数 学 年 刊 A 辑
2025, 46(4):465–490
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2025.0029

具有双曲型热传导的可压缩 MHD 方程组解的衰减率*

田 浩[1] 吴 菲[2] 王泽军[3]

提要 研究了带有 Cattaneo 热传导定律的非等熵可压缩 MHD 方程组解的全局适定性和大时间行为. 与经典的 Fourier 热传导定律相比, Cattaneo 定律可以导出关于热流和温度的双曲型方程组, 这意味着热量的传播速度有限, 更加符合自然规律. 在初始扰动小的假设下, 该文严格建立了该系统经典解的全局存在性, 并得到了解高阶空间导数的最优时间衰减率. 此外, 根据 Cattaneo 定律中蕴含的阻尼结构可以推出, 与密度、速度、温度和磁场相比, 热流具有更快的衰减率.

关键词 可压缩 MHD 方程组, Cattaneo 热传导定律, 全局存在性, 大时间行为, 最优时间衰减率

MR (2020) 主题分类 76W05, 76N10, 35B40

中图法分类 O175.29

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2025)04-0465-26

§1 引 言

本文在 $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}_+$ 上研究如下可压缩 MHD 方程组:

$$\begin{cases}\partial_t\rho+u\cdot\nabla\rho+\rho\operatorname{div}u=0,\\ \rho(\partial_t u+u\cdot\nabla u)+\nabla P-\operatorname{curl}H\times H=\operatorname{div}\Psi(u),\\ \rho(\partial_t e+u\cdot\nabla e)+P\operatorname{div}u+\operatorname{div}q=\nu|\operatorname{curl}H|^2+\Psi(u):\nabla u,\\ \partial_t H+u\cdot\nabla H-H\cdot\nabla u+H\operatorname{div}u=\nu\Delta H,\end{cases}\tag{1.1}$$

其中未知函数 $\rho=\rho(x,t)$, $u=(u_1(x,t),u_2(x,t),u_3(x,t))^{\mathrm{T}}$, $P=P(x,t)$, $e=e(x,t)$, $q=(q_1(x,t),q_2(x,t),q_3(x,t))^{\mathrm{T}}$ 和 $H=(H_1(x,t),H_2(x,t),H_3(x,t))^{\mathrm{T}}$ 分别表示可压缩流体的密度、速度、压强、内能和热流 (热通量) 以及磁场. 粘性应力张量 $\Psi(u)$ 定义为

$$\Psi(u)=\mu(\nabla u+(\nabla u)^{\mathrm{T}})+\lambda(\nabla\cdot u)\mathbb{I}_3,\tag{1.2}$$

这里 μ 和 λ 表示粘性系数且满足 $\mu>0$ 和 $2\mu+3\lambda\geqslant 0$, $\mathbb{I}_3$ 是 3×3 阶单位矩阵. $\nu>0$ 为磁扩散系数. 本文所研究的流体为多方气体, 其遵循的状态方程为

$$P=R\rho\theta,\quad e=c_V\theta,\tag{1.3}$$

本文 2025 年 1 月 10 日收到, 2025 年 11 月 17 日收到修改稿.

[1]湖北经济学院数字金融创新湖北省重点实验室, 武汉 430205; 湖北经济学院信息工程学院, 武汉 430205; 湖北经济学院湖北省互联网金融信息工程技术研究中心, 武汉 430205. E-mail: th@hbue.edu.cn

[2]江苏科技大学理学院, 江苏 镇江 212100. E-mail: wufei@just.edu.cn

[3]通信作者. 南京航空航天大学数学学院, 南京 211106. E-mail: wangzejun@gmail.com

*本文受到江苏科技大学科学研究基金 (No. 1052932505) 的资助.

其中 $\theta=\theta(x,t)$ 表示绝对温度, $R>0$ 为理想气体常数, c_V 为定容比热. 为了封闭可压缩 MHD 方程组 (1.1), 还需要给出热流 q 的表达式.

本文所考虑的热传导满足 Cattaneo 热传导定律 [1]:

$$\tau\partial_t q+q+\kappa\nabla\theta=0, \tag{1.4}$$

其中 $\kappa>0$ 为导热系数, 松弛时间 τ 表示在突然暴露于热流的质点建立稳定的热传导状态所需要的时间. 令 $\tau=0$, 则 Cattaneo 热传导定律就变成 Fourier 热传导定律

$$q=-\kappa\nabla\theta. \tag{1.5}$$

虽然 Fourier 热传导定律被广泛地用来描述热传导现象, 但是其有一个显著的问题, 即会导出关于温度 θ 的抛物型方程, 使得热量将会以无穷大的速度传播, 从而违背自然规律. 在某些物理场景下, Fourier 定律与实验观测数据也并不一致, 特别是当研究大温度梯度的流体运动时会导致较大的误差, 更多实例可参见文 [2–4]. 相比之下, Cattaneo 定律可以准确地与实验结果相匹配. 与 Fourier 定律相比, Cattaneo 定律表明热通量 q 和温度 θ 满足双曲型方程组, 根据双曲型方程组的有限传播性质可知, 热量将以有限的速度传播.

联合 (1.1) 和 (1.3)–(1.4), 可以得到具有 Cattaneo 热传导定律的完全可压缩 MHD 方程组如下 (下文简称为 MHDC 方程组):

$$\begin{cases}\partial_t\rho+u\cdot\nabla\rho+\rho\operatorname{div}u=0,\\ \rho(\partial_t u+u\cdot\nabla u)+R\nabla(\rho\theta)-\operatorname{curl}H\times H=\operatorname{div}\Psi(u),\\ c_V\rho(\partial_t\theta+u\cdot\nabla\theta)+R\rho\theta\operatorname{div}u+\operatorname{div}q=\nu|\operatorname{curl}H|^2+\Psi(u):\nabla u,\\ \partial_t H+u\cdot\nabla H-H\cdot\nabla u+H\operatorname{div}u=\nu\Delta H,\\ \tau\partial_t q+q+\kappa\nabla\theta=0.\end{cases} \tag{1.6}$$

上述方程组的初值条件为

$$(\rho,u,\theta,H,q)(x,0)=(\rho_0,u_0,\theta_0,H_0,q_0), \tag{1.7}$$

远场状态为

$$\lim_{|x|\to\infty}(\rho,u,\theta,H,q)(x,t)=(\rho_*,0,\theta_*,0,0), \tag{1.8}$$

其中 ρ_* 和 θ_* 均为正常数.

当松弛时间 $\tau=0$ 时, MHDC 方程组 (1.6) 为经典的非等熵可压缩 MHD 方程组, 其中热传导满足 Fourier 定律. 对于该方程组的数学理论, 已有大量的文献进行了研究. 尤其是一维情形已经得到了较为完善的研究. 例如, 小初值光滑解的全局存在性 [5] 以及解的大时间行为 [6]; 对于带有大初值的初边值问题的研究可参见文 [7–8]. 在三维空间中, 经典的非等熵可压缩 MHD 方程组弱解的存在性结果可参见文 [9–12], 该弱解的大时间行为也在文 [13–14] 中得到了证明.

Cattaneo 定律可以更准确地描述具有高导热性的材料中的传热情况, 对于准确预测材料中的温度分布具有重要意义. 因此, 越来越多的研究者开始关注 Cattaneo 定律. 在对松弛时间 τ 有额外假设的前提下, Hu 和 Racke [15] 得到了带有 Cattaneo 定律的可压缩

Navier-Stokes 方程组的全局适定性, 并证明了当松弛时间 $\tau \to 0$ 时, 该系统的解收敛到带有 Fourier 定律的可压缩 Navier-Stokes 方程组的解. 随后, Li, Tang 和 Zhang [16] 去掉了对松弛时间的附加假设也得到了该方程组的全局适定性, 并通过谱分析和低-高频分解等方法得到了解的最优时间衰减率. 与此同时, Tang, Zhang 和 Zou [17] 利用能量方法结合插值技术也得到了该方程组解的最优时间衰减估计. 最近, Liu 和 Wu [18] 研究了该方程组解的逐点估计. 最后, 需要指出的是, Cattaneo 定律不仅在流体力学中有广泛的应用, 而且在热弹性力学中也有许多应用和研究, 参见文 [19–20] 及其引用的参考文献.

回到 MHDC 方程组 (1.6), Liu 和 Xu [21] 将文 [15] 中的结果推广到该系统, 在对松弛时间 τ 附加假设 $\big(0 < \tau < \frac{4\kappa}{P_\theta^2(1,1)}\big)$ 下, 证明了小初值经典解的全局适定性. 此外, 据作者所知, 目前还没有关于方程组 (1.6) 解的大时间行为的研究结果. 因此, 本文的主要目的为: (1) 在没有额外假设的情况下建立 MHDC 方程组 (1.6) 经典解的全局存在性; (2) 研究该解的大时间行为并确定其最优时间衰减率. 主要结果如下.

定理 1.1 假设对于整数 $N \geqslant 3$, 初始扰动 $(\rho_0 - \rho_*, u_0, \theta_0 - \theta_*, H_0, q_0) \in H^N(\mathbb{R}^3)$ 且存在一个充分小的常数 $\epsilon_0 > 0$, 使得

$$\|(\rho_0 - \rho_*, u_0, \theta_0 - \theta_*, H_0, q_0)\|_{H^3} \leqslant \epsilon_0. \tag{1.9}$$

则 Cauchy 问题 (1.6)–(1.8) 存在全局经典解 (ρ, u, θ, H, q), 且对于 $t \geqslant 0$, 有

$$\begin{aligned}
&\|(\rho - \rho_*, u, \theta - \theta_*, H, q)(t)\|_{H^N}^2 \\
&\quad + \int_0^t (\|\nabla\rho(r)\|_{H^{N-1}}^2 + \|\nabla u(r)\|_{H^N}^2 + \|\nabla\theta(r)\|_{H^{N-1}}^2 + \|\nabla H(r)\|_{H^N}^2 + \|q(r)\|_{H^N}^2)\mathrm{d}r \\
&\leqslant C\|(\rho_0 - \rho_*, u_0, \theta_0 - \theta_*, H_0, q_0)\|_{H^N}^2.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

此外, 如果对于某个 $s \in \big[0, \frac{3}{2}\big)$, 若初始扰动 $(\rho_0 - \rho_*, u_0, \theta_0 - \theta_*, H_0, q_0) \in \dot{H}^{-s}(\mathbb{R}^3)$, 则对于 $\ell = 0, 1, \cdots, N-1$, 成立

$$\|\nabla^\ell(\rho - \rho_*, u, \theta - \theta_*, H)(t)\|_{H^{N-\ell}} \leqslant C(A_0 + B_0)(1+t)^{-\frac{\ell+s}{2}}, \tag{1.11}$$

且对于 $\ell = 0, 1, \cdots, N-2$, 热流 q 有更快的时间衰减率

$$\|\nabla^\ell q(t)\|_{H^{N-\ell}} \leqslant C(A_0 + B_0)(1+t)^{-\frac{\ell+s}{2}-\frac{1}{2}}, \tag{1.12}$$

其中

$$A_0 = \|(\rho_0 - \rho_*, u_0, \theta_0 - \theta_*, H_0, q_0)\|_{\dot{H}^{-s}}, \quad B_0 = \|(\rho_0 - \rho_*, u_0, \theta_0 - \theta_*, H_0, q_0)\|_{H^N},$$

正常数 C 与时间无关.

注 1.1 若在定理 1.1 中考虑周期域 $\mathbb{T}^3$ 而不是全空间 $\mathbb{R}^3$, 那么通过能量估计和 Poincaré 不等式, 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|(\rho - \rho_*, u, \theta - \theta_*, H, q)\|_{H^3(\mathbb{T}^3)}^2 + C\|(\rho - \rho_*, u, \theta - \theta_*, H, q)\|_{H^3(\mathbb{T}^3)}^2 \leqslant 0,$$

进而由 Grönwall 不等式可知解具有指数阶的时间衰减率.

注 1.2 从 (1.11)–(1.12) 可知热流随时间衰减到平衡态的速率比其他物理量快, 这一现象是由 Cattaneo 定律 (1.4) 中的阻尼结构所导致的. 相较而言, 由 (1.5) 可知 Fourier 定

律也导致热流有较快的衰减速率, 但这是由温度方程所具备的耗散结构导致的. 两种热传导定律都可以提升热流的衰减速率, 但其中所依赖的机制是完全不同的.

根据 Hardy-Littlewood-Sobolev 定理 (引理 2.6), 可以得到, 当 $p\in(1,2]$ 时, $L^p(\mathbb{R}^3)\subset\dot{H}^{-s}(\mathbb{R}^3)$, $s=3\big(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\big)\in\big[0,\frac{3}{2}\big)$. 因此, 可进一步得到解的 L^p-L^2 型最优时间衰减估计.

推论 1.1 在定理 1.1 中用初值条件 $(\rho_0-\rho_*,u_0,\theta_0-\theta_*,H_0,q_0)\in L^p$, $1<p\leqslant 2$, 代替 $(\rho_0-\rho_*,u_0,\theta_0-\theta_*,H_0,q_0)\in\dot{H}^{-s}$, 则解有如下的时间衰减率: 对于 $\ell=0,1,2,\cdots,N-1$, 有

$$\|\nabla^\ell(\rho-\rho_*,u,\theta-\theta_*,H)(t)\|_{H^{N-\ell}}\leqslant C(1+t)^{-\frac{3}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-\frac{\ell}{2}},$$

对于 $\ell=0,1,2,\cdots,N-2$, 有

$$\|\nabla^\ell q(t)\|_{H^{N-\ell}}\leqslant C(1+t)^{-\frac{3}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-\frac{\ell+1}{2}}.$$

现在简要地阐述定理 1.1 的证明策略. 在 Liu 和 Xu [21] 的结果中, 他们应用了 Kawashima 的全局存在性理论 [22–23], 在附加条件 $0<\tau<\frac{4\kappa}{P_\theta(1,1)^2}$ 下, 得到了解的全局存在性. 本文则采用了不同的方法, 通过充分利用 MHDC 方程组 (1.6) 的具体结构, 特别是 Cattaneo 定律的具体表达式, 在无需对 τ 附加额外约束的情况下推导出了新的估计式, 相应结果可见引理 3.1–3.2. 通过建立解的一致估计, 再结合局部存在性定理以及连续性论证得到了解的全局存在性, 这就完成了定理 1.1 第 1 部分的证明.

