数 学 年 刊 A 辑
2025, 46(4):383–402
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2025.0025

一类混合型 Hessian 方程的 Neumann 边值问题*

徐博韬[1]　熊玉妮[2]　向　妮[1]

提要 该文导出了一类具有 Neumann 边界条件的混合型 Hessian 方程的先验估计, 得到了这类混合型 Hessian 方程经典 Neumann 问题容许解的存在性定理.

关键词 Neumann 边值问题, 先验估计, 混合型 Hessian 方程
MR (2020) 主题分类 35J60, 35B45
中图法分类 O175.2
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2025)04-0383-20

§1 引 言

本文研究如下的混合型 Hessian 方程

$$\sigma_k(D^2u+\chi(x,u,Du))=\sum_{l=0}^{k-1}\alpha_l(x)\sigma_l(D^2u+\chi(x,u,Du)),\quad \text{在 } \Omega \text{ 中}, \tag{1.1}$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是光滑有界区域, D^2u 是函数 u 的 Hessian 矩阵, $\chi(x,u,Du)$ 为 $n\times n$ 阶对称矩阵, χ^{ij} 为矩阵 χ 的第 i 行 j 列的元素, $\alpha_l(x)>0$ $(l=0,1,\cdots,k-2)$ 和 $\alpha_{k-1}(x)$ $(2\leqslant k\leqslant n)$ 为 $\overline{\Omega}$ 上给定的光滑函数.

首先介绍一些基本概念.

定义 1.1 [1]　对任意的向量 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ 以及 $1\leqslant k\leqslant n$, λ 的 k 阶基本对称多项式定义为

$$\sigma_k(\lambda)=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_k},$$

当 $\lambda_i=0$ 时, 基本对称多项式定义为 $\sigma_k(\lambda|i)$. 对于 $n\times n$ 对称矩阵 A, 记 λ_i 为 A 的特征值, 则矩阵 A 的基本对称多项式定义为

$$\sigma_k(A)=\sigma_k(\lambda(A))=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_k}.$$

定义 1.2 [1]　定义 Gårding 锥 $\Gamma_k=\{\lambda\in\mathbb{R}^n:\sigma_j(\lambda)>0,\ \forall 1\leqslant j\leqslant k\}$, 若 $\lambda(D^2u+\chi(x,u,Du))\in\Gamma_k$, 则 $u\in C^2(\Omega)$ 为方程 (1.1) 的 k 容许解.

本文 2025 年 4 月 14 日收到, 2025 年 9 月 26 日收到修改稿.
[1]湖北大学数学与统计学学院, 武汉 430062.
E-mail: 202321104011256@stu.hubu.edu.cn; nixiang@hubu.edu.cn
[2]通信作者. 湖北大学数学与统计学学院, 武汉 430062. E-mail: 202121104011767@stu.hubu.edu.cn
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11971157, No. 12426532, No. 12571213) 的资助.

混合型 Hessian 方程来源于许多经典的几何问题, 例如 Schneider 提出了预定面积测度凸组合的问题 [2], 从而导出下列混合型 Hessian 方程

$$\sigma_k(D^2u+uI_n)+\sum_{l=1}^{k-1}\alpha_l\sigma_l(D^2u+uI_n)=\phi(x),\quad x\in\mathbb{S}^n.$$

Harvey-Lawson 在发展校准几何理论时提出实 special Lagrangian 方程 [3]

$$\sin\theta\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\sigma_{2k}(D^2u)+\cos\theta\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}(-1)^k\sigma_{2k+1}(D^2u)=0$$

是一类混合型 Hessian 方程. Fu-Yau 在 Hull-Strominger 系统的研究中得到的 Fu-Yau 方程 [4−5]

$$\sigma_1(\mathrm{i}\partial\overline{\partial}(\mathrm{e}^u+\alpha'\mathrm{e}^{-u}))+\alpha'\sigma_2(\mathrm{i}\partial\overline{\partial}u)=0,$$

也是一类混合型 Hessian 方程.

下面我们介绍两类当 $\chi\neq 0$ 时混合型 Hessian 方程的例子, 其中一类例子来源于几何问题, 包括 Christoffel-Minkowski 问题 [6] 和预定曲率测度的 Alexandrov 问题 [7], 这两种问题都与方程 (1.1) 定义在 $\mathbb{S}^n$ 上, 且 $\alpha_1=\cdots=\alpha_{k-1}=0$, $A=uI$ 有关. 另外一类例子包括在等距嵌入背景下产生的 Darboux 方程 [8−9], 以及涉及 Yamabe 问题 [10] 的一种自然完全非线性推广的 Schouten 张量方程中.

当 $\chi=0$, $k=n$, $\alpha_0(x)>0$, $\alpha_1(x)=\alpha_2(x)=\cdots=\alpha_{k-2}(x)=\alpha_{k-1}(x)=0$ 时, 方程 (1.1) 称为经典的 Monge-Ampère 方程. Gutiérrez-Brezis 在文 [11] 中给出了关于线性 Monge-Ampère 方程的 Harnack 不等式和二阶导数的内部 Hölder 估计. 1984 年 Caffarelli-Nirenberg-Spruck 在文 [12] 中证明了经典 Monge-Ampère 方程的 Dirichlet 边值问题

$$\begin{cases}\det D^2u=f(x), & \text{在 } \Omega \text{ 中},\\ u(x)=\varphi(x), & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}\end{cases}$$

严格凸解的存在唯一性. Caffarelli-Nirenberg-Spruck 在文 [13] 中考虑了经典复 Monge-Ampère 方程的 Dirichlet 边值问题, 证明了该方程多重下调和解的存在性. 1986 年, Lions-Trudinger-Urbas [14] 在欧氏空间的凸域中证明了以下 Monge-Ampère 方程的半线性 Neumann 边值问题

$$\begin{cases}\det D^2u=f(x,u,Du), & \text{在 } \Omega \text{ 中},\\ D_\nu u=\varphi(x,u), & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}\end{cases}$$

经典解的存在性. Li [15] 得到了复空间严格拟凸域中 Monge-Ampère 方程的 Neumann 边值问题经典多重下调和解的存在唯一性.

当 $\chi=0$, $1<k<n$, $\alpha_0(x)>0$, $\alpha_1(x)=\alpha_2(x)=\cdots=\alpha_{k-2}(x)=\alpha_{k-1}(x)=0$ 时, 方程 (1.1) 为 Hessian 方程. 关于 Hessian 方程的 Dirichlet 边值问题有许多丰富的研究成果, 如文 [16–18]. Trudinger [19] 在 1987 年研究了定义域为球时 Hessian 方程的 Neumann 边值问题解的存在性定理, 并提出了一般光滑严格凸区域上容许解存在性的猜想. Ma-Qiu[20]

证实了 Trudinger 猜想的正确性. Qiu-Xia [21] 证明了严格凸域上 Hessian 方程 Neumann 边值问题经典解的存在性, 并利用该经典解给出了 Alexandrov-Fenchel 不等式的一种新证明. Jiang-Trudinger [22−24] 研究了具有正则条件和凹性条件的增广 Hessian 方程一般斜边值问题的存在唯一性.

当 $\chi=0$, $1<k\leqslant n$, $\alpha_l(x)>0$ $(0\leqslant l\leqslant k-2)$, $\alpha_0(x)=\cdots=\alpha_{l-1}(x)=\alpha_{l+1}(x)=\cdots=\alpha_{k-2}(x)=\alpha_{k-1}(x)=0$ 时, 方程 (1.1) 为 Hessian 商方程. Trudinger [19] 解决了一般的 Hessian 商方程的 Dirichlet 问题. Chen-Zhang [25] 解决了一般 Hessian 商方程的 Neumann 边值问题的存在唯一性.

近来, Guan-Zhang [26] 证明了

$$\sigma_k(D^2u)+\alpha(x)\sigma_{k-1}(D^2u)=\sum_{l=0}^{k-2}\alpha_l(x)\sigma_l(D^2u) \tag{1.2}$$

在 Γ_{k-1} 中是椭圆和凹的. Chen-Chen-Mei-Xiang [27] 讨论了一类具有 Neumann 边值条件的混合型 Hessian 方程

$$\begin{cases}\sigma_k(D^2u)=\displaystyle\sum_{l=0}^{k-1}\alpha_k(x)\sigma_l(D^2u), & \text{在 } \Omega \text{ 中},\\ D_\nu u=c+\varphi(x), & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上},\end{cases}$$

得到了混合型 Hessian 方程的经典 Neumann 问题的 k 容许解的存在唯一性定理. 受上述文章的启发, 本文在实数域上研究方程 (1.1) 的 Neumann 边值问题. 与文 [27] 中的方程相比, 本文研究的方程涉及一个张量 $\chi(x,u,Du)$. 因此, 获得先验估计比较困难, 需要对 χ 进行适当的约束. 在 Guan-Jiao [28] 证明思路的启发下, 我们引入以下假设条件, 这些条件将用于证明 C^0 和 C^1 估计.

条件 1.1 $\forall x\in\overline{\Omega}$, χ 满足

$$\chi_u^{ij}\leqslant 0,\quad i,j=1,2,\cdots,n. \tag{1.3}$$

条件 1.2 假设存在连续非负函数 ψ_1,ψ_2,ψ_3, 使得 $\forall x\in\overline{\Omega}$, χ 满足

$$\chi^{ij}\leqslant\psi_1(x,u)(1+|Du|^{\gamma_1}), \tag{1.4}$$

$$(Du\cdot D_x\chi^{ij}+|Du|^2|\chi_u^{ij}|)\leqslant\psi_2(x,u)(1+|Du|^{\gamma_2}), \tag{1.5}$$

$$-Du\cdot\chi_{p_s}^{ij}\leqslant\psi_3(x,u)(1+|Du|^{\gamma_3}), \tag{1.6}$$

其中 $i,j,s=1,2,\cdots,n$, $0<\gamma_1,\gamma_3<2$, $0<\gamma_2<4$.

