数 学 年 刊 A 辑
2025, 46(4):491–516
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2025.0030

带衰减势的双幂非线性薛定谔方程解的动力学性质*

秦 思[1] 王成林[2] 张 健[1]

提要 研究了带有多重物理背景的衰减势的双幂非线性薛定谔方程的柯西问题. 通过分析对应的非线性椭圆方程的变分特征, 结合方程的质量守恒律和能量守恒律, 依据幂指标的不同范围分别给出不同情形下方程的发展不变流及整体解与爆破解存在的最佳门槛. 同时, 根据相关紧性引理, 得出柯西问题爆破解在质量临界下的质量集中性、极限图景以及爆破速率下界.

关键词 非线性薛定谔方程, 不变流形, 爆破解, 质量集中性, 极限图景
MR (2020) 主题分类 35Q55
中图法分类 O175.29
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2025)04-0491-26

§1 引 言

本文考虑带衰减势的双幂非线性薛定谔方程的柯西问题

$$\begin{cases} \mathrm{i}\psi_t+\Delta\psi-\dfrac{\gamma}{|x|^{\alpha}}\psi+\epsilon|\psi|^{p-1}\psi+|\psi|^{q-1}\psi=0, \quad t\geqslant 0,\ x\in\mathbb{R}^N, \\ \psi(0,x)=\psi_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\psi=\psi(t,x):[0,T)\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{C}$ 是实变量的复值波函数且 $0<T\leqslant\infty$, $N\geqslant 1$, $\gamma>0$, $0<\alpha<\min\{2,N\}$, $\epsilon\in\{-1,+1\}$, $1<p\leqslant 1+\frac{4}{N}$, $1<q<\frac{N+2}{(N-2)^+}$ $\big($当 $N=1,2$ 时, $\frac{N+2}{(N-2)^+}=\infty$; 当 $N\geqslant 3$ 时, $(N-2)^+=N-2\big)$.

在方程 (1.1) 中, 衰减势 $\frac{\gamma}{|x|^{\alpha}}$ 蕴含着多重物理意义. 当 $\alpha=1$ 时, 带库仑势的算子 $\triangle-\frac{\gamma}{|x|}$ 可以描述两个带电粒子之间的库仑力 [1−2]; 当 $\alpha=2$ 时, 算子 $\triangle-\frac{\gamma}{|x|^2}$ 可以用于爱因斯坦黑洞理论和量子气体理论 [3−8]; 当 $0<\alpha<2$ 时, 涉及算子 $\triangle-\frac{\gamma}{|x|^{\alpha}}$ 的研究，可以参考 Golenia 和 Mandich[9] 得到的相关结论.

对于方程 (1.1), 已引起了众多数学家的广泛关注. 当 $0<\alpha<\min\{2,N\}$ 时, 已有如下研究结果：Cazenave[10] 建立了柯西问题 (1.1) 的局部适定性; Li 和 Zhao[11] 研究了在 $1<p<q\leqslant 1+\frac{4}{N}$, $\gamma<0$ 条件下驻波解的存在性和轨道稳定性；Matsui[12] 在 $1<p<q=1+\frac{4}{N}$ 的情形下，得到了柯西问题 (1.1) 最小质量爆破解的存在性及相关动力学行为. 对于 $\alpha=2$, Qin[13] 在 $1+\frac{4}{N}<p<q<\frac{N+2}{N-2}$, $\gamma>-\frac{(N-2)^2}{4}$ 的情况下, 证明了驻波解的强不稳定性；随后，Cao[14] 在此基础上进一步研究了 $1<p<1+\frac{4}{N}\leqslant q<\frac{N+2}{N-2}$ 的情形, 证明了驻波解具有轨道稳定性.

本文 2024 年 6 月 29 日收到, 2025 年 12 月 24 日收到修改稿.
[1]电子科技大学数学科学学院, 成都 611731. E-mail: somting20010203@163.com; zhangjian@uestc.edu.cn
[2]西华大学理学院, 成都 610039. E-mail: wangchenglinedu@163.com
*本文受到国家自然科学基金 (No. 12271080) 的资助.

近年来, 非线性薛定谔方程柯西问题解的整体存在和爆破的最佳门槛一直是数学领域里的重要研究热点, 详见文 [15–25]. 在确定最佳门槛的基础上, 研究者可以进一步探讨在质量临界下爆破解的动力学性质, 如质量集中性、爆破速率、极限图景等. 许多数学工作者已在此方向展开了一系列研究, 具体可参考文 [12, 17, 26–30]. 本文也将在现有研究的基础上, 进一步探讨柯西问题 (1.1) 解的爆破门槛及爆破解的相关动力学性质.

首先, 回顾如下带衰减势的单幂非线性薛定谔方程柯西问题解的动力学性质:

$$\begin{cases} \mathrm{i}\psi_t + \Delta\psi - \dfrac{\gamma}{|x|^\alpha}\psi + |\psi|^{q-1}\psi = 0, \quad t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^N,\ 0 < \alpha < \min\{2, N\}, \\ \psi(0, x) = \psi_0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Masaru 等 [31] 和 Dinh[32] 通过构造变分问题和不变流形, 得到了柯西问题 (1.2) 在质量超临界情形下的解整体存在和爆破的最佳门槛. Li 等 [11] 和 Meng[33] 分别研究了驻波解的轨道稳定性和强不稳定性. 此外, Matsui[27] 讨论了最小质量爆破解的存在性以及爆破速率.

再回顾双幂非线性薛定谔方程柯西问题

$$\begin{cases} \mathrm{i}\psi_t + \Delta\psi + \epsilon|\psi|^{p-1}\psi + |\psi|^{q-1}\psi = 0, \quad t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^N, \\ \psi(0, x) = \psi_0 \end{cases} \tag{1.3}$$

解的相关动力学性质. 当 $\epsilon = +1$ 时, Tao 等 [34] 在相应能量空间研究了柯西问题 (1.3) 解的适定性以及爆破解存在性. Soave[35] 研究了对应的非线性椭圆方程的基态解存在性及其相关性质. Coz 等 [36] 研究了在 $1 < p < q = 1 + \frac{4}{N}$ 情形下, 柯西问题 (1.3) 的最小质量爆破解及其爆破速率. 当 $\epsilon = -1$ 时, Shu 等 [37] 和 Feng[17] 研究了柯西问题 (1.3) 解全局存在和爆破的最佳门槛, Feng[17] 得到了在质量临界下爆破解的质量集中性等动力学性质. Miao 等 [38–41] 研究了当 $q = 5$ 时解的长时间渐近行为.

由于双幂非线性项和衰减势项的影响, 方程 (1.1) 的尺度变换等重要技术失效, 引起理论研究上的新困难, 故需要寻找新的方法和途径来研究柯西问题 (1.1) 解的动力学性质. 本文致力于研究柯西问题 (1.1) 解整体存在和爆破的最佳门槛以及爆破解的相关动力学性质. 主要工作如下: 通过利用文 [10] 建立柯西问题 (1.1) 的局部适定性, 再利用 Glassey[42], Weinstein[43] 和 Zhang[44] 的方法, 推导出解整体存在和爆破的充分条件. 根据文 [21–22] 的启示, 研究了柯西问题 (1.1) 在不同的幂指标范围内的解整体存在和爆破的最佳门槛. 最后, 结合 Himidi 等 [26] 和 Feng[17] 提出的方法, 得到了柯西问题 (1.1) 爆破解的质量集中性、极限图景以及爆破速率下界.

§2 预备知识

本节给出一些准备知识. 对于方程 (1.1), 在自然能量空间 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中定义如下能量泛函:

$$E(\psi) := \int \Big(\frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 + \frac{\gamma}{2|x|^\alpha}|\psi|^2 - \frac{\epsilon}{p+1}|\psi|^{p+1} - \frac{1}{q+1}|\psi|^{q+1}\Big)\mathrm{d}x. \tag{2.1}$$

根据推广的 Hardy 不等式 [45]

$$\int \frac{|\psi|^2}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x \leqslant \Big(\frac{2}{N-\alpha}\Big)^\alpha \|\psi\|_2^{2-\alpha}\|\nabla\psi\|_2^\alpha, \tag{2.2}$$

有如下等价范数:

$$\int |\psi|^2 \mathrm{d}x + \int |\nabla\psi|^2 \mathrm{d}x + \int \frac{\gamma|\psi|^2}{|x|^\alpha} \mathrm{d}x \simeq \int |\psi|^2 \mathrm{d}x + \int |\nabla\psi|^2 \mathrm{d}x. \tag{2.3}$$

Cazenave 在文 [10] 中给出了柯西问题 (1.1) 解的局部适定性.

