范数应用, 再结合具有伴随的模映射的 Cartesian 分解, 我们给出了该有界模映射数值半径的下界, 并改进了不等式 (1.2). 令 $T\in\mathcal{L}(E)$, 有

$$\frac{1}{4}\|T^*T + TT^*\| = \frac{1}{2}\|(\mathrm{Re}(T))^2 + (\mathrm{Im}(T))^2\|, \tag{3.1}$$

$$\frac{1}{4}\|T^*T + TT^*\| = \frac{1}{4}\|(\mathrm{Re}(T) + \mathrm{Im}(T))^2 + (\mathrm{Re}(T) - \mathrm{Im}(T))^2\|. \tag{3.2}$$

对任意 $x\in E$, $\varphi\in S(\mathcal{A})$ 且 $\varphi(|x|^2)=1$, 有

$$\begin{aligned}|\varphi(\langle x,Tx\rangle_E)|^2&=|\varphi(\langle x,(\mathrm{Re}(T)+\mathrm{i}\mathrm{Im}(T))x\rangle_E)|^2\\&=|\varphi(\langle x,\mathrm{Re}(T)x\rangle_E)+\mathrm{i}\varphi(\langle x,\mathrm{Im}(T)x\rangle_E)|^2\\&=\varphi^2(\langle x,\mathrm{Re}(T)x\rangle_E)+\varphi^2(\langle x,\mathrm{Im}(T)x\rangle_E).\end{aligned}\tag{3.3}$$

通过 (3.3), 有如下不等式

$$\|\mathrm{Re}(T)\|\leqslant\omega_{\mathcal{A}}(T),\quad \|\mathrm{Im}(T)\|\leqslant\omega_{\mathcal{A}}(T),\tag{3.4}$$

且

$$\begin{aligned}&|\varphi(\langle x,Tx\rangle_E)|^2\\&=\varphi^2(\langle x,\mathrm{Re}(T)x\rangle_E)+\varphi^2(\langle x,\mathrm{Im}(T)x\rangle_E)\\&=\frac{1}{2}[\varphi(\langle x,\mathrm{Re}(T)x\rangle_E)+\varphi(\langle x,\mathrm{Im}(T)x\rangle_E)]^2+\frac{1}{2}[\varphi(\langle x,\mathrm{Re}(T)x\rangle_E)-\varphi(\langle x,\mathrm{Im}(T)x\rangle_E)]^2\\&=\frac{1}{2}\varphi^2(\langle x,(\mathrm{Re}(T)+\mathrm{Im}(T))x\rangle_E)+\frac{1}{2}\varphi^2(\langle x,(\mathrm{Re}(T)-\mathrm{Im}(T))x\rangle_E).\end{aligned}\tag{3.5}$$

则

$$\|\mathrm{Re}(T)-\mathrm{Im}(T)\|^2\leqslant 2\omega_{\mathcal{A}}^2(T),\quad \|\mathrm{Re}(T)+\mathrm{Im}(T)\|^2\leqslant 2\omega_{\mathcal{A}}^2(T).\tag{3.6}$$

定理 3.3 设 $T\in\mathcal{L}(E)$, 则

$$\omega_{\mathcal{A}}^2(T)\geqslant\frac{1}{8}[\max\{\|T+T^*\|^4,\|T-T^*\|^4\}+3\|T+T^*\|^2\|T-T^*\|^2]^{\frac{1}{2}}.$$