参考文 [29] 的证明过程, 我们引入以下条件证明 C^2 估计.

条件 1.3 $\lambda(D^2u+\chi)=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ $(\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n)$, 满足

$$\left\{\lambda:\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\leqslant-\theta\right\}\neq\emptyset,\quad 0<\theta<1. \tag{1.7}$$

下面给出上下解的定义.

定义 1.3 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个 C^4 的严格凸区域, ν 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量, $\chi(x,\underline{u},D\underline{u})$ 为 $n\times n$ 阶对称矩阵, $\lambda(D^2\underline{u}+\chi(x,\underline{u},D\underline{u}))\in\Gamma_k$, $0<\alpha_l(x)\in C^2(\overline{\Omega})$ $(0\leqslant l\leqslant k-2)$, $\alpha_{k-1}(x)\in C^2(\overline{\Omega})$ $(2\leqslant k\leqslant n)$, $\varphi\in C^3(\partial\Omega)$, $\varepsilon\in(0,1)$. 如果 $\underline{u}\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\sigma_k}{\sigma_{k-1}}(D^2\underline{u}+\chi(x,\underline{u},D\underline{u}))-\displaystyle\sum_{l=0}^{k-2}\alpha_l\dfrac{\sigma_k}{\sigma_{l-1}}(D^2\underline{u}+\chi(x,\underline{u},D\underline{u}))\geqslant\alpha_{k-1}, & \text{在 }\Omega\text{ 中},\\ \underline{u}_\nu=-\varepsilon\underline{u}+\varphi(x), & \text{在 }\partial\Omega\text{ 上},\end{cases}\tag{1.8}$$

那么 $\underline{u}$ 称为方程 (1.1) 的 Neumann 边值问题的一个下解.

定义 1.4 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个 C^4 的严格凸区域, ν 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量, $\chi(x,\overline{u},D\overline{u})$ 为 $n\times n$ 阶对称矩阵, $\lambda(D^2\overline{u}+\chi(x,\overline{u},D\overline{u}))\in\Gamma_k$, $0<\alpha_l(x)\in C^2(\overline{\Omega})$ $(0\leqslant l\leqslant k-2)$, $\alpha_{k-1}(x)\in C^2(\overline{\Omega})$ $(2\leqslant k\leqslant n)$, $\varphi\in C^3(\partial\Omega)$, $\varepsilon\in(0,1)$. 如果 $\overline{u}\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\sigma_k}{\sigma_{k-1}}(D^2\overline{u}+\chi(x,\overline{u},D\overline{u}))-\displaystyle\sum_{l=0}^{k-2}\alpha_l\dfrac{\sigma_k}{\sigma_{l-1}}(D^2\overline{u}+\chi(x,\overline{u},D\overline{u}))\leqslant\alpha_{k-1}, & \text{在 }\Omega\text{ 中},\\ \overline{u}_\nu=-\varepsilon\overline{u}+\varphi(x), & \text{在 }\partial\Omega\text{ 上},\end{cases}\tag{1.9}$$

那么 $\overline{u}$ 称为方程 (1.1) 的 Neumann 边值问题的一个上解.

本文的主要定理如下.

定理 1.1 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个 C^4 的严格凸区域, ν 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量, $\chi(x,u,Du)$ 为 $n\times n$ 阶对称矩阵且满足条件 1.1–1.3, $\underline{u}$ 和 $\overline{u}$ 分别满足定义 1.3–1.4, $0<\alpha_l(x)\in C^2(\overline{\Omega})$ $(0\leqslant l\leqslant k-2)$, $\alpha_{k-1}(x)\in C^2(\overline{\Omega})$ $(2\leqslant k\leqslant n)$, $\varphi\in C^3(\partial\Omega)$, $\varepsilon\in(0,1)$. 那么方程 (1.1) 的 Neumann 边值问题

$$\begin{cases}\sigma_k(D^2u+\chi(x,u,Du))=\displaystyle\sum_{l=0}^{k-1}\alpha_l(x)\sigma_l(D^2u+\chi(x,u,Du)), & \text{在 }\Omega\text{ 中},\\ u_\nu=-\varepsilon u+\varphi(x), & \text{在 }\partial\Omega\text{ 上}\end{cases}\tag{1.10}$$

存在唯一的 k 容许解 $u\in C^{3,\alpha}(\overline{\Omega})$ $(0<\alpha<1)$.

定理 1.2 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个 C^4 的严格凸区域, ν 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量, $\chi(x,Du)$ 为 $n\times n$ 对称矩阵且满足条件 1.1–1.3, $\underline{u}$ 和 $\overline{u}$ 分别满足定义 1.3–1.4, $0<\alpha_l(x)\in C^2(\overline{\Omega})$ $(0\leqslant l\leqslant k-2)$, $\alpha_{k-1}(x)\in C^2(\overline{\Omega})$ $(2\leqslant k\leqslant n)$, $\varphi\in C^3(\partial\Omega)$. 则存在唯一的常数 c, 使得方程 (1.1) 的 Neumann 边值问题

$$\begin{cases}\sigma_k(D^2u+\chi(x,Du))=\displaystyle\sum_{l=0}^{k-1}\alpha_l(x)\sigma_l(D^2u+\chi(x,Du)), & \text{在 }\Omega\text{ 中},\\ u_\nu=c+\varphi(x), & \text{在 }\partial\Omega\text{ 上}\end{cases}\tag{1.11}$$

存在唯一的 k 容许解 $u\in C^{3,\alpha}(\overline{\Omega})$ $(0<\alpha<1)$.

§2 预备知识

在这一节中, 我们介绍将用到的符号和关键引理, 并证明这些引理. 为了方便表示, 引入如下的记号:

$$\begin{cases} U := D^2u + \chi(x,u,Du), \quad U_{ij} := u_{ij} + \chi^{ij}(x,u,Du), \\ G_k(U) = \dfrac{\sigma_k(U)}{\sigma_{k-1}(U)}, \quad G_l(U) = -\dfrac{\sigma_l(U)}{\sigma_{k-1}(U)}, \quad 0 \leqslant l \leqslant k-2, \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} G^{ij} = \dfrac{\partial G}{\partial U_{ij}}, \quad \chi^{ij}_{p_s} = \dfrac{\partial \chi^{ij}}{\partial u_s}, \\ \mathcal{L} := G^{ij}D_{ij} + G^{ij}\chi^{ij}_{p_s}D_s, \end{cases} \tag{2.2}$$

则方程 (1.1) 可等价表示为

$$G(U) := G_k(U) + \sum_{l=0}^{k-2}\alpha_l(x)G_l(U) = \alpha_{k-1}(x). \tag{2.3}$$

(2.3) 两边同时对 $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$ 求导, 有

$$\begin{aligned} G^{ij}u_{ij\xi} &= (\alpha_{k-1})_\xi - \sum_{l=0}^{k-2}(\alpha_l)_\xi G_l - G^{ij}\chi^{ij}_\xi \\ &= (\alpha_{k-1})_\xi - \sum_{l=0}^{k-2}(\alpha_l)_\xi G_l - G^{ij}\frac{\partial \chi^{ij}}{\partial x_\xi} - G^{ij}\frac{\partial \chi^{ij}}{\partial u}u_\xi - G^{ij}\frac{\partial \chi^{ij}}{\partial u_s}u_{s\xi}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} G^{ij}u_{ij\xi\xi} &= (\alpha_{k-1})_{\xi\xi} - G^{ij,rs}U_{ij\xi}U_{rs\xi} - \sum_{l=0}^{k-2}(\alpha_l)_{\xi\xi}G_l - 2\sum_{l=0}^{k-2}(\alpha_l)_\xi G_l^{ij}U_{ij\xi} \\ &\quad - G^{ij}\frac{\partial^2\chi^{ij}}{\partial x_\xi^2} - G^{ij}\frac{\partial^2\chi^{ij}}{\partial x_\xi \partial u}u_\xi - G^{ij}\frac{\partial^2\chi^{ij}}{\partial x_\xi \partial u_s}u_{s\xi} - G^{ij}\frac{\partial^2\chi^{ij}}{\partial u \partial x_\xi}u_\xi \\ &\quad - G^{ij}\frac{\partial^2\chi^{ij}}{\partial u^2}(u_\xi)^2 - G^{ij}\frac{\partial^2\chi^{ij}}{\partial u \partial u_s}u_\xi u_{s\xi} - G^{ij}\frac{\partial\chi^{ij}}{\partial u}u_{\xi\xi} - G^{ij}\frac{\partial^2\chi^{ij}}{\partial u_s \partial x_\xi}u_{s\xi} \\ &\quad - G^{ij}\frac{\partial^2\chi^{ij}}{\partial u_s \partial u}u_\xi u_{s\xi} - G^{ij}\frac{\partial^2\chi^{ij}}{\partial u_s \partial u_q}u_{s\xi}u_{q\xi} - G^{ij}\frac{\partial\chi^{ij}}{\partial u_s}u_{s\xi\xi}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

在 Ω 上定义距离函数 $d(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$, 并且将近边区域定义为

$$\Omega_\mu = \{x \in \Omega : d(x) < \mu,\ \mu > 0\},$$

当 Ω 是 C^4 区域时, 存在正常数 $0 < \mu \leqslant 1$, 使得 $d(x) \in C^4(\overline{\Omega}_\mu)$, 并且在 $\partial\Omega_\mu$ 上单位外法向量 $\nu = -Dd$, 记

$$c^{ij} = \delta_{ij} - \nu^i\nu^j, \quad \text{在 } \Omega_\mu \text{ 中}, \tag{2.6}$$

$$|D'u|^2 = \sum_{i,j=1}^n c^{ij}u_iu_j. \tag{2.7}$$

引理 2.1　如果 u 为 $C^2(\Omega)$ 函数, $\lambda(D^2u + \chi) \in \Gamma_{k-1}$, 并且 α_l $(0 \leqslant l \leqslant k-2)$ 是正数, 那么算子 G 是椭圆和凹的.