命题 2.1 设 $\psi_0 \in H^1$, $0 < \alpha < \min\{2, N\}$, $1 < p < q < \frac{N+2}{(N-2)^+}$, 则有

(1) 柯西问题 (1.1) 一定存在唯一解 $\psi(t,x) \in C([0,T); H^1)$, $0 < T \leqslant \infty$. 这里 T 表示最大存在时间, 并且满足: 要么 $T = \infty$ (整体存在), 要么 $T < \infty$ 且

$$\lim_{t\to T} \|\psi\|_{H^1} = \infty \text{ (爆破)};$$

(2) 对任意时间 $t \in [0,T)$, $\psi(t,x)$ 满足以下守恒律:

质量守恒

$$\int |\psi|^2 \mathrm{d}x = \int |\psi_0|^2 \mathrm{d}x. \tag{2.4}$$

能量守恒

$$E(\psi) = E(\psi_0). \tag{2.5}$$

为了后面计算的方便, 给出方程 (1.1) 的维里恒等式.

命题 2.2 假设 $\psi_0 \in \Sigma := \{\psi \in H^1,\ |x|\psi \in L^2\}$, $\psi(t,x)$ 是柯西问题 (1.1) 的解. 令

$$J(t) := \int |x|^2 |\psi|^2 \mathrm{d}x,$$

则有

$$J'(t) = -4\Im \int x\psi \nabla\overline{\psi} \mathrm{d}x$$

和

$$\begin{aligned} J''(t) = {} & 8\int |\nabla\psi|^2 \mathrm{d}x + 4\gamma\alpha \int \frac{|\psi|^2}{|x|^\alpha} \mathrm{d}x \\ & - \frac{4N(p-1)\epsilon}{p+1} \int |\psi|^{p+1} \mathrm{d}x - \frac{4N(q-1)}{q+1} \int |\psi|^{q+1} \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.6}$$

由 (2.5)–(2.6), 可得

$$\begin{aligned} J''(t) = {} & 16E(\psi_0) + (4\gamma\alpha - 8\gamma) \int \frac{|\psi|^2}{|x|^\alpha} \mathrm{d}x - \frac{[4N(p-1) - 16]\epsilon}{p+1} \int |\psi|^{p+1} \mathrm{d}x \\ & - \frac{4N(q-1) - 16}{q+1} \int |\psi|^{q+1} \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.7}$$

根据维里恒等式以及 Glassey[42], Weinstein[43] 和 Zhang[44] 的研究, 给出方程柯西问题 (1.1) 解爆破的充分条件.

命题 2.3 设 $\psi(t,x)$ 是柯西问题 (1.1) 的解. 对任意 $t \in [0,T)$, 若

$$J''(t) < 0,$$

则有

$$\lim_{t\to T} \|\psi\|_{H^1} = \infty \text{ (爆破)}.$$

为了进一步考虑柯西问题 (1.1) 的爆破门槛, 先给出文 [43] 中的 Gagliardo-Nirenberg 不等式.

命题 2.4 令 $1 < s < \frac{N+2}{(N-2)^+}$, 对于任意 $\psi \in H^1$,

$$\|\psi\|_{s+1}^{s+1} \leqslant C_{GN}(s)\|\psi\|_2^{s+1-\frac{N(s-1)}{2}}\|\nabla\psi\|_2^{\frac{N(s-1)}{2}}, \tag{2.8}$$

这里

$$C_{GN}(s) = \frac{2(s+1)}{N(s-1)\|\nabla Q_s\|_2^{s-1}},$$

其中 Q_s 是如下非线性椭圆方程的正基态解:

$$-\Delta Q + Q - |Q|^{s-1}Q = 0. \tag{2.9}$$

通过简单计算, 可得

$$C_{GN}(s) = \frac{2(s+1)}{4-(N-2)(s-1)}\Big[\frac{4-(N-2)(s-1)}{N(s-1)}\Big]^{\frac{N(s-1)}{4}}\frac{1}{\|Q_s\|_2^{s-1}}.$$

此外, 对方程 (2.9) 也得到如下两个 Pohozaev 恒等式:

$$\int |\nabla Q_s|^2 \mathrm{d}x = \frac{N(s-1)}{2(s+1)}\int |Q_s|^{s+1}\mathrm{d}x, \tag{2.10}$$

$$\int |Q_s|^2 \mathrm{d}x = \Big[1 - \frac{N(s-1)}{2(s+1)}\Big]\int |Q_s|^{s+1}\mathrm{d}x, \tag{2.11}$$

且当 $s = 1 + \frac{4}{N}$ 时, 有

$$\int |\nabla Q_s|^2 \mathrm{d}x = \frac{N}{2}\int |Q_s|^2\mathrm{d}x. \tag{2.12}$$

接下来, 讨论在 $1 < p \leqslant 1 + \frac{4}{N}$, $1 < q < \frac{N+2}{(N-2)^+}$ 范围内, 柯西问题 (1.1) 解的整体存在和爆破的情况.

由 Gagliardo-Nirenberg 不等式和相关守恒律可得, 当 $1 < p < q < 1 + \frac{4}{N}$ 时, 柯西问题 (1.1) 的解 $\psi(t,x)$ 是整体存在的. 根据文 [17] 中的方法可以得到, 当 $1 < p < q = 1 + \frac{4}{N}$, $\|\psi_0\|_2 < \|Q_q\|_2$ 时, 其中 Q_q 为非线性椭圆方程 (2.9) 的正基态解, 柯西问题 (1.1) 的解 $\psi(t,x)$ 也是整体存在的. 因此, 本文只需考虑在 $1 < p \leqslant 1 + \frac{4}{N} < q < \frac{N+2}{(N-2)^+}$ 情况下爆破解的最佳门槛.

§3 当 $\epsilon = +1$ 时的爆破门槛

首先定义一个作用泛函 $I(\psi) := E(\psi) + \frac{1}{2}\|\psi\|_2^2$. 由命题 2.4 可得, 当 $s = p(q)$ 时, 令 $Q_p(Q_q)$ 是非线性椭圆方程 (2.9) 的正基态解.

情形 1 $1 < p < 1 + \frac{2}{N}$, $1 + \frac{4}{N} < q < \frac{N+2}{(N-2)^+}$.

设

$$a_1 = \frac{\|\psi_0\|_2^{p+1-N(p-1)}}{2^{r_1}r_1\|\nabla Q_p\|_2^{p-1}}, \quad a_2 = \frac{\|\psi_0\|_2^{q+1-N(q-1)}}{2^{r_2}r_2\|\nabla Q_q\|_2^{q-1}},$$

$$D_1 = \Big[\frac{r_1(r_2-1)\|\nabla Q_p\|_2^{p-1}}{r_2-r_1}\Big]^{\frac{N}{2}}\Big[\frac{r_1(r_2-1)\|\nabla Q_p\|_2^{p-1}}{r_2(1-r_1)\|\nabla Q_q\|_2^{q-1}}\Big]^{\frac{N(r_1-1)}{2(r_2-r_1)}},$$

$$\widetilde{D_1}=\Big[\frac{(r_2-1)\|\nabla Q_p\|_2^{p-1}}{r_2-r_1}\Big]^{\frac{N}{2}}\Big[\frac{(r_2-1)\|\nabla Q_p\|_2^{p-1}}{(1-r_1)\|\nabla Q_q\|_2^{q-1}}\Big]^{\frac{N(r_1-1)}{2(r_2-r_1)}}$$

和

$$K_1=\frac{(r_1-1)(r_2-2)}{2r_1r_2}\Big[\frac{r_2-2}{2(r_2-r_1)r_1a_1}\Big]^{\frac{1}{r_1-1}}, \tag{3.1}$$

这里

$$0<r_1=\frac{N(p-1)}{2}<1,\quad r_2=\frac{N(q-1)}{2}>2,\quad D_1<\widetilde{D_1}.$$

首先给出如下不变流形.

命题 3.1　设 $q>1+\frac{4}{N}$, $1<p<1+\frac{2}{N}$, 有如下两个集合:

$$G_1:=\{\psi\in H^1: I(\psi)<K_1,\ \ \|\psi_0\|_2<D_1,\ \ \|\psi\|_{H^1}^2<y_1\},$$

$$B_1:=\{\psi\in H^1: I(\psi)<K_1,\ \ \|\psi_0\|_2<D_1,\ \ \|\psi\|_{H^1}^2>y_1\}.$$

这里 y_1 表示如下函数的极大值点:

$$f_1(y):=\frac{1}{2}y-a_1y^{r_1}-a_2y^{r_2}. \tag{3.2}$$

这两个集合为不变流形: 若 $\psi_0\in G_1$, 对于柯西问题 (1.1) 的解 $\psi(t,x)$ 存在, 则有 $\psi\in G_1$. 对于 B_1 也同理可得.