在研究解的大时间行为时, 由于 Poincaré 不等式在全空间上是失效的, 因此不能直接通过全空间的能量估计来得到解的大时间行为. 在文 [24–25] 的启发下, 作者引入了一个适当的负 Sobolev 空间, 并通过选择特殊的初值来控制解的负 Sobolev 空间范数; 进而利用负 Sobolev 空间中的插值不等式 (见引理 2.5) 导出 Poincaré 型不等式; 然后利用 Grönwall 不等式得到如下的时间衰减估计:

$$\|\nabla^\ell(\rho-\rho_*,u,\theta-\theta_*,H,q)(t)\|_{H^{N-\ell}}\lesssim(1+t)^{-\frac{\ell+s}{2}},\quad \ell=0,1,\cdots,N-1.$$

注意此时热流的时间衰减率与密度、速度、温度和磁场的时间衰减率相同.

最后, 通过 Cattaneo 定律 (1.4) 的阻尼结构可以解出热流 q 的具体表达式为

$$q(x,t)=\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}q_0-\frac{\kappa}{\tau}\int_0^t\mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau}(t-r)}\nabla\theta(x,r)\mathrm{d}r,$$

这意味着 $\|\nabla^\ell q\|_{L^2}$ 的时间衰减率与 $\|\nabla^{\ell+1}\theta\|_{L^2}$ 的时间衰减率相同. 基于这一观察, 可以证明热流 q 的确具有更快的时间衰减率.

本文的其余部分安排如下. 在下一节中, 将回顾一些有用的不等式. 在第 3 节中, 将建立解的全局存在性. 第 4 节将研究解的时间衰减估计.

最后, 介绍本文中使用的符号. C 表示与时间无关的通用常数. $L^p(\mathbb{R}^3)$ 表示 $\mathbb{R}^3$ 上标准的 Lebesgue 空间, 其范数表示为 $\|\cdot\|_{L^p}$. $H^k(\mathbb{R}^3)$ 表示标准的 Sobolev 空间 $W^{k,2}(\mathbb{R}^3)$, 其范数表示为 $\|\cdot\|_{H^s}$. 对于整数 k 和多重指标 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, 算子 ∇^k 表示对 $\partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}\partial_{x_3}^{\alpha_3}$ 中所有满足 $k=|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 的项的求和. $C^i([0,T];H^k(\mathbb{R}^3))$ 表示在 $t\in[0,T]$ 上关

于时间 i-次连续可微且取值于 $H^k(\mathbb{R}^3)$ 的函数空间. 函数 f 的 Fourier 变换表示为

$$\widehat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^3} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}x,\quad \xi\in\mathbb{R}^3.$$

算子 $\Lambda^s(s\in\mathbb{R})$ 定义为

$$\Lambda^s f(x)=\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^s\widehat{f}(\xi)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}\xi. \tag{1.13}$$

同时, 用 $\dot{H}^s$ 表示齐次 Sobolev 空间, 范数表示为

$$\|f\|_{\dot{H}^s}\triangleq\|\Lambda^s f\|_{L^2}=\||\xi|^s\widehat{f}(\xi)\|_{L^2}.$$

§2　预备知识

本节将回顾一些广泛使用的不等式. 首先是 Gagliardo-Nirenberg 不等式.

引理 2.1 [24,引理 A.1]　设 l,s 和 k 为任意实数且满足 $0\leqslant l,s<k$, 令 $p,r,q\in[1,\infty]$, $\theta\in[0,1]$, 使得

$$\frac{l}{3}-\frac{1}{p}=\Big(\frac{s}{3}-\frac{1}{r}\Big)(1-\theta)+\Big(\frac{k}{3}-\frac{1}{q}\Big)\theta,$$

则对于任意 $u\in W^{k,p}(\mathbb{R}^3)$, 有

$$\|\nabla^l u\|_{L^p}\leqslant C\|\nabla^s u\|_{L^r}^{1-\theta}\|\nabla^k u\|_{L^q}^{\theta}. \tag{2.1}$$

下面, 列出 Sobolev 空间中函数乘积和交换子估计.

引理 2.2 [26,引理 3.4]　假设函数 $f,g\in H^k(\mathbb{R}^3)\cap L^\infty(\mathbb{R}^3)$, 则对于任意的整数 $k\geqslant1$, 有

$$\|\nabla^k(fg)\|_{L^2}\leqslant C(\|f\|_{L^\infty}\|\nabla^k g\|_{L^2}+\|\nabla^k f\|_{L^2}\|g\|_{L^\infty}). \tag{2.2}$$

此外, 若 $\nabla f\in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, 并定义交换子

$$[\nabla^k,f]g=\nabla^k(fg)-f\nabla^k g,$$

则有

$$\big\|[\nabla^k,f]g\big\|_{L^2}\leqslant C(\|\nabla f\|_{L^\infty}\|\nabla^{k-1}g\|_{L^2}+\|\nabla^k f\|_{L^2}\|g\|_{L^\infty}). \tag{2.3}$$

引理 2.3 [24,引理A.3]　设整数 $k\geqslant1$. 则如下估计成立

$$\|[\nabla^k,f]g\|_{L^p}\leqslant C(\|\nabla f\|_{L^{p_1}}\|\nabla^{k-1}g\|_{L^{p_2}}+\|\nabla^k f\|_{L^{p_3}}\|g\|_{L^{p_4}}),$$

其中 $p,p_1,p_2,p_3,p_4\in(1,+\infty)$ 满足

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=\frac{1}{p_3}+\frac{1}{p_4}.$$

利用引理 2.1 并通过简单的计算可以得到 Sobolev 空间中的复合函数有如下估计, 具体计算细节可参见文 [17, 25].

引理 2.4　设 $f(\varrho)$ 是关于 ϱ 任意阶可微的光滑函数且 $\|\varrho\|_{L^\infty}\leqslant1$, 则对于 $p>1$ 和任意整数 $k\geqslant1$, 有

$$\|\nabla^k(f(\varrho))\|_{L^p}\leqslant C\|\nabla^k\varrho\|_{L^p}.$$

下面, 给出负 Sobolev 空间中的插值不等式.

引理 2.5 [25,引理 A.4] 设 $s>0$ 为实数, $k\geqslant 0$ 为整数, 则有

$$\|\nabla^k f\|_{L^2}\leqslant C\|\nabla^{k+1}f\|_{L^2}^{1-\theta}\|\Lambda^{-s}f\|_{L^2}^{\theta},\quad \theta=\frac{1}{1+k+s}.$$

当 $s\in(0,3)$ 时, (1.13) 中定义的算子 $\Lambda^{-s}f$ 是 Riesz 位势. 根据分数阶 Hardy-Littlewood-Sobolev 定理, 可以得到 Riesz 位势的 L^p 型不等式如下.

引理 2.6 [27, p.119定理 1] 设 $0<s<3$, $1<p<q<\infty$ 以及 $\frac{1}{q}+\frac{s}{3}=\frac{1}{p}$, 则有

$$\|\Lambda^{-s}f\|_{L^q}\leqslant C\|f\|_{L^p}.$$

§3 解的全局存在性

本节将重点讨论 Cauchy 问题 (1.6)–(1.8) 解的全局存在性. 首先, 建立解的局部存在性. 由于方程组 (1.6) 是可对称的双曲-抛物型方程组, 通过选择合适的对称化算子并根据文 [22] 中的证明过程, 可以得到如下的局部存在性定理.

定理 3.1 令 $N\geqslant 3$ 为整数. 假设对于某个常数 $M>0$, 初值满足

$$\|(\rho_0-\rho_*,u_0,\theta_0-\theta_*,H_0,q_0)\|_{H^3}\leqslant M,$$

则存在只依赖于 M 的时间 $T_*>0$, 使得 Cauchy 问题 (1.6)–(1.8) 在 $[0,T_*]$ 上存在经典解 (ρ,u,θ,H,q), 并且满足

$$\begin{aligned}(\rho-\rho_*,\theta-\theta_*,q)&\in C([0,T_*],H^N(\mathbb{R}^3))\cap C^1([0,T_*],H^{N-1}(\mathbb{R}^3)),\\(u,H)&\in C([0,T_*],H^N(\mathbb{R}^3))\cap C^1([0,T_*],H^{N-2}(\mathbb{R}^3)).\end{aligned}$$

为了从局部经典解得到全局经典解, 需建立解的一致估计. 为此, 定义扰动变量

$$n=\frac{\rho-\rho_*}{\rho_*},\quad \phi=\frac{\theta-\theta_*}{\theta_*},\tag{3.1}$$

则方程组 (1.6) 可写成如下对称扰动形式:

$$\begin{cases}\partial_t n+\operatorname{div}u=F_1,\\ \dfrac{1}{R\theta_*}\partial_t u+\nabla n+\nabla\phi=\dfrac{1}{R\theta_*\rho_*}\operatorname{div}\Psi(u)+F_2,\\ \dfrac{c_V}{R}\partial_t\phi+\operatorname{div}u+\dfrac{1}{R\rho_*\theta_*}\operatorname{div}q=F_3,\\ \partial_t H-\nu\Delta H=F_4,\\ \dfrac{\tau}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\partial_t q+\dfrac{1}{R\rho_*\theta_*}\nabla\phi+\dfrac{1}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}q=0,\end{cases}\tag{3.2}$$

其初值记作

$$(n,u,\phi,H,q)(x,0)=(n_0,u_0,\phi_0,H_0,q_0)=\Big(\frac{\rho_0-\rho_*}{\rho_*},u_0,\frac{\theta_0-\theta_*}{\theta_*},H_0,q_0\Big),\tag{3.3}$$

远场状态为

$$\lim_{|x|\to\infty}(n,w,\phi,\psi)=(0,0,0,0), \tag{3.4}$$

其中非线性项 F_i, $i=1,2,3,4$, 具体形式如下:

$$\begin{cases}F_1=-\mathrm{div}\,(nu),\\ F_2=-\dfrac{u\cdot\nabla u}{R\theta_*}-\dfrac{n\mathrm{div}\,\Psi(u)}{R\theta_*\rho_*(n+1)}+\dfrac{\mathrm{curl}\,H\times H}{R\theta_*\rho_*(n+1)}+\dfrac{n}{n+1}\nabla n-\dfrac{\phi}{n+1}\nabla n,\\ F_3=\dfrac{R\nu|\mathrm{curl}\,H|^2}{\rho_*\theta_*(n+1)}+\dfrac{R\Psi(u):\nabla u}{\rho_*\theta_*(n+1)}-\dfrac{c_V u\cdot\nabla\phi}{R}-\phi\mathrm{div}\,u+\dfrac{Rn\mathrm{div}\,q}{\rho_*\theta_*(n+1)},\\ F_4=H\cdot\nabla u-u\cdot\nabla H-H\mathrm{div}\,u.\end{cases} \tag{3.5}$$

现在, 对系统 (3.2)–(3.5) 的经典解作如下的先验假设: 对于小常数 $\delta>0$ 和任意给定的时间 $T>0$, 有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|(n,u,\phi,H,q)(t)\|_{H^3}\leqslant\delta. \tag{3.6}$$

在上述先验假设下, 可以建立系统 (3.2)–(3.5) 解的 L^2 估计.

引理 3.1 假设 (n,u,ϕ,H,q) 是系统 (3.2)–(3.5) 的经典解且满足先验假设 (3.6). 则当 $t\in(0,T]$ 时, 成立

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\|n\|_{L^2}^2+\frac{1}{R\theta_*}\|u\|_{L^2}^2+\frac{c_V}{R}\|\phi\|_{L^2}^2+\|H\|_{L^2}^2+\frac{\tau}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{q^2}{n+1}\mathrm{d}x\Big)\\&+\frac{2}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\|q\|_{L^2}^2+\frac{2(2\mu+\lambda)}{R\theta_*\rho_*}\|\nabla u\|_{L^2}^2+2\nu\|\nabla H\|_{L^2}^2\\&\leqslant C\delta(\|\nabla n\|_{L^2}^2+\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla^2u\|_{L^2}^2+\|\nabla\phi\|_{L^2}^2+\|\nabla H\|_{L^2}^2+\|q\|_{L^2}^2).\end{aligned} \tag{3.7}$$

证 将方程组 (3.2) 与 $2(n,u,\phi,H,q)$ 作 L^2 内积, 然后利用分部积分, 可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\|n\|_{L^2}^2+\frac{1}{R\theta_*}\|u\|_{L^2}^2+\frac{c_V}{R}\|\phi\|_{L^2}^2+\|H\|_{L^2}^2+\frac{\tau}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\|q\|_{L^2}^2\Big)\\&+\frac{2}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\|q\|_{L^2}^2+\frac{2(2\mu+\lambda)}{R\theta_*\rho_*}\|\nabla u\|_{L^2}^2+2\nu\|\nabla H\|_{L^2}^2\\&=\int_{\mathbb{R}^3}(2nF_1+2u\cdot F_2+2\phi F_3+2H\cdot F_4)\mathrm{d}x\\&\triangleq \mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2+\mathrm{I}_3+\mathrm{I}_4.\end{aligned} \tag{3.8}$$

利用 Hölder 不等式和先验假设 (3.6), I_1, I_2 和 I_4 可被估计如下:

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_1&=\int_{\mathbb{R}^3}(-2nu\cdot\nabla n-2n^2\mathrm{div}\,u)\mathrm{d}x\\&\leqslant C(\|n\|_{L^3}\|u\|_{L^6}\|\nabla n\|_{L^2}+\|n\|_{L^3}\|n\|_{L^6}\|\mathrm{div}\,u\|_{L^2})\\&\leqslant C\delta(\|\nabla n\|_{L^2}^2+\|\nabla u\|_{L^2}^2),\\ \mathrm{I}_2&=\int_{\mathbb{R}^3}\Big(-\frac{2u\cdot n\mathrm{div}\,\Psi(u)}{R\theta_*\rho_*(n+1)}+\frac{2u\cdot(\mathrm{curl}\,H\times H)}{R\theta_*\rho_*(n+1)}+\frac{2(n-\phi)}{n+1}u\cdot\nabla n-\frac{2u\cdot\nabla u}{R\theta_*}\cdot u\Big)\mathrm{d}x\\&\leqslant C(\|n\|_{L^3}\|u\|_{L^6}\|\Delta u\|_{L^2}+\|u\|_{L^3}\|H\|_{L^6}\|\nabla H\|_{L^2}+\|n\|_{L^3}\|u\|_{L^6}\|\nabla n\|_{L^2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \|\phi\|_{L^3}\|u\|_{L^6}\|\nabla n\|_{L^2} + \|u\|_{L^3}\|u\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^2}\\
&\leqslant C\delta(\|\nabla n\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla^2 u\|_{L^2}^2 + \|\nabla \phi\|_{L^2}^2 + \|\nabla H\|_{L^2}^2)
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}_4 &= \int_{\mathbb{R}^3} 2H(H\cdot\nabla u - u\cdot\nabla H - H\mathrm{div}\, u)\mathrm{d}x\\
&\leqslant C(\|H\|_{L^3}\|H\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^2} + \|H\|_{L^3}\|\nabla H\|_{L^2}\|u\|_{L^6})\\
&\leqslant C\delta(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla H\|_{L^2}^2).
\end{aligned}
$$

