

某些链环和三维流形不变量的计算*

韩友发¹ 梁 良² 王树新¹ 孔令天¹

提要 该文主要研究某些具体类链环确定的三维流形不变量的计算. 设 M_L 表示在 S^3 中沿着标架链环 (L, f) 进行手术后得到的可定向三维流形, 对于标架链环进行同痕、 K_+ 和 K_- 变换后得到了链环不变量, 进而得到三维流形 M_L 的不变量. 给出了某类广义树状链环 T_G 和链环 L_G 确定的 Blanchet 型三维流形不变量的计算公式.

关键词 三维流形不变量, 广义标架链环, 广义树

MR (2020) 主题分类 57K10, 57K12

中图法分类 O189.3

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2025)04-0449-16

§1 引 言

我们知道, 任意一个闭的、可定向的、连通的三维流都可以通过在三维球面 S^3 上对标架链环 (L, f) 进行手术得到, 其中 L 是一个带有 n 分支的链环, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ (f_i 是第 i 分支手术系数), 这样得到的流形记为 M_L . 因此关于三维流形不变量的研究可以转化为链环不变量的研究. 同时它与物理学中的量子场论、杨-米尔斯理论和弦理论联系紧密. 它最初由量子场论构造出, 计算出三维流形不变量有助于理解和发展这些理论^[1-4].

1989年, Witten^[1] 利用量子场论的知识给出了三维流形不变量的物理意义和计算方法. Lickorish^[5] 利用 Temperley-Lieb 代数重新构造了 Reshetikhin 和 Turaev 用量子群构造的 Witten 不变量, 并且利用 A 取值为第 $4r$ 个复单位根的一元 Kauffman 括号多项式给出了三维流形不变量的计算公式. Blanchet 等^[6] 利用第 $2p$ 个单位根时的一元 Jones-Kauffman 模也给出了一个具体表示三维流形 M_L 的不变量 $\theta_p(M_L)$ (简称为 Blanchet 型三维流形不变量), 计算公式为

$$\theta_p(M_L) = \frac{\langle \Omega_p, \Omega_p, \dots, \Omega_p \rangle_L}{\langle t(\Omega_p) \rangle^{b_+(L)} \langle t^{-1}(\Omega_p) \rangle^{b_-(L)}}.$$

Lickorish^[5,7-8] 利用线性束理论给出了相似的三维流形不变量. 这些不变量的结构都是建立在 Kirby 理论的基础上. 文[9]给出了另一个三维流形不变量 $\langle w, w, \dots, w \rangle_D \langle w \rangle_{U_+}^{-b_+} \langle w \rangle_{U_-}^{-b_-}$, 它与 Blanchet 等提出的不变量是相互等价的, 并给出了该三维流形不变量的数学计算方法.

本文 2025 年 2 月 8 日收到, 2025 年 12 月 25 日收到修改稿.

¹ 辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连 116029. E-mail: mathhk@163.com; shuxin_wang@163.com; 2624655425@qq.com

² 通信作者. 辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连 116029. E-mail: liang_liang@aliyun.com

*本文受到国家自然科学基金 (No. 12526404), 辽宁师范大学项目 (No. 20250101) 和辽宁省高校基本科研项目 (No. LJ212410165006) 的资助.

针对 Blanchet 等构造的不变量计算公式, 李邦河和李起升^[10-13]给出了串状链环、广义串状链环和树状链环确定的三维流形不变量的计算公式, 同时研究并计算得到了所有透镜空间和同调球的三维流形不变量. 文 [14] 研究了特殊循环链环确定的上述不变量的计算等.

本文第一部分是预备知识, 首先介绍了纽结有关概念和基本性质与投影图的变换, 其次介绍了三维流形不变量的性质, 给出了 Kirby 变换、Jones-Kauffman 模、环绕矩阵和形变尖括号多项式等. 第二部分给出并证明了关于三维流形不变量一些已研究的有关引理. 第三部分结合 Kirby 变换, 研究了某些广义树状链环和其他类型链环的 Blanchet 型三维流形不变量的计算, 给出其计算公式.

§2 预备知识

§2.1 纽结与链环的基本概念

定义 2.1 纽结是在 R^3 (或者 S^3) 中同胚于 S^1 的一个子空间.

定义 2.2 对于空间 R^3 中的一个子集 L , 若 L 同胚于 $S^1 \cup S^1 \cup \dots \cup S^1$ (r 个互不交一维球面的并) 的子空间, 则称 L 是有 r 个分支的链环. 也就是说, 链环是由有限多个互不相交、连通且不自交的闭曲线构成的空间图形. 组成链环的每一个连通且不自交的闭曲线定义为链环的一个分支. 若给链环规定一个方向, 则称该链环为有向链环.

注 2.1 任意一个纽结都能好地投影到平面上, 称为纽结的投影图. 所谓好的投影图就是该图只有有限个二重点, 每个二重点有上穿线和下穿线, 这样的二重点也称为该纽结图的交叉点.

定义 2.3 若对纽结投影图经过三种初等变换 R_I, R_{II}, R_{III} 以及平面变形可以相互转化得到, 我们就说两个纽结或链环是等价的, 或者同痕的 (isotopic).

定义 2.4 有向投影图中, 对每个交叉点, 当从上穿线的箭头旋转到下穿线箭头的最小转角是逆时针方向时, 为正交叉点 (+1); 当最小转角是顺时针方向时, 为负交叉点 (-1) (如图 2.1).



图 2.1 交叉点正负情况

一个有向投影图 L 的全体交叉点的正负号之总和, 称为 L 的拧数, 记为 $\omega(L)$.

设 L_1, L_2 是有向链环 L 的两个分支, 我们定义 L_1 与 L_2 的环绕数 $\text{lk}(L_1, L_2)$ 为分支 L_1 和分支 L_2 交叉点处的正负号总和的一半. 当 L 只有 L_1, L_2 这两个分支时, 我们有时把 $\text{lk}(L_1, L_2)$ 简写为 $\text{lk}(L)$.