证　首先, 有如下估计:

$$\|\psi\|_2^{p+1-\frac{N(p-1)}{2}}\|\nabla\psi\|_2^{\frac{N(p-1)}{2}}\leqslant\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\frac{N(p-1)}{2}}\|\psi\|_2^{p+1-N(p-1)}\|\psi\|_{H^1}^{N(p-1)}, \tag{3.3}$$

$$\|\psi\|_2^{q+1-\frac{N(q-1)}{2}}\|\nabla\psi\|_2^{\frac{N(q-1)}{2}}\leqslant\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\frac{N(q-1)}{2}}\|\psi\|_2^{q+1-N(q-1)}\|\psi\|_{H^1}^{N(q-1)}. \tag{3.4}$$

应用 (2.8), 并将 (3.3)–(3.4) 代入到 $I(\psi)$ 中, 则 $\forall t\in[0,T)$,

$$I(\psi)\geqslant\frac{1}{2}\|\psi\|_{H^1}^2-a_1\|\psi\|_{H^1}^{2r_1}-a_2\|\psi\|_{H^1}^{2r_2}.$$

假设 $y=\|\psi\|_{H^1}^2$, $y>0$, 则 $\forall t\in[0,T)$,

$$K_1>I(\psi)\geqslant f_1(\|\psi\|_{H^1}^2)=f_1(y). \tag{3.5}$$

由 (3.2) 可得, $f_1(y)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是连续的. 对 $f_1(y)$ 求导, 即得

$$f_1'(y)=\frac{1}{2}-a_1r_1y^{r_1-1}-a_2r_2y^{r_2-1},$$

通过观察可知, 当 $y\to0^+$ 或 $y\to+\infty$ 时, $f_1'(y)\to-\infty$. 对任意 $y\in(0,+\infty)$, 有 $f_1'''(y)<0$. 因此, $f_1''(y)$ 有唯一零点

$$y^*=\Big[\frac{a_1r_1(1-r_1)}{a_2r_2(r_2-1)}\Big]^{\frac{1}{r_2-r_1}}.$$

由假设 $\|\psi_0\|_2<\widetilde{D_1}$ 可知, $f_1'(y^*)>0$ 且 $f_1'(y)$ 有两个零点 $\widetilde{y_1}$ 和 y_1, 且满足 $\widetilde{y_1}\in(0,y^*)$, $y_1\in(y^*,+\infty)$. 通过单调性可得, $\widetilde{y_1}$ 和 y_1 分别是 $f_1(y)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的唯一极小值点和极大值点. 再由 $\|\psi_0\|_2<D_1$, 可以推导出 $f_1(y_1)>f_1(y^*)>0$. 结合 (3.1), 有

$$K_1<0<f_1(y_1).$$

下证 $\|\psi(t)\|_{H^1}^2 < y_1$.

反设 $\|\psi(t)\|_{H^1}^2 < y_1$ 不成立. 由于 $\psi(t)$ 关于 t 是连续的, 则一定存在 $t_0 \in [0,T)$, 使得 $\|\psi(t_0)\|_{H^1}^2 = y_1$, 即得

$$f_1(\|\psi(t_0)\|_{H^1}^2) = f_1(y_1) > K_1,$$

与 (3.5) 矛盾. 故 G_1 为不变流形. 同理可证 B_1 也为不变流形.

于是由 G_1 和 B_1 的不变性, 可以推导出如下定理, 即柯西问题 (1.1) 的解 $\psi(t,x)$ 整体存在和爆破的最佳门槛.

定理 3.1 令 $1+\frac{4}{N} < q < \frac{N+2}{(N-2)^+}$, $1 < p < 1+\frac{2}{N}$. 设 $\widetilde{y_1}$ 为方程 $f_1'(y) = 0$ 的第一个零点, 则有

(1) 当 $\psi_0 \in G_1 \cup \{0\}$, $f_1(\widetilde{y_1}) < K_1$ 时, 柯西问题 (1.1) 的解 $\psi(t,x)$ 在 $t \in [0,+\infty)$ 内整体存在;

(2) 若 $\psi_0 \in B_1$ 且 $|x|\psi_0 \in L^2$, 柯西问题 (1.1) 的解 $\psi(t,x)$ 在有限时间 $T > 0$ 爆破.

证 (1) 由假设 $f_1(\widetilde{y_1}) < K_1$ 可知 G_1 是非空的. 若初值 $\psi_0 \in G_1 \cup \{0\}$, 由于 G_1 是不变流形, 则柯西问题 (1.1) 的解 $\psi \in G_1 \cup \{0\}$. 于是有 $\|\psi\|_{H^1}^2 < y_1$. 又由命题 2.1 知, 柯西问题 (1.1) 的解 $\psi(t,x)$ 在 $t \in [0,+\infty)$ 内整体存在.

(2) 由 (2.7)–(2.8) 和 (3.3) 可得, 对于任意的 $t \in [0,T)$, 有

$$J''(t) < 4N(q-1)I(\psi) + [8-2N(q-1)]\|\psi\|_{H^1}^2 + 4N(q-p)a_1\|\psi\|_{H^1}^{2r_1}. \tag{3.6}$$

令

$$W_1 = [8-2N(q-1)]y + 4N(q-p)a_1 y^{r_1},$$

其中 $\|\psi\|_{H^1}^2 = y$. 对 W_1 关于 y 求导, 可得

$$W_1'(y) = 8-2N(q-1) + 4N(q-p)r_1 a_1 y^{r_1-1}.$$

由观察可知, 当 $y \to 0^+$ 时, $W_1'(y) \to +\infty$; 当 $y \to +\infty$ 时, $W_1'(y) \to 8-2N(q-1) < 0$. 另外, $W_1'(y)$ 在 $(0,+\infty)$ 有唯一零点

$$y^{**} = \Big[\frac{N(q-1)-4}{2N(q-p)r_1a_1}\Big]^{\frac{1}{r_1-1}}.$$

因此 $W_1(y)$ 的最大值为

$$W_{1\max} = W_1(y^{**}) = \frac{[2N(q-1)-8](1-r_1)}{r_1}\Big[\frac{N(q-1)-4}{2N(q-p)r_1a_1}\Big]^{\frac{1}{r_1-1}} = -4N(q-1)K_1.$$

因此, 若 $\psi_0 \in B_1$, 而 B_1 为不变流形, 则对任意的 $t \in [0,T)$, 解 $\psi(t,x)$ 满足

$$\|\psi(t)\|_{H^1}^2 > y_1, \quad f_1(\|\psi\|_{H^1}^2) \leqslant I(\psi) < K_1.$$

再将以上结果代入到 (3.6) 中, 可得

$$J''(t) < 4N(q-1)K_1 + W_{1\max} = 0.$$

由命题 2.3 可得, 关于柯西问题 (1.1) 的解 $\psi(t,x)$ 在有限时间 $T > 0$ 爆破.

情形 2 $p = 1+\frac{2}{N}$, $1+\frac{4}{N} < q < \frac{N+2}{(N-2)^+}$.

该情形与情形 1 类似. 首先, 有如下估计:

$$\|\psi\|_{p+1}^{p+1} \leqslant \frac{p+1}{2}\Big(\frac{\|\psi\|_2}{\|\nabla Q_p\|_2}\Big)^{\frac{2}{N}}\|\psi\|_{H^1}^2 \tag{3.7}$$

和

$$\|\psi\|_{q+1}^{q+1} \leqslant \frac{2(q+1)}{2^{\frac{N(q-1)}{2}} N(q-1)\|\nabla Q_q\|_2^{q-1}} \|\psi\|_2^{q+1-N(q-1)} \|\psi\|_{H^1}^{N(q-1)}. \tag{3.8}$$