由于 I_3 项中出现了热流 q, 对于这一项的处理则需要更加精细:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}_3 &= \int_{\mathbb{R}^3}\Big(\frac{2\nu\phi|\mathrm{curl}\, H|^2}{R\rho_*\theta_*(n+1)} + \frac{2\phi\Psi(u):\nabla u}{R\rho_*\theta_*(n+1)} - 2\phi^2\mathrm{div}\, u - \frac{2c_V}{R}\phi u\cdot\nabla\phi + \frac{2n\phi\mathrm{div}\, q}{R\rho_*\theta_*(n+1)}\Big)\mathrm{d}x\\
&\triangleq \mathrm{J}_1 + \mathrm{J}_2 + \mathrm{J}_3 + \mathrm{J}_4 + \mathrm{J}_5.
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

使用与上面类似的方法, 可得

$$
\mathrm{J}_1 \leqslant C\|\phi\|_{L^3}\|\nabla H\|_{L^6}\|\nabla H\|_{L^2} \leqslant C\delta(\|\nabla\phi\|_{L^2}^2 + \|\nabla H\|_{L^2}^2), \tag{3.10}
$$

$$
\mathrm{J}_2 \leqslant C\|\phi\|_{L^3}\|\nabla u\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^2} \leqslant C\delta(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla\phi\|_{L^2}^2), \tag{3.11}
$$

$$
\mathrm{J}_3 \leqslant C\|\phi\|_{L^3}\|\phi\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^2} \leqslant C\delta(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla\phi\|_{L^2}^2), \tag{3.12}
$$

$$
\mathrm{J}_4 \leqslant C\|u\|_{L^6}\|\nabla\phi\|_{L^2}\|\phi\|_{L^3} \leqslant C\delta(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla\phi\|_{L^2}^2). \tag{3.13}
$$

对于 J_5, 使用分部积分和 (3.2) 中的第 5 个等式, 得到

$$
\begin{aligned}
\mathrm{J}_5 &= \int_{\mathbb{R}^3}\frac{2n\phi\mathrm{div}\, q}{R\rho_*\theta_*(n+1)}\mathrm{d}x\\
&= -\frac{2}{R\rho_*\theta_*}\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\Big(\frac{n}{n+1}\Big)\phi\cdot q\mathrm{d}x - \frac{2}{R\rho_*\theta_*}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{n}{n+1}q\cdot\nabla\phi\mathrm{d}x\\
&= -\frac{2}{R\rho_*\theta_*}\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\Big(\frac{n}{n+1}\Big)\phi\cdot q\mathrm{d}x + \frac{2}{R\rho_*\theta_*}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{n}{n+1}q\cdot\Big(\frac{\tau}{\kappa\theta_*}\partial_t q + \frac{1}{\kappa\theta_*}q\Big)\mathrm{d}x\\
&= -\frac{2}{R\rho_*\theta_*}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\phi\nabla n\cdot q}{(n+1)^2}\mathrm{d}x + \frac{\tau}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{n}{n+1}\frac{\mathrm{d}q^2}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x + \frac{2}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{nq^2}{n+1}\mathrm{d}x\\
&= -\frac{2}{R\rho_*\theta_*}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\phi\nabla n\cdot q}{(n+1)^2}\mathrm{d}x + \frac{\tau}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{nq^2}{n+1}\,\mathrm{d}x\\
&\quad - \frac{\tau}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{F_1 - \mathrm{div}\, u}{(n+1)^2}q^2\mathrm{d}x + \frac{2}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{nq^2}{n+1}\mathrm{d}x\\
&\leqslant \frac{\tau}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{nq^2}{n+1}\mathrm{d}x + C\delta(\|\nabla\phi\|_{L^2}^2 + \|q\|_{L^2}^2).
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

将 (3.9)–(3.14) 结合起来, 得到

$$
\mathrm{I}_3 \leqslant \frac{\tau}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{nq^2}{n+1}\mathrm{d}x + C\delta(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla\phi\|_{L^2}^2 + \|\nabla H\|_{L^2}^2 + \|q\|_{L^2}^2).
$$

将 I_i $(i=1,2,3,4)$ 的估计代入 (3.8) 中, 可得

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\|n\|_{L^2}^2 + \frac{1}{R\theta_*}\|u\|_{L^2}^2 + \frac{c_V}{R}\|\phi\|_{L^2}^2 + \|H\|_{L^2}^2 + \frac{\tau}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\int_{\mathbb{R}^3}q^2\mathrm{d}x\Big)
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{2}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\|q\|_{L^2}^2+\frac{2(2\mu+\lambda)}{R\theta_*\rho_*}\|\nabla u\|_{L^2}^2+2\nu\|\nabla H\|_{L^2}^2\\
&\leqslant C\delta(\|\nabla n\|_{L^2}^2+\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla^2 u\|_{L^2}^2+\|\nabla\phi\|_{L^2}^2+\|\nabla H\|_{L^2}^2+\|q\|_{L^2}^2)\\
&+\frac{\tau}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{nq^2}{n+1}\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

从而估计式 (3.7) 成立. 引理 3.1 证毕.

接下来, 将建立系统 (3.2)–(3.5) 解的高阶导数估计.

引理 3.2　令 $N\geqslant 3$ 为整数. 假设 (n,u,ϕ,H,q) 为系统 (3.2)–(3.5) 的经典解且满足先验估计 (3.6). 则对于 $0\leqslant t\leqslant T$ 和 $0<k\leqslant N$, 成立

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\|\nabla^k n\|_{L^2}^2+\frac{1}{R\theta_*}\|\nabla^k u\|_{L^2}^2+\frac{c_V}{R}\|\nabla^k\phi\|_{L^2}^2+\|\nabla^k H\|_{L^2}^2+\frac{\tau}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{n+1}|\nabla^k q|^2\mathrm{d}x\Big)\\
&+\frac{2}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\|\nabla^k q\|_{L^2}^2+\frac{2(2\mu+\lambda)}{R\theta_*\rho_*}\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}^2+2\nu\|\nabla^{k+1}H\|_{L^2}^2\\
&\leqslant C\delta(\|\nabla^k n\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}^2+\|\nabla^k\phi\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}H\|_{L^2}^2+\|\nabla^k q\|_{L^2}^2).
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

证　对方程组 (3.2) 作用算子 ∇^k, $1\leqslant k\leqslant N$, 可得

$$
\begin{cases}
\partial_t\nabla^k n+\nabla^k\mathrm{div}\,u=\nabla^k F_1,\\
\dfrac{1}{R\theta_*}\partial_t\nabla^k u+\nabla^k\nabla n+\nabla^k\nabla\phi=\dfrac{1}{R\theta_*\rho_*}\nabla^k\mathrm{div}\,\Psi(u)+\nabla^k F_2,\\
\dfrac{c_V}{R}\partial_t\nabla^k\phi+\nabla^k\mathrm{div}\,u+\dfrac{1}{R\rho_*\theta_*}\nabla^k\mathrm{div}\,q=\nabla^k F_3,\\
\partial_t\nabla^k H-\nu\nabla^k\Delta H=\nabla^k F_4,\\
\dfrac{\tau}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\partial_t\nabla^k q+\dfrac{1}{R\rho_*\theta_*}\nabla\nabla^k\phi+\dfrac{1}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\nabla^k q=0.
\end{cases}
$$

将上述方程组与 $2(\nabla^k n,\nabla^k u,\nabla^k\phi,\nabla^k H,\nabla^k q)$ 作 L^2 内积, 然后分部积分, 可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\|\nabla^k n\|_{L^2}^2+\frac{1}{R\theta_*}\|\nabla^k u\|_{L^2}^2+\frac{c_V}{R}\|\nabla^k\phi\|_{L^2}^2+\|\nabla^k H\|_{L^2}^2+\frac{\tau}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\|\nabla^k q\|_{L^2}^2\Big)\\
&+\frac{2}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\|\nabla^k q\|_{L^2}^2+\frac{2(2\mu+\lambda)}{R\theta_*\rho_*}\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}^2+2\nu\|\nabla^{k+1}H\|_{L^2}^2\\
&=\int_{\mathbb{R}^3}2\nabla^k n\nabla^k F_1+2\nabla^k u\cdot\nabla^k F_2+2\nabla^k\phi\nabla^k F_3+2\nabla^k H\cdot\nabla^k F_4\mathrm{d}x\\
&\triangleq \mathrm{I}_5+\mathrm{I}_6+\mathrm{I}_7+\mathrm{I}_8.
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

接下来, 依次估计上述各项. 对于 I_5, 有

$$
\mathrm{I}_5=-\int_{\mathbb{R}^3}2\nabla^k n\cdot[\nabla^k(n\mathrm{div}\,u)+\nabla^k(u\cdot\nabla n)]\mathrm{d}x,
\tag{3.17}
$$

利用 Hölder 和 Sobolev 不等式, 引理 2.2 以及 (3.6), I_5 的第 1 项可以被估计如下:

$$
-2\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^k n\cdot\nabla^k(n\mathrm{div}\,u)\mathrm{d}x\leqslant C\|\nabla^k n\|_{L^2}\|\nabla^k(n\mathrm{div}\,u)\|_{L^2}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant C\|\nabla^k n\|_{L^2}(\|n\|_{L^\infty}\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}+\|\nabla^k n\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^\infty})\\
&\leqslant C\|\nabla^k n\|_{L^2}(\|n\|_{H^2}\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}+\|\nabla^k n\|_{L^2}\|u\|_{H^3})\\
&\leqslant C\delta\|\nabla^k n\|_{L^2}(\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}+\|\nabla^k n\|_{L^2}).
\end{aligned}\tag{3.18}
$$

类似地, 对于 I_5 中的第 2 项, 有

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3}-2\nabla^k n\cdot\nabla^k(u\cdot\nabla n)\mathrm{d}x\\
&=-2\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^k n\cdot[\nabla^k(u\cdot\nabla n)-u\cdot\nabla\nabla^k n]\mathrm{d}x-2\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^k n\cdot[(u\cdot\nabla)\nabla^k n]\mathrm{d}x\\
&\leqslant C(\|[\nabla^k,u]\nabla n\|_{L^2}\|\nabla^k n\|_{L^2}+\|\mathrm{div}\,u\|_{L^\infty}\|\nabla^k n\|_{L^2}^2)\\
&\leqslant C\big[(\|\nabla u\|_{L^\infty}\|\nabla^k n\|_{L^2}+\|\nabla^k u\|_{L^6}\|\nabla n\|_{L^3})\|\nabla^k n\|_{L^2}+\|\mathrm{div}\,u\|_{L^\infty}\|\nabla^k n\|_{L^2}^2\big]\\
&\leqslant C\delta(\|\nabla^k n\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}^2).
\end{aligned}\tag{3.19}
$$

把估计式 (3.18) 和 (3.19) 代入 (3.17), 得到

$$
\mathrm{I}_5\leqslant C\delta(\|\nabla^k n\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}^2).
$$

对于 I_6, 有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}_6&=2\int_{\mathbb{R}^3}-\frac{\nabla^k u}{R\theta_*\rho_*}\cdot\nabla^k\Big(\frac{n\mathrm{div}\,\Psi(u)}{n+1}\Big)-\frac{\nabla^k u}{R\theta_*}\cdot\nabla^k(u\cdot\nabla u)+\nabla^k u\cdot\nabla^k\Big(\frac{n\nabla n}{n+1}\Big)\\
&\quad-\nabla^k u\cdot\nabla^k\Big(\frac{\phi\nabla n}{n+1}\Big)+\frac{\nabla^k u}{R\theta_*\rho_*}\cdot\nabla^k\Big(\frac{\mathrm{curl}\,H\times H}{n+1}\Big)\mathrm{d}x\\
&\triangleq \mathrm{J}_6+\mathrm{J}_7+\mathrm{J}_8+\mathrm{J}_9+\mathrm{J}_{10}.
\end{aligned}\tag{3.20}
$$

为方便起见, 定义

$$
h(n)=\frac{n}{n+1},
$$

根据粘性应力张量 $\Psi(u)$ 的表达式 (1.2) 以及分部积分公式, J_6 可被重新改写

$$
\begin{aligned}
\mathrm{J}_6&=-\frac{2\mu}{R\theta_*\rho_*}\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^k u\cdot\nabla^k(h(n)\Delta u)\mathrm{d}x-\frac{2(\mu+\lambda)}{R\theta_*\rho_*}\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^k u\cdot\nabla^k(h(n)\nabla\mathrm{div}\,u)\mathrm{d}x\\
&=\frac{2\mu}{R\theta_*\rho_*}\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^{k+1}u\cdot\nabla^{k-1}(h(n)\Delta u)\mathrm{d}x+\frac{2(\mu+\lambda)}{R\theta_*\rho_*}\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^{k+1}u\cdot\nabla^{k-1}(h(n)\nabla\mathrm{div}\,u)\mathrm{d}x\\
&\triangleq \mathrm{K}_1+\mathrm{K}_2.
\end{aligned}
$$

由 Leibniz 公式和 Hölder 不等式, 得到

$$
\begin{aligned}
\mathrm{K}_1&=\frac{2\mu}{R\theta_*\rho_*}\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^{k+1}u\cdot\nabla^{k-1}(h(n)\Delta u)\mathrm{d}x\\
&=\frac{2\mu}{R\theta_*\rho_*}\sum_{l=0}^{k-1}C_{k-1}^l\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^l h(n)\nabla^{k-l+1}u\cdot\nabla^{k+1}u\mathrm{d}x\\
&\leqslant C\sum_{l=0}^{k-1}\|\nabla^l h(n)\nabla^{k-l+1}u\|_{L^2}\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2},
\end{aligned}
$$