证　见文 [26].

下面给出算子 G, G_k 和 G_l 的性质.

引理 2.2 如果 u 是问题 (1.10) 的 k 容许解, $\alpha_l > 0$ $(0 \leqslant l \leqslant k-2)$, 则有

$$0 < \frac{\sigma_l(U)}{\sigma_{k-1}(U)} \leqslant C(n, k, \inf \alpha_l), \tag{2.8}$$

$$0 < \frac{\sigma_k(U)}{\sigma_{k-1}(U)} \leqslant C\Big(n, k, \sum_{l=0}^{k-1} \sup \alpha_l\Big). \tag{2.9}$$

证 见文 [27].

引理 2.3 如果 u 为问题 (1.10) 的 k 容许解, $\alpha_l > 0$ $(0 \leqslant l \leqslant k-2)$, 则有

$$\frac{n-k-1}{k} \leqslant \sum_{i=1}^{n} G^{ii} \leqslant n-k-1, \tag{2.10}$$

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} G^{ij} U_{ij}\Big| \leqslant C\Big(n, k, \sum_{l=0}^{k-1} \sup \alpha_l\Big). \tag{2.11}$$

证 不等式 (2.10) 的证明可参考文 [27] 中的引理 3. 下面证明 (2.11).

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{i=1}^{n} G^{ij} U_{ij}\Big| &= \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\Big(\frac{\sigma_k}{\sigma_{k-1}}\Big)}{\partial \lambda_i}\lambda_i - \sum_{l=0}^{k-2} \alpha_l \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\Big(\frac{\sigma_l}{\sigma_{k-1}}\Big)}{\partial \lambda_i}\lambda_i\right| \\
&\leqslant |\alpha_{k-1}| + \Big|\sum_{l=0}^{k-2} (k-l)\alpha_l \frac{\sigma_l}{\sigma_{k-1}}\Big| \\
&\leqslant C\Big(n, k, \sum_{l=0}^{k-1} \sup \alpha_l\Big),
\end{aligned}$$

因此不等式 (2.11) 成立.

接下来的引理在证明先验估计中起到十分重要的作用.

引理 2.4 假设 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \Gamma_k$, $k \geqslant 2$, 并且 $\lambda_1 < 0$. 则有

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda_1} \geqslant \frac{n}{k} \frac{1}{(n-k+2)^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial \lambda_i}. \tag{2.12}$$

证 证明过程可参考文 [25] 中的定理 2.5 和文 [27] 中的引理 4.

§3 先验估计

在这一节中, 我们研究问题 (1.10) 的先验估计.

§3.1 C^0 估计

本小节证明 C^0 估计.

定理 3.1 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为 C^1 有界区域, $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ 为问题 (1.10) 的 k 容许解, 条件 1.1 成立, $\underline{u}$ 和 $\overline{u}$ 分别满足定义 1.3–1.4, $0 < \alpha_l(x) \in C^0(\overline{\Omega})$ $(0 \leqslant l \leqslant k-2)$,

$\alpha_{k-1}(x) \in C^0(\overline{\Omega})$ $(2 \leqslant k \leqslant n)$, $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$, $\varepsilon \in (0,1)$, 则有

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \leqslant C,$$

其中 C 是依赖于 n, k, $\operatorname{diam}(\Omega)$, $\max\limits_{\overline{\Omega}} |\overline{u}|$ 和 $\max\limits_{\overline{\Omega}} |\underline{u}|$ 的常数.

证 运用下解满足的方程 (1.8), 可得

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant G(D^2\underline{u} + \chi(x, \underline{u}, D\underline{u})) - G(D^2 u + \chi(x, u, Du)) \\
&= \frac{\partial G}{\partial U_{ij}} [\underline{u}_{ij} + \chi^{ij}(x, \underline{u}, D\underline{u}) - u_{ij} - \chi^{ij}(x, u, Du)] \\
&= \frac{\partial G}{\partial U_{ij}} (\underline{u}_{ij} - u_{ij}) + \frac{\partial G}{\partial U_{ij}} (\chi^{ij}(x, \underline{u}, D\underline{u}) - \chi^{ij}(x, u, Du)) \\
&= \frac{\partial G}{\partial U_{ij}} (\underline{u}_{ij} - u_{ij}) + \frac{\partial G}{\partial U_{ij}} \chi_u^{ij} (\underline{u} - u),
\end{aligned}$$

结合条件 1.1 有 $\underline{u} - u$ 在边界上取得最大值, 则有 $D_\nu(\underline{u} - u) \geqslant 0$, 即 $u \geqslant \underline{u}$.

同理, $u - \overline{u}$ 在边界上取得最大值, 结合边界条件, 有 $D_\nu(u - \overline{u}) \geqslant 0$, 从而 $u \leqslant \overline{u}$, 即 $\max\limits_{\overline{\Omega}} |u| \leqslant C$.

§3.2　C^1 估计

在这一小节中, 分两步证明 C^1 估计. 第 1 步是内部梯度估计, 第 2 步是近边梯度估计.

定理 3.2　设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是 C^3 一致凸区域, $u \in C^3(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$ 为问题 (1.10) 的 k 容许解, $\underline{u}$ 和 $\overline{u}$ 分别满足定义 1.3–1.4, 条件 1.1–1.2 成立, $0 < \alpha_l(x) \in C^1(\overline{\Omega})$ $(0 \leqslant l \leqslant k-2)$, $\alpha_{k-1}(x) \in C^1(\overline{\Omega})$ $(2 \leqslant k \leqslant n)$, $\varphi(x) \in C^2(\partial\Omega)$, $\varepsilon \in (0,1)$, 则有

$$\sup_{\overline{\Omega}} |Du| \leqslant C \tag{3.1}$$

和

$$\sup_{\Omega} \left| u - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u \right| \leqslant C, \tag{3.2}$$

其中 C 是一个依赖于 k, n, $\operatorname{diam}(\Omega)$, $|u|_{C^0}$, $\max|\psi_1|$, $\max|\psi_2|$, $\inf \alpha_l$, $|\alpha_l|_{C^1}$, $|\alpha_{k-1}|_{C^1}$ 和 $|\varphi|_{C^2}$ 的常数.

§3.2.1　内部梯度估计

在这一小节中, 采用文 [30–31] 中的思想推导出问题 (1.10) k 容许解的内部梯度估计.

定理 3.3　设 $B_r(x) \in \Omega$ $(\forall x \in \Omega)$, $u \in C^3(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$ 为问题 (1.10) 的 k 容许解, $\lambda(D^2 u + \chi(x, u, Du)) \in \Gamma_k$, $\varepsilon \in (0,1)$, $\underline{u}$ 和 $\overline{u}$ 分别满足定义 1.3–1.4, 条件 1.1–1.2 成立, $0 < \alpha_l(x) \in C^1(\overline{\Omega})$ $(0 \leqslant l \leqslant k-2)$, $\alpha_{k-1}(x) \in C^1(\overline{\Omega})$ $(2 \leqslant k \leqslant n)$, 则有

$$\sup_{\Omega} |Du| \leqslant C,$$

其中 C 是依赖于 l, k, n, $\operatorname{diam}(\Omega)$, $|u|_{C^0}$, $\max|\psi_1|$, $\max|\psi_2|$, $\inf \alpha_l$, $|\alpha_l|_{C^1}$, $|\alpha_{k-1}|_{C^1}$ 和 $|\varphi|_{C^2}$ 的常数.

证 $\forall(x,\xi)\in B_r(x)\times\mathbb{S}^{n-1}$, 构造辅助函数

$$W(x,\xi)=u_\xi(x)\phi(u)\rho(x),$$

其中 $\rho(x)=\big(1-\frac{|x|^2}{r^2}\big)^+>0$, $\phi(u)=\frac{1}{\sqrt{M_0-u}}>0$ 和 $M_0=4\sup\limits_\Omega|u|$. 计算可得

$$\phi''-\frac{2(\phi')^2}{\phi}=\frac{1}{4}(M_0-u)^{-\frac{5}{2}}\geqslant\frac{1}{16}(M_0-u)^{-\frac{5}{2}}\geqslant\frac{1}{16}M_0^{-\frac{5}{2}},\tag{3.3}$$

对 $W(x,\xi)$ 分别求一次导和二次导, 有

$$\begin{aligned}W_i(x,\xi)&=u_{\xi i}\phi\rho+u_\xi\phi' u_i\rho+u_\xi\phi\rho_i,\\ W_{ij}(x,\xi)&=u_{\xi ij}\phi\rho+u_\xi u_{ij}\phi'\rho+u_\xi u_iu_j\phi''\rho+u_\xi\phi\rho_{ij}\\&\quad+(u_{\xi i}u_j+u_{\xi j}u_i)\phi'\rho+(u_{\xi i}\rho_j+u_{\xi j}\rho_i)\phi\\&\quad+(u_i\rho_j+u_j\rho_i)\phi' u_\xi.\end{aligned}$$

设 W 在 (x_0,e_1) 处取得最大值, 且假设 $u_1=|Du|$, 则在此处有

$$0=W_i(x_0,e_1)=u_{1i}\phi\rho+u_1u_i\phi'\rho+u_1\phi\rho_i,$$

移项计算后, 可得

$$u_{1i}=-\frac{u_1}{\phi\rho}(u_i\phi'\rho+\phi\rho_i),\tag{3.4}$$

结合 (3.4) 和 $u_1=|Du|$ 以及条件 1.2 中的 (1.4), 有

$$U_{11}=-\frac{(u_1)^2\phi'}{\phi}-\frac{u_1\rho_i}{\rho}+\chi^{11}(x,u,Du)<0.$$