证

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\|T^*T+TT^*\|\\&=\frac{1}{2}\|(\mathrm{Re}(T))^2+(\mathrm{Im}(T))^2\|\ (\text{由}(3.1))\\&\leqslant\frac{1}{2}[\max\{\|\mathrm{Re}(T)\|^4,\|\mathrm{Im}(T)\|^4\}+\omega_{\mathcal{A}}((\mathrm{Re}(T))^2(\mathrm{Im}(T))^2)+2\|\mathrm{Re}(T)\|^2\|\mathrm{Im}(T)\|^2]^{\frac{1}{2}}\\&\quad(\text{由注 }3.1)\\&\leqslant\frac{1}{2}[\max\{\|\mathrm{Re}(T)\|^4,\|\mathrm{Im}(T)\|^4\}+\|(\mathrm{Re}(T))^2(\mathrm{Im}(T))^2\|+2\|\mathrm{Re}(T)\|^2\|\mathrm{Im}(T)\|^2]^{\frac{1}{2}}\\&\quad(\text{由 }(1.1))\\&\leqslant\frac{1}{2}[\max\{\|\mathrm{Re}(T)\|^4,\|\mathrm{Im}(T)\|^4\}+\|\mathrm{Re}(T)\|^2\|\mathrm{Im}(T)\|^2+2\|\mathrm{Re}(T)\|^2\|\mathrm{Im}(T)\|^2]^{\frac{1}{2}}\\&\quad(\text{由 }T,S\in\mathcal{L}(E),\|TS\|\leqslant\|T\|\|S\|)\\&=\frac{1}{2}[\max\{\|\mathrm{Re}(T)\|^4,\|\mathrm{Im}(T)\|^4\}+3\|\mathrm{Re}(T)\|^2\|\mathrm{Im}(T)\|^2]^{\frac{1}{2}}\ (\text{由 }(3.4))\\&\leqslant\frac{1}{2}[\omega_{\mathcal{A}}^4(T)+3\omega_{\mathcal{A}}^4(T)]^{\frac{1}{2}}\\&=\omega_{\mathcal{A}}^2(T).\end{aligned}$$

注 3.2 通过上面定理 3.3 的证明, 可知

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\|T^*T+TT^*\|\\&\leqslant \frac{1}{2}[\max\{\|\mathrm{Re}(T)\|^4,\|\mathrm{Im}(T)\|^4\}+3\|\mathrm{Re}(T)\|^2\|\mathrm{Im}(T)\|^2]^{\frac{1}{2}}\\&=\frac{1}{8}[\max\{\|T+T^*\|^4,\|T-T^*\|^4\}+3\|T+T^*\|^2\|T-T^*\|^2]^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant \omega_{\mathcal{A}}^2(T).\end{aligned}$$

因此, 定理 3.3 改进了不等式 (1.2) 的下界, 这是显然的.

下面给出一个例子来说明定理 3.3 的有效性. 并且当 Hilbert C^*-模退化为 Hilbert 空间时, 对于某些特殊算子而言, 定理 3.3 比文 [16] 中的定理 2.13 和定理 2.18 更精确地刻画了数值半径.

例 3.1 令 $T=\left[\begin{smallmatrix}3+2\mathrm{i} & 0\\ 0 & 4\mathrm{i}\end{smallmatrix}\right]$, 则 $\mathrm{Re}(T)=\left[\begin{smallmatrix}3 & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right]$, $\mathrm{Im}(T)=\left[\begin{smallmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{smallmatrix}\right]$, 且

$$\|\mathrm{Re}(T)\|=3,\quad \|\mathrm{Im}(T)\|=4.$$

由定理 3.3 可知

$$\begin{aligned}\omega^2(T)&\geqslant \frac{1}{8}[\max\{\|T+T^*\|^4,\|T-T^*\|^4\}+3\|T+T^*\|^2\|T-T^*\|^2]^{\frac{1}{2}}(\approx 13.1149)\\&\geqslant \frac{1}{4}\|T^*T+TT^*\|=8.\end{aligned}$$

由文 [16] 中的定理 2.13 可知

$$\omega^2(T)\geqslant \frac{1}{4\sqrt{2}}[\|T+T^*\|^4+\|T-T^*\|^4]^{\frac{1}{2}}(\approx 12.9808).$$

由文 [16] 中的定理 2.18 可知

$$\omega^2(T)\geqslant \frac{1}{8}\Big[(\|T+T^*\|^2+\|T-T^*\|^2)^2+\frac{1}{2}(\|T+T^*\|^2-\|T-T^*\|^2)^2\Big]^{\frac{1}{2}}(\approx 12.7426).$$