其中二项式系数 $C_m^n=\frac{m!}{n!(m-n)!}$. 当 $0\leqslant l\leqslant\big[\frac{k-1}{2}\big]$ 时, 依次利用引理 2.4 和引理 2.1, 可得

$$
\|\nabla^l h(n)\nabla^{k-l+1}u\|_{L^2}\leqslant C\|\nabla^l h(n)\|_{L^\infty}\|\nabla^{k-l+1}u\|_{L^2}
$$

$$\begin{aligned}&\leqslant C\|\nabla^l n\|_{L^\infty}\|\nabla^{k-l+1}u\|_{L^2}\\&\leqslant C\|\nabla^{\sigma_1}n\|_{L^2}^{1-\frac{l}{k}}\|\nabla^k n\|_{L^2}^{\frac{l}{k}}\|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{l}{k}}\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}^{1-\frac{l}{k}},\end{aligned}\tag{3.21}$$

其中常数 $\sigma_1=\frac{3k}{2(k-l)}\in\left[\frac{3}{2},3\right)$. 然后, 由引理 2.1 和先验估计 (3.6), 可知

$$\|\nabla^{\sigma_1}n\|_{L^2}^{1-\frac{l}{k}}\leqslant C\delta^{1-\frac{l}{k}},\quad \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{l}{k}}\leqslant C\delta^{\frac{l}{k}}.$$

将上述结果代入 (3.21), 然后利用 Young 不等式, 可得

$$\|\nabla^l h(n)\nabla^{k-l+1}u\|_{L^2}\leqslant C\delta(\|\nabla^k n\|_{L^2}+\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}).\tag{3.22}$$

当 $\left[\frac{k-1}{2}\right]+1\leqslant l\leqslant k-1$ 时, 有

$$\begin{aligned}\|\nabla^l h(n)\nabla^{k-l+1}u\|_{L^2}&\leqslant\|\nabla^l h(n)\|_{L^6}\|\nabla^{k-l+1}u\|_{L^3}\\&\leqslant C\|\nabla^l n\|_{L^6}\|\nabla^{k-l+1}u\|_{L^3}\\&\leqslant C\|\nabla n\|_{L^2}^{1-\frac{l}{k-1}}\|\nabla^k n\|_{L^2}^{\frac{l}{k-1}}\|\nabla^{\sigma_2}u\|_{L^2}^{\frac{l}{k-1}}\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}^{1-\frac{l}{k-1}}\\&\leqslant C\delta(\|\nabla^k n\|_{L^2}+\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}),\end{aligned}$$

其中 $\sigma_2=\frac{k-1}{2l}+2\in\left[\frac{5}{2},3\right)$. 联合 (3.22), 有

$$\mathrm{K}_1\leqslant C\delta(\|\nabla^k n\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}^2).$$

对于 K_2, 亦有同样的估计成立. 因此得到

$$\mathrm{J}_6\leqslant C\delta(\|\nabla^k n\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}^2).\tag{3.23}$$

对于 J_8, 使用类似于 J_6 的分析方法, 推得

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_8&=2\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^k u\cdot\nabla^k(h(n)\nabla n)\mathrm{d}x\\&=-2\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^{k+1}u\cdot\nabla^{k-1}(h(n)\nabla n)\mathrm{d}x\\&=-2\sum_{l=0}^{k-1}C_{k-1}^l\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^l h(n)\nabla^{k-l}n\cdot\nabla^{k+1}u\ \mathrm{d}x\\&\leqslant C\sum_{l=0}^{k-1}\|\nabla^l h(n)\nabla^{k-l}n\|_{L^2}\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}.\end{aligned}\tag{3.24}$$

当 $0\leqslant l\leqslant\left[\frac{k-1}{2}\right]$ 时, 有

$$\begin{aligned}\|\nabla^l h(n)\nabla^{k-l}n\|_{L^2}&\leqslant C\|\nabla^l h(n)\|_{L^\infty}\|\nabla^{k-l}n\|_{L^2}\\&\leqslant C\|\nabla^l n\|_{L^\infty}\|\nabla^{k-l}n\|_{L^2}\\&\leqslant C\|\nabla^{\sigma_3}n\|_{L^2}^{1-\frac{l}{k}}\|\nabla^k n\|_{L^2}^{\frac{l}{k}}\|n\|_{L^2}^{\frac{l}{k}}\|\nabla^k n\|_{L^2}^{1-\frac{l}{k}}\\&\leqslant C\delta\|\nabla^k n\|_{L^2},\end{aligned}\tag{3.25}$$

其中 $\sigma_3=\frac{3k}{2(k-l)}\in\left[\frac{3}{2},3\right]$. 当 $\left[\frac{k-1}{2}\right]+1\leqslant l\leqslant k-1$ 时, 有

$$\begin{aligned}\|\nabla^l h(n)\nabla^{k-l}n\|_{L^2}&\leqslant\|\nabla^l h(n)\|_{L^6}\|\nabla^{k-l}n\|_{L^3}\\&\leqslant C\|\nabla^l n\|_{L^6}\|\nabla^{k-l}n\|_{L^3}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant C\|\nabla^2 n\|_{L^2}^{1-\frac{l}{k-2}}\|\nabla^k n\|_{L^2}^{\frac{l}{k-2}}\|\nabla^{\sigma_4} n\|_{L^2}^{\frac{l}{k-2}}\|\nabla^k n\|_{L^2}^{1-\frac{l}{k-2}}\\
&\leqslant C\delta\|\nabla^k n\|_{L^2},
\end{aligned}\tag{3.26}
$$

其中 $\sigma_4=2+\frac{k-2}{2l}\in\left(\frac{5}{2},3\right)$. 结合 (3.25)–(3.26), 可得

$$
\mathrm{J}_8\leqslant C\delta(\|\nabla^k n\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}^2).\tag{3.27}
$$

同理, J_9 可被估计如下:

$$
\mathrm{J}_9\leqslant C\delta(\|\nabla^k n\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}^2+\|\nabla^k\phi\|_{L^2}^2).\tag{3.28}
$$

利用 Hölder 不等式和引理 2.3, J_7 和 J_{10} 有如下估计:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{J}_7&=-\int_{\mathbb{R}^3}\frac{2\nabla^k u}{R\theta_*}\cdot\nabla^k(u\cdot\nabla u)\mathrm{d}x\\
&\leqslant C\|\nabla^k u\|_{L^6}\|\nabla^k(u\cdot\nabla u)-u\cdot\nabla^{k+1}u+u\cdot\nabla^{k+1}u\|_{L^{\frac{6}{5}}}\\
&\leqslant C\|\nabla^k u\|_{L^6}(\|[\nabla^k,u]\nabla u\|_{L^{\frac{6}{5}}}+\|u\cdot\nabla^{k+1}u\|_{L^{\frac{6}{5}}})\\
&\leqslant C\|\nabla^k u\|_{L^6}(\|\nabla u\|_{L^{\frac{3}{2}}}\|\nabla^k u\|_{L^6}+\|\nabla^k u\|_{L^6}\|\nabla u\|_{L^{\frac{3}{2}}}+\|u\|_{L^3}\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2})\\
&\leqslant C\|\nabla^k u\|_{L^6}\Big(\|\nabla^{k+1}u\Big\|_{L^2}\|u\|_{L^2}^{\frac{3}{4}}\Big\|\nabla^2 u\|_{L^2}^{\frac{1}{4}}+\|u\|_{H^1}\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}\Big)\\
&\leqslant C\delta\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}^2,
\end{aligned}\tag{3.29}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{J}_{10}&=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{2\nabla^k u}{R\theta_*\rho_*}\cdot\nabla^k\Big(\frac{\mathrm{curl}\,H\times H}{n+1}\Big)\mathrm{d}x\\
&\leqslant C\|\nabla^k u\|_{L^6}\Big(\Big\|\Big[\nabla^k,\frac{H}{n+1}\Big]\mathrm{curl}\,H\Big\|_{L^{\frac{6}{5}}}+\Big\|\frac{H}{n+1}\cdot\nabla^k\mathrm{curl}\,H\Big\|_{L^{\frac{6}{5}}}\Big)\\
&\leqslant C\|\nabla^k u\|_{L^6}\Big(\Big\|\nabla\Big(\frac{H}{n+1}\Big)\Big\|_{L^{\frac{3}{2}}}\|\nabla^{k-1}\mathrm{curl}\,H\|_{L^6}+\Big\|\nabla^k\Big(\frac{H}{n+1}\Big)\Big\|_{L^2}\|\mathrm{curl}\,H\|_{L^3}\\
&\quad+\Big\|\frac{H}{n+1}\Big\|_{L^3}\|\nabla^k\mathrm{curl}\,H\|_{L^2}\Big)\\
&\leqslant C\|\nabla^k u\|_{L^6}\Big(\|\nabla^{k+1}H\|_{L^2}\Big\|\frac{H}{n+1}\Big\|_{L^2}^{\frac{3}{4}}\Big\|\nabla^2\Big(\frac{H}{n+1}\Big)\Big\|_{L^2}^{\frac{1}{4}}\\
&\quad+\delta\Big\|\nabla^k\Big(\frac{H}{n+1}\Big)\Big\|_{L^2}+\delta\|\nabla^k\mathrm{curl}\,H\|_{L^2}\Big)\\
&\leqslant C\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}\Big[\delta\Big(\Big\|\frac{1}{n+1}\Big\|_{L^4}\|\nabla^k H\|_{L^4}+\Big\|\nabla^k\Big(\frac{1}{n+1}\Big)\Big\|_{L^2}\|H\|_{L^\infty}\Big)+\delta\|\nabla^{k+1}H\|_{L^2}\Big]\\
&\leqslant C\delta(\|\nabla^k n\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}H\|_{L^2}^2).
\end{aligned}\tag{3.30}
$$

联合 (3.27)–(3.30) 以及 (3.23), 可推出

$$
\mathrm{I}_6\leqslant C\delta(\|\nabla^k n\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}^2+\|\nabla^k\phi\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}H\|_{L^2}^2).
$$

回顾 (3.5), 可将 I_7 进行如下分解:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}_7&=\int_{\mathbb{R}^3}\Big\{\frac{2\nu\nabla^k\phi}{R\theta_*\rho_*}\cdot\nabla^k\Big(\frac{|\mathrm{curl}\,H|^2}{n+1}\Big)+\frac{2\nabla^k\phi}{R\theta_*\rho_*}\cdot\nabla^k\Big(\frac{\Psi(u):\nabla u}{n+1}\Big)-\frac{2c_V}{R}\nabla^k\phi\cdot\nabla^k(u\cdot\nabla\phi)\\
&\quad+\frac{2\nabla^k\phi}{R\theta_*\rho_*}\cdot\nabla^k\Big(\frac{n\mathrm{div}\,q}{n+1}\Big)-2\nabla^k\phi\cdot\nabla^k(\phi\mathrm{div}\,u)\Big\}\mathrm{d}x\\
&\triangleq\mathrm{J}_{11}+\mathrm{J}_{12}+\mathrm{J}_{13}+\mathrm{J}_{14}+\mathrm{J}_{15}.
\end{aligned}\tag{3.31}
$$

根据 (2.2), 有

$$
\begin{aligned}
\|\nabla^k(|\nabla H|^2)\|_{L^2} &\leqslant C\|\nabla H\|_{L^\infty}\|\nabla^{k+1}H\|_{L^2}\\
&\leqslant C\|\nabla H\|_{H^2}\|\nabla^{k+1}H\|_{L^2}\\
&\leqslant C\delta\|\nabla^{k+1}H\|_{L^2}.
\end{aligned}
$$

利用上述结果, 可将 J_{11} 估计如下:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{J}_{11} &= \int_{\mathbb{R}^3}\frac{2\nu\nabla^k\phi}{R\theta_*\rho_*}\cdot\Big[\nabla^k\Big(\frac{|\mathrm{curl}\,H|^2}{n+1}\Big)-\frac{\nabla^k(|\mathrm{curl}\,H|^2)}{n+1}\Big]\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}\frac{2\nu\nabla^k\phi}{R\theta_*\rho_*}\cdot\frac{\nabla^k(|\mathrm{curl}\,H|^2)}{n+1}\mathrm{d}x\\
&\leqslant C\|\nabla^k\phi\|_{L^2}\Big\|\Big[\nabla^k,\ \frac{1}{n+1}\Big](|\mathrm{curl}\,H|^2)\Big\|_{L^2}+C\|\nabla^k\phi\|_{L^2}\Big\|\frac{\nabla^k(|\mathrm{curl}\,H|^2)}{n+1}\Big\|_{L^2}\\
&\leqslant C\|\nabla^k\phi\|_{L^2}\Big(\|\nabla n\|_{L^3}\|\nabla^{k-1}(|\mathrm{curl}\,H|^2)\|_{L^6}+\|\nabla H\|_{L^\infty}^2\Big\|\nabla^k\Big(\frac{1}{n+1}\Big)\Big\|_{L^2}\\
&\quad+\Big\|\frac{1}{n+1}\Big\|_{L^\infty}\|\nabla^k(|\mathrm{curl}\,H|^2)\|_{L^2}\Big)\\
&\leqslant C\delta\|\nabla^k\phi\|_{L^2}(\|\nabla^k(|\mathrm{curl}\,H|^2)\|_{L^2}+\|\nabla^k n\|_{L^2}+\|\nabla^{k+1}H\|_{L^2})\\
&\leqslant C\delta(\|\nabla^k n\|_{L^2}^2+\|\nabla^k\phi\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}H\|_{L^2}^2).
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

同理可得

$$
\mathrm{J}_{12}\leqslant C\delta(\|\nabla^k n\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}^2+\|\nabla^k\phi\|_{L^2}^2),\tag{3.33}
$$

$$
\mathrm{J}_{13}\leqslant C\delta(\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}^2+\|\nabla^k\phi\|_{L^2}^2).\tag{3.34}
$$

