数 学 年 刊 A 辑
2025, 46(4):435–448
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2025.0027

光锥上完备类空超曲面的 Calabi-Bernstein 问题

张远征 [1]

提要 设 M^n 为 Lorentz-Minkowski 时空 $\mathbb{L}^{n+2}$ 中落在上光锥上的类空子流形, f 为由类光向量或单位类空向量所定义的 M^n 上的仿射函数. 在 $f \neq 0$ 处, 该文用 f 及其 Hessian 建立了子流形的基本方程. 作为应用, 在常纯量曲率的条件下, 运用广义极大原理证得: 上光锥中介于两同侧类光超平面 (或类时超平面) 的类空超曲面必为平坦空间 (或伪球面).

关键词 类空超曲面, 广义极大原理, 上光锥
MR (2020) 主题分类 53C42, 53C50
中图法分类 O186.86
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2025)04-0435-14

§1 引 言

时空中完备的类空超曲面具有很好的 Calabi-Bernstein 性质.例如, Lorentz-Minkowski 时空中仅有的完备极大超曲面是类空超平面 [1−2], 介于两个同心的上伪球面之间常平均曲率的完备类空超曲面必为伪球面 [3], 并且这类 Calabi-Bernstein 型的结果可以推广到广义 Robertson-Walker 时空的常平均曲率类空超曲面上 (见文 [4–10] 等).

设 $\mathbb{L}^{n+2}$ 为 $n+2$ 维 Lorentz-Minkowski 时空, Λ^+ 是其上光锥的未来分支, 称之为上光锥. 我们知道 $\mathbb{L}^{n+2}$ 中不过光锥顶点的类空、类时或类光超平面与上光锥的交分别是 n 维圆球面、伪球面或等距同胚于 $\mathbb{R}^n$ 的平坦空间 [11]. 本文试图在常平均曲率 (或常纯量曲率) 的完备类空超曲面中刻画光锥中伪球面和平坦空间的特征.

正如文 [12] 所指出的, 上光锥中的类空超曲面 M^n 均可定向, 因此将 M^n 视作 $\mathbb{L}^{n+2}$ 中余维数 2 的类空子流形, 其上必有全局定义的类光法标架 $\{\xi, \eta\}$. 自然地, 我们选取 ξ 为 M^n 位置向量, 而 η 可用一个正函数 u 来表示, 这就允许我们仅用 u 及其 Hessian 来表示 M^n 的第二基本形式和基本方程 (见 [11, 命题 3.1–3.2]).

为了便于讨论有关光锥中伪球面和平坦空间的 Calabi-Bernstein 型问题, 本文在第 3–4 节, 分别用类光向量和单位类空向量定义了 M^n 的函数 f, 并在 $f \neq 0$ 处, 沿用文 [11] 中方法给出了类光法标架 $\{\xi, \eta\}$ 的不同表达式, 同时用 f 及其 Hessian 建立了子流形的基本方程.

熟知, 广义极大原理是讨论 Calabi-Bernstein 型问题的重要分析工具 [2,7,13]. 早在 1967 年, Omori [14] 在截曲率下有界的完备黎曼流形引入了广义极大原理. 之后, Yau [15–16] 将此推广到 Ricci 曲率下有界的完备黎曼流形上, 即在这类流形 M 上, 任何上有界 C^2 类函数 $f: M \to \mathbb{R}$, 存在点列 $\{p_k\}_{k\in N}$, 使得

$$f(p_k) > \sup_M f - \frac{1}{k}, \quad \|\nabla f(p_k)\| < \frac{1}{k}, \quad \triangle f(p_k) < \frac{1}{k}. \tag{1.1}$$

本文 2025 年 4 月 6 日收到, 2025 年 12 月 16 日收到修改稿.

[1]上海财经大学数学学院, 上海 200433. E-mail: yzzh@mail.sufe.edu.cn

本文以 Omori-Yau 广义极大原理为核心工具, 在常平均曲率 (或常纯量曲率) 的条件下, 讨论了上光锥中介于两同侧类光超平面 (或类时超平面) 的类空超曲面的 Calabi-Bernstein 型问题, 并刻画了光锥中平坦空间、伪球面以及管状空间 $\mathbb{H}_+^{n-1}\times\mathbb{S}^1$ 的特征 (具体结果参见定理 3.1、定理 4.1 和定理 4.3 等). 以往关于 Calabi-Bernstein 型问题的研究结果, 多建立在外围空间为具有 $(1,n)$ 型度量的广义 Robertson-Walker 时空这一框架下; 而本文的工作, 则在具有 $(0,n)$ 型度量的光锥上, 得到了此类问题的相似结论, 进一步拓展了该领域的研究范围.

§2 预备

设 $\mathbb{L}^{n+2}$ 为 $n+2$ 维线性空间 $\mathbb{R}^{n+2}$, 赋予了 Lorentz 度量

$$\langle\cdot,\cdot\rangle=-\mathrm{d}x_0^2+\mathrm{d}x_1^2+\cdots+\mathrm{d}x_{n+1}^2,\tag{2.1}$$

其中 $(x_0,\cdots,x_{n+1})$ 为 $\mathbb{R}^{n+2}$ 的规范坐标. 称 $\langle x,x\rangle>0$, $\langle x,x\rangle<0$ 或 $\langle x,x\rangle=0$ 的非零向量 x 分别为类空、类时或类光向量. 对于类时和类光向量 x, 如果 $\langle x,\boldsymbol{e}_0\rangle<0$ (或 $\langle x,\boldsymbol{e}_0\rangle>0$), 其中 $\boldsymbol{e}_0=(1,0,\cdots,0)$, 就称 x 指向未来 (或指向过去).

余维数 2 的光滑浸入 $\psi: M^n\to\mathbb{L}^{n+2}$ 称为类空的, 如果 ψ 诱导的度量是 Riemann 度量. 用 $\overline{\nabla}$ 和 ∇ 分别表示 $\mathbb{L}^{n+2}$ 和 M^n 的 Levi-Civita 联络, $\nabla^\perp$ 为 M^n 在 $\mathbb{L}^{n+2}$ 中的法联络, 那么浸入 ψ 的 Gauss 和 Weingarten 公式分别为

$$\overline{\nabla}_XY=\nabla_XY-\sigma(X,Y),\quad \forall X,Y\in\mathfrak{X}(M)\tag{2.2}$$

和

$$\overline{\nabla}_X\zeta=A_\zeta X+\nabla_X^\perp\zeta,\quad \forall X\in\mathfrak{X}(M),\ \zeta\in\mathfrak{X}^\perp(M).\tag{2.3}$$

$A_\zeta:\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ 是 ζ 方向的 Weingarten 变换, 它是对称算子且满足

$$\langle A_\zeta X,Y\rangle=\langle\sigma(X,Y),\zeta\rangle.$$

定义 2.1 称局部标架 $\{\xi,\eta\}$ 为法丛 $\mathfrak{X}^\perp(M)$ 的类光法标架, 如果 $\xi,\eta\in\mathfrak{X}^\perp(M)$ 满足

$$\langle\xi,\xi\rangle=\langle\eta,\eta\rangle=0,\quad \langle\xi,\eta\rangle=-1,$$

且类光向量 ξ 和 η 均指向未来.