应用 (3.7)–(3.8), 可以推断出对于任意的 $t \in [0, T)$,

$$\begin{aligned} I(\psi) \geqslant & \frac{1}{2}\|\psi\|_{H^1}^2 - \frac{1}{2}\Big(\frac{\|\psi\|_2}{\|\nabla Q_p\|_2}\Big)^{\frac{2}{N}} \|\psi\|_{H^1}^2 \\ & - \frac{2}{2^{\frac{N(q-1)}{2}} N(q-1)\|\nabla Q_q\|_2^{q-1}} \|\psi\|_2^{q+1-N(q-1)} \|\psi\|_{H^1}^{N(q-1)}. \end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned} & d_1 = \Big(\frac{\|\psi_0\|_2}{\|\nabla Q_p\|_2}\Big)^{\frac{2}{N}}, \quad d_2 = \frac{2}{2^{\frac{N(q-1)}{2}} N(q-1)\|\nabla Q_q\|_2^{q-1}} \|\psi_0\|_2^{q+1-N(q-1)}, \\ & K_2 = \frac{[N(q-1)-4] - [N(q-1)-2]d_1}{2N(q-1)} \Big[\frac{1-d_1}{N(q-1)d_2}\Big]^{\frac{2}{N(q-1)-2}}. \end{aligned}$$

假设 $y = \|\psi(t)\|_{H^1}^2$, $y > 0$, 则对于任意的 $t \in [0, T)$, 有 $I(\psi) \geqslant f_2(y)$, 其中

$$f_2(y) := \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}d_1 y - d_2 y^{\frac{N(q-1)}{2}},$$

且 $f_2(y)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续. 若 $\|\psi_0\|_2^{\frac{2}{N}} < \frac{N(q-1)-4}{N(q-1)-2}\|\nabla Q_p\|_2^{\frac{2}{N}}$, 则有

$$d_1 < \frac{N(q-1)-4}{N(q-1)-2} < 1.$$

故 $f_2'(y)$ 在 $(0, +\infty)$ 有唯一零点，即

$$y_2 = [\frac{1-d_1}{N(q-1)d_2}]^{\frac{2}{N(q-1)-2}}.$$

通过计算可得 $f_2(y_2) > K_2$, 从而由柯西问题 (1.1) 就可以构造出如下不变流形:

$$\begin{aligned} & G_2 := \Big\{\psi \in H^1 : I(\psi) < K_2, \ \ \|\psi_0\|_2^{\frac{2}{N}} < \frac{N(q-1)-4}{N(q-1)-2}\|\nabla Q_p\|_2^{\frac{2}{N}}, \ \ \|\psi\|_{H^1}^2 < y_2\Big\}, \\ & B_2 := \Big\{\psi \in H^1 : I(\psi) < K_2, \ \ \|\psi_0\|_2^{\frac{2}{N}} < \frac{N(q-1)-4}{N(q-1)-2}\|\nabla Q_p\|_2^{\frac{2}{N}}, \ \ \|\psi\|_{H^1}^2 > y_2\Big\}. \end{aligned}$$

再由 G_2 和 B_2 的不变性可以得出如下定理.

定理 3.2　令 $1 + \frac{4}{N} < q < \frac{N+2}{(N-2)^+}$, $p = 1 + \frac{2}{N}$, 则有

(1) 若 $\psi_0 \in G_2 \cup \{0\}$, 柯西问题 (1.1) 的解 $\psi(t, x)$ 在 $t \in [0, +\infty)$ 内是整体存在的;

(2) 若 $\psi_0 \in B_2$ 且 $|x|\psi_0 \in L^2$, 柯西问题 (1.1) 的解 $\psi(t, x)$ 在有限时间 $T > 0$ 爆破.

证　(1) 如果初值 $\psi_0 \in G_2 \cup \{0\}$, 由于 G_2 是不变流形, 则柯西问题 (1.1) 的解 $\psi \in G_2 \cup \{0\}$. 于是有 $\|\psi\|_{H^1}^2 < y_2$. 又由命题 2.1 知, 柯西问题 (1.1) 的解 $\psi(t, x)$ 在 $t \in [0, +\infty)$ 内整体存在.

(2) 由 (2.7)–(2.8) 和 (3.7) 可知, 对于任意 $t \in [0, T)$, 有

$$J''(t) \leqslant 4N(q-1)I(\psi) + \{[2N(q-1)-4]d_1 - 2N(q-1) + 8\}\, \|\psi\|_{H^1}^2. \tag{3.9}$$

记

$$W_2(y) = \{[2N(q-1)-4]d_1 - 2N(q-1) + 8\}\, y,$$

其中 $y=\|\psi\|_{H^1}^2$. 易得

$$W_2'(y)=[2N(q-1)-4]d_1-2N(q-1)+8<0,$$

则 $W_2(y)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. 如果 $\psi(t)$ 是柯西问题 (1.1) 的解, 且初值满足 $\psi_0\in B_2$, 再由 B_2 的不变性可得, 对于任意的 $t\in[0,T)$, $\psi(t)$ 满足

$$\|\psi(t)\|_{H^1}^2>y_2,\quad f_2(\|\psi\|_{H^1}^2)\leqslant I(\psi)<K_2,\quad W_2(y)<W_2(y_2)=-4N(q-1)K_2.$$

再将以上结论代入到 (3.9) 中, 可得

$$J''(t)<4N(q-1)K_2+W_2(y_2)=0.$$

由命题 2.3 可得, 柯西问题 (1.1) 的解在有限时间 $T>0$ 爆破.

情形 3 $1+\frac{2}{N}<p<1+\frac{4}{N}$, $1+\frac{4}{N}<q<\frac{N+2}{(N-2)^+}$.

类似地, 有如下估计:

$$\|\psi\|_{p+1}^{p+1}\leqslant\frac{2(p+1)}{N(p-1)\|\nabla Q_p\|_2^{p-1}}\|\psi\|_2^{p+1-\frac{N(p-1)}{2}}\|\psi\|_{H^1}^{\frac{N(p-1)}{2}}\tag{3.10}$$

和

$$\|\psi\|_{q+1}^{q+1}\leqslant\frac{2(q+1)}{2^{\frac{N(q-1)}{2}}N(q-1)\|\nabla Q_q\|_2^{q-1}}\|\psi\|_2^{q+1-N(q-1)}\|\psi\|_{H^1}^{N(q-1)}.\tag{3.11}$$

将 (3.10)–(3.11) 代入 $I(\psi)$ 中可得, 对于任意 $t\in[0,T)$,

$$\begin{aligned}I(\psi)\geqslant&\frac{1}{2}\|\psi\|_{H^1}^2-\frac{2}{N(p-1)\|\nabla Q_p\|_2^{p-1}}\|\psi\|_2^{p+1-\frac{N(p-1)}{2}}\|\psi\|_{H^1}^{\frac{N(p-1)}{2}}\\&-\frac{2}{2^{\frac{N(q-1)}{2}}N(q-1)\|\nabla Q_q\|_2^{q-1}}\|\psi\|_2^{q+1-N(q-1)}\|\psi\|_{H^1}^{N(q-1)}.\end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned}&a_3=\frac{\|\psi_0\|_2^{p+1-\frac{N(p-1)}{2}}}{r_1\|\nabla Q_p\|_2^{p-1}},\quad a_4=\frac{\|\psi_0\|_2^{q+1-N(q-1)}}{2^{r_2}r_2\|\nabla Q_q\|_2^{q-1}},\\&K_3=\frac{(r_1-2)(r_2-2)}{2r_1r_2}\Big(\frac{8r_2-16}{c_2r_1}\Big)^{\frac{2}{r_1-2}},\\&D_2=\Big[\frac{r_1(r_2-1)\|\nabla Q_p\|_2^{p-1}}{2r_2-r_1}\Big]^{\frac{N(2r_2-r_1)}{2r_1r_2+4(r_2-r_1)}}\Big[\frac{2r_1(r_2-1)\|\nabla Q_p\|_2^{p-1}}{2^{r_2}r_2(2-r_1)\|\nabla Q_q\|_2^{q-1}}\Big]^{\frac{N(r_1-2)}{2r_1r_2+4(r_2-r_1)}},\\&\widetilde{D_2}=\Big[\frac{2(r_2-1)\|\nabla Q_p\|_2^{p-1}}{2r_2-r_1}\Big]^{\frac{N(2r_2-r_1)}{2r_1r_2+4(r_2-r_1)}}\Big[\frac{4(r_2-1)\|\nabla Q_p\|_2^{p-1}}{2^{r_2}(2-r_1)\|\nabla Q_q\|_2^{q-1}}\Big]^{\frac{N(r_1-2)}{2r_1r_2+4(r_2-r_1)}},\end{aligned}$$

其中

$$1<r_1=\frac{N(p-1)}{2}<2,\quad r_2=\frac{N(q-1)}{2}>2,\quad D_2<\widetilde{D_2}.$$

假设 $y=\|\psi(t)\|_{H^1}^2$, $y>0$, 则对任意 $t\in[0,T)$, 有 $I(\psi)\geqslant f_3(y)$, 其中 $f_3(y)$ 定义为

$$f_3(y):=\frac{1}{2}y-a_3y^{\frac{r_1}{2}}-a_4y^{r_2}.$$

通过计算, 有如下结果:

(1) $f_3''(y)=0$ 有唯一零点 $\widetilde{y}=\left[\frac{r_1(2-r_1)a_3}{4r_2a_4(r_2-1)}\right]^{\frac{2}{2r_2-r_1}}$;

(2) 假设 $\|\psi_0\|_2<\widetilde{D_2}$, 则有 $f_3'(y_3)>0$;

(3) $f_3'(y)=0$ 有两个零点, 记为 $\widetilde{y_3}\in(0,\widetilde{y})$ 和 $y_3\in(\widetilde{y},+\infty)$, 且分别是 $f_3(y)$ 的唯一极小值点和极大值点;

(4) 假设 $\|\psi_0\|_2<D_2$, 则有 $f_3(y_3)>K_3$.