然后, 利用 (3.2) 中的第 1 个等式和第 4 个等式, 得到

$$
\begin{aligned}
\mathrm{J}_{14} &= \frac{2}{R\theta_*\rho_*}\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^k\phi\cdot\Big[\nabla^k\Big(\frac{n\mathrm{div}\,q}{n+1}\Big)-\frac{n}{n+1}\nabla^k\mathrm{div}\,q\Big]\mathrm{d}x+\frac{2}{R\theta_*\rho_*}\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^k\phi\cdot\frac{n\nabla^k\mathrm{div}\,q}{n+1}\mathrm{d}x\\
&\leqslant C\|\nabla^k\phi\|_{L^2}\|[\nabla^k,\ h(n)]\mathrm{div}\,q\|_{L^2}-\frac{2}{R\theta_*\rho_*}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{n}{n+1}\nabla\nabla^k\phi\cdot\nabla^k q\ \mathrm{d}x\\
&\quad-\frac{2}{R\theta_*\rho_*}\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\Big(\frac{n}{n+1}\Big)\nabla^k\phi\cdot\nabla^k q\ \mathrm{d}x\\
&\leqslant C\|\nabla^k\phi\|_{L^2}(\|\nabla h(n)\|_{L^\infty}\|\nabla^{k-1}\mathrm{div}\,q\|_{L^2}+\|\nabla^k h(n)\|_{L^2}\|\mathrm{div}\,q\|_{L^\infty})\\
&\quad+\frac{2}{R\theta_*\rho_*}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{n}{n+1}\nabla^k\Big(\frac{\tau\partial_t q}{\kappa\theta_*}+\frac{q}{\kappa\theta_*}\Big)\nabla^k q\ \mathrm{d}x+C\|\nabla n\|_{L^\infty}\|\nabla^k\phi\|_{L^2}\|\nabla^k q\|_{L^2}\\
&\leqslant C\delta(\|\nabla^k n\|_{L^2}^2+\|\nabla^k\phi\|_{L^2}^2+\|\nabla^k q\|_{L^2}^2)+\frac{\tau}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{n}{n+1}|\nabla^k q|^2\mathrm{d}x\\
&\quad-\frac{\tau}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla^k q|^2\frac{n_t}{(n+1)^2}\mathrm{d}x+\frac{2}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{n}{n+1}|\nabla^k q|^2\mathrm{d}x\\
&\leqslant C\delta(\|\nabla^k n\|_{L^2}^2+\|\nabla^k\phi\|_{L^2}^2+\|\nabla^k q\|_{L^2}^2)+\frac{\tau}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{n}{n+1}|\nabla^k q|^2\mathrm{d}x\\
&\quad-\frac{\tau}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla^k q|^2\ \frac{F_1-\mathrm{div}\,u}{(n+1)^2}\ \mathrm{d}x+C\delta\|\nabla^k q\|_{L^2}^2\\
&\leqslant \frac{\tau}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{n}{n+1}|\nabla^k q|^2\mathrm{d}x+C\delta(\|\nabla^k n\|_{L^2}^2+\|\nabla^k\phi\|_{L^2}^2+\|\nabla^k q\|_{L^2}^2).
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

最后, J_{15} 可被估计为

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_{15} &\leqslant C\|\nabla^k\phi\|_{L^2}\|\nabla^k(\phi\operatorname{div}u)\|_{L^2}\\ &\leqslant C\|\nabla^k\phi\|_{L^2}(\|\phi\|_{L^\infty}\|\nabla^k\operatorname{div}u\|_{L^2}+\|\nabla^k\phi\|_{L^2}\|\operatorname{div}u\|_{L^\infty})\\ &\leqslant C\delta(\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}^2+\|\nabla^k\phi\|_{L^2}^2).\end{aligned}\tag{3.36}$$

将 (3.32)–(3.36) 代入 (3.31), 得到

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_7 \leqslant{}& \frac{\tau}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{n}{n+1}|\nabla^k q|^2\mathrm{d}x\\ &+C\delta(\|\nabla^k n\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}^2+\|\nabla^k\phi\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}H\|_{L^2}^2+\|\nabla^k q\|_{L^2}^2).\end{aligned}$$

对于 I_8, 使用与估计 J_7 类似的方法, 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_8 &= \int_{\mathbb{R}^3}2\nabla^k H\cdot\nabla^k(H\cdot\nabla u-u\cdot\nabla H-H\operatorname{div}u)\mathrm{d}x\\ &\leqslant C\delta(\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}H\|_{L^2}^2).\end{aligned}$$

因此, 联合 I_5–I_8 的估计式便推得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\|\nabla^k n\|_{L^2}^2+\frac{1}{R\theta_*}\|\nabla^k u\|_{L^2}^2+\frac{c_V}{R}\|\nabla^k\phi\|_{L^2}^2+\|\nabla^k H\|_{L^2}^2+\frac{\tau}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\|\nabla^k q\|_{L^2}^2\Big)\\ &+\frac{2}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\|\nabla^k q\|_{L^2}^2+\frac{2(2\mu+\lambda)}{R\theta_*\rho_*}\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}^2+2\nu\|\nabla^{k+1}H\|_{L^2}^2\\ \leqslant{}& \frac{\tau}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{n}{n+1}|\nabla^k q|^2\mathrm{d}x\\ &+C\delta(\|\nabla^k n\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}^2+\|\nabla^k\phi\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}H\|_{L^2}^2+\|\nabla^k q\|_{L^2}^2),\end{aligned}$$

这意味着 (3.15) 成立. 引理 3.2 证毕.

基于引理 3.1–3.2 以及 δ 的小性, 可得下述命题.

命题 3.1 令 $N\geqslant 3$ 为整数. 假设 (n,u,ϕ,H,q) 是系统 (3.2)–(3.5) 的经典解并满足先验假设 (3.6). 则当 $0\leqslant t\leqslant T$ 时, 成立

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\|(n,u,\phi,H)\|_{L^2}^2+\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{1+n}q^2\mathrm{d}x\Big)+C(\|q\|_{L^2}^2+\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla H\|_{L^2}^2)\\ \leqslant{}& C\delta(\|\nabla n\|_{L^2}^2+\|\nabla^2 u\|_{L^2}^2+\|\nabla\phi\|_{L^2}^2),\end{aligned}\tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\|\nabla^k(n,u,\phi,H)\|_{L^2}^2+\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{1+n}|\nabla^k q|^2\mathrm{d}x\Big)+C(\|\nabla^k q\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}H\|_{L^2}^2)\\ \leqslant{}& C\delta(\|\nabla^k n\|_{L^2}^2+\|\nabla^k\phi\|_{L^2}^2),\qquad k=1,\cdots,N.\end{aligned}\tag{3.38}$$

命题 3.1 中已经包括速度 u 和磁场 H 的耗散估计. 接下来的任务是推导出密度 n 和温度 ϕ 的耗散估计.

引理 3.3 令 $N\geqslant 3$ 为整数. 假设 (n,u,ϕ,H,q) 为系统 (3.2)–(3.5) 的经典解并满足先验假设 (3.6). 则当 $0\leqslant t\leqslant T$ 且 $0\leqslant k\leqslant N-1$ 时, 有下述估计:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^k u\cdot\nabla^{k+1}n\ \mathrm{d}x+\frac{R\theta_*}{2}\|\nabla^{k+1}n\|_{L^2}^2$$

$$\leqslant C(\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+2}u\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}\phi\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}H\|_{L^2}^2). \tag{3.39}$$

证 作用算子 ∇^k, $0\leqslant k\leqslant N-1$, 到方程组 (3.2) 中的第 2 个等式上, 得到

$$\frac{1}{R\theta_*}\partial_t\nabla^k u+\nabla\nabla^k n+\nabla\nabla^k\phi=\frac{1}{R\theta_*\rho_*}\nabla^k\mathrm{div}\,\Psi(u)+\frac{1}{R\theta_*}\nabla^k F_2.$$

将上述方程与 $\nabla^{k+1}n$ 作 L^2 内积, 可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{R\theta_*}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^k u\cdot\nabla^{k+1}n\ \mathrm{d}x+\|\nabla^{k+1}n\|_{L^2}^2\\&=\int_{\mathbb{R}^3}\Big(\frac{1}{R\theta_*\rho_*}\nabla^k\mathrm{div}\,\Psi(u)-\nabla^{k+1}\phi\Big)\cdot\nabla^{k+1}n\ \mathrm{d}x+\frac{1}{R\theta_*}\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^{k+1}n\cdot\nabla^k F_2\ \mathrm{d}x\\&\quad+\frac{1}{R\theta_*}\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^k u\cdot\big[\nabla^{k+1}(u\cdot\nabla n)+\nabla^{k+1}(n\mathrm{div}\,u)+\nabla^{k+1}\mathrm{div}\,u\big]\mathrm{d}x\\&\triangleq \mathrm{O}_1+\mathrm{O}_2+\mathrm{O}_3.\end{aligned}$$

利用 ε-Young 不等式, 对任意的 ε, O_1 可作如下估计:

$$\begin{aligned}\mathrm{O}_1&\leqslant C(\|\nabla^{k+2}u\|_{L^2}+\|\nabla^{k+1}\phi\|_{L^2})\|\nabla^{k+1}n\|_{L^2}\\&\leqslant\varepsilon\|\nabla^{k+1}n\|_{L^2}^2+C_\varepsilon(\|\nabla^{k+2}u\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}\phi\|_{L^2}^2).\end{aligned}\tag{3.40}$$

然后使用类似于引理 3.2 中对 I_6 的分析方法, 得到

$$\mathrm{O}_2\leqslant C\delta(\|\nabla^{k+1}n\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+2}u\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}\phi\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}H\|_{L^2}^2). \tag{3.41}$$

对于 O_3, 由分部积分, 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{O}_3&\leqslant\Big|C\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^{k+1}u\cdot[\nabla^{k+1}(un)+\nabla^{k+1}u]\mathrm{d}x\Big|\\&\leqslant C\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}(\|u\|_{L^\infty}\|\nabla^{k+1}n\|_{L^2}+\|n\|_{L^\infty}\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2})+C\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}^2\\&\leqslant C\delta(\|\nabla^{k+1}n\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}^2)+C\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}^2.\end{aligned}\tag{3.42}$$

结合 (3.40)–(3.42), 可推出

$$\begin{aligned}&\frac{1}{R\theta_*}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^k u\cdot\nabla^{k+1}n\ \mathrm{d}x+\|\nabla^{k+1}n\|_{L^2}^2\\&\leqslant(\varepsilon+C\delta)\|\nabla^{k+1}n\|_{L^2}^2+C(\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+2}u\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}\phi\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}H\|_{L^2}^2).\end{aligned}$$

由 δ 和 ε 的小性, 可使 $\varepsilon+C\delta\leqslant\frac{1}{2}$, 于是得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{R\theta_*}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^k u\cdot\nabla^{k+1}n\ \mathrm{d}x+\frac{1}{2}\|\nabla^{k+1}n\|_{L^2}^2\\&\leqslant C(\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+2}u\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}\phi\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}H\|_{L^2}^2).\end{aligned}$$

引理 3.4 令 $N\geqslant 3$ 为整数. 假设 (n,u,ϕ,H,q) 为系统 (3.2)–(3.5) 的经典解并满足先验假设 (3.6). 则当 $0\leqslant t\leqslant T$ 且 $0\leqslant k\leqslant N-1$ 时, 有估计如下:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^k q\cdot\nabla^{k+1}\phi\ \mathrm{d}x+\frac{\kappa\theta_*}{2\tau}\|\nabla^{k+1}\phi\|_{L^2}^2\\&\leqslant C\delta(\|\nabla^{k+1}n\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}H\|_{L^2}^2)\\&\quad+C(\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+2}u\|_{L^2}^2+\|\nabla^k q\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}q\|_{L^2}^2).\end{aligned}\tag{3.43}$$

证 作用算子 ∇^k, $0\leqslant k\leqslant N-1$, 到方程组 (3.2) 中的第 5 个等式上, 得到

$$\frac{\tau}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\partial_t\nabla^k q+\frac{1}{R\rho_*\theta_*}\nabla^{k+1}\phi+\frac{1}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\nabla^k q=0.$$

将上述方程与 $\nabla^{k+1}\phi$ 作 L^2 内积, 可得

$$\begin{aligned}
&\frac{\tau}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^k q\cdot\nabla^{k+1}\phi\ \mathrm{d}x+\frac{1}{R\rho_*\theta_*}\|\nabla^{k+1}\phi\|_{L^2}^2\\
&=\frac{\tau}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^k q\cdot\nabla^{k+1}\phi_t\ \mathrm{d}x-\frac{1}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^k q\cdot\nabla^{k+1}\phi\ \mathrm{d}x\\
&=\frac{\tau}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^k q\cdot\nabla^{k+1}F_3\mathrm{d}x-\frac{\tau}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^k q\cdot\nabla^{k+1}\Big(\frac{\mathrm{div}\, q}{c_V\rho_*\theta_*}+\frac{R\mathrm{div}\, u}{c_V}\Big)\mathrm{d}x\\
&\quad-\frac{1}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^k q\cdot\nabla^{k+1}\phi\ \mathrm{d}x\\
&\triangleq \mathrm{O}_4+\mathrm{O}_5+\mathrm{O}_6.
\end{aligned}\tag{3.44}$$

使用类似于引理 3.2 证明过程中对 I_7 的分析方法, 可以得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{O}_4&\leqslant\Big|\frac{\tau}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\Big\{\frac{\nu\nabla^{k+1}q}{c_V\rho_*\theta_*}\cdot\nabla^k\Big(\frac{|\mathrm{curl}\, H|^2}{n+1}\Big)+\frac{\nabla^{k+1}q}{c_V\rho_*\theta_*}\cdot\nabla^k\Big(\frac{\Psi(u):\nabla u}{n+1}\Big)\\
&\qquad-\nabla^{k+1}q\cdot\nabla^k(u\cdot\nabla\phi)+\frac{\nabla^{k+1}q}{c_V\rho_*\theta_*}\cdot\nabla^k\Big(\frac{n\mathrm{div}\, q}{n+1}\Big)-\frac{R}{c_V}\nabla^{k+1}q\cdot\nabla^k(\phi\mathrm{div}\, u)\Big\}\mathrm{d}x\Big|\\
&\leqslant C\delta(\|\nabla^{k+1}n\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+2}u\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}\phi\|_{L^2}^2\\
&\qquad+\|\nabla^{k+1}H\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}q\|_{L^2}^2).
\end{aligned}\tag{3.45}$$

利用分部积分, 有

$$\begin{aligned}
\mathrm{O}_5&=\frac{\tau}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^{k+1}q\cdot\nabla^k\Big(\frac{\mathrm{div}\, q}{c_V\rho_*\theta_*}+\frac{R\mathrm{div}\, u}{c_V}\Big)\mathrm{d}x\\
&\leqslant\frac{\tau}{c_V\kappa R\rho_*^2\theta_*^3}\|\nabla^{k+1}q\|_{L^2}^2+\frac{\tau}{c_V\kappa\rho_*\theta_*^2}\|\nabla^{k+1}q\|_{L^2}\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}\\
&\leqslant C(\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}q\|_{L^2}^2).
\end{aligned}\tag{3.46}$$

最后, O_6 可被估计如下:

$$\begin{aligned}
\mathrm{O}_6&=-\frac{1}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^k q\cdot\nabla^{k+1}\phi\ \mathrm{d}x\\
&\leqslant\frac{1}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\|\nabla^k q\|_{L^2}\|\nabla^{k+1}\phi\|_{L^2}\\
&\leqslant\frac{1}{R\rho_*\theta_*}\Big(\frac{1}{\kappa^2\theta_*^2}\|\nabla^k q\|_{L^2}^2+\frac14\|\nabla^{k+1}\phi\|_{L^2}^2\Big).
\end{aligned}\tag{3.47}$$

将 (3.45)–(3.47) 代入 (3.44), 得到

$$\begin{aligned}
&\frac{\tau}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^k q\cdot\nabla^{k+1}\phi\ \mathrm{d}x+\frac{1}{R\rho_*\theta_*}\|\nabla^{k+1}\phi\|_{L^2}^2\\
&\leqslant C\delta(\|\nabla^{k+1}n\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}\phi\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}H\|_{L^2}^2)\\
&\quad+C(\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+2}u\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}q\|_{L^2}^2)\\
&\quad+\frac{1}{R\rho_*\theta_*}\Big(\frac{1}{\kappa^2\theta_*^2}\|\nabla^k q\|_{L^2}^2+\frac14\|\nabla^{k+1}\phi\|_{L^2}^2\Big),
\end{aligned}$$

再由 δ 的小性, 即可推出 (3.43). 证毕.