将线性化算子 $\mathcal{L}$ 作用在 W 上, 即

$$\mathcal{L}W=(G^{ij}D_{ij}+G^{ij}\chi^{ij}_{p_s}D_s)W=G^{ij}W_{ij}+G^{ij}\chi^{ij}_{p_s}W_s,\tag{3.5}$$

其中

$$\begin{cases}G^{ij}\chi^{ij}_{p_s}W_s=G^{ij}\chi^{ij}_{p_s}(u_{1s}\phi\rho+u_1\phi' u_s\rho+u_1\phi\rho_s)\\ \qquad\qquad\quad=G^{ij}\chi^{ij}_{p_s}u_{1s}\phi\rho+G^{ij}\chi^{ij}_{p_s}u_1\phi' u_s\rho+G^{ij}\chi^{ij}_{p_s}u_1\phi\rho_s,\\ G^{ij}W_{ij}=G^{ij}u_{ij1}\phi\rho+G^{ij}u_{ij}u_1\phi'\rho+G^{ij}u_iu_ju_1\phi''\rho\\ \qquad\qquad+G^{ij}\rho_{ij}u_1\phi+2G^{ij}u_{1i}(u_j\phi'\rho+\rho_j\phi)+2G^{ij}u_1u_i\rho_j\phi',\end{cases}\tag{3.6}$$

将 (2.4) 和 (3.4) 代入 (3.6), 可得

$$\begin{aligned}G^{ij}W_{ij}&=\Big[(\alpha_{k-1})_1-\sum_{l=0}^{k-2}(\alpha_l)_1G_l-G^{ij}\frac{\partial\chi^{ij}}{\partial x_1}-G^{ij}\frac{\partial\chi^{ij}}{\partial u}u_1-G^{ij}\frac{\partial\chi^{ij}}{\partial u_s}u_{s1}\Big]\phi\rho\\&\quad+G^{ij}U_{ij}u_1\phi'\rho-G^{ij}\chi^{ij}u_1\phi'\rho+G^{ij}u_iu_ju_1\phi''\rho+G^{ij}\rho_{ij}u_1\phi\\&\quad-2G^{ij}\frac{(\phi')^2\rho}{\phi}u_1u_iu_j-4G^{ij}u_1u_i\phi'\rho_j-2G^{ij}\frac{u_1\rho_i\rho_j\phi}{\rho}+2G^{ij}u_1u_i\rho_j\phi'\\&\geqslant G^{ij}\Big(\phi''\rho-2\frac{(\phi')^2\rho}{\phi}\Big)u_1u_iu_j-\Big[G^{ij}\frac{\partial\chi^{ij}}{\partial x_1}+G^{ij}\frac{\partial\chi^{ij}}{\partial u}u_1\Big]\phi\rho-G^{ij}\frac{\partial\chi^{ij}}{\partial u_s}u_{s1}\phi\rho\\&\quad-G^{ij}\chi^{ij}u_1\phi'\rho-Cu_1u_i\sum_{i=1}^nG^{ii}-Cu_1\sum_{i=1}^nG^{ii}-C\sum_{i=1}^nG^{ii},\end{aligned}$$

将上述计算结果和 (3.3) 代入 (3.5), 可得

$$\begin{aligned}
0 &\geqslant \mathcal{L}W \\
&\geqslant \frac{1}{16}M_0^{-\frac{5}{2}}G^{11}u_1^3 - \Big[G^{ij}\frac{\partial \chi^{ij}}{\partial x_1} + G^{ij}\frac{\partial \chi^{ij}}{\partial u}u_1\Big]\phi\rho \\
&\quad - G^{ij}\chi^{ij}u_1\phi'\rho - Cu_1u_i\sum_{i=1}^n G^{ii} - Cu_1\sum_{i=1}^n G^{ii} - C\sum_{i=1}^n G^{ii} \\
&\quad + G^{ij}\chi^{ij}_{p_s}u_1\phi' u_s\rho + G^{ij}\chi^{ij}_{p_s}u_1\phi\rho_s.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

结合条件 1.2 以及引理 2.4, 有

$$\begin{aligned}
0 \geqslant \sum_{i=1}^n G^{ii}\Big(&\frac{1}{16}\frac{n}{k}\frac{1}{(n-k+2)^2}|Du|^3 - C|Du|^2 - C|Du| - C|Du|^{\gamma_1+1} \\
&- C|Du|^{\gamma_2-1} - C|Du|^{\gamma_3+1} + C\Big).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

由引理 2.3 可知

$$\sum_{i=1}^n G^{ii} \geqslant \frac{n-k-1}{k},$$

通过移项计算后可得 $|Du| \leqslant C$, 其中 C 是依赖于 k, n, $\mathrm{diam}(\Omega)$, $|u|_{C^0}$, $\max|\psi_1|$, $\max|\psi_2|$ 和 $\sum\limits_{l=0}^{k-1}\sup\alpha_l$ 的常数.

§3.2.2　近边梯度估计

近边梯度估计的证明如下.

定理 3.4　设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为 C^3 有界区域, $u \in C^3(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$ 为问题 (1.10) 的 k 容许解, $\underline{u}$ 和 $\overline{u}$ 分别满足定义 1.3–1.4, 条件 1.1–1.2 成立, $0 < \alpha_l(x) \in C^1(\overline{\Omega})$ $(0 \leqslant l \leqslant k-2)$, $\alpha_{k-1}(x) \in C^1(\overline{\Omega})$ $(2 \leqslant k \leqslant n)$, $\varphi(x) \in C^2(\partial\Omega)$, $\varepsilon \in (0,1)$, 则有

$$\sup_{\overline{\Omega}_{\mu_0}} |Du| \leqslant C,$$

其中 C 是依赖于 μ_0, n, k, $\mathrm{diam}(\Omega)$, $|\alpha_l(x)|_{C^1}$, $\inf\alpha_l$, $|\varphi|_{C^2}$ 和 $|u|_{C^0}$ 的常数.

证　考虑下面的辅助函数

$$H = \log|Dw|^2 + h(u) + g(d),$$

其中 $h(u) = -\log(1+4M_1-u)$, $w(x) = u(x) + (-\varepsilon u + \varphi(x))d(x)$, $g(d) = Ad(x)$, 且 $M_1 = \sup\limits_{\Omega}|u|$, A 为待定常数. 对 h 分别求一阶导和二阶导, 有

$$\frac{1}{1+5M_1} \leqslant\ h' \leqslant \frac{1}{1+3M_1}, \quad \frac{1}{(1+5M_1)^2} \leqslant\ h'' \leqslant \frac{1}{(1+3M_1)^2}.$$

对 w 求导, 有

$$\begin{cases}
w_i = u_i + (\varphi_i - \varepsilon u_i)d + (\varphi - \varepsilon u)d_i, \\
w_{ij} = (1-\varepsilon d)u_{ij} + \varphi_{ij}d + 2(\varphi_i - \varepsilon u_i)d_j + (\varphi - \varepsilon u)d_{ij}, \\
w_{ijk} = (1-\varepsilon d)u_{ijk} - 3\varepsilon u_{ij}d_k - 3\varepsilon u_i d_{jk} - \varepsilon u d_{ijk} \\
\qquad\quad +\varphi d_{ijk} + \varphi_{ijk}d + 3\varphi_{ij}d_k + 3\varphi_i d_{jk}.
\end{cases} \tag{3.9}$$

由 (3.9), 可得

$$(1-\varepsilon d)u_{ij}-C|Du|-C\leqslant w_{ij}\leqslant(1-\varepsilon d)u_{ij}+C|Du|+C,\tag{3.10}$$

取 $|Du|$ 足够大,d 足够小, 使得

$$\frac{1}{4}|Du|\leqslant|Dw|\leqslant 2|Du|.\tag{3.11}$$

假设 $H(x)$ 在 $x_0\in\overline{\Omega}_{\mu_0}$ 处达到最大值, 分成三种情况证明.

情况 1 如果 $x_0\in\partial\Omega$. 根据 Hopf 引理, 在 x_0 处, 有

$$0\leqslant H_\nu=\frac{|Dw|_i^2\nu^i}{|Dw|^2}-g_\nu+h'u_\nu.$$

由于 $w_\nu=u_\nu+(\varphi_\nu-\varepsilon u_\nu)d-(\varphi-\varepsilon u)=0$, 则有

$$\begin{aligned}|Dw|_i^2\nu^i&=c_m^{ij}w_iw_j\nu^m+2c^{ij}w_{im}w_j\nu^m+2w_\nu D_mw_\nu\nu^m\\&=c_m^{ij}w_iw_j\nu^m-4c^{ij}(\varphi_i-\varepsilon u_i)w_j+2c^{ij}(1-\varepsilon d)u_{i\nu}w_j\\&\quad+2c^{ij}(\varphi-\varepsilon u)d_{im}w_j\nu^m.\end{aligned}\tag{3.12}$$

由边界条件有 $u_\nu=-\varepsilon u+\varphi$, 用 $c^{ij}D_j$ 作用在式子两边, 可得 $c^{ij}u_{\nu j}=-\varepsilon c^{ij}u_j+c^{ij}\varphi_j$, 即 $c^{ij}u_{j\nu}+c^{ij}u_mD_j\nu^m=-\varepsilon c^{ij}u_j+c^{ij}\varphi_j$, 则 $|Dw|_i^2\nu^i\leqslant C|Dw|^2+C|Dw|$, 故有

$$0\leqslant H_\nu\leqslant -A+C+\frac{C}{|Dw|}+\frac{C}{1+3M_1}\leqslant -C+\frac{C}{|Dw|}.$$

取 A 充分大, 有 $|Du|\leqslant C$.