上述结果中的 (1) 和 (3) 可仿照命题 3.1 的方法得到，现在给出结果 (2) 和 (4) 的详细证明过程.

证 (2) 为了证明后面的不变流形, 这里需要限制 $f_3'(y)=0$ 有两个零点, 由于 $f_3'(y)$ 在 $(0,\widetilde{y})$ 上单增, 在 $[\widetilde{y},+\infty)$ 上单减, 且 $y\to0^+$ 或 $y\to+\infty$, $f_3'(y)\to-\infty$, 故只需 $f_3'(\widetilde{y})>0$, 即

$$f_3'(\widetilde{y})=\frac{1}{2}-a_3.\frac{r_1}{2}\widetilde{y}^{\frac{r_1}{2}-1}-a_4r_2\widetilde{y}^{r_2-1}>0,$$

且

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}-a_3.\frac{r_1}{2}\widetilde{y}^{\frac{r_1}{2}-1}-a_4r_2\widetilde{y}^{r_2-1}\\&=\frac{1}{2}-a_3^{\frac{2r_2-2}{2r_2-r_1}}a_4^{\frac{2-r_1}{2r_2-r_1}}.\frac{r_1}{2}\left[\frac{r_1(2-r_1)}{4r_2(r_2-1)}\right]^{\frac{r_1-2}{2r_2-r_1}}\\&\quad-a_3^{\frac{2r_2-2}{2r_2-r_1}}a_4^{\frac{2-r_1}{2r_2-r_1}}.r_2\left[\frac{r_1(2-r_1)}{4r_2(r_2-1)}\right]^{\frac{2(r_2-1)}{2r_2-r_1}}\\&=\frac{1}{2}-\|\psi_0\|_{L^2}^{\frac{2r_1r_2+4(r_2-r_1)}{N(2r_2-r_1)}}\frac{2r_2-r_1}{4(r_2-1)\|\nabla Q_q\|_2^{p-1}}\left[\frac{2^{r_2}(2-r_1)\|\nabla Q_q\|_2^{q-1}}{4(r_2-1)\|\nabla Q_p\|_2^{p-1}}\right]^{\frac{r_1-2}{2r_2-r_1}}.\end{aligned}$$

由于 $f_3'(\widetilde{y})>0$, 则有

$$\|\psi_0\|_{L^2}<\left[\frac{2(r_2-1)\|\nabla Q_p\|_2^{p-1}}{2r_2-r_1}\right]^{\frac{N(2r_2-r_1)}{2r_1r_2+4(r_2-r_1)}}\left[\frac{4(r_2-1)\|\nabla Q_p\|_2^{p-1}}{2^{r_2}(2-r_1)\|\nabla Q_q\|_2^{q-1}}\right]^{\frac{N(r_1-2)}{2r_1r_2+4(r_2-r_1)}},$$

即 $\|\psi_0\|_{L^2}<\widetilde{D}_2$.

(4) 由 $f_3(y)$ 单调性可知, $f_3(\widetilde{y})<f_3(y_3)$. 为了后面证明不变流形, 这里需限制 $f_3(y_3)>0$, 而 y_3 的值不确定, 故可以限制 $f_3(\widetilde{y})>0$, 即

$$f_3(\widetilde{y})=\frac{1}{2}\widetilde{y}-a_3\widetilde{y}^{\frac{r_1}{2}}-a_4\widetilde{y}^{r_2}=\widetilde{y}\Big(\frac{1}{2}-a_3\widetilde{y}^{\frac{r_1}{2}-1}-a_4\widetilde{y}^{r_2-1}\Big)>0.$$

由于 $y>0$, 故只需证 $\frac{1}{2}-a_3\widetilde{y}^{\frac{r_1}{2}-1}-a_4\widetilde{y}^{r_2-1}>0$. 而

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}-a_3\widetilde{y}^{\frac{r_1}{2}-1}-a_4\widetilde{y}^{r_2-1}\\&=\frac{1}{2}-a_3^{\frac{2r_2-2}{2r_2-r_1}}a_4^{\frac{2-r_1}{2r_2-r_1}}\left[\frac{r_1(2-r_1)}{4r_2(r_2-1)}\right]^{\frac{r_1-2}{2r_2-r_1}}-a_3^{\frac{2r_2-2}{2r_2-r_1}}a_4^{\frac{2-r_1}{2r_2-r_1}}\left[\frac{r_1(2-r_1)}{4r_2(r_2-1)}\right]^{\frac{2(r_2-1)}{2r_2-r_1}}\\&=\frac{1}{2}-\|\psi_0\|_{L^2}^{\frac{2r_1r_2+4(r_2-r_1)}{N(2r_2-r_1)}}\frac{2r_2-r_1}{2r_1(r_2-1)\|\nabla Q_p\|_2^{p-1}}\left[\frac{2^{r_2}r_2(2-r_1)\|\nabla Q_q\|_2^{q-1}}{2r_1(r_2-1)\|\nabla Q_p\|_2^{p-1}}\right]^{\frac{r_1-2}{2r_2-r_1}}.\end{aligned}$$

由于 $f_3(\widetilde{y})>0$, 则有

$$\|\psi_0\|_{L^2}<\left[\frac{r_1(r_2-1)\|\nabla Q_p\|_2^{p-1}}{2r_2-r_1}\right]^{\frac{N(2r_2-r_1)}{2r_1r_2+4(r_2-r_1)}}\left[\frac{2r_1(r_2-1)\|\nabla Q_p\|_2^{p-1}}{2^{r_2}r_2(2-r_1)\|\nabla Q_q\|_2^{q-1}}\right]^{\frac{N(r_1-2)}{2r_1r_2+4(r_2-r_1)}},$$

即 $\|\psi_0\|_{L^2}<D_2$. 由于 $K_3<0$, 故 $f_3(y_3)>K_3$.

通过计算可得 $D_2 < \widetilde{D}_2$, 故只需 $\|\psi_0\|_{L^2} < D_2$ 即可.

根据以上结果并仿照命题 3.1 的证明思路, 可以建立如下有关柯西问题 (1.1) 解的不变流形:

$$G_3 := \{\psi \in H^1 : I(\psi) < K_3,\ \ \|\psi_0\|_2 < D_2,\ \ \|\psi\|_{H^1}^2 < y_3\},$$

$$B_3 := \{\psi \in H^1 : I(\psi) < K_3,\ \ \|\psi_0\|_2 < D_2,\ \ \|\psi\|_{H^1}^2 > y_3\}.$$

再根据 G_3 和 B_3 的不变性, 可以得到如下结论, 即爆破解的最佳门槛.

定理 3.3 令 $1 + \frac{4}{N} < q < \frac{N+2}{(N-2)^+}$, $1 + \frac{2}{N} < p < 1 + \frac{4}{N}$, 则有

(1) 若 $\psi_0 \in G_3 \cup \{0\}$, $f_3(\widetilde{y_3}) < K_3$, 柯西问题 (1.1) 的解 $\psi(t,x)$ 在 $t \in [0,+\infty)$ 内整体存在;

(2) 若 $\psi_0 \in B_3$ 且 $|x|\psi_0 \in L^2$, 柯西问题 (1.1) 的解 $\psi(t,x)$ 在有限时间 $T > 0$ 爆破.

证 (1) 由假设 $f_3(\widetilde{y_3}) < K_3$ 可知 G_3 是非空的. 若初值 $\psi_0 \in G_3 \cup \{0\}$, 由于 G_3 是不变流形, 则柯西问题 (1.1) 的解 $\psi \in G_3 \cup \{0\}$. 于是有 $\|\psi\|_{H^1}^2 < y_3$. 又由命题 2.1 知, 柯西问题 (1.1) 的解 $\psi(t,x)$ 在 $t \in [0,+\infty)$ 内整体存在.