至此, 已经获得了所有期望的先验估计. 现在便可以建立 Cauchy 问题 (1.6)–(1.8) 解的整体存在性, 这便是定理 1.1 的第 1 部分.

定理1.1 第 1 部分的证明　用 β 乘以 (3.39) 并将所得结果加到 (3.43) 上, 可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big\{\beta\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^k u\cdot\nabla^{k+1}n\ \mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^k q\cdot\nabla^{k+1}\phi\ \mathrm{d}x\Big\}+\frac{\beta R\theta_*}{2}\|\nabla^{k+1}n\|_{L^2}^2+\frac{\kappa\theta_*}{2\tau}\|\nabla^{k+1}\phi\|_{L^2}^2\\&\leqslant C\beta(\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+2}u\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}\phi\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}H\|_{L^2}^2)\\&\quad+C(\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+2}u\|_{L^2}^2+\|\nabla^k q\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}q\|_{L^2}^2)\\&\quad+C\delta(\|\nabla^{k+1}n\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}H\|_{L^2}^2).\end{aligned}$$

选取 β 适当小, 使得 $C\beta\leqslant\frac{\kappa\theta_*}{4\tau}$ 且 $C\delta\leqslant\frac{\beta R\theta_*}{4}$, 进而从上式可推出

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big\{\beta\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^k u\cdot\nabla^{k+1}n\ \mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^k q\cdot\nabla^{k+1}\phi\ \mathrm{d}x\Big\}+\frac{\beta R\theta_*}{4}\|\nabla^{k+1}n\|_{L^2}^2+\frac{\kappa\theta_*}{4\tau}\|\nabla^{k+1}\phi\|_{L^2}^2\\&\leqslant C(\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+2}u\|_{L^2}^2+\|\nabla^k q\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}q\|_{L^2}^2)+C\delta\|\nabla^{k+1}H\|_{L^2}^2.\end{aligned}\tag{3.48}$$

令 $1\leqslant m\leqslant N$, $0\leqslant\ell\leqslant m-1$. 将估计式 (3.48) 关于 k 从 ℓ 到 $m-1$ 求和, 得到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big\{\sum_{k=\ell}^{m-1}\Big(\beta\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^k u\cdot\nabla^{k+1}n\ \mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^k q\cdot\nabla^{k+1}\phi\ \mathrm{d}x\Big)\Big\}\\&\quad+C_1\sum_{k=\ell+1}^{m}(\|\nabla^k n\|_{L^2}^2+\|\nabla^k\phi\|_{L^2}^2)\\&\leqslant C_2\Big(\sum_{k=\ell+1}^{m+1}\|\nabla^k u\|_{L^2}^2+\sum_{k=\ell}^{m}\|\nabla^k q\|_{L^2}^2\Big)+C_3\delta\sum_{k=\ell+1}^{m}\|\nabla^k H\|_{L^2}^2,\end{aligned}\tag{3.49}$$

其中 C_1, C_2, C_3 都是与 t 无关的正常数. 将命题 3.1 中的估计式 (3.37)–(3.38) 关于 k 从 ℓ 到 m 求和, 再利用 δ 的小性, 可以推得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big\{\sum_{k=\ell}^{m}\Big(\|\nabla^k(n,u,\phi,H)\|_{L^2}^2+\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{1+n}|\nabla^k q|^2\mathrm{d}x\Big)\Big\}\\&\quad+C_4\Big(\sum_{k=\ell+1}^{m+1}\|\nabla^k u\|_{L^2}^2+\sum_{k=\ell+1}^{m+1}\|\nabla^k H\|_{L^2}^2+\sum_{k=\ell}^{m}\|\nabla^k q\|_{L^2}^2\Big)\\&\leqslant C_5\delta\sum_{k=\ell+1}^{m}(\|\nabla^k n\|_{L^2}^2+\|\nabla^k\phi\|_{L^2}^2),\end{aligned}\tag{3.50}$$

其中 C_4 和 C_5 均为与时间无关的正常数. 用 $\frac{2C_5\delta}{C_1}$ 乘以 (3.49), 再将所得结果与 (3.50) 相加, 得到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big\{\sum_{k=\ell}^{m}\Big(\|\nabla^k(n,u,\phi,H)\|_{L^2}^2+\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{1+n}|\nabla^k q|^2\mathrm{d}x\Big)\\&\quad+\frac{2C_5\delta}{C_1}\sum_{k=\ell}^{m-1}\Big(\beta\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^k u\cdot\nabla^{k+1}n\ \mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^k q\cdot\nabla^{k+1}\phi\ \mathrm{d}x\Big)\Big\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+C_5\delta\sum_{k=\ell+1}^{m}(\|\nabla^k n\|_{L^2}^2+\|\nabla^k\phi\|_{L^2}^2)\\
&+\Big(C_4-\frac{2C_2C_5\delta}{C_1}\Big)\Big(\sum_{k=\ell+1}^{m+1}\|\nabla^k u\|_{L^2}^2+\sum_{k=\ell}^{m}\|\nabla^k q\|_{L^2}^2\Big)\\
&+\Big(C_4-\frac{2C_3C_5\delta^2}{C_1}\Big)\sum_{k=\ell+1}^{m}\|\nabla^k H\|_{L^2}^2+C_4\|\nabla^{m+1}H\|_{L^2}^2\leqslant 0.
\end{aligned}
$$

由于 δ 的小性, 存在正常数 $\overline{C}$, 使得

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{k=\ell}^{m}\|\nabla^k(n,u,\phi,H,q)\|_{L^2}^2\\
&+\overline{C}\Big(\sum_{k=\ell+1}^{m}\|\nabla^k(n,\phi)\|_{L^2}^2+\sum_{k=\ell+1}^{m+1}\|\nabla^k(u,H)\|_{L^2}^2+\sum_{k=\ell}^{m}\|\nabla^k q\|_{L^2}^2\Big)\leqslant 0.
\end{aligned}
\tag{3.51}
$$

定义

$$
\mathcal{E}_\ell^m(t)=\sum_{k=\ell}^{m}\|\nabla^k(n,u,\phi,H,q)(t)\|_{L^2}^2=\|\nabla^\ell(n,u,\phi,H,q)\|_{H^{m-\ell}}^2,
$$

由此, 不等式 (3.51) 可写为

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}_\ell^m(t)+\overline{C}(\|\nabla^{\ell+1}(n,\phi)\|_{H^{m-\ell-1}}^2+\|\nabla^{\ell+1}(u,H)\|_{H^{m-\ell}}^2+\|\nabla^\ell q\|_{H^{m-\ell}}^2)\leqslant 0. \tag{3.52}
$$

根据 (1.9) 和 (3.1), 可知

$$
\|(n_0,u_0,\phi_0,H_0,q_0)\|_{H^3}\leqslant C\epsilon_0. \tag{3.53}
$$

在 (3.52) 中令 $\ell=0$, $m=3$. 然后对相应的不等式关于时间 $t\in[0,T)$ 积分, 并利用 (3.53), 推得

$$
\begin{aligned}
&\|(n,u,\phi,H,q)(t)\|_{H^3}^2+\overline{C}\int_0^t[\|\nabla(n,\phi)(r)\|_{H^2}^2+\|\nabla(u,H)(r)\|_{H^3}^2+\|q(r)\|_{H^3}^2]\mathrm{d}r\\
&\leqslant\|(n_0,u_0,\phi_0,H_0,q_0)\|_{H^3}^2\\
&\leqslant C\epsilon_0^2.
\end{aligned}
\tag{3.54}
$$

由于 ϵ_0 的小性, 从 (3.54) 可进一步推导出

$$
\|(n,u,\phi,H,q)(t)\|_{H^3}\leqslant\frac{\delta}{2},
$$

这就封闭了先验假设 (3.6). 然后, 利用连续性论证方法和局部存在性结果 (定理 3.1), 就可得到 Cauchy 问题 (1.6)–(1.8) 经典解的全局适定性. 最后, 令 (3.52) 中的 $\ell=0$, $m=N$, 然后关于时间积分, 可得

$$
\begin{aligned}
&\|(n,u,\phi,H,q)(t)\|_{H^N}^2+\overline{C}\int_0^t[\|\nabla(n,\phi)(r)\|_{H^{N-1}}^2+\|\nabla(u,H)(r)\|_{H^N}^2+\|q(r)\|_{H^N}^2]\mathrm{d}r\\
&\leqslant C\|(n_0,u_0,\phi_0,H_0,q_0)\|_{H^N}^2,
\end{aligned}
\tag{3.55}
$$

联合 (3.1), 立即有 (1.10). 至此, 定理 1.1 的第 1 部分证毕.

§4 解的时间衰减估计

本节致力于研究当初始扰动属于某个负 Sobolev 空间时, Cauchy 问题 (1.6)–(1.8) 解的时间衰减估计.

首先, 需要证明当初始扰动 $(n_0,u_0,\phi_0,H_0,q_0)\in\dot H^{-s}(\mathbb{R}^3)$, $s\in\big(0,\frac32\big)$ 时, 解 (n,u,ϕ,H,q) 在该负 Sobolev 空间中的有界性.

引理 4.1 假设 (n,u,ϕ,H,q) 为系统 (3.2)–(3.5) 的经典解并满足先验假设 (3.6), 那么当 $s\in\big(0,\frac12\big]$ 时, 可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\|\Lambda^{-s}(n,u,\phi,H,q)\|_{L^2}^2+\|\nabla\Lambda^{-s}(u,H)\|_{L^2}^2+\|\Lambda^{-s}q\|_{L^2}^2\\&\leqslant C(\|\nabla(n,u,\phi,H)\|_{H^1}^2+\|\nabla q\|_{L^2}^2)\|\Lambda^{-s}(n,u,\phi,H,q)\|_{L^2}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

当 $s\in\big(\frac12,\frac32\big)$ 时, 可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\|\Lambda^{-s}(n,u,\phi,H,q)\|_{L^2}^2+\|\nabla\Lambda^{-s}(u,H)\|_{L^2}^2+\|\Lambda^{-s}q\|_{L^2}^2\\&\leqslant C\{\|(n,u,\phi,H)\|_{L^2}^{s-\frac12}(\|\nabla(n,\phi,H,q)\|_{L^2}+\|\nabla u\|_{H^1})^{\frac52-s}\\&\quad+\|\nabla(u,H)\|_{H^1}^2\}\|\Lambda^{-s}(n,u,\phi,H,q)\|_{L^2}.\end{aligned}\tag{4.2}$$

证 对方程组 (3.2) 作用算子 Λ^{-s}, 然后与 $2\Lambda^{-s}(n,u,\phi,H,q)$ 作 L^2 内积, 再利用分部积分, 可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\Big(\|\Lambda^{-s}n\|_{L^2}^2+\frac{1}{R\theta_*}\|\Lambda^{-s}u\|_{L^2}^2+\frac{c_V}{R}\|\Lambda^{-s}\phi\|_{L^2}^2+\|\Lambda^{-s}H\|_{L^2}^2+\frac{\tau}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\|\Lambda^{-s}q^2\|_{L^2}^2\Big)\\&+\frac{2(2\mu+\lambda)}{R\theta_*\rho_*}\|\nabla\Lambda^{-s}u\|_{L^2}^2+2\nu\|\nabla\Lambda^{-s}H\|_{L^2}^2+\frac{2}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\|\Lambda^{-s}q\|_{L^2}^2\\&=\int_{\mathbb{R}^3}(2\Lambda^{-s}n\ \Lambda^{-s}F_1+2\Lambda^{-s}u\cdot\Lambda^{-s}F_2+2\Lambda^{-s}\phi\ \Lambda^{-s}F_3+2\Lambda^{-s}H\cdot\Lambda^{-s}F_4)\mathrm dx\\&\triangleq \mathrm{Q}_1+\mathrm{Q}_2+\mathrm{Q}_3+\mathrm{Q}_4.\end{aligned}\tag{4.3}$$