定义 2.5 设 L_1 与 L_2 是两个有向链环, 有一链环 L 是由 L_1 和 L_2 按如下方式所构成, 如图 2.2 所示, 则称 L 为 Hopf 型链环.

定义 2.8 设 L 是 S^3 中有 n 分支的链环, 若 L 的每个分支都赋予一个整数, 则称该链环为标架链环. 记为 (L, f) , 其中 $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(i)$ 表示第 i 分支赋予的整数.

注 2.3 任意一个闭的、可定向的、连通的三维流都可以通过在三维球面 S^3 上对标架链环 (L, f) 进行手术得到. $f(i)$ 表示第 i 分支手术的系数.

若标架链环 (L, f) 给定一方向, 则它的每两个分支的环绕数组成了一个对称矩阵, 矩阵对角线上的值为每分支的标架 $f(s)$, 称这样得到的矩阵为环绕矩阵 (linking matrix)^[5],

$$M = \begin{pmatrix} f(1) & \text{lk}(L_1, L_2) & \cdots & \text{lk}(L_1, L_n) \\ \text{lk}(L_2, L_1) & f(2) & \cdots & \text{lk}(L_2, L_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{lk}(L_n, L_1) & \text{lk}(L_n, L_2) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}.$$

当然, 在 S^3 中对标架链环进行等价变换不改变三维流形. 给定一链环 $L \subset S^3$, 令 M_L 表示沿着标架链环 (L, f) 作手术得到的可定向三维流形, 对任意可定向、紧致且闭的三维流形, 都定向微分同胚于某 M_L .

在文 [15] 中, Kirby 定理给出了 S^3 中链环集上的等价关系 \sim , Kirby 变换如下:

K_+ 变换是对于标架链环 L 加上一个不打结分支 K , $\omega(K) = +1$ (其中 $\omega(K)$ 为链环的捻数), 同时使得经过 K 的所有 L 的分支做了一次正扭转;

K_- 变换是对于标架链环 L 加上一个不打结分支 K , $\omega(K) = -1$, 同时使得经过 K 的所有分支做了一次负扭转 (如图 2.4)^[5].

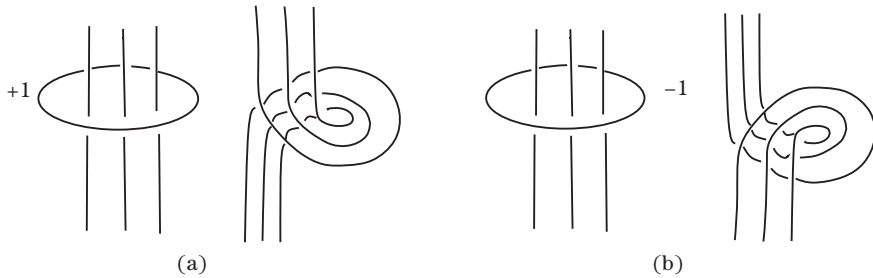


图 2.4 K_+ 变换 (a) 和 K_- 变换 (b)

因此三维流形不变量的构造如下: 找到有关这个标架链环的某一代数式, 使得它在对于标架链环进行 K_+ 和 K_- 变换以及同痕时, 代数式保持不变, 即若它保持 K_+ 和 K_- 变换, 则它就是一个三维流形不变量.

通过 Kirby 变换, 我们把链环 L_1 变为链环 L_2 , 从而产生了相同的三维流形, 称 L_1 和 L_2 是等价的, 记作 $L_1 \cong L_2$, $L_1 \cong L_2$ 当且仅当 M_{L_1} 和 M_{L_2} 定向微分同胚^[16-17].

§2.3 线性束理论相关知识

下面介绍一下简单的线性束理论, 文 [5, 7-8] 中给出了关于它更深入的讨论. 我们研究正方形中链环投影图的弧与闭曲线, 这些弧的边界是分别位于正方形两边上的 m 个标

准点. 第 m 个 Temperley-Lieb 代数 V_m 是由这样的图在复数域 C 上的线性形式和模去以下关系生成的:

- (i) 保持着正方形边界的平面同痕;
- (ii) $X \cup U = (-A^2 - A^{-2})X$, 其中 U 是没有交叉点的闭分支, X 是任何一个图;
- (iii)

$$\langle \text{X} \rangle =_A \langle \text{Y} \rangle +_{A^{-1}} \langle \text{Z} \rangle$$

需要注意的是, (iii) 显示的三个图中, 除了上述已表示部分外, 其他是完全一样的. 在 V_m 中的元素 I_m, e_i (i 是一个非负整数), 如图 2.5 所示, 在长方形的左边的边上和右边的边上都有 m 个点, 其中非负整数代表了曲线周围和该曲线相平行的曲线个数. 并由图间的连接生成了 V_m 中元素的乘积, 也就是 e_i 与 e_j 乘积是把 e_i 右边的 m 个点与 e_j 左边的 m 点对应连接, 进而可以定义任意两个元素的乘积 [7]. 这样 V_m 作为一个代数, 由一组基 $I_m, e_1, e_2, \dots, e_{m-1}$ 生成, 若 $\alpha \in V_m$, 则 $\alpha = \sum_{i=0}^{m-1} g_i(A)e_i$.

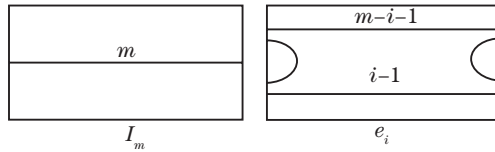


图 2.5 V_m 的基 I_m, e_i ($1 \leq i \leq m - 1$)

对任意 $x \in V_m$, 有性质

$$I_m x = x = x I_m, \quad e_i e_j = e_j e_i, \quad |i - j| \geq 2,$$

$$e_i^k = (-A^2 - A^{-2})^{k-1} e_i, \quad e_i e_{i \pm 1} e_i = e_i.$$

假设 $e_{i \pm 1}$ 已被定义. 关于 e_i 的性质与有关的公式将在下节继续讨论.