注 2.1 若 M^n 上有一整体定义且指向未来的类光法向量场 ξ, 则 M^n 可定向, 且存在唯一的 $\eta\in\mathfrak{X}^\perp(M)$, 使得 $\{\xi,\eta\}$ 成为一个整体有定义类光法标架. 进一步地, 若 ν 是 M^n 的单位类时法向量场, 那么 η 可表示为 [11]

$$\eta=-\frac{1}{2\langle\xi,\nu\rangle^2}\xi-\frac{1}{\langle\xi,\nu\rangle}\nu.\tag{2.4}$$

特别地, 文 [12] 指出上光锥中的类空超曲面均可定向, 因而其上必有整体定义的类光法标架.

在类光法标架 $\{\xi,\eta\}$ 下, 第二基本形式可写为

$$\sigma(X,Y)=-\langle A_\eta X,Y\rangle\xi-\langle A_\xi X,Y\rangle\eta,\quad \forall X,Y\in\mathfrak{X}(M).\tag{2.5}$$

定义 M^n 的平均曲率向量场为

$$\mathbf{H}=\frac{1}{n}\mathrm{tr}(\sigma)\in\mathfrak{X}^\perp(M),$$

那么 $\mathbf{H}$ 可表示为

$$\mathbf{H}=-h_\eta\xi-h_\xi\eta, \tag{2.6}$$

其中

$$h_\xi=\frac{1}{n}\mathrm{tr}(A_\xi),\quad h_\eta=\frac{1}{n}\mathrm{tr}(A_\eta)$$

称为 M^n 的类光平均曲率. 由 (2.6) 式易见

$$\langle\mathbf{H},\mathbf{H}\rangle=-2h_\xi h_\eta. \tag{2.7}$$

考虑 M^n 的曲率张量 $R(X,Y)Z=\nabla_{[X,Y]}Z-[\nabla_X,\nabla_Y]Z$, 利用 Gauss 公式 (2.2), 有

$$R(X,Y)Z=A_{\sigma(X,Z)}Y-A_{\sigma(Y,Z)}X,$$

因此 Ricci 曲率和纯量曲率分别为

$$\mathrm{Ric}(X,Y)=n\langle\mathbf{H},\sigma(X,Y)\rangle+\langle(A_\xi\circ A_\eta+A_\eta\circ A_\xi)X,Y\rangle, \tag{2.8}$$

$$R=n^2\langle\mathbf{H},\mathbf{H}\rangle+2\mathrm{tr}(A_\xi\circ A_\eta). \tag{2.9}$$

§3　介于两平行类光超平面的类空超曲面

$\mathbb{L}^{n+2}$ 中的光锥为子集

$$\Lambda=\{x\in\mathbb{L}^{n+2}\mid\langle x,x\rangle=0,\ x\neq\mathbf{0}\},$$

其未来分支为

$$\Lambda^+=\{x\in\mathbb{L}^{n+2}\mid\langle x,x\rangle=0,\ x_0>0\}.$$

由 [11, 推论 4.3] 看到, Λ^+ 中完备的全脐类空超曲面必为超平面与上光锥的交

$$\Sigma(\mathbf{a},r):=\pi(\mathbf{a},r)\cap\Lambda^+=\{x\in\Lambda^+\mid\langle x,\mathbf{a}\rangle=-r\},$$

其中 r 是正常数, 而

$$\pi(\mathbf{a},r)=\{x\in\mathbb{L}^{n+2}\mid\langle x,\mathbf{a}\rangle=-r\}$$

是垂直于 $\mathbf{a}$ 的超平面, 这里的非零向量 $\mathbf{a}$ 满足 $\langle\mathbf{a},\mathbf{a}\rangle=\epsilon\in\{-1,0,1\}$, 且当 $\epsilon\in\{-1,0\}$ 时, 我们约定 $\mathbf{a}$ 指向未来. 具体地, 当 $\epsilon=-1$ 时, 相应的 $\Sigma(\mathbf{a},r)$ 是半径 r 的 n 维圆球面; 当 $\epsilon=1$ 时, $\Sigma(\mathbf{a},r)$ 是半径 r 的 n 维伪球面; 而当 $\epsilon=0$ 时, $\Sigma(\mathbf{a},r)$ 则是等距同胚于 $\mathbb{R}^n$ 的平坦空间.

本节考虑上光锥中类空超曲面介于两同侧平行类光超平面之间的 Calabi-Bernstein 型问题. 现设 $\mathbf{a}$ 为指向未来的类光向量, 用 $l_\mathbf{a}$ 表示始于原点、方向 $\mathbf{a}$ 的射线, 显而易见过原点的类光超平面 $\pi(\mathbf{a},0)$ 与上光锥相切于射线 $l_\mathbf{a}$.

从现在开始本节总假设类空浸入 $\psi:M^n\to\Lambda^+\subset\mathbb{L}^{n+2}$ 落在上光锥中, 且与射线 $l_\mathbf{a}$ 没有交点, 即

$$\langle\psi,\psi\rangle=0,\quad\langle\psi,\mathbf{a}\rangle<0.$$

微分 $\langle\psi,\psi\rangle=0$, 可得

$$\langle\mathrm{d}\psi,\psi\rangle=\sum_{i=1}^n\langle e_i,\psi\rangle\omega_i=0,$$

其中 $\{e_i\}$ 为 M 的切标架, $\{\omega_i\}$ 为其对偶标架, 这表明 $\psi \in \mathfrak{X}^{\perp}(M)$, 自然地, 可选取 $\xi = \psi$. 在此情况下, 如文 [11] 所做, 我们计算 η 的表达式, 使得 $\{\xi, \eta\}$ 成为 M^n 的一个类光法标架.