情况 2 如果 $x_0\in\Omega_{\mu_0}$, 对辅助函数求两次导数, 在 x_0 处, 有

$$0=H_i=\frac{2w_kw_{ki}}{|Dw|^2}+Ad_i+h'u_i,\tag{3.13}$$

$$H_{ij}=\frac{2w_{ki}w_{kj}+2w_kw_{kij}}{|Dw|^2}-\frac{4w_kw_{ki}w_mw_{mj}}{|Dw|^4}+Ad_{ij}+h''u_iu_j+h'u_{ij}.\tag{3.14}$$

在 x_0 处选取坐标系, 使得 $|Dw|=w_1$ 以及 $\{U_{ij}\}$ 是对角的, 因此

$$u_1=\frac{w_1-\varphi_1d-(\varphi-\varepsilon u)d_1}{1-\varepsilon d},\quad w_{11}=-\frac{1}{2}(Ad_1+h'u_1)w_1,\tag{3.15}$$

对任意 $2\leqslant i\leqslant n$,

$$u_i=\frac{-\varphi_id-(\varphi-\varepsilon u)d_i}{1-\varepsilon d},\quad w_{1i}=-\frac{1}{2}(Ad_i+h'u_i)w_1.\tag{3.16}$$

取 $|Du|$ 足够大, 使得对于任意的 $i\geqslant 2$, 有

$$|u_i|\leqslant\frac{1}{64n}|Du|,\tag{3.17}$$

因此由 (3.11) 和 (3.17), 有

$$u_1=\sqrt{|Du|^2-\sum_{i=2}^n u_i^2}\geqslant\frac{|Du|}{2}\geqslant\frac{w_1}{4}.\tag{3.18}$$

取 $|w_1|$ 足够大, 且结合条件 1.2 中的 (1.4) 和 (3.15), 有

$$U_{11}(x_0)=\frac{1}{1-\varepsilon d}\Big[-\frac{1}{2}(Ad_1+h'u_1)w_1-\varphi_{11}d+2(\varepsilon u_1-\varphi_1)d_1+(\varepsilon u-\varphi)d_{11}\Big]$$

$$
\begin{aligned}
&+\chi^{11}(x,u,Du)\\
&\leqslant -\frac{h'w_1^2}{128}+Cw_1+\chi^{11}(x,u,Du)\\
&<0.
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

算子 $\mathcal{L}$ 作用在 H 上, 有

$$
0\geqslant \mathcal{L}H=(G^{ij}D_{ij}+G^{ij}\chi^{ij}_{p_s}D_s)H=G^{ij}H_{ij}+G^{ij}\chi^{ij}_{p_s}H_s,
\tag{3.20}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
G^{ij}\chi^{ij}_{p_s}H_s&=G^{ij}\chi^{ij}_{p_s}\Big(\frac{2w_kw_{ks}}{|Dw|^2}+Ad_s+h'u_s\Big)\\
&=G^{ij}\chi^{ij}_{p_s}\Big(\frac{2(1-\varepsilon d)u_{1s}}{w_1}+\frac{2\varphi_{1s}d}{w_1}+\frac{4(\varphi_1-\varepsilon u_1)d_s}{w_1}\\
&\quad+\frac{2(\varphi-\varepsilon u)d_{1s}}{w_1}+Ad_s+h'u_s\Big).
\end{aligned}
$$

将算子 G^{ij} 作用在 (3.14) 上, 有

$$
\begin{aligned}
G^{ij}H_{ij}&=-\frac{1}{2}G^{ij}(A^2d_id_j+2Ah'd_iu_j+(h')^2u_iu_j)+AG^{ij}d_{ij}\\
&\quad+h''G^{ij}u_iu_j+\frac{2G^{ij}w_{ij1}}{w_1}+h'G^{ij}u_{ij}\\
&=G^{ij}\Big[\Big(h''-\frac{1}{2}(h')^2\Big)u_iu_j-Ah'd_iu_j+Ad_{ij}-\frac{1}{2}A^2d_id_j\Big]\\
&\quad+\frac{2G^{ij}w_{ij1}}{w_1}+h'G^{ij}u_{ij}.
\end{aligned}
$$

由 (3.11) 可知, 上式第 1 项可化为

$$
\begin{aligned}
&G^{ij}\Big[\Big(h''-\frac{1}{2}(h')^2\Big)u_iu_j-Ah'd_iu_j+Ad_{ij}-\frac{1}{2}A^2d_id_j\Big]\\
\geqslant{}&\frac{(h')^2}{2}\Big[G^{11}u_1^2-2\sum_{i=2}^n|G^{1i}u_1u_i|\Big]-Ah'|Du|\sum_{i=1}^nG^{ii}-AC\sum_{i=1}^nG^{ii}\\
\geqslant{}&\frac{(h')^2}{32}G^{11}w_1^2-ACw_1\sum_{i=1}^nG^{ii}-AC\sum_{i=1}^nG^{ii}.
\end{aligned}
$$

而

$$
\begin{aligned}
&\frac{2G^{ij}w_{ij1}}{w_1}\\
={}&\frac{2(1-\varepsilon d)}{w_1}\Big[(\alpha_{k-1})_1-\sum_{l=0}^{k-2}(\alpha_l)_1G_l-G^{ij}\frac{\partial\chi^{ij}}{\partial x_1}-G^{ij}\frac{\partial\chi^{ij}}{\partial u}u_1\Big]\\
&-\frac{2(1-\varepsilon d)}{w_1}G^{ij}\frac{\partial\chi^{ij}}{\partial u_s}u_{s1}-\frac{6\varepsilon}{w_1}G^{ij}u_{ij}d_1-\frac{6\varepsilon}{w_1}G^{ij}u_id_{j1}\\
&+\frac{2G^{ij}}{w_1}[-\varepsilon ud_{ij1}+\varphi d_{ij1}+\varphi_{ij1}d+3\varphi_{ij}d_1+3\varphi_id_{j1}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\geqslant -\frac{C\sum\limits_{i=1}^{n}G^{ii}}{w_1}-\frac{2(1-\varepsilon d)}{w_1}G^{ij}\frac{\partial\chi^{ij}}{\partial x_1}-\frac{2(1-\varepsilon d)}{w_1}G^{ij}\frac{\partial\chi^{ij}}{\partial u}u_1\\
&\quad-\frac{6\varepsilon}{w_1}G^{ij}(U_{ij}-\chi^{ij})d_1-\frac{6\varepsilon}{w_1}G^{ij}u_id_{j1}-\frac{2(1-\varepsilon d)}{w_1}G^{ij}\frac{\partial\chi^{ij}}{\partial u_s}u_{s1},
\end{aligned}
$$

将上述计算结果代入 (3.20) 并结合条件 1.2 的 (1.4), 有

$$
\begin{aligned}
0&\geqslant \mathcal{L}H\\
&\geqslant G^{ij}\chi^{ij}_{p_s}(2\varphi_{1s}d+4(\varphi_1-\varepsilon u_1)d_s+2(\varphi-\varepsilon u)d_{1s}+Ad_sw_1+h'u_sw_1)\\
&\quad+\frac{(h')^2}{32}G^{11}w_1^3-ACw_1^2\sum_{i=1}^{n}G^{ii}-ACw_1\sum_{i=1}^{n}G^{ii}\\
&\quad-C\sum_{i=1}^{n}G^{ii}-2(1-\varepsilon d)G^{ij}\frac{\partial\chi^{ij}}{\partial x_1}-2(1-\varepsilon d)G^{ij}\frac{\partial\chi^{ij}}{\partial u}u_1\\
&\quad-6\varepsilon G^{ij}(U_{ij}-\chi^{ij})w_1d_1-6\varepsilon G^{ij}u_id_{j1}\\
&\geqslant\frac{(h')^2}{32}G^{11}w_1^3-\sum_{i=1}^{n}G^{ii}(C+Cw_1^2+Cw_1+Cw_1^{\gamma_1+1}+Cw_1^{\gamma_2-1}+Cw_1^{\gamma_3+1}).
\end{aligned}
$$

由引理 2.3 中的 (2.10) 和引理 2.4, 有 $G^{11}\geqslant\frac{n(n-k+1)}{k^2(n-k+2)^2}$, 且 $h'\geqslant\frac{1}{1+5M_1}$, 即 w_1 有上界, 从而 $|Dw|\leqslant C$, 即 $|Du|\leqslant C$.

情况 3 如果 $x_0\in\partial\Omega_{\mu_0}\setminus\partial\Omega$, 由定理 3.3 可得 $|Du|\leqslant C$.

上文已证明 (3.1) 成立, 由 (3.1) 可直接推导出 (3.2).

§3.3 C^2 估计

参考文 [14] 的思想, 将 C^2 估计的证明分为两步: 第 1 步将全局二阶导数估计约化到边界上的双法向二阶导数估计, 第 2 步证明边界上的双法向二阶导数估计有界.

定理 3.5 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个 C^4 一致凸区域, $u\in C^4(\Omega)\cap C^3(\overline{\Omega})$ 是问题 (1.10) 的 k 容许解, $\underline{u}$ 和 $\overline{u}$ 分别满足定义 1.3–1.4, 条件 1.1–1.3 成立, $0<\alpha_l(x)\in C^2(\overline{\Omega})$ $(0\leqslant l\leqslant k-2)$, $\alpha_{k-1}(x)\in C^2(\overline{\Omega})$ $(2\leqslant k\leqslant n)$, $\varphi(x)\in C^3(\partial\Omega)$, $\varepsilon\in(0,1)$, 则有

$$
\sup_{\Omega}|D^2u|\leqslant C, \tag{3.21}
$$

其中 C 是依赖于 n, k, $\mathrm{diam}(\Omega)$, $|\alpha_{k-1}|_{C^2}$, $|\alpha_l|_{C^2}$, $\inf\alpha_l$, $|\varphi|_{C^3}$ 和 $|u|_{C^1}$ 的常数.

§3.3.1 全局二阶导数估计

在本小节中, 我们得到了全局 C^2 估计.