§3 三维流形不变量的性质

当变量取单位根时, Blanchet 等 [6] 利用一元 Jones-Kauffman 模给出了一个具体的三维流形不变量, 见如下引理 3.1.

设 t 是 $\mathfrak{B} = K(S^1 \times I \times I)$ 上由一个正扭转诱导的自映射.

引理 3.1 [6] 设 $\Omega_p \in V_p$ (特别地, $\Omega_2 \in V_2 \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$), $\Omega_1 = 1, \Omega_2 = 1 + \frac{z}{2}, p \geq 3$ 时, $\Omega_p = \sum_{i=0}^{n-1} \langle e_i \rangle e_i$, 其中 $n = [\frac{p-1}{2}]$, 则有

$$\theta_p(M_L) = \frac{\langle \Omega_p, \Omega_p, \dots, \Omega_p \rangle_L}{\langle t(\Omega_p) \rangle^{b_+(L)} \langle t^{-1}(\Omega_p) \rangle^{b_-(L)}} \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$$

是在 A 是第 $2p$ 个复单位根时的三维流形 M_L 的不变量 (以下简称为 Blanchet 型三维流形不变量, 本文主要计算此类不变量). $b_+(L), b_-(L)$ 分别是环绕矩阵的正、负特征值个数. 其中 $\langle \dots \rangle_L$ 表示尖括号多项式 (meta-bracket), $\langle e_i \rangle$ 是 e_i 对应链环的尖括号多项式.

引理 3.2^[14] 设 $\Omega_p \in V_p$ (特别地, $\Omega_2 \in V_2 \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$), $\Omega_1 = 1, \Omega_2 = 1 + \frac{z}{2}, p \geq 3$ 时, $\Omega_p = \sum_{i=0}^{n-1} \langle e_i \rangle e_i$, 其中 $n = [\frac{p-1}{2}]$, 则有

$$\theta_p(M_L) = \frac{(-1)^{b_-(L)}(A^2 - A^{-2})^{b_+(L)+b_-(L)} \langle \Omega_p, \Omega_p, \dots, \Omega_p \rangle_L}{A^{3b_-(L)-3b_+(L)+\frac{p(p-1)b_-(L)}{2}} g(p, 1)^{b_+(L)+b_-(L)}}$$

是在 A 是第 $2p$ 个复单位根时的三维流形 M_L 一个不变量. $b_+(L), b_-(L)$ 分别是环绕矩阵的正、负特征值个数.

当 $b_+(L) = b_-(L)$ 时, 由引理 3.2 得到下面引理.

引理 3.3^[11] $\langle e_{i_1}, \dots, e_{i_m} \rangle = e_{i_1}(\lambda_{i_2}) \cdot e_{i_2}(\lambda_{i_3}) \cdots e_{i_{m-1}}(\lambda_{i_m}) e_{i_m}(\lambda_0)$.

引理 3.4^[13] $e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_n} = \sum_{k_1, \dots, k_{n-1}=0}^{\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_{n-1}} e_{i_1+i_2+\dots+i_n-2k_1-\dots-2k_{n-1}}$, 其中

$$\bar{i}_j = \min\{i_1 + i_2 + \dots + i_j - 2k_1 - \dots - 2k_{j-1}, i_{j+1}\}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

§4 某些三维流形不变量的计算

§4.1 广义树状链环的概念

对任意具有 m 个分支、分别具有标架 a_1, a_2, \dots, a_m 的标架链环 L (投影图) 都对应一个平面图 S (由点和连接两点边组成). 标架链环的每个分支对应 S 的一个顶点, 两个顶点用边连接当且仅当对应的两个分支有缠绕. 图 4.1 是某一个链环对应的一个连通的树形图 (没有闭路). 如果一个标架链环 L 中任意两分支的关系是广义 Hopf 链环的关系 (定义 2.6), 而且对应的图是树形的, 则把这样的标架链环 L 称作广义树状链环^[13]. 图 4.1 也可以是一个广义树状链环对应的图, 其中用边上的标号 b_{ij} 表示此二分支的环绕数.

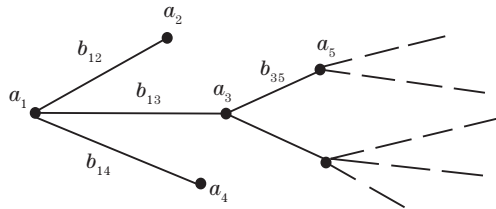


图 4.1 广义树状链环

对一有 m 个分支的广义树状链环及对应的图, 可选定一点为树 S 的根, 进而归纳定义一个映射 $h: \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, m\}$, 满足

$h(1) = 0;$

$h(j) = 1$, 如果 S 第 j 个顶点与第一个顶点 (是 S 的根) 为 S 上一个边的端点;

.....

$h(i) = j$, 如果 $h(j)$ 已定义且第 i 个顶点与第 j 个顶点是一个边的端点 (如图 4.1).

通过映射 h 给出了树形顶点和边的顺序, 可以画出该树形图, 进而可以给出环绕矩阵.

§4.2 一类广义树状链环的三维流形不变量的计算

下面我们讨论一类特殊广义树状链环 (设为 T_G) 得到的三维流形不变量.

图 4.2 的此类链环记为 T_G , 满足关系

$$\begin{cases} h(1) = 0, \\ h(i) = 1, \quad i = 2, 3, \dots, m. \end{cases}$$

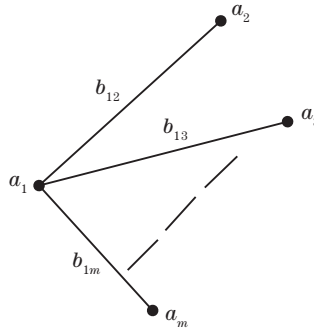


图 4.2 一类广义树状链环 T_G

分支间的环绕数为 b_{1i} ($i = 2, 3, \dots, m$). 下面讨论其几种不同情况, 计算得到的三维流形不变量.

先计算形变括号 $\langle \Omega_p, \dots, \Omega_p \rangle_{T_G}$ [13].