定理 3.4 设 $T\in\mathcal{L}(E)$, 则

$$\begin{aligned}\omega_{\mathcal{A}}^2(T)\geqslant \frac{1}{4}[&\max\{\|\mathrm{Re}(T)+\mathrm{Im}(T)\|^4,\|\mathrm{Re}(T)-\mathrm{Im}(T)\|^4\}\\&+3\|\mathrm{Re}(T)+\mathrm{Im}(T)\|^2\|\mathrm{Re}(T)-\mathrm{Im}(T)\|^2]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

证

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\|T^*T+TT^*\|\\&=\frac{1}{4}\|(\mathrm{Re}(T)+\mathrm{Im}(T))^2+(\mathrm{Re}(T)-\mathrm{Im}(T))^2\|\ (\text{由 } (3.2))\\&\leqslant \frac{1}{4}[\max\{\|\mathrm{Re}(T)+\mathrm{Im}(T)\|^4,\|\mathrm{Re}(T)-\mathrm{Im}(T)\|^4\}\\&\quad+\omega_{\mathcal{A}}((\mathrm{Re}(T)-\mathrm{Im}(T))^2(\mathrm{Re}(T)+\mathrm{Im}(T))^2)+2\|\mathrm{Re}(T)+\mathrm{Im}(T)\|^2\|\mathrm{Re}(T)-\mathrm{Im}(T)\|^2]^{\frac{1}{2}}\\&\quad(\text{由注 } 3.1)\\&\leqslant \frac{1}{4}[\max\{\|\mathrm{Re}(T)+\mathrm{Im}(T)\|^4,\|\mathrm{Re}(T)-\mathrm{Im}(T)\|^4\}\end{aligned}$$

$$+\|(\mathrm{Re}(T)-\mathrm{Im}(T))^2(\mathrm{Re}(T)+\mathrm{Im}(T))^2\|+2\|\mathrm{Re}(T)+\mathrm{Im}(T)\|^2\|\mathrm{Re}(T)-\mathrm{Im}(T)\|^2]^{\frac{1}{2}}$$

(由 (1.1))

$$\leqslant \frac{1}{4}[\max\{\|\mathrm{Re}(T)+\mathrm{Im}(T)\|^4,\|\mathrm{Re}(T)-\mathrm{Im}(T)\|^4\}$$

$$+\|\mathrm{Re}(T)+\mathrm{Im}(T)\|^2\|\mathrm{Re}(T)-\mathrm{Im}(T)\|^2+2\|\mathrm{Re}(T)+\mathrm{Im}(T)\|^2\|\mathrm{Re}(T)-\mathrm{Im}(T)\|^2]^{\frac{1}{2}}$$

(由 $T,S\in\mathcal{L}(E),\|TS\|\leqslant\|T\|\|S\|$)

$$=\frac{1}{4}[\max\{\|\mathrm{Re}(T)+\mathrm{Im}(T)\|^4,\|\mathrm{Re}(T)-\mathrm{Im}(T)\|^4\}$$

$$+3\|\mathrm{Re}(T)+\mathrm{Im}(T)\|^2\|\mathrm{Re}(T)-\mathrm{Im}(T)\|^2]^{\frac{1}{2}}$$

(由 (3.6))

$$\leqslant \frac{1}{4}[4\omega_{\mathcal{A}}^4(T)+12\omega_{\mathcal{A}}^4(T)]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\omega_{\mathcal{A}}^2(T).$$

注 3.3 通过上面定理 3.4 的证明, 可知

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\|T^*T+TT^*\|\leqslant{}&\frac{1}{4}[\max\{\|\mathrm{Re}(T)+\mathrm{Im}(T)\|^4,\|\mathrm{Re}(T)-\mathrm{Im}(T)\|^4\}\\&+3\|\mathrm{Re}(T)+\mathrm{Im}(T)\|^2\|\mathrm{Re}(T)-\mathrm{Im}(T)\|^2]^{\frac{1}{2}}\\\leqslant{}&\omega_{\mathcal{A}}^2(T).\end{aligned}$$

因此, 定理 3.4 改进了不等式 (1.2) 的下界, 这是显然的.