我们将利用引理 2.6 估计非线性项 Q_i $(i=1,2,3,4)$, 为此就需要限制 $s\in\big(0,\frac32\big)$. 首先, 当 $s\in(0,\frac12]$ 时, 有 $1<\frac{6}{3+2s}<2$ 和 $\frac3s\geqslant6$, 故由引理 2.6 和 2.1 以及 Hölder 和 Young 不等式, 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Q}_1&\leqslant C(\|\Lambda^{-s}(u\cdot\nabla n)\|_{L^2}+\|\Lambda^{-s}(n\operatorname{div}u)\|_{L^2})\|\Lambda^{-s}n\|_{L^2}\\&\leqslant C(\|u\cdot\nabla n\|_{L^{\frac{6}{2s+3}}}+\|n\operatorname{div}u\|_{L^{\frac{6}{2s+3}}})\|\Lambda^{-s}n\|_{L^2}\\&\leqslant C(\|u\|_{L^{\frac3s}}\|\nabla n\|_{L^2}+\|n\|_{L^{\frac3s}}\|\operatorname{div}u\|_{L^2})\|\Lambda^{-s}n\|_{L^2}\\&\leqslant C(\|\nabla u\|_{L^2}^{\frac12+s}\|\nabla^2u\|_{L^2}^{\frac12-s}\|\nabla n\|_{L^2}+\|\nabla n\|_{L^2}^{\frac12+s}\|\nabla^2n\|_{L^2}^{\frac12-s}\|\nabla u\|_{L^2})\|\Lambda^{-s}n\|_{L^2}\\&\leqslant C(\|\nabla u\|_{H^1}^2+\|\nabla n\|_{L^2}^2+\|\nabla n\|_{H^1}^2+\|\nabla u\|_{L^2}^2)\|\Lambda^{-s}n\|_{L^2}\\&\leqslant C(\|\nabla n\|_{H^1}^2+\|\nabla u\|_{H^1}^2)\|\Lambda^{-s}n\|_{L^2}.\end{aligned}$$

同理, 可得 Q_2, Q_3 和 Q_4 的上界为

$$\mathrm{Q}_2 \leqslant C(\|\nabla n\|_{H^1}^2 + \|\nabla u\|_{H^1}^2 + \|\nabla \phi\|_{H^1}^2 + \|\nabla H\|_{H^1}^2)\|\Lambda^{-s}u\|_{L^2},$$
$$\mathrm{Q}_3 \leqslant C(\|\nabla n\|_{H^1}^2 + \|\nabla u\|_{H^1}^2 + \|\nabla \phi\|_{H^1}^2 + \|\nabla H\|_{H^1}^2 + \|\nabla q\|_{L^2}^2)\|\Lambda^{-s}\phi\|_{L^2},$$
$$\mathrm{Q}_4 \leqslant C(\|\nabla u\|_{H^1}^2 + \|\nabla H\|_{H^1}^2)\|\Lambda^{-s}H\|_{L^2}.$$

联合 Q_i $(i=1,2,3,4)$ 的估计可知, 当 $s \in (0, \frac{1}{2}]$ 时, 有

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\|\Lambda^{-s}n\|_{L^2}^2 + \frac{1}{R\theta_*}\|\Lambda^{-s}u\|_{L^2}^2 + \frac{c_V}{R}\|\Lambda^{-s}\phi\|_{L^2}^2 + \|\Lambda^{-s}H\|_{L^2}^2 + \frac{\tau}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\|\Lambda^{-s}q^2\|_{L^2}^2\Big)\\&\quad + \frac{2(2\mu+\lambda)}{R\theta_*\rho_*}\|\nabla\Lambda^{-s}u\|_{L^2}^2 + 2\nu\|\nabla\Lambda^{-s}H\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\|\Lambda^{-s}q\|_{L^2}^2\\&\leqslant C[\|\nabla(n,u,\phi,H)\|_{H^1}^2 + \|\nabla q\|_{L^2}^2]\|\Lambda^{-s}(n,u,\phi,H,q)\|_{L^2},\end{aligned}\tag{4.4}$$

这就意味着 (4.1) 成立.

其次, 当 $s \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 时, 有 $1 < \frac{6}{3+2s} < 2$ 和 $2 < \frac{3}{s} < 6$. 在这种情况下, (4.3) 的右端项 Q_1 可以被估计为

$$\begin{aligned}\mathrm{Q}_1 &\leqslant C(\|\Lambda^{-s}(u\cdot\nabla n)\|_{L^2} + \|\Lambda^{-s}(n\mathrm{div}\,u)\|_{L^2})\|\Lambda^{-s}n\|_{L^2}\\&\leqslant C(\|u\cdot\nabla n\|_{L^{\frac{6}{2s+3}}} + \|n\mathrm{div}\,u\|_{L^{\frac{6}{2s+3}}})\|\Lambda^{-s}n\|_{L^2}\\&\leqslant C(\|u\|_{L^{\frac{3}{s}}}\|\nabla n\|_{L^2} + \|n\|_{L^{\frac{3}{s}}}\|\mathrm{div}\,u\|_{L^2})\|\Lambda^{-s}n\|_{L^2}\\&\leqslant C(\|u\|_{L^2}^{s-\frac{1}{2}}\|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}-s}\|\nabla n\|_{L^2} + \|n\|_{L^2}^{s-\frac{1}{2}}\|\nabla n\|_{L^2}^{\frac{3}{2}-s}\|\nabla u\|_{L^2})\|\Lambda^{-s}n\|_{L^2}.\end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Q}_2 \leqslant{}& C[\|u\|_{L^2}^{s-\frac{1}{2}}\|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{5}{2}-s} + \|H\|_{L^2}^{s-\frac{1}{2}}\|\nabla H\|_{L^2}^{\frac{5}{2}-s} + \|n\|_{L^2}^{s-\frac{1}{2}}\|\nabla n\|_{L^2}^{\frac{3}{2}-s}(\|\nabla n\|_{L^2} + \|\nabla^2 u\|_{L^2})\\&+ \|\phi\|_{L^2}^{s-\frac{1}{2}}\|\nabla\phi\|_{L^2}^{\frac{3}{2}-s}\|\nabla n\|_{L^2}]\|\Lambda^{-s}u\|_{L^2},\\ \mathrm{Q}_3 \leqslant{}& C(\|\nabla H\|_{L^2}^{s+\frac{1}{2}}\|\nabla^2 H\|_{L^2}^{\frac{3}{2}-s} + \|\nabla u\|_{L^2}^{s+\frac{1}{2}}\|\nabla^2 u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}-s} + \|n\|_{L^2}^{s-\frac{1}{2}}\|\nabla n\|_{L^2}^{\frac{3}{2}-s}\|\nabla q\|_{L^2}\\&+ \|u\|_{L^2}^{s-\frac{1}{2}}\|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}-s}\|\nabla\phi\|_{L^2} + \|\phi\|_{L^2}^{s-\frac{1}{2}}\|\nabla\phi\|_{L^2}^{\frac{3}{2}-s}\|\nabla u\|_{L^2})\|\Lambda^{-s}\phi\|_{L^2},\\ \mathrm{Q}_4 \leqslant{}& C(\|H\|_{L^2}^{s-\frac{1}{2}}\|\nabla H\|_{L^2}^{\frac{3}{2}-s}\|\nabla u\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}^{s-\frac{1}{2}}\|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}-s}\|\nabla H\|_{L^2})\|\Lambda^{-s}H\|_{L^2}.\end{aligned}$$

由上述关于 Q_i $(i=1,2,3,4)$ 的估计可得, 当 $s \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ 时,

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\|\Lambda^{-s}n\|_{L^2}^2 + \frac{1}{R\theta_*}\|\Lambda^{-s}u\|_{L^2}^2 + \frac{c_V}{R}\|\Lambda^{-s}\phi\|_{L^2}^2 + \|\Lambda^{-s}H\|_{L^2}^2 + \frac{\tau}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\|\Lambda^{-s}q^2\|_{L^2}^2\Big)\\&\quad + \frac{2(2\mu+\lambda)}{R\theta_*\rho_*}\|\nabla\Lambda^{-s}u\|_{L^2}^2 + 2\nu\|\nabla\Lambda^{-s}H\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\kappa R\rho_*\theta_*^2}\|\Lambda^{-s}q\|_{L^2}^2\\&\leqslant C\{\|n\|_{L^2}^{s-\frac{1}{2}}\|\nabla n\|_{L^2}^{\frac{3}{2}-s}(\|\nabla n\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{H^1} + \|\nabla q\|_{L^2})\\&\quad + \|u\|_{L^2}^{s-\frac{1}{2}}\|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}-s}(\|\nabla n\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2} + \|\nabla\phi\|_{L^2} + \|\nabla H\|_{L^2})\\&\quad + \|\phi\|_{L^2}^{s-\frac{1}{2}}\|\nabla\phi\|_{L^2}^{\frac{3}{2}-s}(\|\nabla n\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2})\\&\quad + \|H\|_{L^2}^{s-\frac{1}{2}}\|\nabla H\|_{L^2}^{\frac{3}{2}-s}(\|\nabla u\|_{L^2} + \|\nabla H\|_{L^2})\end{aligned}$$

$$+\|\nabla u\|_{L^2}^{s+\frac{1}{2}}\|\nabla^2 u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}-s}+\|\nabla H\|_{L^2}^{s+\frac{1}{2}}\|\nabla^2 H\|_{L^2}^{\frac{3}{2}-s}\}\|\Lambda^{-s}(n,u,\phi,H,q)\|_{L^2}$$
$$\leqslant C\{\|(n,u,\phi,H)\|_{L^2}^{s-\frac{1}{2}}(\|\nabla(n,\phi,H,q)\|_{L^2}+\|\nabla u\|_{H^1})^{\frac{5}{2}-s}$$
$$+\|\nabla u\|_{H^1}^2+\|\nabla H\|_{H^1}^2\}\|\Lambda^{-s}(n,u,\phi,H,q)\|_{L^2},$$

于是得到 (4.2). 证毕.

证明了系统 (3.2)–(3.5) 解在负 Sobolev 空间的有界性后, 就可以研究其 L^2 范数的最优时间衰减率, 这也正是定理 1.1 的第 2 部分内容.

定理1.1 第 2 部分的证明　定义

$$A_0=\|(\rho_0-\rho_*,u_0,\theta_0-\theta_*,H_0,q_0)\|_{\dot{H}^{-s}},\quad B_0=\|(\rho_0-\rho_*,u_0,\theta_0-\theta_*,H_0,q_0)\|_{H^N}.$$

当 $s\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$ 时, 由 Grönwall 不等式和 (3.55), 得到

$$\begin{aligned}\|\Lambda^{-s}(n,u,\phi,H,q)\|_{L^2}&\leqslant\|\Lambda^{-s}(n_0,u_0,\phi_0,H_0,q_0)\|_{L^2}\\&\quad+C\int_0^t(\|\nabla(n,u,\phi,H)(r)\|_{H^1}^2+\|\nabla q(r)\|_{L^2}^2)\mathrm{d}r\\&\leqslant\|\Lambda^{-s}(n_0,u_0,\phi_0,H_0,q_0)\|_{L^2}+C\epsilon_0^2\\&\leqslant C(A_0+\epsilon_0^2)\\&\leqslant CA_0.\end{aligned}\tag{4.5}$$

当 $\ell=1,2,\cdots,N-1$ 时, 由引理 2.5 可知

$$\|\nabla^{\ell+1}f\|_{L^2}\geqslant C\|\Lambda^{-s}f\|_{L^2}^{-\frac{1}{\ell+s}}\|\nabla^\ell f\|_{L^2}^{1+\frac{1}{\ell+s}}.$$

基于这一事实并利用 (4.5), 有

$$\|\nabla^{\ell+1}n\|_{L^2}^2+\|\nabla^{\ell+1}u\|_{L^2}^2+\|\nabla^{\ell+1}\phi\|_{L^2}^2+\|\nabla^{\ell+1}H\|_{L^2}^2+\|\nabla^\ell q\|_{L^2}^2$$
$$\geqslant CA_0^{-\frac{2}{l+s}}(\|\nabla^\ell n\|_{L^2}^2+\|\nabla^\ell u\|_{L^2}^2+\|\nabla^\ell\phi\|_{L^2}^2+\|\nabla^\ell H\|_{L^2}^2+\|\nabla^\ell q\|_{L^2}^2)^{1+\frac{1}{\ell+s}}.$$

进而, 当 $\ell=1,2,\cdots,N-1$ 时, 可得

$$\begin{aligned}&\|\nabla^{\ell+1}n\|_{H^{N-\ell-1}}^2+\|\nabla^{\ell+1}u\|_{H^{N-\ell}}^2+\|\nabla^{\ell+1}\phi\|_{H^{N-\ell-1}}^2+\|\nabla^{\ell+1}H\|_{H^{N-\ell}}^2+\|\nabla^\ell q\|_{H^{N-\ell}}^2\\&\geqslant CA_0^{-\frac{2}{\ell+s}}(\|\nabla^\ell n\|_{H^{N-\ell}}^2+\|\nabla^\ell u\|_{H^{N-\ell}}^2+\|\nabla^\ell\phi\|_{H^{N-\ell}}^2\\&\quad+\|\nabla^\ell H\|_{H^{N-\ell}}^2+\|\nabla^\ell q\|_{H^{N-\ell}}^2)^{1+\frac{1}{\ell+s}}.\end{aligned}\tag{4.6}$$

利用 (4.6), 可从 (3.52) 中推出, 当 $m=N$ 时, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}_\ell^N(t)+CA_0^{-\frac{2}{l+s}}(\mathcal{E}_\ell^N(t))^{1+\frac{1}{\ell+s}}\leqslant 0.$$

直接求解上述不等式得到

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\ell^N(t)&\leqslant C(A_0^2+\mathcal{E}_\ell^N(0))(1+t)^{-(\ell+s)}\\&\leqslant C(A_0+B_0)^2(1+t)^{-(\ell+s)}.\end{aligned}$$

因此, 当 $s\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$ 且 $\ell=1,2,\cdots,N-1$ 时, 可得

$$\|\nabla^\ell(n,u,\phi,H,q)(t)\|_{H^{N-\ell}}\leqslant C(A_0+B_0)(1+t)^{-\frac{\ell+s}{2}}.\tag{4.7}$$

当 $\ell=0$ 且 $s\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$ 时, 利用引理 2.5 和上式, 可推出

$$\begin{aligned}\|(n,u,\phi,H,q)(t)\|_{L^2}&\leqslant C\|\nabla(n,u,\phi,H,q)\|_{L^2}^{\frac{s}{1+s}}\|\Lambda^{-s}(n,u,\phi,H,q)\|_{L^2}^{\frac{1}{1+s}}\\&\leqslant C(A_0+B_0)(1+t)^{-\frac{s}{2}}.\end{aligned}\tag{4.8}$$

当 $\ell=0$ 且 $s=0$ 时, 根据 (3.55), 可得

$$\|(n,u,\phi,H,q)(t)\|_{H^N}\leqslant C\|(n_0,u_0,\phi_0,H_0,q_0)\|_{H^N}\leqslant CB_0\leqslant C(A_0+B_0).\tag{4.9}$$