在 a_1 与 a_j ($j = 2, 3, \dots, m$) 之间, 通过 Kirby 计算而添加 b_{1j} 个标架为 1 的平凡纽结, 得到一个新的链环.

由 $f(1) = 0$, 则原 a_r ($r = 1, 2, 3, \dots, m$) 点的平凡纽结的标架为

$$a_1 : a_1 + \sum_{f(r)=1} b_{1r} \quad (r = 2, 3, \dots, m); \quad a_r : a_r + b_{1r} \quad (r = 2, 3, \dots, m).$$

可设 a_r 的标架用 S_r ($r = 1, 2, \dots, m$) 表示:

$$S_1 = a_1 + \sum_{f(r)=1} b_{1r} \quad (r = 2, 3, \dots, m); \quad S_r = a_r + b_{1r} \quad (r = 2, 3, \dots, m).$$

令 $q = \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor - 1$, 又由引理 3.4 及

$$t^n(\Omega_p) = \sum_{i=0}^q \mu_i^n \langle e_i \rangle e_i,$$

$$(t(\Omega_p))^n = \left(\sum_{i=0}^q \mu_i \langle e_i \rangle e_i \right)^n = \sum_{i_1, \dots, i_n=0}^q \mu_{i_1} \cdots \mu_{i_n} \langle e_{i_1} \rangle \cdots \langle e_{i_n} \rangle e_{i_1} \cdots e_{i_n},$$

得

$$t^{S_r}(\Omega_p) = \sum_{l_r=0}^q \mu_{l_r}^{S_r} \langle e_{l_r} \rangle e_{l_r},$$

$$\begin{aligned}
 (t(\Omega_p))^{b_{1j}} &= \sum_{i_{j_1}, i_{j_2}, \dots, i_{j_{b_{1j}}}=0}^q \mu_{i_{j_1}} \cdots \mu_{i_{j_{b_{1j}}}} \langle e_{i_{j_1}} \rangle \cdots \langle e_{i_{j_{b_{1j}}}} \rangle e_{i_{j_1}} e_{i_{j_2}} \cdots e_{i_{j_{b_{1j}}}} \\
 &= \sum_{i_{j_1}, i_{j_2}, \dots, i_{j_{b_{1j}}}=0}^q \sum_{\overline{i_{j_1}, \dots, i_{j_{b_{1j-1}}}}_{k_{j_1}, \dots, k_{j_{b_{1j-1}}}=0} \mu_{i_{j_1}}, \dots, \mu_{i_{j_{b_{1j}}}} \langle e_{i_{j_1}} \rangle \cdots \\
 &\quad \langle e_{i_{j_{b_{1j}}}} \rangle e_{i_{j_1} + \dots + i_{j_{b_{1j}}} - 2k_1 - \dots - 2k_{j_{b_{1j-1}}}}.
 \end{aligned}$$

所以由引理 3.3, 计算得

$$\begin{aligned}
 &\langle \Omega_p, \dots, \Omega_p \rangle_{T_G} \\
 &= \langle t^{sr}(\Omega_p) (r = 1, 2, \dots, m), (t(\Omega_p))^{b_{1j}} (j = 2, \dots, m; f(j) = 1) \rangle \\
 &= \sum_{\substack{l_r=0 \\ 1 \leq r \leq m}}^q \sum_{i_{j_1}, \dots, i_{j_{b_{1j}}}=0}^q \sum_{\overline{i_{j_1}, \dots, i_{j_{b_{1j-1}}}}_{k_{j_1}, \dots, k_{j_{b_{1j-1}}}=0} \prod_{\substack{r=1, 2, \dots, m \\ j=2, \dots, m}} \mu_{l_r}^{s_r} \mu_{i_{j_1}} \cdots \mu_{i_{j_{b_{1j}}}} \langle e_{l_r} \rangle \\
 &\quad \langle e_{i_{j_1}} \rangle \cdots \langle e_{i_{j_{b_{1j}}}} \rangle \cdot \langle \dots, e_{l_r}, e_{i_{j_1} + \dots + i_{j_{b_{1j}}} - 2k_{j_1} - \dots - 2k_{j_{b_{1j-1}}}}, e_{l_{r+1}} \cdots \rangle \\
 &= \sum_{\substack{l_r=0 \\ 1 \leq r \leq m}}^q \sum_{i_{j_1}, \dots, i_{j_{b_{1j}}}=0}^q \sum_{\overline{i_{j_1}, \dots, i_{j_{b_{1j-1}}}}_{k_{j_1}, \dots, k_{j_{b_{1j-1}}}=0} \prod_{\substack{r=1, 2, \dots, m \\ j=2, \dots, m}} \mu_{l_r}^{s_r} \mu_{i_{j_1}} \cdots \mu_{i_{j_{b_{1j}}}} \langle e_{l_r} \rangle \langle e_{i_{j_1}} \rangle \cdots \\
 &\quad \langle e_{i_{j_{b_{1j}}}} \rangle e_{l_r} (\lambda_{i_{j_1} + \dots + i_{j_{b_{1j}}} - 2k_{j_1} - \dots - 2k_{j_{b_{1j-1}}}}) e_{i_{j_1} + \dots + i_{j_{b_{1j}}} - 2k_{j_1} - \dots - 2k_{j_{b_{1j-1}}}} (\lambda_{l_{r+1}}) \langle e_{l_m} \rangle,
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \overline{i_{j_l}} &= \min\{i_{j_1} + i_{j_2} + \dots + i_{j_l} - 2k_{j_1} - \dots - 2k_{j_{l-1}}, i_{j_{l+1}}\}, \\
 l &= 1, 2, \dots, b_{1j-1}; \quad j = 2, \dots, m.
 \end{aligned}$$

定理 4.1 对于广义树状链环 T_G 满足

$$\begin{cases} h(1) = 0, \\ h(i) = 1, \quad i = 2, 3, \dots, m. \end{cases}$$

当 $b_{12} = b_{13} = \dots = b_{1m} = b, |b| = 1$ 时, 令 $a_1 = n$.