下面给出一个例子来说明定理 3.4 的有效性. 并且当 Hilbert C^*-模退化为 Hilbert 空间时, 对于某些特殊算子而言, 定理 3.4 比文 [17] 中的定理 2.6 和定理 2.8 更精确地刻画了数值半径.

例 3.2 令 $T=\begin{bmatrix}4+2\mathrm{i}&0\\0&-5\mathrm{i}\end{bmatrix}$, 则 $\mathrm{Re}(T)=\begin{bmatrix}4&0\\0&0\end{bmatrix}$, $\mathrm{Im}(T)=\begin{bmatrix}2&0\\0&-5\end{bmatrix}$, $\mathrm{Re}(T)+\mathrm{Im}(T)=\begin{bmatrix}6&0\\0&-5\end{bmatrix}$, $\mathrm{Re}(T)-\mathrm{Im}(T)=\begin{bmatrix}2&0\\0&5\end{bmatrix}$, 且

$$\|\mathrm{Re}(T)+\mathrm{Im}(T)\|=6,\quad \|\mathrm{Re}(T)-\mathrm{Im}(T)\|=5.$$

由定理 3.4 可知

$$\begin{aligned}\omega^2(T)\geqslant{}&\frac{1}{4}[\max\{\|\mathrm{Re}(T)+\mathrm{Im}(T)\|^4,\|\mathrm{Re}(T)-\mathrm{Im}(T)\|^4\}\\&+3\|\mathrm{Re}(T)+\mathrm{Im}(T)\|^2\|\mathrm{Re}(T)-\mathrm{Im}(T)\|^2]^{\frac{1}{2}}(\approx 15.8035)\\\geqslant{}&\frac{1}{4}\|T^*T+TT^*\|=12.5.\end{aligned}$$

由文 [17] 中的定理 2.6 可知

$$\begin{aligned}\omega^2(T)\geqslant{}&\frac{1}{4}\Big[\frac{3}{2}\|\mathrm{Re}(T)+\mathrm{Im}(T)\|^4+\frac{3}{2}\|\mathrm{Re}(T)-\mathrm{Im}(T)\|^4\\&+\|\mathrm{Re}(T)+\mathrm{Im}(T)\|^2\|\mathrm{Re}(T)-\mathrm{Im}(T)\|^2\Big]^{\frac{1}{2}}\\&(\approx 15.3735).\end{aligned}$$

由文 [17] 中的定理 2.8 可知

$$\omega^2(T)\geqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}[\|\mathrm{Re}(T)+\mathrm{Im}(T)\|^4+\|\mathrm{Re}(T)-\mathrm{Im}(T)\|^4]^{\frac{1}{2}}(\approx 15.4960).$$

§4 Hilbert C^*-模上具有伴随的 2×2 模映射矩阵的数值半径上界

本节给出了 Hilbert C^*-模上具有伴随的 2×2 模映射矩阵的数值半径上界. 此外, 当 Hilbert C^*-模退化为 Hilbert 空间, 参数取特殊值时, 本节中的定理 4.1 改进了 Bani-Domi W 和 Kittaneh F [11] 得到的关于 Hilbert 空间中 2×2 有界线性算子矩阵数值半径上界的结论.

定理 4.1 设 $f,g:\mathbb{D}\to[0,\infty)$ 是映射且 $f(\beta)+g(\beta)=1,\forall\beta\in\mathbb{D}\subseteq\mathbb{R}$. 令 $A,B,C,D\in\mathcal{L}(E)$, 则

$$\begin{aligned}&\omega_{\mathcal{A}}^4\left(\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\right)\\ \leqslant\ & 8\max\{\omega_{\mathcal{A}}^4(A),\omega_{\mathcal{A}}^4(D)\}+\max\{\||C|^4+|B^*|^4\|,\||B|^4+|C^*|^4\|\}\\ &+(f(\beta)+2)\max\{\||C|^2+|B^*|^2\|,\||B|^2+|C^*|^2\|\}\max\{\omega_{\mathcal{A}}(BC),\omega_{\mathcal{A}}(CB)\}\\ &+2g(\beta)\max\{\omega_{\mathcal{A}}^2(BC),\omega_{\mathcal{A}}^2(CB)\},\end{aligned}$$

其中 $|B|=(B^*B)^{\frac{1}{2}}$ 是 $B\in\mathcal{L}(E)$ 的绝对值.