(2) 经过计算可得, 对于任意的 $t \in [0,T)$, 有

$$J''(t) \leqslant 4N(q-1)I(\psi) - [2N(q-1)-8]\|\psi\|_{H^1}^2 + \frac{8(q-p)}{(p-1)\|\nabla Q_p\|_2^{p-1}}\|\psi\|_2^{p+1-\frac{N(p-1)}{2}}\|\psi\|_{H^1}^{r_1}.$$

记

$$W_3 = -[2N(q-1)-8]\|\psi\|_{H^1}^2 + \frac{8(q-p)}{(p-1)\|\nabla Q_p\|_2^{p-1}}\|\psi\|_2^{p+1-\frac{N(p-1)}{2}}\|\psi\|_{H^1}^{r_1},$$

$$\|\psi\|_{H^1}^2 = y, \qquad c_2 = \frac{8(q-p)}{(p-1)\|\nabla Q_p\|_2^{p-1}}\|\psi\|_2^{p+1-\frac{N(p-1)}{2}}.$$

因此

$$W_3(y) = -[2N(q-1)-8]y + c_2 y^{\frac{r_1}{2}}.$$

对 $W_3(y)$ 关于 y 求导, 可得

$$W_3'(y) = 8 - 2N(q-1) + \frac{r_1}{2}c_2 y^{\frac{r_1}{2}-1}.$$

故 $W_3'(y)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减, 且有唯一零点

$$z_3 = \Big[\frac{8r_2-16}{c_2 r_1}\Big]^{\frac{2}{r_1-2}}.$$

因此 $W_3(y)$ 的最大值为

$$W_{3\max} = W_3(z_3) = \frac{4(2-r_1)(r_2-2)}{r_1}\Big(\frac{8r_2-16}{c_2 r_1}\Big)^{\frac{2}{r_1-2}} = -4N(q-1)K_3.$$

设 $\psi(t)$ 为柯西问题 (1.1) 的解, 当初值满足 $\psi_0 \in B_3$, 对于任意的 $t \in [0,T)$, 解 $\psi(t)$ 满足

$$\|\psi(t)\|_{H^1}^2 > y_3, \quad f_3(\|\psi(t)\|_{H^1}^2) \leqslant I(\psi) < K_3.$$

因此

$$J''(t) < 4N(q-1)K_3 + W_{3\max} = 0.$$

由命题 2.3 得, 柯西问题 (1.1) 的解 $\psi(t,x)$ 在有限时间 $T > 0$ 爆破.

情形 4　$p=1+\frac{4}{N}$, $1+\frac{4}{N}<q<\frac{N+2}{(N-2)^+}$.

首先给出如下估计:

$$\|\psi\|_{p+1}^{p+1}\leqslant \frac{p+1}{2}\Big(\frac{\|\psi_0\|_2}{\|\nabla Q_p\|_2}\Big)^{\frac{4}{N}}\|\psi\|_{H^1}^2 \tag{3.12}$$

和

$$\|\psi\|_{q+1}^{q+1}\leqslant \frac{2(q+1)}{2^{\frac{N(q-1)}{2}}N(q-1)\|\nabla Q_q\|_2^{q-1}}\|\psi\|_2^{q+1-N(q-1)}\|\psi\|_{H^1}^{N(q-1)}. \tag{3.13}$$

将 (3.12)–(3.13) 代入到 $I(\psi)$ 中, 可得

$$\begin{aligned}I(\psi)\geqslant&\frac{1}{2}\|\psi\|_{H^1}^2-\frac{1}{2}\Big(\frac{\|\psi_0\|_2}{\|\nabla Q_p\|_2}\Big)^{\frac{4}{N}}\|\psi\|_{H^1}^2\\&-\frac{2}{2^{\frac{N(q-1)}{2}}N(q-1)\|\nabla Q_q\|_2^{q-1}}\|\psi\|_2^{q+1-N(q-1)}\|\psi\|_{H^1}^{N(q-1)}.\end{aligned}$$

记 $y=\|\psi(t)\|_{H^1}^2$, $y>0$, 则对于任意的 $t\in[0,T)$, 有

$$I(\psi(t))\geqslant f_4(\|\psi\|_{H^1}^2)=f_4(y).$$

这里 $f_4(y)$ 定义为

$$f_4(y):=\frac{1}{2}y-a_5y-a_6y^{r_2},$$

其中

$$\begin{aligned}a_5&=\frac{\|\psi_0\|_2^{\frac{4}{N}}}{2\|\nabla Q_p\|_2^{\frac{4}{N}}},\quad r_2>2,\\a_6&=\frac{2}{2^{\frac{N(q-1)}{2}}N(q-1)\|\nabla Q_q\|_2^{q-1}}\|\psi_0\|_2^{q+1-N(q-1)}.\end{aligned}$$

易得 $f_4(y)$ 在 $(0,+\infty)$ 连续, 且有

$$f_4'(y)=\frac{1}{2}-a_5-a_6r_2y^{r_2-1}.$$

另外, 在假设 $\|\psi_0\|_2<\|\nabla Q_p\|_2$ 下, 有 $a_5<\frac{1}{2}$. 并且还可得到, 当 $y\to0^+$ 时, $f_4'(y)>0$; 当 $y\to+\infty$ 时, $f_4'(y)\to-\infty$ 且 $f_4'(y)$ 有唯一零点, 即

$$y_4=\Big(\frac{\frac{1}{2}-a_5}{a_6r_2}\Big)^{\frac{1}{r_2-1}}.$$

同时, 通过计算可得 $f_4(y_4)>K_4$, 其中

$$K_4=\frac{[N(q-1)-4](\|\nabla Q_p\|_2^{\frac{4}{N}}-\|\psi_0\|_2^{\frac{4}{N}})}{N(q-1)\|\nabla Q_p\|_2^{\frac{4}{N}}}\Big[\frac{(\|\nabla Q_p\|_2^{\frac{4}{N}}-\|\psi_0\|_2^{\frac{4}{N}})\|\nabla Q_q\|_2^{q-1}}{\|\psi_0\|_2^{q+1-N(q-1)}\|\nabla Q_p\|_2^{\frac{4}{N}}}\Big]^{\frac{2}{N(q-1)-2}}.$$

综合以上结论, 可以构造关于柯西问题 (1.1) 解的两个不变流形:

$$G_4:=\{\psi\in H^1: I(\psi)<K_4,\ \ \|\psi_0\|_2<\|\nabla Q_p\|_2,\ \ \|\psi\|_{H^1}^2<y_4\},$$

$$B_4:=\{\psi\in H^1: I(\psi)<K_4,\ \ \|\psi_0\|_2<\|\nabla Q_p\|_2,\ \ \|\psi\|_{H^1}^2>y_4\}.$$

再根据不变流形的定义, 可以得到如下爆破解的最佳门槛.

定理 3.4　令 $1+\frac{4}{N}<q<\frac{N+2}{(N-2)^+}$, $p=1+\frac{4}{N}$, 则有

(1) 若 $\psi_0 \in G_4 \cup \{0\}$, 柯西问题 (1.1) 的解 $\psi(t,x)$ 在 $t \in [0,+\infty)$ 内整体存在;

(2) 若 $\psi_0 \in B_4$ 且 $|x|\psi_0 \in L^2$, 柯西问题 (1.1) 的解 $\psi(t,x)$ 在有限时间 $T>0$ 爆破.

证 (1) 如果初值 $\psi_0 \in G_4 \cup \{0\}$, 由于 G_4 是不变流形, 则柯西问题 (1.1) 的解 $\psi \in G_4 \cup \{0\}$. 于是有 $\|\psi\|_{H^1}^2 < y_4$. 又由命题 2.1 知, 柯西问题 (1.1) 的解 $\psi(t,x)$ 在 $t \in [0,+\infty)$ 内整体存在.