1. 当 $n \geq m - 1, a_i \geq 1 (i = 2, 3, \dots, m)$ 时, 所有不等式中, 至少有一个是严格的不等式时, 则有 $b_+(T_G) = m, b_-(T_G) = 0$.

2. 当 $n < m - 1, a_i = 1 (i = 2, 3, \dots, m)$ 时, 则有 $b_+(T_G) = m - 1, b_-(T_G) = 1$.

证 不妨设 $b = 1, b = -1$ 的情况可类似讨论.

1. (1) 当 $n > m - 1, a_i \geq 1 (i = 2, 3, \dots, m)$ 时,

$$\text{环绕矩阵 } A = \begin{pmatrix} n & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_3 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_m \end{pmatrix},$$

此时对应的二次型 $X'AX$ 为

$$nx_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + \cdots + a_mx_m^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + \cdots + 2x_1x_m,$$

可化为

$$(x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 + \cdots + (x_1 + x_m)^2 + (n - m + 1)x_1^2 + (a_2 - 1)x_2^2 + (a_3 - 1)x_3^2 + \cdots + (a_m - 1)x_m^2.$$

因为 $n > m - 1$, $a_i \geq 1$ ($i = 2, 3, \dots, m$) 得到的二次型是正定的, 所以有

$$b_+(T_G) = m, \quad b_-(T_G) = 0.$$

(2) 当 $n \geq m - 1$, $a_i \geq 1$ ($i = 2, 3, \dots, m$) 中至少有一个是严格的不等式时, $X'AX$ 仍可化为

$$(x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 + \cdots + (x_1 + x_m)^2 + (n - m + 1)x_1^2 + (a_2 - 1)x_2^2 + (a_3 - 1)x_3^2 + \cdots + (a_m - 1)x_m^2.$$

由于 $a_i \geq 1$ 至少有一个是严格的不等式, 一定存在一个 $(a_i - 1)x_i^2 > 0$, 所以 $X'AX$ 是正定的, 可得 $b_+(T_G) = m$, $b_-(T_G) = 0$.

综上, 当 $n \geq m - 1$, $a_i \geq 1$ ($i = 2, 3, \dots, m$) 中至少有一个是严格的不等式时, 有

$$b_+(T_G) = m, \quad b_-(T_G) = 0.$$

2. 当 $a_i = 1$, $n < m - 1$ 时, $m - n - 1 > 0$. $X'AX$ 可化简为 $(x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 + \cdots + (x_1 + x_m)^2 - (m - n - 1)x_1^2$.

作非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2, \\ y_2 = x_1 + x_3, \\ \cdots \\ y_{m-1} = x_1 + x_m, \\ y_m = \sqrt{m - n - 1} \cdot x_1, \end{cases}$$

可得 $X'AX = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{m-1}^2 - y_m^2$. 所以 $b_+(T_G) = m - 1$, $b_-(T_G) = 1$. 证毕.

进一步地, 若 b 取任意值, 可以得到下面结论.

定理 4.2 对于广义树状链环 T_G 满足

$$\begin{cases} h(1) = 0, \\ h(i) = 1, \quad i = 2, 3, \dots, m. \end{cases}$$

当 $b_{12} = b_{13} = \cdots = b_{1m} = b$ 时,

1. 若 $a_1 \geq m-1$, $a_i \geq b^2$ ($i = 2, \cdots, m$) 所有不等式中至少有一个是严格的, 则有

$$b_+(T_G) = m, \quad b_-(T_G) = 0.$$

2. 若 $a_1 = m-1$, 存在一个 $a_i = l_1 < b^2$ ($2 \leq i \leq m$), $a_j = b^2$ ($j \neq i$), 令 $k = b^2 - l_1$, 则有

$$b_+(T_G) = m-1, \quad b_-(T_G) = 1.$$

3. 若 $a_1 < m-1$, $a_i = b^2$ ($i = 2, 3, \cdots, m$), 令 $k = m-1 - a_1$, 则有

$$b_+(T_G) = m-1, \quad b_-(T_G) = 1.$$

证 1. 环绕矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b & b & \cdots & \cdots & b \\ b & a_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ b & 0 & a_3 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ b & 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_m \end{pmatrix}$$

二次型可化为

$$(x_1 + bx_2)^2 + (x_1 + bx_3)^2 + \cdots + (x_1 + bx_m)^2 + (a_1 - m + 1)x_1^2 + (a_2 - b^2)x_2^2 \\ + (a_3 - b^2)x_3^2 + \cdots + (a_m - b^2)x_m^2.$$

由 1 中条件可得二次型是正定的, 所以 $b_+(T_G) = m$, $b_-(T_G) = 0$.

2. $a_1 = m-1$, 存在一个 $a_i = l_1 < b^2$ ($2 \leq i \leq m$), $a_j = b^2$ ($j \neq i$), 则二次型可化为

$$(x_1 + bx_2)^2 + (x_1 + bx_3)^2 + \cdots + (x_1 + bx_i)^2 + (x_1 + bx_{i+1})^2 + \cdots \\ + (x_1 + bx_m)^2 + (l_1 - b^2)x_i^2 \\ = (x_1 + bx_2)^2 + (x_1 + bx_3)^2 + \cdots + (x_1 + bx_i)^2 + (x_1 + bx_{i+1})^2 + \cdots \\ + (x_1 + bx_m)^2 - kx_i^2.$$

作非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + bx_2, \\ y_2 = x_1 + bx_3, \\ \cdots \\ y_{m-1} = x_1 + bx_m, \\ y_m = \sqrt{k} \cdot x_1, \end{cases}$$

可得 $X'AX = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{m-1}^2 - y_m^2$. 所以 $b_+(T_G) = m-1$, $b_-(T_G) = 1$.