考虑 M^n 上的仿射函数 $f(\psi) = -\langle \psi, \mathbf{a} \rangle > 0$, 其梯度为

$$\nabla f = -\sum_{i=1}^{n} \langle e_i, \mathbf{a} \rangle e_i = -\mathbf{a}^{\top},$$

这里的 $\mathbf{a}^{\top}$ 是 $\mathbf{a}$ 在 $\mathfrak{X}(M)$ 上的切投影. 用 $\mathbf{a}^{\perp}$ 表示 $\mathbf{a}$ 在法丛 $\mathfrak{X}^{\perp}(M)$ 上的投影, 并将 $\mathbf{a}$ 正交分解为

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^{\top} + \mathbf{a}^{\perp} = -\nabla f + \mathbf{a}^{\perp},$$

由 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 0$ 和 $\langle \psi, \nabla f \rangle = 0$, 有

$$\langle \mathbf{a}^{\perp}, \mathbf{a}^{\perp} \rangle = -\|\nabla f\|^2, \quad \langle \psi, \mathbf{a}^{\perp} \rangle = -f. \tag{3.1}$$

引入 M^n 的法向量场

$$N = \frac{1}{2f}\psi + \mathbf{a}^{\perp} = \frac{1}{2f}\psi + \mathbf{a} + \nabla f,$$

利用 (3.1), 有

$$\langle N, N \rangle = -(1 + \|\nabla f\|^2) < 0,$$

因此

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}} N = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}} \Big(\frac{1}{2f}\psi + \mathbf{a} + \nabla f \Big) \tag{3.2}$$

是 M^n 上整体有定义的单位类时法向量场, 且

$$\langle \xi, \nu \rangle = \langle \psi, \nu \rangle = -\frac{f}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}} < 0.$$

于是由 (2.4) 可知

$$\eta = -\frac{1}{2\langle \xi, \nu \rangle^2}\xi - \frac{1}{\langle \xi, \nu \rangle}\nu = -\frac{\|\nabla f\|^2}{2f^2}\psi + \frac{1}{f}(\mathbf{a} + \nabla f)$$

是 M^n 上整体有定义的类光法向量场, 且 $\langle \xi, \eta \rangle = -1$.

综上, 我们有下面命题.

命题 3.1 设类空浸入 $\psi : M^n \to \Lambda^+ \subset \mathbb{L}^{n+2}$ 落在上光锥中, 且与射线 $l_{\mathbf{a}}$ 没有交点, 则

$$\xi = \psi, \quad \eta = -\frac{\|\nabla f\|^2}{2f^2}\psi + \frac{1}{f}(\mathbf{a} + \nabla f) \tag{3.3}$$

为 M^n 上整体有定义的类光法标架.

注 3.1 设 $\boldsymbol{e}_0$ 为指向未来的单位类时向量, 那么 $u = -\langle \psi, \boldsymbol{e}_0 \rangle > 0$. 利用这个函数, η 可整体表示为 (参见 [11, (3.2) 式] 和 [12, 引理 4.1])

$$\eta = -\frac{1 + \|\nabla u\|^2}{2u^2}\psi + \frac{1}{u}(\boldsymbol{e}_0 + \nabla u),$$

与此相比, (3.3) 仅在 $\langle \psi, \mathbf{a} \rangle \neq 0$ 处成立.

命题 3.2 设类空浸入 $\psi: M^n \to \Lambda^+ \subset \mathbb{L}^{n+2}$ 落在上光锥中, 且与射线 $l_{\mathbf{a}}$ 没有交点, 则

$$A_\xi = I, \quad A_\eta = -\frac{\|\nabla f\|^2}{2f^2} I + \frac{1}{f}\nabla^2 f, \tag{3.4}$$

其中 ∇^2 为 M^n 的 Hessian: $\nabla^2 f(X) = \nabla_X \nabla f$, 从而

$$h_\xi = \frac{1}{n}\mathrm{tr}(A_\xi) = 1, \quad h_\eta = \frac{1}{n}\mathrm{tr}(A_\eta) = -\frac{\|\nabla f\|^2}{2f^2} + \frac{1}{nf}\triangle f, \tag{3.5}$$

其中 $\triangle f = \mathrm{tr}(\nabla^2 f)$ 为 f 的 Laplace.

证 $A_\xi = I$ 是显然的. 由 (3.3), 有

$$A_\eta = -\frac{\|\nabla f\|^2}{2f^2} A_\xi + \frac{1}{f} A_{\mathbf{a}^\perp}. \tag{3.6}$$

下求 $A_{\mathbf{a}^\perp}$ 的表达式. 利用 Gauss 公式 (2.2), 对 $\mathbf{a}^\perp$ 求共变导数可得

$$\overline{\nabla}_X \mathbf{a}^\perp = \overline{\nabla}_X(\mathbf{a} + \nabla f) = -\sigma(X, \nabla f) + \nabla_X \nabla f, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

因此由 Weingarten 公式 (2.3), 有

$$A_{\mathbf{a}^\perp}(X) = (\overline{\nabla}_X \mathbf{a}^\perp)^\top = \nabla^2 f(X),$$

即 $A_{\mathbf{a}^\perp} = \nabla^2 f$, 再将此代入 (3.6) 即得 (3.4). 最后对 (3.4) 取迹就有 (3.5).

联合 (2.7)–(2.9) 和 (3.5), 得到如下推论.

推论 3.1 设类空浸入 $\psi: M^n \to \Lambda^+ \subset \mathbb{L}^{n+2}$ 落在上光锥中, 且与射线 $l_{\mathbf{a}}$ 没有交点, 则

$$\langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle = -2h_\eta = \frac{\|\nabla f\|^2}{f^2} - \frac{2}{nf}\triangle f, \tag{3.7}$$

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = (n-1)\langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle \langle X, Y \rangle + \frac{n-2}{nf}(\triangle f \langle X, Y \rangle - n\nabla^2 f(X, Y)), \tag{3.8}$$

$$R = n(n-1)\langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle = \frac{n-1}{f^2}(n\|\nabla f\|^2 - 2f\triangle f). \tag{3.9}$$

定理 3.1 设类空浸入 $\psi: M^n \to \Lambda^+ \subset \mathbb{L}^{n+2}$ 落在上光锥中, M^n 完备且有常纯量曲率 R, 即 h_η 为常数. 如果存在指向未来的类光向量 $\mathbf{a}$, 使得 M^n 落在垂直于 $\mathbf{a}$ 的两个平行的同侧类光超平面所围的带型区域中, 即 $f(\psi) = -\langle \psi, \mathbf{a} \rangle$ 满足

$$\sup_M f < \infty, \quad \inf_M f > 0,$$

则 M^n 必为某类光超平面 $\pi(\mathbf{a}, r)$ 与上光锥的交, 即 M^n 是平坦空间 $\Sigma(\mathbf{a}, r)$.