证 对任意 $x\in E$, $\varphi\in S(\mathcal{A})$ 且 $\varphi(|x|^2)=1$, 有

$$\begin{aligned}&\left|\varphi\left(\left\langle x,\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}x\right\rangle_E\right)\right|^4\\ &\text{(由三角不等式)}\\ \leqslant\ &\left(\left|\varphi\left(\left\langle x,\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & D\end{bmatrix}x\right\rangle_E\right)\right|+\left|\varphi\left(\left\langle x,\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}x\right\rangle_E\right)\right|\right)^4\\ &\text{(由引理 2.3)}\\ \leqslant\ & 8\left(\left|\varphi\left(\left\langle x,\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & D\end{bmatrix}x\right\rangle_E\right)\right|^4+\left|\varphi\left(\left\langle x,\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}x\right\rangle_E\right)\right|^4\right)\\ =\ & 8\left(\left|\varphi\left(\left\langle x,\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & D\end{bmatrix}x\right\rangle_E\right)\right|^4+\left|\varphi\left(\left\langle \begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}^*x,x\right\rangle_E\right)\varphi\left(\left\langle x,\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}x\right\rangle_E\right)\right|^2\right)\\ \leqslant\ & 8\left|\varphi\left(\left\langle x,\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & D\end{bmatrix}x\right\rangle_E\right)\right|^4\\ &+2\varphi\left(\left\langle \begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}^*x,\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}^*x\right\rangle_E\right)\varphi\left(\left\langle \begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}x,\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}x\right\rangle_E\right)\end{aligned}$$

$$+2(f(\beta)+2)\sqrt{\varphi\left(\left\langle\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}x,\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}x\right\rangle_E\right)\varphi\left(\left\langle\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}^*x,\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}^*x\right\rangle_E\right)}$$

$$\times\left|\varphi\left(\left\langle\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}^*x,\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}x\right\rangle_E\right)\right|+2g(\beta)\left|\varphi\left(\left\langle\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}^*x,\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}x\right\rangle_E\right)\right|^2$$

(由引理 2.7)

$$=8\left|\varphi\left(\left\langle x,\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & D\end{bmatrix}x\right\rangle_E\right)\right|^4+2\varphi\left(\left\langle x,\left|\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}\right|^2x\right\rangle_E\right)\varphi\left(\left\langle x,\left|\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}^*\right|^2x\right\rangle_E\right)$$

$$+2(f(\beta)+2)\sqrt{\varphi\left(\left\langle x,\left|\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}\right|^2x\right\rangle_E\right)\varphi\left(\left\langle x,\left|\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}^*\right|^2x\right\rangle_E\right)}$$

$$\times\left|\varphi\left(\left\langle x,\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}^2x\right\rangle_E\right)\right|+2g(\beta)\left|\varphi\left(\left\langle x,\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}^2x\right\rangle_E\right)\right|^2$$

$$\leqslant 8\left|\varphi\left(\left\langle x,\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & D\end{bmatrix}x\right\rangle_E\right)\right|^4$$

$$+\left(\varphi^2\left(\left\langle x,\left|\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}\right|^2x\right\rangle_E\right)+\varphi^2\left(\left\langle x,\left|\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}^*\right|^2x\right\rangle_E\right)\right)$$

$$+(f(\beta)+2)\left(\varphi\left(\left\langle x,\left|\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}\right|^2x\right\rangle_E\right)+\varphi\left(\left\langle x,\left|\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}^*\right|^2x\right\rangle_E\right)\right)$$

$$\times\left|\varphi\left(\left\langle x,\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}^2x\right\rangle_E\right)\right|+2g(\beta)\left|\varphi\left(\left\langle x,\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}^2x\right\rangle_E\right)\right|^2$$