3. $k = m-1 - a_1 > 0$, 又 $a_i = b^2$ ($i = 2, 3, \cdots, m$), 二次型可化为

$$(x_1 + bx_2)^2 + (x_1 + bx_3)^2 + \cdots + (x_1 + bx_m)^2 + (a_1 - m + 1)x_1^2 \\ = (x_1 + bx_2)^2 + (x_1 + bx_3)^2 + \cdots + (x_1 + bx_m)^2 - kx_1^2.$$

同理, 作非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + bx_2, \\ y_2 = x_1 + bx_3, \\ \dots \\ y_{m-1} = x_1 + bx_m, \\ y_m = \sqrt{k} \cdot x_1, \end{cases}$$

可得 $X'AX = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{m-1}^2 - y_m^2$. 所以 $b_+(T_G) = m - 1$, $b_-(T_G) = 1$. 证毕.

若 b_{12}, \dots, b_{1m} 环绕数不一定相等而不确定数值时, 进一步做类似讨论.

定理 4.3 对于广义树状链环 T_G , 满足

$$\begin{cases} h(1) = 0, \\ h(i) = 1, \quad i = 2, 3, \dots, m. \end{cases}$$

分支间环绕数为 b_{1i} ($i = 2, 3, \dots, m$), 有

1. 若 $a_1 \geq m - 1$, $a_i \geq b_{1i}^2$ ($i = 2, \dots, m$) 所有不等式中至少有一个是严格的, 则有

$$b_+(T_G) = m, \quad b_-(T_G) = 0.$$

2. 若 $a_1 = m - 1$, 存在一个 $a_i = l_2 < b_{1i}^2$ ($2 \leq i \leq m$), $a_j = b_{1j}^2$ ($j \neq i$), 令 $k = b_{1i}^2 - l_2$, 则有

$$b_+(T_G) = m - 1, \quad b_-(T_G) = 1.$$

3. 若 $a_1 < m - 1$, $a_i = b_{1i}^2$ ($i = 2, 3, \dots, m$), 令 $k = m - 1 - a_1$, 则有

$$b_+(T_G) = m - 1, \quad b_-(T_G) = 1.$$

该定理应用定理 4.1-4.2 的方法可以证明.

注 4.1 将上式结果代入公式

$$\theta_p(T_G) = \frac{\langle \Omega_p, \dots, \Omega_p \rangle_{T_G}}{\langle t(\Omega_p) \rangle^{b_+(T_G)} \langle t^{-1}(\Omega_p) \rangle^{b_-(T_G)}},$$

根据定理 4.3 不同情况下正负特征值的个数代入, 则可计算 T_G 所对应确定的 Blanchet 型三维流形不变量.

§4.3 某些其他类链环的三维流形不变量的计算

关于其他类链环的三维流形不变量计算, 本文试研究一类链环 (如图 4.3),

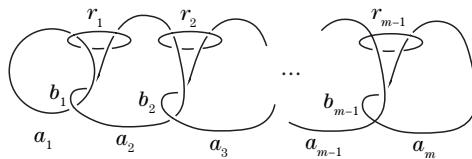


图 4.3 一类链环 L_G

图 4.3 表示为 m 个标架分别为 a_1, a_2, \dots, a_m 的平凡链环以广义 Hopf 的方式连接, 链环间环绕数分别为 b_1, b_2, \dots, b_{m-1} (环绕数均小于 0), 每两个分支之间还以数量为 r_1, r_2, \dots, r_{m-1} 个平凡纽结的缠绕作为连接. 设链环分支的总数为 n , 即 $m + r_1 + r_2 + \dots + r_{m-1} = n$. 设此类链环为 L_G , 下面利用已有的引理和公式推算出此类链环确定的 Blanchet 型三维流形不变量.

定理 4.4 图 4.3 所示的链环 L_G , 令 $q = \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor - 1$, 则有

$$\begin{aligned} \langle \Omega_p, \Omega_p, \dots, \Omega_p \rangle_{L_G} &= \sum_{\substack{i_j=0 \\ 1 \leq j \leq m}}^q \sum_{\substack{i_{j_1}, \dots, i_{j|b_j|+r_j}=0 \\ 1 \leq j \leq m-1}}^q \sum_{\substack{\overline{i_{j_1}, \dots, i_{j|b_j|+r_{j-1}}} \\ k_{j_1}, \dots, k_{j|b_j|+r_{j-1}}=0 \\ 1 \leq j \leq m-1}}^q \\ &\cdot \prod_{j=1}^{m-1} \mu_{i_{j_1}} \cdots \mu_{i_{j|b_j|+r_j}} \cdot \mu_{i_j}^{a_j+|b_{j-1}|+|b_j|+r_{j-1}+r_j} \cdot \langle e_{i_j} \rangle \\ &\cdot \langle e_{i_{j_1}} \rangle \langle e_{i_{j_2}} \rangle \cdots \langle e_{i_{j|b_j|+r_j}} \rangle \\ &\cdot e_{i_j} (\lambda_{i_{j_1}+i_{j_2}+\dots+i_{j|b_j|+r_j}-2k_{j_1}-\dots-2k_{j|b_j|+r_{j-1}}}) \\ &\cdot e_{i_{j_1}+i_{j_2}+\dots+i_{j|b_j|+r_j}-2k_{j_1}-\dots-2k_{j|b_j|+r_{j-1}}} (\lambda_{i_{j+1}}) \\ &\cdot \mu_{i_m}^{a_m+|b_{m-1}|+r_{m-1}} \cdot \langle e_{i_m} \rangle. \end{aligned}$$

证 由 Kirby 计算, 由于每两个分支间环绕数均小于 0, 所以对链环 L_G 去掉 a_1, a_2, \dots, a_m 间的 b_i 个缠绕点, 同时在 L_G 的标号 a_i 和 a_{i+1} ($i = 1, 2, \dots, m-1$) 之间增加 $|b_i|$ 个标架为 +1 的平凡纽结, 得到一广义 Hopf 链环, 记作 L'_G (如图 4.4).