(2) 基于 (3.12), 可得

$$J''(t) \leqslant 4N(q-1)I(\psi) + [8-2N(q-1)]\|\psi\|_{H^1}^2 + 2N(q-p)\Big(\frac{\|\psi\|_2}{\|\nabla Q_p\|_2}\Big)^{\frac{4}{N}}\|\psi\|_{H^1}^2. \tag{3.14}$$

记

$$W_4 = [8-2N(q-1)]\|\psi\|_{H^1}^2 + 2N(q-p)\Big(\frac{\|\psi\|_2}{\|\nabla Q_p\|_2}\Big)^{\frac{4}{N}}\|\psi\|_{H^1}^2. \tag{3.15}$$

设 $\|\psi\|_{H^1}^2 = y$, $a_7 = 2N(q-p)(\frac{\|\psi\|_2}{\|\nabla Q_p\|_2})^{\frac{4}{N}}$, 则

$$W_4(y) = [8-2N(q-1)+a_7]y, \tag{3.16}$$

同时, 在条件 $\|\psi\|_2 < \|\nabla Q_p\|_2$ 下, 有

$$W_4'(y) = 8-2N(q-1)+a_7 < 0.$$

因此, $W_4(y)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减. 令 $\psi(t)$ 是柯西问题 (1.1) 的解, 再由假设 $\psi_0 \in B_4$ 可得, 对于任意的 $t \in [0,T)$, 解 $\psi(t)$ 满足

$$\|\psi(t)\|_{H^1}^2 > y_4, \quad f_4(\|\psi(t)\|_{H^1}^2) \leqslant I(\psi) < K_4, \quad W_4(\|\psi(t)\|_{H^1}^2) < W_4(y_4) = -4N(q-1)K_4.$$

因此, 根据 (3.14) 得

$$J''(t) < 4N(q-1)K_4 + W_4(y_4) = 0.$$

由命题 2.3 可得, 柯西问题 (1.1) 的解 $\psi(t,x)$ 在有限时间 $T>0$ 爆破.

§4 当 $\epsilon = -1$ 时的爆破门槛

本节旨在研究当 $\epsilon=-1$ 时, 柯西问题 (1.1) 的解 $\psi(t,x)$ 整体存在和爆破的最佳条件. 为了深入探讨爆破门槛条件, 需要注意到不等式 (2.8), 当 $s=q$ 时, 令 Q_q 为非线性椭圆方程 (2.9) 的正基态解.

显然, 当 $1<p<q<1+\frac{4}{N}$ 时, 关于柯西问题 (1.1) 只有整体解. 还需要证明, 在 $1<p\leqslant 1+\frac{4}{N}$, $1+\frac{4}{N} \leqslant q < \frac{N+2}{(N-2)^+}$ 的情形下, 柯西问题 (1.1) 爆破解的存在性及最佳门槛条件.

首先, 将范围限制在 $1<p<q=1+\frac{4}{N}$ 内, 考虑柯西问题 (1.1) 爆破解存在性.

定理 4.1 令 $\psi_0 \in H^1$. 若 $1<p<q=1+\frac{4}{N}$, $E(\psi_0)<0$, 则有柯西问题 (1.1) 的解 $\psi(t,x)$ 在有限时间 $T>0$ 爆破.

证 若 $1<p<q=1+\frac{4}{N}$, 易得 $J(t) < J(0)+J'(0)t+8E(\psi_0)t^2$. 又因为 $E(\psi_0)<0$, 结论易证.

接着, 再考虑此情形下柯西问题 (1.1) 爆破解的最佳门槛条件.

定理 4.2　令 $1<p<q=1+\frac{4}{N}$, 则有

(1) 设 $\psi_0\in H^1$, 当 $\|\psi_0\|_2<\|Q_q\|_2$ 时, 柯西问题 (1.1) 的解 $\psi(t,x)$ 在 $t\in[0,+\infty)$ 内整体存在;

(2) 设 $\psi_0\in H^1$, 存在一个初值 ψ_0 满足 $\|\psi_0\|_2>\|Q_q\|_2$, 使得柯西问题 (1.1) 的解 $\psi(t,x)$ 在有限时间 $T>0$ 爆破.

证　(1) 由 (2.1), (2.8) 可得

$$\begin{aligned}E(\psi)&=\int\Big(\frac{1}{2}|\nabla\psi|^2+\frac{\gamma}{2|x|^\alpha}|\psi|^2+\frac{1}{p+1}|\psi|^{p+1}-\frac{1}{q+1}|\psi|^{q+1}\Big)\mathrm{d}x\\&\geqslant\frac{1}{2}\int|\nabla\psi|^2\mathrm{d}x+\int\frac{\gamma}{2|x|^\alpha}|\psi|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\Big(\frac{\|\psi\|_2}{\|Q_q\|_2}\Big)^{\frac{4}{N}}\|\nabla\psi\|_2^2,\end{aligned}$$

即

$$E(\psi)\geqslant\frac{1}{2}\Big[1-\Big(\frac{\|\psi\|_2}{\|Q_q\|_2}\Big)^{\frac{4}{N}}\Big]\|\nabla\psi\|_2^2+\int\frac{\gamma}{2|x|^\alpha}|\psi|^2\mathrm{d}x.\tag{4.1}$$

由假设 $\|\psi\|_2=\|\psi_0\|_2<\|Q_q\|_2$ 可知

$$\|\nabla\psi\|_2^2+\int\frac{\gamma}{2|x|^\alpha}|\psi|^2\mathrm{d}x<C_5,\tag{4.2}$$

其中 C_5 为一个正常数. 故柯西问题 (1.1) 的解 $\psi(t,x)$ 在 $t\in[0,+\infty)$ 内整体存在.

(2) 令 $\psi_0=\mu\lambda^{\frac{N}{2}}Q_q(\lambda x)$, 其中 $\mu>1$, 则有 $\|\psi_0\|_2=\mu\|Q_q\|_2>\|Q_q\|_2$ 且 $Q_q\neq 0$. 结合 (2.1) 和 (2.5), 有

$$\begin{aligned}E(\psi_0)=&\frac{1}{2}\mu^2\lambda^2\int|\nabla Q_q|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\mu^2\lambda^\alpha\int\frac{\gamma}{|x|^\alpha}|Q_q|^2\mathrm{d}x\\&+\frac{1}{p+1}\mu^{p+1}\lambda^{\frac{N(p+1)}{2}-N}\int|Q_q|^{p+1}\mathrm{d}x-\frac{1}{q+1}\mu^{q+1}\lambda^2\int|Q_q|^{q+1}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

根据 (2.11)–(2.12), 可得

$$\begin{aligned}E(\psi_0)=&\frac{N}{4}\lambda^2(\mu^2-\mu^{2+\frac{4}{N}})\int|Q_q|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\mu^2\lambda^\alpha\int\frac{\gamma}{|x|^\alpha}|Q_q|^2\mathrm{d}x\\&+\frac{1}{p+1}\mu^{p+1}\lambda^{\frac{N(p+1)}{2}-N}\int|Q_q|^{p+1}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由定理 4.1 知, 只需证 $E(\psi_0)<0$ 即可. 记

$$\lambda>\frac{\frac{1}{p+1}\mu^{p+1}\lambda^{\frac{N(p+1)}{2}-N-1}\int|Q_q|^{p+1}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\mu^2\lambda^{\alpha-1}\int\frac{\gamma|Q_q|^2}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x}{\frac{N}{4}(\mu^{2+\frac{4}{N}}-\mu^2)\int|Q_q|^2\mathrm{d}x},$$

则有 $E(\psi_0)<0$. 故柯西问题 (1.1) 的解 $\psi(t,x)$ 在有限时间 $T>0$ 爆破.

接着, 考虑在 $1<p\leqslant 1+\frac{4}{N}<q<\frac{N+2}{(N-2)^+}$ 下的爆破门槛条件.

命题 4.1　令 $1<p\leqslant 1+\frac{4}{N}<q<\frac{N+2}{(N-2)^+}$, 可建立如下有关柯西问题 (1.1) 的两个不变流形:

$$G_5:=\Big\{\psi\in H^1:E(\psi)<\frac{r_2-2}{2r_2}y_5^2,\ \ \|\nabla\psi\|_2<y_5\Big\},$$

$$B_5:=\Big\{\psi\in H^1:E(\psi)<\frac{r_2-2}{2r_2}y_5^2,\ \ \|\nabla\psi\|_2>y_5\Big\},$$

这里 y_5 是如下函数的最大值点:

$$f_5(y) := \frac{1}{2}y^2 - h_1 y^{r_2}, \tag{4.3}$$

其中

$$h_1 = \frac{2}{4-(N-2)(q-1)}\Big[\frac{4-(N-2)(q-1)}{N(q-1)}\Big]^{\frac{N(q-1)}{4}} \frac{\|\psi_0\|_2^{q+1-\frac{N(q-1)}{2}}}{\|Q_q\|_2^{q-1}}, \quad r_2 = \frac{N(q-1)}{2} > 2.$$

证 首先证明 G_5 为不变流形.