定理 3.6 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个 C^4 一致凸区域, $u\in C^4(\Omega)\cap C^3(\overline{\Omega})$ 是问题 (1.10) 的 k 容许解, $\underline{u}$ 和 $\overline{u}$ 分别满足定义 1.3–1.4, 条件 1.1–1.3 成立, $0<\alpha_l(x)\in C^2(\overline{\Omega})$ $(0\leqslant l\leqslant k-2)$, $\alpha_{k-1}(x)\in C^2(\overline{\Omega})$ $(2\leqslant k\leqslant n)$, $\varphi(x)\in C^3(\partial\Omega)$, $\varepsilon\in(0,1)$, 则有

$$
\sup_{\Omega}|D^2u|\leqslant C(1+\sup_{\partial\Omega}|u_{\nu\nu}|), \tag{3.22}
$$

其中 C 是依赖于 n, k, $\mathrm{diam}(\Omega)$, $|\alpha_{k-1}|_{C^2}$, $|\alpha_l|_{C^2}$ 和 $|u|_{C^1}$ 的常数.

证 $\forall(x,\xi)\in B_r(x)\times\mathbb{S}^{n-1}$, 考虑以下测试函数

$$\Phi(x,\xi)=\mathrm{e}^{k_1|Du|^2}(u_{\xi\xi}-v'(x,\xi)),\tag{3.23}$$

其中 $v'(x,\xi)=2(\xi\cdot\nu)\xi'(D\varphi-\varepsilon Du-u_mD\nu^m)=a^mu_m+b$, 且 $\xi'=\xi-(\xi\cdot\nu)\nu$, $a^m=2(\xi\cdot\nu)(-\varepsilon\xi'^m-\xi'^iD_i\nu^m)$, $b=2(\xi\cdot\nu)\xi'^m\varphi_m$. (3.23) 两边同时取对数, 有

$$\log\Phi(x,\xi)=k_1|Du|^2+\log(u_{\xi\xi}-a^mu_m-b).$$

假设 $\Phi(x,\xi)$ 在 $x_0\in\Omega$ 处取得最大值, 在 x_0 旋转坐标系, 使得 $\{U_{ij}\}$ 是对角的且 $U_{11}\geqslant U_{22}\geqslant\cdots\geqslant U_{nn}$, 此时 $\{G^{ij}\}$ 也是对角的, 对任意固定的 $\xi\in\mathbb{S}^{n-1}$, 有

$$0=(\log\Phi)_i(x_0,\xi)=2k_1\sum_{t=1}^n u_tu_{ti}+\frac{u_{\xi\xi i}-D_ia^mu_m-a^mu_{mi}-b_i}{u_{\xi\xi}-a^mu_m-b},$$

即

$$u_{\xi\xi i}-D_ia^mu_m-a^mu_{mi}-b_i=-2k_1\sum_{t=1}^n u_tu_{ti}(u_{\xi\xi}-a^mu_m-b).\tag{3.24}$$

对 $\log\Phi$ 求两次导, 再将 (3.24) 代入, 并将算子 G^{ij} 作用在式子两边, 有

$$\begin{aligned}&G^{ij}(\log\Phi)_{ij}\\&=\sum_{t=1}^n(2k_1-4k_1^2u_t^2)G^{ij}u_{tj}u_{ti}+2k_1\sum_{t=1}^nG^{ij}u_tu_{tij}\\&\quad+\frac{G^{ij}u_{\xi\xi ij}-G^{ij}D_{ij}a^mu_m-2G^{ij}D_ia^mu_{mj}-G^{ij}a^mu_{mij}-G^{ij}b_{ij}}{(u_{\xi\xi}-a^mu_m-b)},\end{aligned}\tag{3.25}$$

其中

$$\begin{aligned}&2k_1\sum_{t=1}^nG^{ij}u_tu_{tij}\\&=2k_1\sum_{t=1}^nu_t\Big[(\alpha_{k-1})_t-\sum_{l=0}^{k-2}(\alpha_l)_tG_l-G^{ij}\frac{\partial\chi^{ij}}{\partial x_t}-G^{ij}\frac{\partial\chi^{ij}}{\partial u}u_t-G^{ij}\frac{\partial\chi^{ij}}{\partial u_s}u_{st}\Big]\\&\geqslant-2k_1\sum_{t=1}^nu_tG^{ij}\frac{\partial\chi^{ij}}{\partial u_s}u_{st}-C\sum_{i=1}^nG^{ii}.\end{aligned}$$

由 $G_k=\frac{\sigma_k}{\sigma_{k-1}}$ 的凹性和文 [27] 中定理 4 的证明, 有

$$-2\sum_{l=0}^{k-2}(\alpha_l)_\xi G_l^{ij}U_{ij\xi}-G^{ij,rs}U_{ij\xi}U_{rs\xi}\geqslant-C.$$

将其与 (2.5) 代入 (3.25), 有

$$\begin{aligned}&G^{ij}(\log\Phi)_{ij}\\&\geqslant\sum_{t=1}^n(2k_1-4k_1^2u_t^2)G^{ij}u_{ti}u_{tj}-2k_1\sum_{t=1}^nG^{ij}u_t\frac{\partial\chi^{ij}}{\partial u_s}u_{st}-\frac{G^{ij}\dfrac{\partial^2\chi^{ij}}{\partial x_\xi\partial u_s}u_{s\xi}}{u_{\xi\xi}-a^mu_m-b}\\&\quad-\frac{G^{ij}\dfrac{\partial^2\chi^{ij}}{\partial u\partial u_s}u_\xi u_{s\xi}}{u_{\xi\xi}-a^mu_m-b}-\frac{G^{ij}\dfrac{\partial\chi^{ij}}{\partial u}u_{\xi\xi}}{u_{\xi\xi}-a^mu_m-b}-\frac{G^{ij}\dfrac{\partial^2\chi^{ij}}{\partial u_s\partial x_\xi}u_{s\xi}}{u_{\xi\xi}-a^mu_m-b}-\frac{G^{ij}\dfrac{\partial^2\chi^{ij}}{\partial u_s\partial u}u_\xi u_{s\xi}}{u_{\xi\xi}-a^mu_m-b}\end{aligned}$$

$$-\frac{G^{ij}\dfrac{\partial^2\chi^{ij}}{\partial u_s\partial u_q}u_{s\xi}u_{q\xi}}{u_{\xi\xi}-a^mu_m-b}-\frac{G^{ij}\dfrac{\partial\chi^{ij}}{\partial u_s}u_{s\xi\xi}}{u_{\xi\xi}-a^mu_m-b}-\frac{2G^{ij}D_ia^mu_{mj}}{u_{\xi\xi}-a^mu_m-b}+\frac{a^mG^{ij}\dfrac{\partial\chi^{ij}}{\partial u_s}u_{sm}}{u_{\xi\xi}-a^mu_m-b}$$

$$-\frac{C\sum\limits_{i=1}^{n}G^{ii}}{u_{\xi\xi}-a^mu_m-b}-C\sum_{i=1}^{n}G^{ii},$$

通过计算, 有

$$\begin{aligned}&G^{ij}\chi^{ij}_{p_s}(\log\Phi)_s\\=&G^{ij}\chi^{ij}_{p_s}2k_1\sum_{t=1}^{n}u_tu_{ts}\\&+\frac{G^{ij}\chi^{ij}_{p_s}u_{\xi\xi s}-G^{ij}\chi^{ij}_{p_s}D_sa^mu_m-G^{ij}\chi^{ij}_{p_s}a^mu_{ms}-G^{ij}\chi^{ij}_{p_s}b_s}{u_{\xi\xi}-a^mu_m-b}.\end{aligned}$$

令 $\xi=e_1$, 则

$$\begin{aligned}0&\geqslant\mathcal{L}\log(\Phi)\\&\geqslant\sum_{t=1}^{n}(2k_1-4k_1^2u_t^2)G^{ij}u_{ti}u_{tj}+\frac{-CU_{11}-CU_{11}^2-2G^{ij}D_ia^mu_{mj}-C}{u_{11}-a^mu_m-b}\\&\quad+\frac{-G^{ij}\chi^{ij}_{p_s}D_sa^mu_m-G^{ij}\chi^{ij}_{p_s}b_s}{u_{11}-a^mu_m-b}\\&\geqslant\sum_{t=1}^{n}(2k_1-4k_1^2u_t^2)G^{ij}u_{ti}u_{tj}+\frac{-CU_{11}-CU_{11}^2-C}{U_{11}-\chi^{11}-a^mu_m-b}\\&\geqslant\sum_{t=1}^{n}(2k_1-4k_1^2u_t^2)G^{ij}(U_{ti}-\chi^{ti})(U_{tj}-\chi^{tj})-CU_{11}-C\\&\geqslant\sum_{t=1}^{n}(2k_1-4k_1^2u_t^2)G^{ii}U_{ii}^2-CU_{11}-C.\end{aligned}$$

取适当的 k_1, 使

$$(2k_1-4k_1^2u_t^2)>M_2,$$

其中 $M_2>1$ 是正数, 令

$$J=\{i:U_{ii}\leqslant-\theta U_{11}\}\ (0<\theta<1),$$

则 $\sum\limits_{i\in J}G^{ii}\geqslant\frac{n-k-1}{nk}$ (参考文 [29] 中定理 1.1 的证明), 则

$$G^{ii}U_{ii}^2\geqslant G^{11}U_{11}^2+\sum_{i\in J}G^{ii}U_{ii}^2\geqslant G^{11}U_{11}^2+\theta^2U_{11}^2\sum_{i\in J}G^{ii}\geqslant\frac{\theta^2(n-k+1)}{nk}U_{11}^2,$$

从而

$$0\geqslant\mathcal{L}\log(\Phi)\geqslant\frac{M_2\theta^2(n-k+1)}{nk}U_{11}^2-CU_{11}-C>0,$$

可推出矛盾, 所以 $\Phi(x,\xi)$ 在 $\partial\Omega$ 上取到最大值. 假设最大值在 $(x_0,\xi_0)\in\partial\Omega\times\mathbb{S}^{n-1}$ 上取得. $\forall x_0\in\partial\Omega$, 对 ξ_0 进行分类.