联合估计式 (4.7)–(4.9) 可得, 当 $s\in[0,\frac{1}{2}]$, $\ell=0,1,2,\cdots,N-1$ 时, 有

$$\|\nabla^\ell(n,u,\phi,H,q)(t)\|_{H^{N-\ell}}\leqslant C(A_0+B_0)(1+t)^{-\frac{\ell+s}{2}}.\tag{4.10}$$

接下来, 分析 $s\in\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ 的情形. 需要注意的是, $s\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 时所用的分析方法不能应用于该情形. 但是对于任意的 $s'\in[0,s]$, 由于 $\dot H^{-s}\cap L^2\subset\dot H^{-s'}$, 因此, 有 $(n_0,u_0,\phi_0,H_0,q_0)\in\dot H^{-\frac{1}{2}}$. 于是, 直接利用 (4.10) 并取 $s=\frac{1}{2}$ 可得衰减率如下:

$$\|\nabla^\ell(n,u,\phi,H,q)(t)\|_{H^{N-\ell}}\leqslant C(A_0+B_0)(1+t)^{-\frac{\ell}{2}-\frac{1}{4}},\quad \ell=0,1,2,\cdots,N-1.\tag{4.11}$$

设 η 为一个小的正常数, 可将 $s\in\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ 分成 $s\in\left(\frac{1}{2},1-\eta\right]$ 和 $s\in\left(1-\eta,\frac{3}{2}\right)$ 两部分. 当 $s\in\left(\frac{1}{2},1-\eta\right]$ 时, 利用 (4.11), (3.54) 以及 ϵ_0 的小性, 由 (4.2) 可推得

$$\begin{aligned}&\|\Lambda^{-s}(n,u,\phi,H,q)\|_{L^2}\\
&\leqslant\|\Lambda^{-s}(n_0,u_0,\phi_0,H_0,q_0)\|_{L^2}+C\int_0^t\{\|\nabla(u,H)(r)\|_{H^1}^2\\
&\quad+\|(n,u,\phi,H)\|_{L^2}^{s-\frac{1}{2}}[\|\nabla(n,\phi,H,q)(r)\|_{L^2}+\|\nabla u(r)\|_{H^1}]^{\frac{5}{2}-s}\}\mathrm{d}r\\
&\leqslant A_0+C\int_0^t\|\nabla(u,H)(r)\|_{H^1}^2\mathrm{d}r\\
&\quad+C(A_0+B_0)\int_0^t(1+r)^{-1+\frac{s}{2}}[\|\nabla(n,\phi,H,q)(r)\|_{L^2}+\|\nabla u(r)\|_{H^1}]\mathrm{d}r\\
&\leqslant A_0+C\epsilon_0^2+C(A_0+B_0)\Big[\int_0^t(1+r)^{-2+s}\mathrm{d}r\Big]^{\frac{1}{2}}\\
&\quad\cdot\Big[\int_0^t(\|\nabla(n,\phi,H,q)(r)\|_{L^2}+\|\nabla u(r)\|_{H^1})^2\mathrm{d}r\Big]^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant A_0+C\epsilon_0^2+C(A_0+B_0)\epsilon_0\\
&\leqslant CA_0.\end{aligned}\tag{4.12}$$

然后, 重复当 $s\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$ 时推导出 (4.7) 的过程, 可以得到当 $s\in\left(\frac{1}{2},1-\eta\right]$ 时, 解时间衰减率如下:

$$\|\nabla^\ell(n,u,\phi,H,q)(t)\|_{H^{N-\ell}}\leqslant C(A_0+B_0)(1+t)^{-\frac{\ell+s}{2}},\quad \ell=1,2,\cdots,N-1.\tag{4.13}$$

当 $s\in\left(1-\eta,\frac{3}{2}\right)$ 时, 对于任意一个 $s'\in[0,s]$, 由于 $\dot H^{-s}\cap L^2\subset\dot H^{-s'}$, 所以有

$$(n_0,u_0,\phi_0,H_0,q_0)\in\dot H^{-1+\eta}.$$

因此, 直接在 (4.13) 中取 $s=1-\eta$, 可得

$$\|\nabla^\ell(n,u,\phi,H,q)(t)\|_{H^{N-\ell}}\leqslant C(A_0+B_0)(1+t)^{-\frac{\ell+1-\eta}{2}},\quad \ell=1,2,\cdots,N-1.\tag{4.14}$$

与 (4.12) 类似, 可得

$$
\begin{aligned}
&\|\Lambda^{-s}(n,u,\phi,H,q)\|_{L^2}\\
\leqslant&\|\Lambda^{-s}(n_0,u_0,\phi_0,H_0,q_0)\|_{L^2}\\
&+C\int_0^t\{\|\nabla(u,H)(r)\|_{H^1}^2+\|(n,u,\phi,H)\|_{L^2}^{s-\frac12}(\|\nabla(n,\phi,H,q)(r)\|_{L^2}+\|\nabla u(r)\|_{H^1})^{\frac52-s}\}\mathrm{d}r\\
\leqslant&A_0+C\int_0^t\|\nabla(u,H)(r)\|_{H^1}^2\mathrm{d}r\\
&+C(A_0+B_0)\int_0^t(1+r)^{-\frac54+\frac{s+\eta}{2}}(\|\nabla(n,\phi,H,q)(r)\|_{L^2}+\|\nabla u(r)\|_{H^1})\mathrm{d}r\\
\leqslant&A_0+C\epsilon_0^2+C(A_0+B_0)\Big[\int_0^t(1+r)^{-\frac52+s+\eta}\mathrm{d}r\Big]^{\frac12}\\
&\cdot\Big[\int_0^t(\|\nabla(n,\phi,H,q)(r)\|_{L^2}+\|\nabla u(r)\|_{H^1})^2\mathrm{d}r\Big]^{\frac12}\\
\leqslant&A_0+C\epsilon_0^2+C(A_0+B_0)\epsilon_0\\
\leqslant&CA_0.
\end{aligned}\tag{4.15}
$$

因此, 当 $s\in\big(1-\eta,\frac32\big)$, $\ell=0,1,2,\cdots,N-1$ 时, 解有如下的时间衰减率:

$$\|\nabla^\ell(n,u,\phi,H,q)(t)\|_{H^{N-\ell}}\leqslant C(A_0+B_0)(1+t)^{-\frac{l+s}{2}}.\tag{4.16}$$

联合估计式 (4.10), (4.13) 和 (4.16) 可得, 当 $s\in\big[0,\frac32\big)$ 时, 解的时间衰减率为

$$\|\nabla^\ell(n,u,\phi,H,q)(t)\|_{H^{N-\ell}}\leqslant C(A_0+B_0)(1+t)^{-\frac{\ell+s}{2}},\quad \ell=0,1,2,\cdots,N-1.\tag{4.17}$$

最后, 进一步提高 $\|\nabla^\ell q\|_{L^2}$ 的时间衰减率. 由 (3.2) 中的第 5 个方程解出热流 q 的表达式为

$$q(x,t)=\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}q_0-\frac{\kappa\theta_*}{\tau}\int_0^t\mathrm{e}^{-\frac{t-r}{\tau}}\nabla\phi(x,r)\mathrm{d}r.$$

根据 (4.17), 当 $0\leqslant\ell\leqslant N-2$ 时, 有

$$
\begin{aligned}
\|\nabla^\ell q(t)\|_{H^{N-\ell}}&\leqslant C\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\|\nabla^\ell q_0\|_{H^{N-\ell}}+\frac{\kappa\theta_*}{\tau}\int_0^t\mathrm{e}^{-\frac{t-r}{\tau}}\|\nabla^{\ell+1}\phi(x,r)\|_{H^{N-\ell-1}}\mathrm{d}r\\
&\leqslant CB_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}+C(A_0+B_0)\int_0^t\mathrm{e}^{-\frac{t-r}{\tau}}(1+r)^{-\frac{\ell+1+s}{2}}\mathrm{d}r\\
&\leqslant C(A_0+B_0)(1+t)^{-\frac{\ell+s+1}{2}}.
\end{aligned}\tag{4.18}
$$

联合 (4.17)–(4.18) 就完成了定理 1.1 第 2 部分证明.

参 考 文 献

[1] Cattaneo C. Sulla conduzione del calore [J]. *Atti Semin Mat Fis Univ Modena*, 1949, 3:83–101.

[2] Liu K C. Analysis of dual-phase-lag thermal behaviour in layered films with temperature-dependent interface thermal resistance [J]. *J Phys D*: *Appl Phys*, 2005, 38:3722–3732.

[3] Lor W B, Chu H S. Effect of interface thermal resistance on heat transfer in a composite medium using the thermal wave model [J]. *Int J Heat Mass Transf*, 2000, 43:653–663.

[4] Maxwell J C. On the dynamical theory of gases [J]. *Philos Trans R Soc Lond*, 1867, 157:49–88.

[5] Kawashima S, Okada M. Smooth global solutions for the one-dimensional equations in magnetohydrodynamics [J]. *Proc Japan Acad Ser A Math Sci*, 1982, 58(9):384–387.

[6] Liu T P, Zeng Y. Large time behavior of solutions for general quasilinear hyperbolic-parabolic systems of conservation laws [M]. Mem Am Math Soc, Vol 125, No 599, Providence: American Mathematical Society, 1997.

[7] Chen G Q, Wang D. Global solutions of nonlinear magnetohydrodynamics with large initial data [J]. *J Differential Equations*, 2002, 182(2):344–376.

[8] Chen G Q, Wang D. Existence and continuous dependence of large solutions for the magnetohydrodynamic equations [J]. *Z Angew Math Phys*, 2003, 54(4):608–632.

[9] Ducomet B, Feireisl E. The equations of magnetohydrodynamics: On the interaction between matter and radiation in the evolution of gaseous stars [J]. *Comm Math Phys*, 2006, 226(3):596–629.

[10] Hoff D, Tsyganov E. Uniqueness and continuous dependence of weak solutions in compressible magnetohydrodynamics [J]. *Z Angew Math Phys*, 2005, 56(5):791–804.

[11] Hu X, Wang D. Global solutions to the full three dimensional compressible magnethydrodynamic flows [J]. *Comm Math Phys*, 2008, 283(1):255–284.

[12] Hu X, Wang D. Compactness of weak solutions to the three dimensional compressible magnethydrodynamic equations [J]. *J Differential Equations*, 2008, 245(8):2176–2198.

[13] Hu X, Wang D. Global existence and large time behavior of sulutions to the three dimensional equations of compressible magnetohydrodynamic flows [J]. *Arch Ration Mech Anal*, 2010, 197(1):203–238.

[14] Wang D. Large solutions to the initial boundary value problem for planar magnetohydrodynamics [J]. *SIAM J Appl Math*, 2003, 63(4):1424–1441.

[15] Hu Y, Racke R. Compressible Navier-Stokes equations with hyperbolic heat conduction [J]. *J Hyperbolic Differ Equ*, 2016, 13(2):233–247.

[16] Li F, Tang H, Zhang S. Global well-posedness and large-time behavior of the compressible Navier-Stokes equations with hyperbolic heat conduction [J/OL]. arXiv: 2310.13461.

[17] Tang H, Zhang S, Zou W. Decay of the compressible Navier-Stokes equations with hyperbolic heat conduction [J]. *J Differential Equations*, 2024, 388(1):1–33.

[18] Liu M, Wu Z. Space-time behavior of the compressible Navier-Stokes equations with hyperbolic heat conduction [J]. *J Math Phys*, 2023, 64(10), paper no 103101, 21 pp.

[19] Hu Y, Racke R. Formation of singularities in one-dimensional thermoelasticity with second sound [J]. *Quart Appl Math*, 2014, 72(2):311–321.

[20] Racke R, Wang Y G. Asymptotic behavior of discontinuous solutions in 3-D thermoelasticity with second sound [J]. *Quart Appl Math*, 2008, 66(4):707–724.

[21] Liu G, Xu X. The limit behavior of relaxation time for full compressible magnetohydrodynamic flows with Cattaneo's law [J]. *Dyn Partial Differ Equ*, 2017, 14(4):359–373.

[22] Kawashima S. Systems of a hyperbolic-parabolic composite type, with applications to the equations of magnetohydrodynamics [D]. Kyoto: Kyoto University, 1984.

[23] Shizuta Y, Kawashima S. Systems of equations of hyperbolic-parabolic type with applications to the discrete Boltzmann equation [J]. *Hokkaido Math J*, 1985, 14(2):249–275.

[24] Guo Y, Wang Y. Decay of dissipative equations and negative Sobolev spaces [J]. *Comm Partial Differ Equ*, 2012, 37(12):2165–2208.

[25] Wang Y. Decay of the Navier-Stokes-Poisson equations [J]. *J Differential Equations*, 2012, 253(1):273–297.

[26] Majda A J, Bertozzi A L. Vorticity and incompressible flow [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

[27] Stein E M. Singular integrals and differentiability properties of functions [M]. Princeton NJ: Princeton University Press, 1970.

Decay Rates of the Compressible MHD Equations with Hyperbolic Heat Conduction

TIAN Hao[1] WU Fei[2] WANG Zejun[3]

[1]Hubei Key Laboratory of Digital Financial Innovation, Hubei University of Economics, Wuhan 430205, China; School of Information Engineering, Hubei University of Economics, Wuhan 430205, China; Hubei Internet Finance Information Engineering Technology Research Center, Hubei University of Economics, Wuhan 430205, China. E-mail: th@hbue.edu.cn

[2]School of Science, Jiangsu University of Science and Technology, Zhenjiang 212100, Jiangsu, China. E-mail: wufei@just.edu.cn

[3]Corresponding author. School of Mathematics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 211106, China.
E-mail: wangzejun@gmail.com

Abstract In this paper, the authors investigate the global well-posedness and large-time behavior of the compressible MHD equations with Cattaneo's heat conduction law. Compared to the classical Fourier's heat conduction law, Cattaneo's law yields the hyperbolic equations governing heat flux and temperature. This implies that heat propagation occurs at a finite rate, aligning more closely with natural phenomena. Under the assumption of small initial perturbation, the authors rigorously establish the global existence of classical solution to the system and obtain the optimal time-decay rates of the higher-order spatial derivatives of the solution. Furthermore, the authors observe that the heat flux exhibits a faster time-decay rate compared to the density, velocity, temperature and magnetic field due to the damping structure in Cattaneo's law.

Keywords Compressible MHD equations, Cattaneo's heat conduction law, Global existence, Large-time behavior, Optimal time-decay rates

2020 MR Subject Classification 76W05, 76N10, 35B40

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 46 No. 4, 2025
by ALLERTON PRESS, INC., USA