(由均值不等式)

$$\leqslant 8\left|\varphi\left(\left\langle x,\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & D\end{bmatrix}x\right\rangle_E\right)\right|^4+\varphi\left(\left\langle x,\left(\left|\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}\right|^4+\left|\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}^*\right|^4\right)x\right\rangle_E\right)$$

$$+(f(\beta)+2)\varphi\left(\left\langle x,\left(\left|\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}\right|^2+\left|\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}^*\right|^2\right)x\right\rangle_E\right)\left|\varphi\left(\left\langle x,\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}^2x\right\rangle_E\right)\right|$$

$$+2g(\beta)\left|\varphi\left(\left\langle x,\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}^2x\right\rangle_E\right)\right|^2$$

(由引理 2.2)

$$=8\left|\varphi\left(\left\langle x,\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & D\end{bmatrix}x\right\rangle_E\right)\right|^4+\varphi\left(\left\langle x,\begin{bmatrix}|C|^4+|B^*|^4 & 0\\ 0 & |B|^4+|C^*|^4\end{bmatrix}x\right\rangle_E\right)$$

$$+(f(\beta)+2)\varphi\left(\left\langle x,\begin{bmatrix}|C|^2+|B^*|^2 & 0\\ 0 & |B|^2+|C^*|^2\end{bmatrix}x\right\rangle_E\right)\left|\varphi\left(\left\langle\begin{bmatrix}BC & 0\\ 0 & CB\end{bmatrix}x,x\right\rangle_E\right)\right|$$

$$+2g(\beta)\left|\varphi\left(\left\langle x,\begin{bmatrix}BC & 0\\ 0 & CB\end{bmatrix}x\right\rangle_E\right)\right|^2$$

$$\leqslant 8\omega_{\mathcal{A}}^4\left(\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & D\end{bmatrix}\right)+\left\|\begin{bmatrix}|B^*|^4+|C|^4 & 0\\ 0 & |B|^4+|C^*|^4\end{bmatrix}\right\|+2g(\beta)\omega_{\mathcal{A}}^2\left(\begin{bmatrix}BC & 0\\ 0 & CB\end{bmatrix}\right)$$

$$+(f(\beta)+2)\left\|\begin{bmatrix}|C|^2+|B^*|^2 & 0\\ 0 & |B|^2+|C^*|^2\end{bmatrix}\right\|\omega_{\mathcal{A}}\left(\begin{bmatrix}BC & 0\\ 0 & CB\end{bmatrix}\right)$$

(由引理 2.1)

$$\leqslant 8\max\{\omega_{\mathcal{A}}^4(A),\omega_{\mathcal{A}}^4(D)\}+\max\{\||C|^4+|B^*|^4\|,\||B|^4+|C^*|^4\|\}$$
$$+(f(\beta)+2)\max\{\||C|^2+|B^*|^2\|,\||B|^2+|C^*|^2\|\}\max\{\omega_{\mathcal{A}}(BC),\omega_{\mathcal{A}}(CB)\}$$
$$+2g(\beta)\max\{\omega_{\mathcal{A}}^2(BC),\omega_{\mathcal{A}}^2(CB)\}.$$

(由引理 2.8–2.9)

于是

$$\omega_{\mathcal{A}}^4\left(\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\right)$$
$$\leqslant 8\max\{\omega_{\mathcal{A}}^4(A),\omega_{\mathcal{A}}^4(D)\}+\max\{\||C|^4+|B^*|^4\|,\||B|^4+|C^*|^4\|\}$$
$$+(f(\beta)+2)\max\{\||C|^2+|B^*|^2\|,\||B|^2+|C^*|^2\|\}\max\{\omega_{\mathcal{A}}(BC),\omega_{\mathcal{A}}(CB)\}$$
$$+2g(\beta)\max\{\omega_{\mathcal{A}}^2(BC),\omega_{\mathcal{A}}^2(CB)\}.$$

证毕.