首先, 当 ξ_0 为切向时, 由 Hopf 引理, 得

$$\begin{aligned}0&\leqslant\Phi_\nu\\&=\mathrm{e}^{k_1|Du|^2}(u_{\xi_0\xi_0\nu}-D_\nu a^m u_m-a^m u_{m\nu}-b_\nu+2k_1u_{m\nu}u_mu_{\xi_0\xi_0}-2k_1u_{m\nu}u_mv'),\end{aligned}$$

即

$$0\leqslant u_{\xi_0\xi_0\nu}+(2k_1u_{\xi_0\xi_0}-a^m)u_{m\nu}+C.\tag{3.26}$$

由文 [20], 可得

$$u_{\xi_0\xi_0\nu}\leqslant-\kappa_{\min}u_{\xi_0\xi_0}+C(1+|u_{\nu\nu}|),\tag{3.27}$$

$$|u_{m\nu}|\leqslant C,\quad m=1,\cdots,n,\tag{3.28}$$

其中 $\kappa_{\min}$ 是 $\partial\Omega$ 上的最小主曲率. 将 (3.27)–(3.28) 代入 (3.26), 有

$$0\leqslant-2\kappa_{\min}u_{\xi_0\xi_0}+C(1+|u_{\nu\nu}|)+(2k_1C-a^m)C+C,$$

移项后, 有

$$u_{\xi_0\xi_0}\leqslant C(1+|u_{\nu\nu}|).$$

其次, 当 ξ_0 非切方向时, 令

$$\xi_0=\widehat{\alpha}\tau+\widehat{\beta}\nu,$$

其中 $\widehat{\alpha}=\xi_0\cdot\tau$, $\tau\cdot\nu=0$, $|\tau|=1$, $\widehat{\beta}=\xi_0\cdot\nu\neq0$, 且 $\widehat{\alpha}^2+\widehat{\beta}^2=1$, 则有

$$\begin{aligned}u_{\xi_0\xi_0}&=\widehat{\alpha}^2u_{\tau\tau}+\widehat{\beta}^2u_{\nu\nu}+2\widehat{\alpha}\widehat{\beta}u_{\tau\nu}\\&=\widehat{\alpha}^2u_{\tau\tau}+\widehat{\beta}^2u_{\nu\nu}+2(\xi_0\cdot\nu)[\xi_0-(\xi_0\cdot\nu)\nu][D\varphi-\varepsilon Du-D_muD_\tau\nu^m].\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\Phi(x_0,\xi_0)=\widehat{\alpha}^2\Phi(x_0,\tau)+\widehat{\beta}^2\Phi(x_0,\nu)\leqslant\widehat{\alpha}^2\Phi(x_0,\xi_0)+\widehat{\beta}^2\Phi(x_0,\nu),\\&\Phi(x_0,\xi_0)\leqslant\Phi(x_0,\nu)\leqslant C(1+|u_{\nu\nu}|),\end{aligned}$$

故

$$u_{\xi_0\xi_0}\leqslant C(1+\max_{\partial\Omega}|u_{\nu\nu}|).$$

§3.3.2　边界上双法向的导数估计

在这一节中, 我们证明边界上的双法向二阶导数估计.

定理 3.7　如果 Ω 是一个 C^4 一致凸区域, $u\in C^4(\Omega)\cap C^3(\overline{\Omega})$ 为问题 (1.10) 的 k 容许解, $\underline{u}$ 和 $\overline{u}$ 分别满足定义 1.3–1.4, 条件 1.1–1.3 成立, $0<\alpha_l(x)\in C^2(\overline{\Omega})$ $(0\leqslant l\leqslant k-2)$, $\alpha_{k-1}(x)\in C^2(\overline{\Omega})$ $(2\leqslant k\leqslant n)$, $\varphi(x)\in C^3(\partial\Omega)$, $\varepsilon\in(0,1)$. 则有

$$\max_{\partial\Omega}|u_{\nu\nu}|\leqslant C,$$

其中 C 是依赖于 n, k, $\mathrm{diam}(\Omega)$, $|\alpha|_{C^2}$, $|\alpha_l|_{C^2}$, $\inf\alpha_l$, $|\varphi|_{C^3}$ 和 $|u|_{C^1}$ 的常数.

证 假设 $M=\sup\limits_{\partial\Omega}|u_{\nu\nu}|$, $\Omega_{\mu'}=\{z\in\Omega: d(z,\partial\Omega)<\mu'\}$, 其中 μ' 是正常数, 在 $\partial\Omega$ 上 $d=0$ 且 $\dfrac{\partial d}{\partial\nu}=-1$, 构造如下辅助函数

$$P(x)=Du\cdot(-Dd)+\varepsilon u-\varphi(x)+M^{-\frac{1}{2}}(Du\cdot(-Dd)+\varepsilon u-\varphi(x))^2-\frac{1}{2}Md.$$

假设 P 在一点 $z_0\in\overline{\Omega}$ 取得最大值, 在 z_0 旋转坐标系, 使得 $\{U_{ij}\}$ 是对角的, 则可分为三种情形证明.

情况 1 若 $z_0\in\overline{\Omega}_{\mu'}$, 对 P 求导, 在 z_0 处, 有

$$\begin{aligned}0&=P_i\\&=(Du\cdot(-Dd)+\varepsilon u-\varphi(x))_i[1+2M^{-\frac{1}{2}}(Du\cdot(-Dd)+\varepsilon u-\varphi(x))]-\frac{1}{2}Md_i,\end{aligned}$$

即

$$(Du\cdot(-Dd)+\varepsilon u-\varphi(x))_i=\frac{\frac{1}{2}Md_i}{1+2M^{-\frac{1}{2}}(Du\cdot(-Dd)+\varepsilon u-\varphi(x))}.\tag{3.29}$$

再次求导, 在 z_0 处, 可得

$$0\geqslant\mathcal{L}P=(G^{ij}D_{ij}+G^{ij}\chi^{ij}_{p_s}D_s)P=G^{ij}P_{ij}+G^{ij}\chi^{ij}_{p_s}P_s,$$

其中

$$\begin{aligned}&G^{ij}\chi^{ij}_{p_s}P_s\\&=[-G^{ij}\chi^{ij}_{p_s}u_{ms}d_m-G^{ij}\chi^{ij}_{p_s}u_md_{ms}+G^{ij}\chi^{ij}_{p_s}\varepsilon u_s-G^{ij}\chi^{ij}_{p_s}\varphi_s]\\&\quad\cdot[1+2M^{-\frac{1}{2}}(Du\cdot(-Dd)+\varepsilon u-\varphi(x))]-\frac{1}{2}Md_sG^{ij}\chi^{ij}_{p_s},\end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}&G^{ij}P_{ij}\\&=G^{ij}(Du\cdot(-Dd)+\varepsilon u-\varphi(x))_{ij}[1+2M^{-\frac{1}{2}}(Du\cdot(-Dd)+\varepsilon u-\varphi(x))]\\&\quad+\frac{G^{ij}M^{\frac{3}{2}}d_id_j}{2[1+2M^{-\frac{1}{2}}(Du\cdot(-Dd)+\varepsilon u-\varphi(x))]^2}-\frac{1}{2}MG^{ij}d_{ij}\\&\geqslant\Big[-(\alpha_{k-1})_md_m+\sum_{l=0}^{k-2}(\alpha_l)_mG_ld_m+G^{ij}\frac{\partial\chi^{ij}}{\partial x_m}d_m+G^{ij}\frac{\partial\chi^{ij}}{\partial u}u_md_m\\&\quad+G^{ij}\frac{\partial\chi^{ij}}{\partial u_s}u_{sm}d_m-2G^{ij}u_{mi}d_{mj}+\varepsilon G^{ij}u_{ij}-C\Big]\\&\quad\cdot[1+2M^{-\frac{1}{2}}(Du\cdot(-Dd)+\varepsilon u-\varphi(x))]\\&\quad+\frac{G^{ij}M^{\frac{3}{2}}d_id_j}{2[1+2M^{-\frac{1}{2}}(Du\cdot(-Dd)+\varepsilon u-\varphi(x))]^2}-\frac{1}{2}MG^{ij}d_{ij}\\&\geqslant-C(1+M)[1+2M^{-\frac{1}{2}}(Du\cdot(-Dd)+\varepsilon u-\varphi(x))]\\&\quad+G^{ij}\frac{\partial\chi^{ij}}{\partial u_s}u_{sm}d_m\cdot[1+2M^{-\frac{1}{2}}(Du\cdot(-Dd)+\varepsilon u-\varphi(x))]\end{aligned}$$

$$+\frac{\sum_{i=1}^{n} G^{ii} M^{\frac{3}{2}} d_i d_i}{2[1+2M^{-\frac{1}{2}}(Du\cdot(-Dd)+\varepsilon u-\varphi(x))]^2}-\frac{1}{2}MG^{ii}d_{ii}.$$

设

$$M\geqslant 64(\sup_{\Omega}|Du|+\varepsilon\sup_{\Omega}|u|+\sup_{\Omega}|\varphi(x)|)^2,$$

则

$$|M^{-\frac{1}{2}}(Du\cdot(-Dd)+\varepsilon u-\varphi(x))|\leqslant\frac{1}{8},$$
$$\frac{3}{4}\leqslant 1+2M^{-\frac{1}{2}}(Du\cdot(-Dd)+\varepsilon u-\varphi(x))\leqslant\frac{5}{4},$$

且由 $|Dd|=1$ 可得, 一定存在 i, 使得 $d_i^2\geqslant\frac{1}{n}$. 结合引理 2.3 和上式, 有

$$0\geqslant\mathcal{L}P\geqslant-\frac{5}{4}C(1+M)+\frac{2(n-k+1)}{5nk}M^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}MC>0.$$

因此, 情况 1 不成立.