证 仅需证明 f 为常数. 对应于类光向量 $\mathbf{a}$, $\Sigma(\mathbf{a}, 1)$ 是等距于 $\mathbb{R}^n$ 的平坦空间, 其上的诱导度量记为 $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$. 由 $f(\psi) > 0$, 令

$$\widetilde{\psi} = f(\psi)^{-1}\psi,$$

显然 $\langle \widetilde{\psi}, \widetilde{\psi} \rangle = 0$, $\langle \widetilde{\psi}, \mathbf{a} \rangle = -1$, 因此伸缩映射 $\widetilde{\psi}: M^n \to \Sigma(\mathbf{a}, 1) \subset \Lambda^+$ 有定义. 对任意 $X \in T_\psi M$, 微分上式, 得

$$\mathrm{d}\widetilde{\psi}(X) = X(f^{-1})\psi + f^{-1}X.$$

因为 $\langle \psi, X\rangle = 0$, 所以

$$\langle \mathrm{d}\widetilde{\psi}(X), \mathrm{d}\widetilde{\psi}(X)\rangle = \frac{1}{f^2}\langle X, X\rangle \geqslant \frac{1}{\sup\limits_M f^2}\langle X, X\rangle, \tag{3.10}$$

结合条件 $\sup\limits_M f < \infty$, 上式表明 $\sup\limits_M f \cdot \widetilde{\psi}$ 是长度增长的映射, 所以 $\widetilde{\psi}$ 是局部微分同胚, 再结合 M^n 的完备性导出 $\widetilde{\psi}(M^n) = \Sigma(\mathbf{a}, 1)$, 且 $\widetilde{\psi}$ 是覆盖映射 (见文 [17]). 又 $\Sigma(\mathbf{a}, 1)$ 是单连通的, 所以 $\widetilde{\psi}$ 是一整体的微分同胚, 从而 $f \circ \widetilde{\psi}^{-1}$ 在 $\Sigma(\mathbf{a}, 1)$ 上整体有定义.

另外, (3.10) 还意味着 $\widetilde{\psi}: (M^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_M) \to (\Sigma(\mathbf{a}, 1), \langle\cdot,\cdot\rangle_0)$ 为共形映射, 即

$$\widetilde{\psi}^*\langle\cdot,\cdot\rangle_0 = \frac{1}{f^2}\langle\cdot,\cdot\rangle_M,$$

由此可得 (见文 [11])

$$\|\cdot\|_M^2 = f^2\|\cdot\|_0^2, \tag{3.11}$$

$$\nabla f = \frac{1}{f^2}\nabla_0 f, \tag{3.12}$$

$$\nabla^2 f = \nabla_0^2 f - \frac{2}{f}\mathrm{d}f \otimes \mathrm{d}f + \frac{1}{f}\|\nabla_0 f\|_0^2\langle\cdot,\cdot\rangle_0, \tag{3.13}$$

其中 ∇_0 和 ∇_0^2 分别是关于 $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ 的梯度和 Hessian 算子. 因此利用 (3.11)–(3.13), 有

$$\|\nabla f\|^2 = \frac{1}{f^2}\|\nabla_0 f\|_0^2, \tag{3.14}$$

$$\triangle f = \frac{1}{f^2}\triangle_0 f + \frac{n-2}{f^3}\|\nabla_0 f\|_0^2. \tag{3.15}$$

把 (3.14)–(3.15) 代入 (3.9), 得

$$R = -\frac{(n-1)(n-4)}{f^4}\|\nabla_0 f\|_0^2 - \frac{2(n-1)}{f^3}\triangle_0 f. \tag{3.16}$$

现对 $\Sigma(\mathbf{a}, 1)$ 上的有界函数 $f \circ \widetilde{\psi}^{-1}$ 运用 Omori-Yau 广义极大原理 (1.1): 存在 $\Sigma(\mathbf{a}, 1)$ 上的点列 $\{p_k\}_{k\in N}$ 和 $\{q_k\}_{k\in N}$, 使得

$$f(p_k) > \sup_M f - \frac{1}{k}, \quad \|\nabla_0 f(p_k)\|_0 < \frac{1}{k}, \quad \triangle_0 f(p_k) < \frac{1}{k}, \tag{3.17}$$

$$f(q_k) < \inf_M f + \frac{1}{k}, \quad \|\nabla_0 f(q_k)\|_0 < \frac{1}{k}, \quad \triangle_0 f(q_k) > -\frac{1}{k}. \tag{3.18}$$

联合 (3.16)–(3.17), 在点 p_k 处, 有

$$R \geqslant -\frac{(n-1)(n-4)}{f^4(p_k)}\|\nabla_0 f(p_k)\|_0^2 - \frac{2(n-1)}{kf^3(p_k)}.$$

令 $k \to \infty$, 并注意到 $f(p_k) \to \sup f < \infty$, $\|\nabla_0 f(p_k)\|_0 \to 0$, 可得 $R \geqslant 0$.

另一方面, 由 (3.16) 和 (3.18), 在点 q_k 处, 有

$$R \leqslant -\frac{(n-1)(n-4)}{f^4(q_k)}\|\nabla_0 f(q_k)\|_0^2 + \frac{2(n-1)}{kf^3(q_k)}.$$

令 $k \to \infty$, 得 $R \leqslant 0$. 因此 $R = 0$. 代入 (3.16), 有

$$(n-4)\|\nabla_0 f\|_0^2 + 2f\triangle_0 f = 0.$$

下面分两种情况消去上式中的梯度项:

$n = 2$: 令 $f = \mathrm{e}^{-u}$, 上式化为 $\triangle_0 u = 0$;

$n \geqslant 3$: 令 $f = u^{\frac{2}{n-2}}$, 上式也化为 $\triangle_0 u = 0$.

由 f 的上下界条件知上述的 u 均有界, 于是根据欧氏空间的刘维尔定理, 有界调和函数 u 为常数, 这就证明了 f 为常数.

定理 3.2　设完备的类空浸入 $\psi : M^n \to \Lambda^+ \subset \mathbb{L}^{n+2}$ 落在上光锥中, 如果存在指向未来的类光向量 $\mathbf{a}$, 使得

$$f^* := \sup_M f < \infty, \quad f_* := \inf_M f > 0,$$

且平均曲率 h_ν 为常数 (ν 由 (3.2) 定义), 则 M^n 必为某类光超平面 $\pi(\mathbf{a}, r)$ 与上光锥的交, 即 M^n 是平坦空间 $\Sigma(\mathbf{a}, r)$.