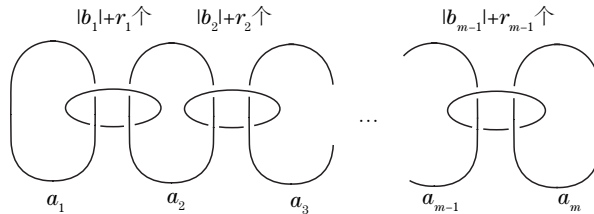


图 4.4 Kirby 计算后得到的 L'_G

可得此链环 L'_G 的各分支标架系数变为

$$\begin{aligned} &a_1 + |b_1| + r_1, \quad |b_1| + r_1, a_2 + |b_1| + |b_2| + r_1 + r_2, \quad |b_2| + r_2, \dots, \\ &a_j + |b_{j-1}| + |b_j| + r_{j-1} + r_j, \quad |b_j| + r_j, \dots, \\ &a_{m-1} + |b_{m-2}| + |b_{m-1}| + r_{m-2} + r_{m-1}, \quad |b_{m-1}| + r_{m-1}, \quad a_m + |b_{m-1}| + r_{m-1}, \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} &\langle \Omega_p, \Omega_p, \dots, \Omega_p \rangle_{L_G} \\ &= \langle \Omega_p, \Omega_p, \dots, \Omega_p \rangle_{L'_G} \\ &= \langle t^{a_1+|b_1|+r_1}(\Omega_p), (t(\Omega_p))^{|b_1|+r_1}, t^{a_2+|b_1|+|b_2|+r_1+r_2}(\Omega_p), \dots, \\ &\quad t^{a_j+|b_{j-1}|+|b_j|+r_{j-1}+r_j}(\Omega_p), (t(\Omega_p))^{|b_j|+r_j}, \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & t^{a_{m-1}+|b_{m-2}|+|b_{m-1}|+r_{m-2}+r_{m-1}}(\Omega_p), (t(\Omega_p))^{|b_{m-1}|+r_{m-1}}, \\ & t^{a_m+|b_{m-1}|+r_{m-1}}(\Omega_p), \quad j = 1, 2, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (4.1)$$

此时为了公式的整洁性, 令 $b_0 = 0, r_0 = 0, j = 1, 2, \dots, m-1$, 则有

$$\begin{aligned} & t^{a_j+|b_{j-1}|+|b_j|+r_{j-1}+r_j}(\Omega_p) \\ & = \sum_{i_j=0}^q \mu_{i_j}^{a_j+|b_{j-1}|+|b_j|+r_{j-1}+r_j} \cdot \langle e_{i_j} \rangle \cdot e_{i_j}, \quad j = 1, 2, \dots, m-1; \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$t^{a_m+|b_{m-1}|+r_{m-1}}(\Omega_p) = \sum_{i_m=0}^q \mu_{i_m}^{a_m+|b_{m-1}|+r_{m-1}} \cdot \langle e_{i_m} \rangle \cdot e_{i_m}. \quad (4.3)$$

由引理 3.3-3.4, 可得

$$\begin{aligned} & (t(\Omega_p))^{|b_j|+r_j} \\ & = \sum_{i_{j_1}, \dots, i_{j|b_j|+r_j}=0}^q \mu_{i_{j_1}} \cdots \mu_{i_{j|b_j|+r_j}} \langle e_{i_{j_1}} \rangle \langle e_{i_{j_2}} \rangle \cdots \langle e_{i_{j|b_j|+r_j}} \rangle \\ & \quad \cdot e_{i_{j_1}} \cdot e_{i_{j_2}} \cdots e_{i_{j|b_j|+r_j}} \\ & = \sum_{i_{j_1}, \dots, i_{j|b_j|+r_j}=0}^q \sum_{k_{j_1}, \dots, k_{j|b_j|+r_j-1}=0}^{\overline{i_{j_1}, \dots, i_{j|b_j|+r_j-1}}} \mu_{i_{j_1}} \cdots \mu_{i_{j|b_j|+r_j}} \\ & \quad \cdot \langle e_{i_{j_1}} \rangle \langle e_{i_{j_2}} \rangle \cdots \langle e_{i_{j|b_j|+r_j}} \rangle \\ & \quad \cdot e_{i_{j_1}+i_{j_2}+\dots+i_{j|b_j|+r_j}-2k_{j_1}-\dots-2k_{j|b_j|+r_j-1}}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

其中 $j = 1, 2, \dots, m-1$,

$$\begin{aligned} & \overline{i_{j_l}} = \min\{i_{j_1} + i_{j_2} + \dots + i_{j_l} - 2k_{j_1} - \dots - 2k_{j_{l-1}}, i_{j_{l+1}}\}, \\ & l = 1, 2, \dots, |b_j| + r_j - 1; \quad j = 1, 2, \dots, m-1. \end{aligned}$$

再将 (4.2)-(4.4) 代入到 (4.1) 中, 计算得到定理结论. 证毕.

设 L_G 中的第 r_i ($i = 1, 2, \dots, m-1$) 个平凡纽结的标架系数依次为 $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{i,r_i}$, 则可写出其环绕矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_i & 1 & 1 & \cdots & 1 & b_i \\ 1 & a_{i,1} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a_{i,2} & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_{i,r_i} & 1 \\ b_i & 1 & 1 & \cdots & 1 & a_{i+1} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, m-1.$$

同理, 计算

$$|\lambda E - A| = 0,$$

求出特征值. 根据定理 4.4, 将不同情况下正负特征值的个数再次代入

$$\theta_p(L_G) = \frac{\langle \Omega_p, \Omega_p, \dots, \Omega_p \rangle_{L_G}}{\langle t(\Omega_p) \rangle^{b_+(L_G)} \langle t^{-1}(\Omega_p) \rangle^{b_-(L_G)}}$$

则可计算出 L_G 所确定的 Blanchet 型三维流形不变量.

下面举一个例子, 对此类链环的一具体例子计算出它确定的上述三维流形不变量.

如图 4.5, 若 $r_1 = r_2 = 1$, 这是有五个分支的链环 L_G 的一个特殊情况.

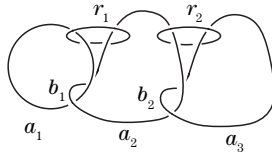


图 4.5 L_G 的一个特殊例子

当 $a_1 = a_2 = a_3 = 1, b_1 = b_2 = -1$ 时, 若 r_1 和 r_2 的标架系数 $a_{11} = a_{21} = 1$, 在以下特殊情况下, 计算它确定的三维流形不变量.