注 4.1 Bani-Domi W 和 Kittaneh F[11] 得到如下不等式, 即若 A,B,C,D 为 Hilbert 空间中的有界线性算子, 则

$$\omega^4\left(\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\right)\leqslant 8\max\{\omega^4(A),\omega^4(D)\}+3\max\{\||C|^4+|B^*|^4\|,\||B|^4+|C^*|^4\|\}$$
$$+\max\{\||C|^2+|B^*|^2\|,\||B|^2+|C^*|^2\|\}\max\{\omega(BC),\omega(CB)\}.$$

在定理 4.1 中当 Hilbert C^*-模退化为 Hilbert 空间, $f(\beta)=0$, $g(\beta)=1$ 时, 有

$$\omega^4\left(\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\right)$$
$$\leqslant 8\max\{\omega^4(A),\omega^4(D)\}+\max\{\||C|^4+|B^*|^4\|,\||B|^4+|C^*|^4\|\}$$
$$+2\max\{\||C|^2+|B^*|^2\|,\||B|^2+|C^*|^2\|\}\max\{\omega(BC),\omega(CB)\}$$
$$+2\max\{\omega^2(BC),\omega^2(CB)\}.$$

进一步, 有

$$2\max\{\omega^2(BC),\omega^2(CB)\}$$
$$+\max\{\||C|^2+|B^*|^2\|,\||B|^2+|C^*|^2\|\}\max\{\omega(BC),\omega(CB)\}$$
$$\leqslant \max\{\||C|^4+|B^*|^4\|,\||B|^4+|C^*|^4\|\}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}\max\{\||C|^2+|B^*|^2\|,\||B|^2+|C^*|^2\|\}\max\{\||C|^2+|B^*|^2\|,\||B|^2+|C^*|^2\|\}\\
&(\text{由}\omega^r(S^*T)\leqslant\frac{1}{2}\||T|^{2r}+|S|^{2r}\|,\ r\geqslant 1,\text{ 见 [18]})\\
=&\max\{\||C|^4+|B^*|^4\|,\||B|^4+|C^*|^4\|\}\\
&+2\max\Big\{\Big\|\Big(\frac{|C|^2+|B^*|^2}{2}\Big)^2\Big\|,\Big\|\Big(\frac{|B|^2+|C^*|^2}{2}\Big)^2\Big\|\Big\}\\
\leqslant&\, 2\max\{\||C|^4+|B^*|^4\|,\||B|^4+|C^*|^4\|\}.\\
&(\text{由引理 2.4})
\end{aligned}
$$

因此, 定理 4.1 改进了 Bani-Domi W 和 Kittaneh F [11] 得到的关于 Hilbert 空间中 2×2 有界线性算子矩阵数值半径上界的结论.

参 考 文 献

[1] Kaplansky I. Modules over operator algebras [J]. *Am J Math*, 1953, 75(4):839–858.

[2] Paschke W L. Inner product modules over B^*-algebras [J]. *Trans Amer Math Soc*, 1973, 182:443–468.

[3] Rieffel M A. Induced representations of C^*-algebras [J]. *Adv Math,* 1974, 13(2):176–257.

[4] Fakri M S, Kamel M A. Numerical radius inequalities for Hilbert C^*-modules [J]. *Math Bohem*, 2022, 147(4):547–566.

[5] Jiang R. A note on the tringular inequality for the C^*-valued norm on the Hilbert C^*-modules [J]. *Math Inequal Appl*, 2013, 16(3):743–749.

[6] Mehrazin M, Amyari M, Omidvar M E. A new type of numerical radius of operators on Hilbert C^*-module [J]. *Rend Circ Mat Palermo Ser* 2, 2020, 69(1):29–37.

[7] Moosavi B, Hosseini M S. Some inequalities for the numerical radius for operators in Hilbert C^*-modules space [J]. *J Inequal Spec Funct*, 2019, 10:77–84.

[8] Rashid H M, Mohammad W, Mohammad M. Inequalities for the Euclidean operator radius of n-tuple operators and operator matrices in Hilbert C^*-Modules [J]. *Symmetry*, 2024, 16(6):647.