证　在标架 $\{\xi, \eta\}$ 下, ν 可表示为

$$\nu = \frac{\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}}{2f}\xi + \frac{f}{\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}}\eta,$$

因此

$$A_\nu = \frac{\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}}{2f}I + \frac{f}{\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}}A_\eta,$$

于是利用 (3.5), 可得

$$h_\nu = \frac{1}{\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}}\Big(\frac{1}{2f} + \frac{\triangle f}{n}\Big).$$

由定理 3.1 的证明知伸缩映射 $\widetilde{\psi} = f(\psi)^{-1}\psi$ 是共形的微分同胚, 因此利用 (3.14)–(3.15), 上式可写为

$$h_\nu = \frac{f}{\sqrt{f^2+\|\nabla^0 f\|_0^2}}\Big(\frac{1}{2f} + \frac{1}{nf^2}\triangle_0 f + \frac{n-2}{nf^3}\|\nabla_0 f\|_0^2\Big). \tag{3.19}$$

根据 Omori-Yau 广义极大原理: 存在 $\Sigma(\mathbf{a}, 1)$ 上的点列 $\{p_k\}_{k\in N}$ 和 $\{q_k\}_{k\in N}$, 使得 (3.17)–(3.18) 成立, 因此

$$\begin{aligned} h_\nu &\leqslant \frac{f(p_k)}{\sqrt{f^2(p_k)+\|\nabla^0 f(p_k)\|_0^2}}\Big(\frac{1}{2f(p_k)} + \frac{1}{nkf(p_k)^2} + \frac{n-2}{nf(p_k)^3}\|\nabla_0 f(p_k)\|_0^2\Big), \\ h_\nu &\geqslant \frac{f(q_k)}{\sqrt{f^2(q_k)+\|\nabla^0 f(q_k)\|_0^2}}\Big(\frac{1}{2f(q_k)} - \frac{1}{nkf(q_k)^2} + \frac{n-2}{nf(q_k)^3}\|\nabla_0 f(q_k)\|_0^2\Big). \end{aligned}$$

令 $k \to \infty$, 并利用

$$\begin{aligned} &\lim_{k\to\infty} f(p_k) = f^*, \quad \lim_{k\to\infty} f(q_k) = f_*, \\ &\lim_{k\to\infty} \|\nabla_0 f(p_k)\|_{g_0} = \lim_{k\to\infty} \|\nabla_0 f(q_k)\|_{g_0} = 0, \end{aligned}$$

得到

$$\frac{1}{2f_*} \leqslant h_\nu \leqslant \frac{1}{2f^*},$$

而 $0 < f_* \leqslant f^*$, 所以只能有 $f_* = f^* := r$, 即 $f(\psi) = r$, 这就证明了 M^n 是平坦空间 $\Sigma(\mathbf{a}, r)$.

§4 介于两平行类时超平面的类空超曲面

本节考虑光锥中类空超曲面介于两同侧平行类时超平面的 Calabi-Bernstein 型问题. 设 $\mathbf{b}$ 为单位类空向量, 那么过原点的类时超平面 $\pi(\mathbf{b},0)$ 将上光锥分为两部分:

$$\Lambda_1^+=\{x\in\Lambda^+\mid\langle x,\mathbf{b}\rangle<0\}$$

和

$$\Lambda_2^+=\{x\in\Lambda^+\mid\langle x,\mathbf{b}\rangle>0\}.$$

显见, 上光锥中伪球面

$$\Sigma(\mathbf{b},r)=\{x\in\Lambda^+\mid\langle x,\mathbf{b}\rangle=-r\}$$

落在开区域 Λ_1^+ 中.

设类空浸入 $\psi:M^n\to\Lambda_1^+\subset\mathbb{L}^{n+2}$ 落在上光锥的开区域 Λ_1^+ 中, 即有

$$\langle\psi,\psi\rangle=0,\quad\langle\psi,\mathbf{b}\rangle<0.$$

于是 M^n 上的仿射函数 $f(\psi)=-\langle\psi,\mathbf{b}\rangle>0$, 其梯度为

$$\nabla f=-\mathbf{b}^\top.$$

由 $\langle\mathbf{b},\mathbf{b}\rangle=1$ 和 $\langle\psi,\nabla f\rangle=0$, 可得

$$\langle\mathbf{b}^\perp,\mathbf{b}^\perp\rangle=1-\|\nabla f\|^2,\quad\langle\psi,\mathbf{b}^\perp\rangle=-f.$$

由此直接验证, 可知

$$\widetilde{\nu}=\frac{1}{\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}}\Big(\frac{1}{f}\psi+\mathbf{b}+\nabla f\Big)\tag{4.1}$$

是在 M^n 上整体有定义的单位类时法向量场. 令 $\xi=\psi$, 则 η 可表示为

$$\eta=-\frac{1}{2\langle\xi,\widetilde{\nu}\rangle^2}\xi-\frac{1}{\langle\xi,\widetilde{\nu}\rangle}\widetilde{\nu}=\frac{1-\|\nabla f\|^2}{2f^2}\xi+\frac{1}{f}(\mathbf{b}+\nabla f),\tag{4.2}$$

其中 $\{\xi,\eta\}$ 为 M^n 上整体有定义的类光法标架. 与命题 3.2 的推导一样, 我们有以下命题.

命题 4.1 设类空浸入 $\psi:M^n\to\Lambda_1^+\subset\mathbb{L}^{n+2}$ 落在上光锥的开区域 Λ_1^+ 中, 则

$$A_\xi=I,\quad A_\eta=\frac{1-\|\nabla f\|^2}{2f^2}I+\frac{1}{f}\nabla^2 f,\tag{4.3}$$

$$h_\xi=\frac{1}{n}\mathrm{tr}(A_\xi)=1,\quad h_\eta=\frac{1}{n}\mathrm{tr}(A_\eta)=\frac{1-\|\nabla f\|^2}{2f^2}+\frac{1}{nf}\triangle f,\tag{4.4}$$

$$R=-2n(n-1)h_\eta=-\frac{n(n-1)}{f^2}+\frac{n-1}{f^2}(n\|\nabla f\|^2-2f\triangle f).\tag{4.5}$$

定理 4.1 设 $\psi:M^n\to\Lambda^+\subset\mathbb{L}^{n+2}$ 为具有常纯量曲率 R 的连通、完备类空超曲面, 如果存在单位类空向量 $\mathbf{b}$, 使得 M^n 上的函数 $f(\psi)=-\langle\psi,\mathbf{b}\rangle$ 处处非零 (不妨设 $f>0$), 且

$$f^*:=\sup_M f<\infty,\quad f_*:=\inf_M f>0,$$

即 M^n 落在以 $\mathbf{b}$ 为法向量的两个同侧的平行类时超平面所围的带型区域中, 则 M^n 必为某伪球面 $\Sigma(\mathbf{b},r)$, 这里 r 是正常数.