先求其形变括号, 将 $j = 3$ 代入定理 4.4, 计算得

$$\begin{aligned} & \langle \Omega_p, \Omega_p, \dots, \Omega_p \rangle_{L_G} \\ &= \sum_{\substack{i_j=0 \\ 1 \leq j \leq 3}}^q \sum_{\substack{i_{j_1}, i_{j_2}=0 \\ j=1,2}}^q \sum_{k_{j_1}=0}^{\overline{i_{j_1}}} \prod_{j=1}^2 \mu_{i_{j_1}} \mu_{i_{j_2}} \cdot \mu_{i_j}^{a_j + |b_{j-1}| + |b_j| + r_{j-1} + r_j} \\ & \cdot \langle e_{i_j} \rangle \langle e_{i_{j_1}} \rangle \langle e_{i_{j_2}} \rangle e_{i_j} (\lambda_{i_{j_1} + i_{j_2} - 2k_{j_1}}) \\ & \cdot e_{i_{j_1} + i_{j_2} - 2k_{j_1}} (\lambda_{i_{j+1}}) \cdot \mu_{i_3}^3 \cdot \langle e_{i_3} \rangle^2. \end{aligned}$$

设上式整体为 I 式, 又求出此链环的环绕矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

计算

$$|\lambda E - A| = 0,$$

可解得

$$\lambda_{1,2} = 2, \quad \lambda_3 = 0, \quad \lambda_{4,5} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2},$$

所以

$$b_+(L_G) = 3, \quad b_-(L_G) = 1.$$

由引理 3.2, 代入计算出此链环的三维流形不变量为

$$\theta_p(L_G) = \frac{-2^4(A^2 - A^{-2})^4 \cdot I}{A^{-6 + \frac{p(p-1)}{2}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{2p-1} (-1)^k A^{k^2} \right)^4}.$$

当 $a_{11}, a_{21}, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2$ 取不同的数值时, 同理计算 $|\lambda E - A| = 0$, 解出正负特征值的个数, 代入计算三维流形不变量即可.

致谢 非常感谢评审专家提出的宝贵意见!

参 考 文 献

- [1] Witten E. Quantum field theory and the Jones polynomial [J]. *Comm Math Phys*, 1989, 121(3):351–399.
- [2] Reshetikhin N Y, Turaev V G. Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups [J]. *Invent Math*, 1991, 103(1):547–597.
- [3] Kirby R C, Melvin P. The 3-manifold invariants of Witten and Reshetikhin-Turaev for $sl(2, C)$ [J]. *Invent Math*, 1991, 105(3):473–545.
- [4] Cheng M C N, Ferrari F, Sgroi G. Three-manifold quantum invariants and mock theta functions [J]. *Phil Trans R Soc A*, 2019, 378(2163):20180439, 15 pp.
- [5] Lickorish W B R. Three-manifold invariants and the Temperley-Lieb algebra [J]. *Math Ann*, 1991, 290(4):657–670.
- [6] Blanchet C, Habegger N, Masbaum G, Vogel P. Three-manifold invariants derived from the Kauffman bracket [J]. *Topology*, 1992, 31(4):685–699.
- [7] Lickorish W B R. Calculations with the Temperley-Lieb algebra [J]. *Comment Math Helv*, 1992, 67(4):571–591.
- [8] Lickorish W B R. Invariants for 3-manifolds from the combinatorics of the Jones polynomial [J]. *Pacific J Math*, 1991, 149(2):337–347.
- [9] Lickorish W B R. The skein method for three-manifold invariants [J]. *J Knot Theory Ramifications*, 1993, 2(2):171–194.
- [10] 李起升, 李邦河. 透镜空间的不变量 $\theta_p(L(s, q))$ [J]. *科学通报*, 1993, 38(7):580–583.
- [11] 李邦河, 李起升. 三维 Plumbed 流形的不变量 [J]. *数学年刊 A 辑*, 1996, 17(5):565–572.
- [12] 李邦河, 李起升. 由三叶形纽结得到的三维流形的不变量 [J]. *科学通报*, 1996, 41(21):1926–1930.
- [13] 李起升. 一类链环的 Kauffman 多项式和三维流形不变量 [J]. *中国科学 (A 辑)*, 2001, 31(12):1065–1070.
- [14] 韩友发, 单亚男, 潘胜军. 三维流形不变量及其计算 [J]. *辽宁师范大学 (自然科学版)*, 2013, 36(1):1–6.
- [15] Kirby R C. A calculus for framed links in S^3 [J]. *Invent Math*, 1978, 45(1):35–56.
- [16] Fenn R A, Rourke C P. On Kirby's calculus of links [J]. *Topology*, 1979, 18(1):1–15.
- [17] Rolfsen D. *Knots and links* [M]. Providence RI: American Mathematical Society, 2003.

The Calculation of Invariants for Some Links and 3-Manifolds

HAN Youfa¹ LIANG Liang² WANG Shuxin¹ KONG Lingtian¹

¹School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian 116029, Liaoning, China. E-mail: mathhk@163.com; shuxin_wang@163.com; 2624655425@qq.com

²Corresponding author. School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian 116029, Liaoning, China. E-mail: liang_liang@aliyun.com

Abstract This paper mainly analyzes the calculation of invariants for 3-manifold defined by some links. Suppose M_L represents the orientable 3-manifold obtained by surgery on S^3 along the framed link (L, f) , the authors get the link invariant after isotopy, K_+ move and K_- move for the framed link. Then the invariants of 3-manifold M_L are obtained. This paper studies the two calculated formulas of Blanchet shaped invariants for 3-manifold defined by certain generalized tree links T_G and links L_G , provides several methodologies and perspectives for the further study of 3-manifold invariants derived from link theory.

Keywords Invariants for 3-manifold, Generalized framed links, Generalized tree

2020 MR Subject Classification 57K10, 57K12

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 46 No. 4, 2025
by ALLERTON PRESS, INC., USA