情况 2 若 $z_0\in\partial\overline{\Omega}_{\mu'}\setminus\partial\Omega$, 该区域 $d=\mu'$, 则

$$\begin{aligned}P(x)&=Du\cdot(-Dd)+\varepsilon u-\varphi(x)+M^{-\frac{1}{2}}(Du\cdot(-Dd)+\varepsilon u-\varphi(x))^2-\frac{1}{2}Md\\&\leqslant C'+C''M^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}M\mu',\end{aligned}$$

当 M 足够大时, $P\leqslant C'+\frac{C''}{\sqrt{M}}-\frac{1}{2}M\mu'<0$.

情况 3 若 $z_0\in\partial\Omega$. 该区域 $d=0$, 则 $P=0$, 故最大值在边界上, 最大值可分为两种情况:

(1) 若 $\sup\limits_{\partial\Omega}|u_{\nu\nu}|=-\inf\limits_{\partial\Omega}u_{\nu\nu}=M$, 由 Hopf 引理, 有

$$\begin{aligned}0&\leqslant\frac{\partial P}{\partial\nu}\\&=\Big(u_{\nu\nu}-\sum_{m=1}^{n}u_m d_{m\nu}+\varepsilon u_\nu-\varphi_\nu\Big)[1+2M^{-\frac{1}{2}}(Du\cdot(-Dd)+\varepsilon u-\varphi(x))]+\frac{1}{2}M,\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}u_{\nu\nu}&\geqslant\frac{-\frac{1}{2}M}{1+2M^{-\frac{1}{2}}(Du\cdot(-Dd)+\varepsilon u-\varphi(x))}+\sum_{m=1}^{n}u_m d_{m\nu}-\varepsilon u_\nu-\varphi_\nu\\&\geqslant-\frac{2}{3}M-C,\end{aligned}$$

那么 $\inf\limits_{\partial\Omega}u_{\nu\nu}\geqslant-\frac{2}{3}M-C$, 也就是 $\inf\limits_{\partial\Omega}u_{\nu\nu}\geqslant\frac{2}{3}\inf\limits_{\partial\Omega}u_{\nu\nu}-C$, 从而 $\inf\limits_{\partial\Omega}u_{\nu\nu}\geqslant-C$.

(2) 若 $\sup\limits_{\partial\Omega}|u_{\nu\nu}|=\sup\limits_{\partial\Omega}u_{\nu\nu}=M$, 构造如下与 P 类似的辅助函数

$$Q(x)=Du\cdot(-Dd)+\varepsilon u-\varphi(x)-M^{-\frac{1}{2}}(Du\cdot(-Dd)+\varepsilon u-\varphi(x))^2+\frac{1}{2}Md.$$

同样地,

$$0\geqslant\frac{\partial Q}{\partial\nu}$$

$$= \Big(u_{\nu\nu} - \sum_{m=1}^{n} u_m d_{m\nu} + \varepsilon u_\nu - \varphi_\nu\Big)[1 - 2M^{-\frac{1}{2}}(Du\cdot(-Dd) + \varepsilon u - \varphi(x))] - \frac{1}{2}M,$$

可得结论 $\sup\limits_{\partial\Omega} u_{\nu\nu} \leqslant C$.

综上可证 $\sup\limits_{\partial\Omega} |u_{\nu\nu}| \leqslant C$.

§4 主要定理的证明

在这一节中, 给出定理 1.1–1.2 的证明思路. 结合第 3 节的先验估计和 Evan-Krylov 定理, 可得

$$|u|_{C^{2,\alpha}} \leqslant C,$$

其中 C 是一个一致常数, $0 < \alpha < 1$. 应用 Schauder 理论, 我们得到 u 的 $C^{3,\alpha}(\overline{\Omega})$ 估计. 通过连续性方法 (见文 [5]), 可以证明解的存在性, 用极值原理可以得到解的唯一性. 定理 1.2 的证明与 Chen-Wei [32] 的定理 1.3 类似.

参 考 文 献

[1] Chen C Q. On the elementary symmetric functions [R]. Preprint.

[2] Schneider R. Convex bodies: The Brunn-Minkowski theory [M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1993.

[3] Harvey R, Lawson H. Calibrated geometries [J]. *Acta Mathematica*, 1982, 148, 47–157.

[4] Fu J X, Yau S T. A Monge-Ampère type equation motivated by string theory [J]. *Communications in Analysis and Geometry*, 2007, 15(1):29–76.

[5] Fu J X, Yau S T. The theory of superstring with flux on non-Kähler manifolds and the complex Monge-Ampère equation [J]. *Journal of Differential Geometry*, 2008, 78(3):369–428.

[6] Guan P F, Ma X N. The Christoffel-Minkowski problem I, convexity of solutions of a Hessian equation [J]. *Inventiones Mathematicae*, 2003, 151(3):553–577.

[7] Guan P F, Li Y Y. $C^{1,1}$ regularity for solutions of a problem of Alexandrov [J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1997, 50(8):789–811.

[8] Nirenberg L. The Weyl and Minkowski problems in differential geometry in the large [J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1953, 6(3):337–394.

[9] Guan P F, Li Y Y. The Weyl problem with nonnegative Gauss curvature [J]. *Journal of Differential Geometry*, 1994, 39:331–342.

[10] Viaclovsky J. Conformal geometry, contact geometry and the calculus of variations [J]. *Duke Mathematical Journal*, 2000, 101(2):283–316.

[11] Gutiérrez C, Brezis H. The Monge-Ampère equation [M]. Boston: Birkhäuser, 2001.

[12] Caffarelli L, Nirenberg L, Spruck J. The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations I: Monge-Ampère equation [J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1984, 37(3):369–402.

[13] Caffarelli L, Nirenberg L, Spruck J. The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations II: Complex Monge-Ampère, and uniformly elliptic equations [J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1985, 38(2):209–252.

[14] Lions P L, Trudinger N, Urbas J. The Neumann problem for equations of Monge-Ampère type [J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1986, 39(4):539–563.

[15] Li S Y. On the Neumann problems for complex Monge-Ampère equations [J]. *Indiana University Mathematics Journal*, 1994, 43(4):1099–1122.

[16] Caffarelli L, Nirenberg L, Spruck J. The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations, III: Functions of the eigenvalues of the Hessian [J]. *Acta Mathematica*, 1985, 155(1):261–301.

[17] Trudinger N. On the Dirichlet problem for Hessian equations [J]. *Acta Mathematica*, 1995, 175(2):151–164.

[18] Wang X J. The k-Hessian equation [J]. *Geometric Analysis and PDEs*, 2009, 177–252.

[19] Trudinger N. On degenerate fully nonlinear elliptic equations in balls [J]. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 1987, 35(2):299–307.

[20] Ma X N, Qiu G H. The Neumann problem for Hessian equations [J]. *Communications in Mathematical Physics*, 2019, 366(1):1–28.

[21] Qiu G H, Xia C. Classical Neumann problems for Hessian equations and Alexandrov-Fenchel's inequalities [J]. *International Mathematics Research Notices*, 2019, 2019(20):6285–6303.

[22] Jiang F D, Trudinger N. Oblique boundary value problems for augmented Hessian equations II [J]. *Nonlinear Analysis*, 2017, 154:148–173.

[23] Jiang F D, Trudinger N. Oblique boundary value problems for augmented Hessian equations I [J]. *Bulletin of Mathematical Sciences*, 2018, 8(2):353–411.

[24] Jiang F D, Trudinger N. Oblique boundary value problems for augmented Hessian equations III [J]. *Communications in Partial Differential Equations*, 2019, 44(8):708–748.

[25] Chen C Q, Zhang D K. The Neumann problem of Hessian quotient equations [J]. *Bulletin of Mathematical Sciences*, 2021, 11(1):2050018.

[26] Guan P F, Zhang X W. A class of curvature type equations [J]. *Pure and Applied Mathematics Quarterly*, 2021, 17(3):865–907.

[27] Chen C Q, Chen L, Mei X Q, Xiang N. The classical Neumann problem for a class of mixed Hessian equations [J]. *Studies in Applied Mathematics*, 2022, 148(1):5–26.

[28] Guan B, Jiao H M. The Dirichlet problem for Hessian type elliptic equations on Riemannian manifolds [J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2016, 36(2):701–714.

[29] Chen X J, Lu W, Tu Q, Xiang N. Pogorelov estimates for a class of fully nonlinear equations [J]. *Nonlinear Analysis*, 2021, 212, 112482.

[30] Chen C Q. The interior gradient estimate of Hessian quotient equations [J]. *Journal of Differential Equations*, 2015, 259(3):1014–1023.

[31] Chou K S, Wang X J. A variational theory of the Hessian equation [J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2001, 54(9):1029–1064.

[32] Chen C Q, Wei W. The Neumann problem of complex Hessian quotient equations [J]. *International Mathematics Research Notices*, 2021, 23:17652–17672.

The Neumann Problem for a Class of Mixed-Type Hessian Equations

XU Botao[1] XIONG Yuni[2] XIANG Ni[1]

[1]Faculty of Mathematics and Statistics, Hubei University, Wuhan 430062, China. E-mail: 202321104011256@stu.hubu.edu.cn; nixiang@hubu.edu.cn

[2]Corresponding author. Faculty of Mathematics and Statistics, Hubei University, Wuhan 430062, China. E-mail: 202121104011767@stu.hubu.edu.cn

Abstract This paper derives the a priori estimates for a class of mixed-type Hessian equations with Neumann boundary conditions, and establishes the existence theorem for admissible solutions to the classical Neumann problem of such mixed-type Hessian equations.

Keywords Neumann problem, A priori estimate, Mixed-type Hessian equations

2020 MR Subject Classification 35J60, 35B45

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 46 No. 4, 2025
by ALLERTON PRESS, INC., USA