证 类时超平面 $\pi(\mathbf{b},1)$ 与上光锥的交是单位伪球面的一分支, 记为 $\mathbb{H}^n_+$. 由 M^n 的完备性, f 上有界和 $\mathbb{H}^n_+$ 的单连通性, 沿用定理 3.1 的证明可知: 共形的伸缩映射 $\widetilde{\psi}: M^n \to \Sigma(\mathbf{b},1)=\mathbb{H}^n_+ \subset \Lambda^+$,

$$\widetilde{\psi}=f(\psi)^{-1}\psi$$

是到上的微分同胚, 从而 f 在 $\mathbb{H}^n_+$ 上整体有定义. 再由共形关系 $\widetilde{\psi}^*\langle\cdot,\cdot\rangle_0=\frac{1}{f^2}\langle\cdot,\cdot\rangle_M$, 其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ 是 $\mathbb{H}^n_+$ 的标准度量, 有 (3.14)–(3.15), 于是 M^n 的纯量曲率公式 (4.5) 可以改写成

$$R=-n(n-1)f^{-2}-(n-1)(n-4)f^{-4}\|\nabla^0 f\|_0^2-2(n-1)f^{-3}\triangle_0 f. \tag{4.6}$$

对于 $\mathbb{H}^n_+$ 上的有界函数 f, 根据 Omori-Yau 广义极大原理: 存在 $\mathbb{H}^n_+$ 上的点列 $\{p_k\}_{k\in N}$ 和 $\{q_k\}_{k\in N}$, 使得

$$f(p_k)>f^*-\frac{1}{k},\quad \|\nabla^0 f(p_k)\|_0<\frac{1}{k},\quad \triangle_0 f(p_k)<\frac{1}{k}, \tag{4.7}$$

$$f(q_k)<f_*+\frac{1}{k},\quad \|\nabla^0 f(q_k)\|_0<\frac{1}{k},\quad \triangle_0 f(q_k)>-\frac{1}{k}. \tag{4.8}$$

联合 (4.6) 和 (4.7), 在点 p_k 处, 有

$$R\geqslant -n(n-1)f^{-2}(p_k)-(n-1)(n-4)f^{-4}(p_k)\|\nabla^0 f(p_k)\|_0^2-\frac{2(n-1)}{k}f^{-3}(p_k).$$

令 $k\to\infty$, 并注意到 $f(p_k)\to f^*$, $\|\nabla^0 f(p_k)\|_0\to 0$, 可得

$$R\geqslant -n(n-1)f^{*-2}.$$

同样地, 由 (4.6) 和 (4.8), 在点 q_k 处, 有

$$R\leqslant -n(n-1)f^{-2}(q_k)-(n-1)(n-4)f^{-4}(q_k)\|\nabla^0 f(q_k)\|_0^2+\frac{2(n-1)}{k}f^{-3}(q_k),$$

令 $k\to\infty$, 可得

$$R\leqslant -n(n-1)f_*^{-2},$$

于是

$$\frac{1}{f_*^2}\leqslant -\frac{R}{n(n-1)}\leqslant \frac{1}{f^{*2}},$$

而 $f_*\leqslant f^*$, 所以 $f_*=f^*$, 这就证明了 $f(\psi)$ 是常数, 记为 r, 故 $M^n=\Sigma(\mathbf{b},r)$.

与定理 3.2 相仿, 我们可建立如下结果.

定理 4.2 设连通、完备的类空浸入 $\psi: M^n\to\Lambda^+\subset\mathbb{L}^{n+2}$ 落在上光锥中, 如果存在单位类空向量 $\mathbf{b}$, 使得 M^n 上的函数 $f(\psi)=-\langle\psi,\mathbf{b}\rangle$ 处处非零 (不妨设 $f>0$),

$$\sup_M f<\infty,\quad \inf_M f>0,$$

且单位类时方向 $\widetilde{\nu}$ 的平均曲率 $h_{\widetilde{\nu}}$ 为常数, 则 M^n 必为某伪球面 $\Sigma(\mathbf{b},r)$.

最后, 我们考虑上光锥中管状类空超曲面 $\mathbb{H}^{n-1}_+\times\mathbb{S}^1$. 定义映射 $\phi_0:\mathbb{H}^{n-1}_+\times\mathbb{S}^1\to\mathbb{L}^{n+2}$ 为

$$\phi_0(x,\theta)=(x,\cos\theta,\sin\theta),$$

其中

$$\mathbb{H}^{n-1}_+=\{x=(x_0,\cdots,x_{n-1})\in\mathbb{L}^n\mid\langle x,x\rangle=-1,\ x_0>0\}$$

为上伪球面, 易见 ϕ_0 落在上光锥中, 且具有常纯量曲率.

设类空浸入 $\psi: M^n \to \Lambda^+ \subset \mathbb{L}^{n+2}$ 落在上光锥中, π^2 是 $\mathbb{L}^{n+2}$ 中的二维类空平面, 取 π^2 的一组单位正交基为 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$, 那么 M^n 的位置向量到 π^2 的投影向量的长度为

$$u(\psi) = \sqrt{f_1(\psi)^2 + f_2(\psi)^2},$$

其中 $f_i(\psi) = -\langle \psi, \mathbf{b}_i \rangle, \ i = 1, 2.$

引理 4.1 $\langle f_2\mathbf{b}_1^\perp - f_1\mathbf{b}_2^\perp, f_2\mathbf{b}_1^\perp - f_1\mathbf{b}_2^\perp \rangle = 0.$

证 $\forall p \in M^n$, 当 $f_1(p)f_2(p) = 0$ 时, 不妨设

$$f_1(p) = -\langle \psi(p), \mathbf{b}_1 \rangle = 0,$$

即 $\langle \xi(p), \mathbf{b}_1^\perp(p) \rangle = 0$, 因此在类光标架 $\{\xi, \eta\}$ 下,

$$\mathbf{b}_1^\perp(p) = -\langle \eta(p), \mathbf{b}_1 \rangle \xi(p),$$

于是

$$\langle f_2\mathbf{b}_1^\perp - f_1\mathbf{b}_2^\perp, f_2\mathbf{b}_1^\perp - f_1\mathbf{b}_2^\perp \rangle(p) = f_2^2(p)\langle \mathbf{b}_1^\perp, \mathbf{b}_1^\perp \rangle(p) = 0.$$

当 $f_1(p)f_2(p) \neq 0$ 时, 由 (4.2) 知, η 局部地可表示成

$$\eta = \frac{1 - \|\nabla f_i\|^2}{2f_i^2}\xi + \frac{1}{f_i}\mathbf{b}_i^\perp, \quad i = 1, 2,$$

从而

$$f_2\mathbf{b}_1^\perp - f_1\mathbf{b}_2^\perp \parallel \xi,$$

因此

$$\langle f_2\mathbf{b}_1^\perp - f_1\mathbf{b}_2^\perp, f_2\mathbf{b}_1^\perp - f_1\mathbf{b}_2^\perp \rangle = 0.$$