[9] Zamani A. New estimates for numerical radius in C^*-algebras [J]. *Adv Oper Theory,* 2025, 10(2):46.

[10] Zamani A. Refinements of the Cauchy-Schwarz inequality in pre-Hilbert C^*-modules and their applications [J]. *Ann Funct Anal*, 2023, 14(4):5–16.

[11] Bani-Domi W, Kittaneh F. Norm and numerical radius inequalities for Hilbert space operators [J]. *Linear Multilin Algeb*, 2021, 69(5):934–945.

[12] Hardy G H, Littlewood J E, Pólya G. Inequalities, 2nd ed [M]. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1988.

[13] Aujla J S, Silva F C. Weak majorization inequalities and convex functions [J]. *Linear Algebra Appl*, 2003, 369:217–233.

[14] Dragomir S S. Some inequalities for the Euclidean operator radius of two operators in Hilbert spaces [J]. *Linear Algebra Appl*, 2006, 419(1):256–264.

[15] Alrimawi F. Some inner product inequalities with applications to numerical radius inequalities [J]. *J Math Computer Sci*, 2025, 38:16–24.

[16] Bhunia P, Paul K. Refinements of norm and numerical radius inequalities [J]. *Rocky Mt J Math*, 2021, 51(6):1953–1965.

[17] Bhunia P, Jana S, Moslehian M S, Paul K. Improved inequalities for numerical radius via Cartesian decomposition [J]. *Funct Anal Appl*, 2023, 57(1):18–28.

[18] Dragomir S S. Power inequalities for the numerical radius of a product of two operators in Hilbert spaces [J]. *Research Report Collection*, 2008, 11(4):1–9.

The Estimations of the Norm and the Numerical Radius of Adjointable 2×2 Matrices on Hilbert C^*-modules

LIU Jing[1] WU Deyu[2] Alatancang[3]

[1]School of Mathematical Sciences, Baotou Teachers' College, Baotou 014030, Inner Mongolia, China; School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot 010021, China. Email: 15848179592@163.com

[2]Corresponding author. School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot 010021, China. Email: deyuwu@imu.edu.cn

[3]School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia Normal University, Hohhot 010022, China. Email: alatanca@imu.edu.cn

Abstract In this paper, the upper bounds of the norm of adjointable 2×2 matrices on the Hilbert C^*-module are given. Furthermore, by utilizing the Cartesian decomposition of adjointable maps, the lower bounds of the numerical radius of adjointable maps are derived. Namely

$$\omega_{\mathcal{A}}^2(T) \geqslant \frac{1}{8}[\max\{\|T+T^*\|^4, \|T-T^*\|^4\} + 3\|T+T^*\|^2\|T-T^*\|^2]^{\frac{1}{2}}$$

and

$$\omega_{\mathcal{A}}^2(T) \geqslant \frac{1}{4}[\max\{\|\mathrm{Re}(T)+\mathrm{Im}(T)\|^4, \|\mathrm{Re}(T)-\mathrm{Im}(T)\|^4\}$$

$$+ 3\|\mathrm{Re}(T) + \mathrm{Im}(T)\|^2\|\mathrm{Re}(T) - \mathrm{Im}(T)\|^2]^{\frac{1}{2}},$$

where $\mathrm{Re}(T) = \frac{T+T^*}{2}$ and $\mathrm{Im}(T) = \frac{T-T^*}{2\mathrm{i}}$ are the real and imaginary parts of T, respectively. Finally, the upper bound of the numerical radius of adjointable 2×2 matrices on Hilbert C^*-module is obtained by using Buzano's inequality. Moreover, when the Hilbert C^*-module degenerates into a Hilbert space and the parameters take special values, the conclusions of this paper improve the results on the upper bounds of the numerical radius of 2×2 bounded linear operator matrices in Hilbert spaces obtained by Bani-Domi W and Kittaneh F.

Keywords Numerical radius, Cartesian decomposition, Buzano's inequality, Hilbert C^*-module

2020 MR Subject Classification 47A12, 46C05, 47C10

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 46 No. 4, 2025
by ALLERTON PRESS, INC., USA