推论 4.1 设 $u = \sqrt{f_1(\psi)^2 + f_2(\psi)^2} > 0$, 则

$$\|\nabla u\|^2 = \|\nabla f_1\|^2 + \|\nabla f_2\|^2 - 1.$$

证 由 $\mathbf{b}_i = \mathbf{b}_i^\top + \mathbf{b}_i^\perp = -\nabla f_i + \mathbf{b}_i^\perp$, $\|\mathbf{b}_i\| = 1 \ (i = 1, 2)$ 和 $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle = 0$, 易得

$$\|\nabla f_i\|^2 = 1 - \langle \mathbf{b}_i^\perp, \mathbf{b}_i^\perp \rangle, \quad \langle \nabla f_1, \nabla f_2 \rangle = -\langle \mathbf{b}_1^\perp, \mathbf{b}_2^\perp \rangle.$$

因此利用引理 4.1, 由 $u\nabla u = f_1\nabla f_1 + f_2\nabla f_2$, 可得

$$\begin{aligned}
u^2\|\nabla u\|^2 &= f_1^2\|\nabla f_1\|^2 + f_2^2\|\nabla f_2\|^2 + 2f_1f_2\langle \nabla f_1, \nabla f_2 \rangle \\
&= (u^2 - f_2^2)\|\nabla f_1\|^2 + (u^2 - f_1^2)\|\nabla f_2\|^2 - 2f_1f_2\langle \mathbf{b}_1^\perp, \mathbf{b}_2^\perp \rangle \\
&= u^2(\|\nabla f_1\|^2 + \|\nabla f_2\|^2) - f_2^2(1 - \langle \mathbf{b}_1^\perp, \mathbf{b}_1^\perp \rangle) - f_1^2(1 - \langle \mathbf{b}_2^\perp, \mathbf{b}_2^\perp \rangle) - 2f_1f_2\langle \mathbf{b}_1^\perp, \mathbf{b}_2^\perp \rangle \\
&= u^2(\|\nabla f_1\|^2 + \|\nabla f_2\|^2) - u^2 + \langle f_2\mathbf{b}_1^\perp - f_1\mathbf{b}_2^\perp, f_2\mathbf{b}_1^\perp - f_1\mathbf{b}_2^\perp \rangle \\
&= u^2(\|\nabla f_1\|^2 + \|\nabla f_2\|^2) - u^2,
\end{aligned}$$

消去 u^2 即得所需.

推论 4.2 设类空浸入

$$\psi: M^n \to \Lambda^+ \subset \mathbb{L}^{n+2}$$

落在上光锥中, $\{\xi=\psi,\eta\}$ 为 M^n 的类光法标架. 如果 M^n 的位置向量到类空平面 $\pi^2=\mathrm{span}\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2\}$ 的投影向量长度

$$u(\psi)=\sqrt{f_1(\psi)^2+f_2(\psi)^2}>0,$$

则 η 可表示为

$$\eta=\frac{1-\|\nabla u\|^2}{2u^2}\xi+\frac{1}{u^2}(f_1\mathbf{b}_1^\perp+f_2\mathbf{b}_2^\perp), \tag{4.9}$$

相应的平均曲率函数为

$$h_\eta=\frac{n-2}{2nu^2}-\frac{\|\nabla u\|^2}{2u^2}+\frac{1}{nu}\triangle u. \tag{4.10}$$

因而

$$R=-2n(n-1)h_\eta=-\frac{(n-1)(n-2)}{u^2}+\frac{n-1}{u^2}(n\|\nabla u\|^2-2u\triangle u). \tag{4.11}$$

证 在 $f_1\neq 0$ 处, 由 (4.2),

$$2f_1^2\eta=(1-\|\nabla f_1\|^2)\xi+2f_1\mathbf{b}_1^\perp. \tag{4.12}$$

而在 $f_1=-\langle\psi,\mathbf{b}_1\rangle=0$, 即 $\langle\xi,\mathbf{b}_1^\perp\rangle=0$ 处, $\mathbf{b}_1^\perp\parallel\xi$, 所以 $\|\mathbf{b}_1^\perp\|^2=0$, 则

$$1-\|\nabla f_1\|^2=\|\mathbf{b}_1\|^2-\|\mathbf{b}_1^\top\|^2=\|\mathbf{b}_1^\perp\|^2=0,$$

这表明 (4.12) 在 $f_1=0$ 处也成立. 同样对 f_2, 有

$$2f_2^2\eta=(1-\|\nabla f_2\|^2)\xi+2f_2\mathbf{b}_2^\perp. \tag{4.13}$$

利用推论 4.1, 对 (4.12)–(4.13) 作和, 可得

$$\begin{aligned}2u^2\eta&=(2-\|\nabla f_1\|^2-\|\nabla f_2\|^2)\xi+2(f_1\mathbf{b}_1^\perp+f_2\mathbf{b}_2^\perp)\\&=(1-\|\nabla u\|^2)\xi+2(f_1\mathbf{b}_1^\perp+f_2\mathbf{b}_2^\perp),\end{aligned}$$

这就导出 (4.9). 从而

$$A_\eta=\frac{1-\|\nabla u\|^2}{2u^2}I+\frac{1}{u^2}(f_1A_{\mathbf{b}_1^\perp}+f_2A_{\mathbf{b}_2^\perp}).$$

又利用 Gauss 和 Weingarten 公式 (2.2)–(2.3), 可得 $A_{\mathbf{b}_i^\perp}=\nabla^2 f_i$, 于是

$$A_\eta=\frac{1-\|\nabla u\|^2}{2u^2}I+\frac{1}{u^2}(f_1\nabla^2 f_1+f_2\nabla^2 f_2),$$

取迹,

$$h_\eta=\frac{1}{n}\mathrm{tr}(A_\eta)=\frac{1-\|\nabla u\|^2}{2u^2}+\frac{1}{nu^2}(f_1\triangle f_1+f_2\triangle f_2), \tag{4.14}$$

注意到

$$\begin{aligned}\triangle u^2&=2(f_1\triangle f_1+f_2\triangle f_2)+2(\|\nabla f_1\|^2+\|\nabla f_2\|^2)\\&=2(f_1\triangle f_1+f_2\triangle f_2)+2(\|\nabla u\|^2+1),\end{aligned}$$

即

$$f_1\triangle f_1+f_2\triangle f_2=u\triangle u-1,$$

代入 (4.14) 导出 (4.10).

定理 4.3 设完备的类空浸入

$$\psi : M^n \to \Lambda^+ \subset \mathbb{L}^{n+2}$$

具有常纯量曲率, 且 Ricci 曲率有下界. 如果 M^n 的位置向量到类空平面

$$\pi^2 = \mathrm{span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$$

的投影向量长度满足

$$u^* := \sup_M u < \infty, \quad u_* := \inf_M u > 0,$$

则经 Lorentz 旋转 M^n 必为 $u_0 \cdot \phi_0(\mathbb{H}_+^{n-1} \times \mathbb{S}^1)$, 这里 u_0 为正常数.

证 Ricci 曲率有下界的条件确保了广义极大原理成立, 因此存在 M^n 上的点列 $\{p_k\}_{k\in N}$ 和 $\{q_k\}_{k\in N}$, 使得

$$u(p_k) > u^* - \frac{1}{k}, \quad \|\nabla u(p_k)\| < \frac{1}{k}, \quad \triangle u(p_k) < \frac{1}{k}, \tag{4.15}$$

$$u(q_k) < u_* + \frac{1}{k}, \quad \|\nabla u(q_k)\| < \frac{1}{k}, \quad \triangle u(q_k) > -\frac{1}{k}. \tag{4.16}$$

利用 (4.11) 和 (4.15),

$$R \geqslant -\frac{(n-1)(n-2)}{u^2(p_k)} + \frac{n(n-1)\|\nabla u(p_k)\|^2}{u^2(p_k)} - \frac{2(n-1)}{ku(p_k)},$$

令 $k \to \infty$, 得

$$R \geqslant -\frac{(n-1)(n-2)}{{u^*}^2}.$$

利用 (4.11) 和 (4.16), 同理可得

$$R \leqslant -\frac{(n-1)(n-2)}{{u_*}^2}.$$

$n = 2$: 从上两式立刻得到 $R = 0$, 此时 (4.11) 成为 $u\triangle u - \|\nabla u\|^2 = 0$, 即 $\triangle \ln u = 0$, 这里的 $\ln u$ 有界, 于是根据非负曲率流形上刘维尔定理知, $\ln u$ 为常数, 即 $u = u_0$ 常值;

$n \geqslant 3$: 由

$$\frac{1}{{u_*}^2} \leqslant -\frac{R}{(n-1)(n-2)} \leqslant \frac{1}{{u^*}^2}$$

导出 $u^* = u_*$, 故 $u = u_0$ 也为常值.

最后, 将 ψ 正交分解为

$$\psi = \psi_1 + \psi_2, \quad \psi_1 \in \pi, \ \psi_2 \in \pi^\perp,$$

因为

$$\|\psi_1\| = u_0, \quad \langle\psi, \ \psi\rangle = 0,$$

所以 $\langle\psi_2, \psi_2\rangle = -u_0^2$, 于是结合完备性条件, 经一个 Lorentz 旋转 M^n 必为 $u_0 \cdot \phi_0(\mathbb{H}_+^{n-1} \times \mathbb{S}^1)$.

参 考 文 献

[1] Calabi E. Examples of Bernstein problems for some nonlinear equation [M]//Global Analysis Providence, RI: Proc Symp Pure Math, 1968, 15:223–230.

[2] Cheng S Y, Yau S T. Maximal space-like hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski spaces [J]. *Ann Math* (2), 1976, 104(3):407–419.

[3] Aledo J A, Alias L J. On the curvatures of bounded complete spacelike hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski spaces [J]. *Manuscript Math*, 2000, 101(3): 401–413.

[4] Albujer A L, Camargo F, de Lima H F. Complete spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in $-\mathbb{R}\times\mathbb{H}^n$ [J]. *J Math Anal Appl*, 2010, 368(2):650–657.

[5] Aledo J A, Rubio R M, Salamanca J. Complete spacelike hypersurfaces in generalized Robertson-Walker and the null convergence condition: Calabi-Bernstein problems [J]. *RACSAM*, 2017, 111(1):115–128.

[6] Aledo J A, Romero A, Rubio R M. Constant mean curvature spacelike hypersurfaces in Lorentzian warped products and Calabi-Bernstein problems [J]. *Nonlinear Anal*, 2014, 106(1):57–69.

[7] Alias L J, Mastrolia P, Rigoli M. Maximum principles and geometric applications [M]. Springer Monographs in Mathematics, Charm: Springer, 2016.

[8] Alias L J, Colares A G. Uniqueness of spacelike hypersurfaces with constant higher order mean curvature in generalized Robertson-Walker spacetimes [J]. *Math Proc Cambridge Philos Soc*, 2007, 143(3):703–729.

[9] de Lima H F, Parente U L. On the geometry of maximal spacelike hypersurfaces immersed in a generalized Robertson Walker spacetime [J], *Ann Mat Pura Appl* (4), 2013, 192(4):649–663.

[10] Romero A, Rubio R. On the mean curvature of spacelike surfaces in certain three-dimensional Robertson Walker spacetimes and Calabi-Bernstein type problems [J]. *Ann Glob Anal Geom*, 2010, 37(1):21–31.

[11] Alias L J, Canovas V L, Rigoli M. Codimension two spacelike submanifolds of the Lorentz-Minkowski spacetime into the light cone [J]. *Proc Roy Soc Edinburgh Sect A*, 2019, 149(6):1523–1553.

[12] Palmas O, Palomo F J, Romero A. On the total mean curvature of a compact space like submanifold in Lorentz-Minkowski spacetime [J]. *Proc Roy Soc Edinburgh Sect A*, 2018, 148(1):199–210.

[13] Chen Q, Xin Y L. A generalized maximum principle and its applications in geometry [J]. *Amer J Math*, 1992, 114(2):355–366.

[14] Omori H. Isometric immersions of Riemannian manifolds [J]. *J Math Soc Japan*, 1967, 19:205–214.

[15] Cheng S Y, Yau S T. Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications [J]. *Comm Pure Appl Math*, 1975, 28(3):333–354.

[16] Yau S T. Harmonic functions on complete Riemannian manifolds [J]. *Comm Pure Appl Math*, 1975, 28:201–228.

[17] do Carmo P. Riemannian geometry [M]. Mathematics: Theorey and Applications, MA: Birkhäuser Boston, 1992.

Calabi-Bernstein Problems of Complete Spacelike Hypersurfaces on the Light Cone

ZHANG Yuanzheng[1]

[1]School of Mathematics, Shanghai University of Finance and Economics, Shanghai 200433, China. E-mail: yzzh@mail.sufe.edu.cn

Abstract Let M^n be a spacelike submanifold in the Lorentz-Minkowski spacetime $\mathbb{L}^{n+2}$ that lies on the upper light cone, and let f be an affine function on M^n defined by a null vector or a unit spacelike vector. When $f \neq 0$, the author establishes the basic equations for spacelike submanifold in terms of f and its Hessian. As an application, the author shows by applying the generalized maximum principle that the flat spaces (or pseudo-spheres) are the only complete spacelike hypersurfaces of the light cone with constant scalar curvature which is between two co-side parallel null hyperplanes (or timelike hyperplanes).

Keywords Spacelike hypersurface, Generalized maximum principle, Upper light cone

2020 MR Subject Classification 53C42, 53C50

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 46 No. 4, 2025
by ALLERTON PRESS, INC., USA