利用 (2.5) 可得, $E(\psi_0) = E(\psi) < \frac{r_2-2}{2r_2}y_5^2$. 下证 $\|\nabla\psi\|_2 < y_5$. 由 (2.1) 可得

$$\begin{aligned} E(\psi) &= \frac{1}{2}\int |\nabla\psi|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{\gamma|\psi|^2}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x + \frac{1}{p+1}\int |\psi|^{p+1}\mathrm{d}x - \frac{1}{q+1}\int |\psi|^{q+1}\mathrm{d}x \\ &\geqslant \frac{1}{2}\int |\nabla\psi|^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{q+1}\int |\psi|^{q+1}\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

由 (2.8) 可得

$$E(\psi) \geqslant \frac{1}{2}\|\nabla\psi\|_2^2 - h_1\|\nabla\psi\|_2^{r_2}. \tag{4.4}$$

记 $\|\nabla\psi\|_2 = y$, 则有

$$f_5(y) = \frac{1}{2}y^2 - h_1 y^{r_2}, \quad f_5'(y) = y - h_1 r_2 y^{r_2-1}.$$

因此, $f_5(y)$ 有唯一最大值点 $y_5 := (\frac{1}{h_1 r_2})^{\frac{1}{r_2-2}}$, 且

$$f_{5\max} = \frac{r_2-2}{2r_2}y_5^2. \tag{4.5}$$

由假设 $E(\psi) < \frac{r_2-2}{2r_2}y_5^2$ 可得

$$\frac{1}{2}\|\nabla\psi\|_2^2 - h_1\|\nabla\psi\|_2^{r_2} \leqslant E(\psi) < \frac{r_2-2}{2r_2}y_5^2. \tag{4.6}$$

现在, 需证明 $\|\nabla\psi\|_2 < y_5$. 反设存在 $t_0 \in (0,T)$, 使得 $\|\nabla\psi(t_0)\|_2 = y_5$. 由 (4.6) 可知, $\frac{r_2-2}{2r_2}y_5^2 < \frac{r_2-2}{2r_2}y_5^2$, 矛盾. 故 $\|\nabla\psi\|_2 < y_5$, 则 G_5 为不变流形. 同理可证, B_5 也为不变流形.

由不变流形的定义, 可以得出爆破解的最佳门槛.

定理 4.3 令 $1 < p \leqslant 1 + \frac{4}{N} < q < \frac{N+2}{(N-2)^+}$, 则有

(1) 若 $\psi_0 \in G_5 \cup \{0\}$, 柯西问题 (1.1) 的解 $\psi(t,x)$ 在 $t \in [0,+\infty)$ 内整体存在;

(2) 若 $\psi_0 \in B_5$ 且 $|x|\psi_0 \in L^2$, 柯西问题 (1.1) 的解 $\psi(t,x)$ 在有限时间 $T > 0$ 爆破.

证 (1) 如果初值 $\psi_0 \in G_5 \cup \{0\}$, 由于 G_5 是不变流形, 则柯西问题 (1.1) 的解 $\psi \in G_5 \cup \{0\}$. 于是有 $\|\nabla\psi\|_2 < y_5$. 又由命题 2.1 知, 柯西问题 (1.1) 的解 $\psi(t,x)$ 在 $t \in [0,+\infty)$ 内整体存在.

(2) 由 (2.1), (2.5) 和 (2.7), 可得

$$\begin{aligned} J''(t) &= 16E(\psi_0) + (4\gamma\alpha - 8\gamma)\int \frac{|\psi|^2}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x + \frac{4N(p-1)-16}{p+1}\int |\psi|^{p+1}\mathrm{d}x \\ &\quad - \frac{4N(q-1)-16}{q+1}\int |\psi|^{q+1}\mathrm{d}x \\ &= 16E(\psi_0) + (4\gamma\alpha - 8\gamma)\int \frac{|\psi|^2}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x + \frac{4N(p-1)-16}{p+1}\int |\psi|^{p+1}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+[4N(q-1)-16]\Big[E(\psi_0)-\frac{1}{2}\int|\nabla\psi|^2\mathrm{d}x-\frac{\gamma}{2}\int\frac{|\psi|^2}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x-\frac{1}{p+1}\int|\psi|^{p+1}\mathrm{d}x\Big]\\
&=4N(q-1)E(\psi_0)-[2N(q-1)-8]\int|\nabla\psi|^2\mathrm{d}x+\frac{4N(p-q)}{p+1}\int|\psi|^{p+1}\mathrm{d}x\\
&\quad-[2N(q-1)-4\alpha]\int\frac{\gamma|\psi|^2}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x\\
&\leqslant 4N(q-1)E(\psi_0)-[2N(q-1)-8]\int|\nabla\psi|^2\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

又因为 $\psi_0\in B_5$, $E(\psi_0)<\frac{r_2-2}{2r_2}y_5^2$, $\int|\nabla\psi|^2\mathrm{d}x>y_5^2$, 则有

$$
J''(t)<4N(q-1)\frac{r_2-2}{2r_2}y_5^2-[2N(q-1)-8]y_5^2=0. \tag{4.7}
$$

即证柯西问题 (1.1) 的解在有限时间 $T>0$ 爆破. 完成定理证明.

在定理 4.2 的前提下, 本文将进一步讨论柯西问题 (1.1) 爆破解在临界质量附近时的相关动力学性质.

§5　爆破解的质量集中性

由于集中现象描述了非线性波坍塌的情形, 因此本节旨在研究柯西问题 (1.1) 爆破解的质量集中性. 主要利用 Himidi 和 Keraani[26] 的研究, 即用经典的且不带限制的非线性椭圆方程的基态解刻画有限时刻的爆破解. 根据文 [26], 介绍如下由 Profile 分解理论得到的精细紧性结果.

引理 5.1　设 $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ 为 H^1 的一个有界列, 使得

$$
\limsup_{n\to\infty}\|\nabla\psi_n\|_2\leqslant M,\quad \limsup_{n\to\infty}\|\psi_n\|_{2+\frac{4}{N}}\geqslant m>0,
$$

那么, 存在 $W\in H^1$ 和 $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathbb{R}^N$, 使得对于 $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ 的子列 (仍记为 $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$), 有

$$
\psi_n(x+x_n)\rightharpoonup W\ \ \text{弱收敛于}\ H^1,
$$

且

$$
\|W\|_2\geqslant\Big(\frac{N}{N+2}\Big)^{\frac{N}{4}}\frac{m^{N/2+1}}{M^{N/2}}\|Q\|_2.
$$

这里及以后, $Q:=Q_q$ 为非线性椭圆方程 (2.9) 的正基态解.

接着, 给出柯西问题 (1.1) 爆破解的质量集中性和集中率.

定理 5.1　设 ψ 为柯西问题 (1.1) 的爆破解, $1<p<q=1+\frac{4}{N}$. 记 $b(t)>0$ 为任意函数, 满足当 $t\to T$ 时, $b(t)\|\nabla\psi\|_2\to\infty$, 从而存在一个 $x(t)\in\mathbb{R}^N$, 使得

$$
\lim_{t\to T}\int_{|x-x(t)|\leqslant b(t)}|\psi(t,x)|^2\mathrm{d}x\geqslant\int Q^2\mathrm{d}x. \tag{5.1}
$$

更确切地说, 当 $b(t)\leqslant\frac{1}{\|\nabla\psi(t)\|_2^{1-\theta}}$ $(0<\theta<1)$ 时, 柯西问题 (1.1) 爆破解的质量集中率为 $\frac{1}{\|\nabla\psi(t)\|_2^{1-\theta}}$. 显然 $\lim\limits_{t\to T}b(t)=0$.

证 令

$$\rho(n)=\frac{\|\nabla Q\|_2}{\|\nabla\psi(t_n,x)\|_2},\quad v_n=\rho_n^{\frac{N}{2}}\psi(t_n,\rho_n x),$$

其中 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个数列, 满足 $t_n\to T$, $\rho_n:=\rho(t_n)$ 和 $v_n(x):=v(t_n,x)$. 故对于 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$, 有

$$\|v_n\|_2=\|\psi(t_n)\|_2=\|\psi_0\|_2,\quad \|\nabla v_n\|_2=\rho_n\|\nabla\psi(t_n)\|_2=\|\nabla Q\|_2. \tag{5.2}$$

定义

$$A(v_n):=\frac{1}{2}\int|\nabla v_n(x)|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{q+1}\int|v_n(x)|^{q+1}\mathrm{d}x,$$

则有

$$\begin{aligned}A(v_n)&=\rho_n^2\Big(\frac{1}{2}\int|\nabla\psi(t_n,x)|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{q+1}\int|\psi(t_n,x)|^{q+1}\mathrm{d}x\Big)\\&=\rho_n^2\Big(E_0-\frac{1}{p+1}\int|\psi(t_n,x)|^{p+1}\mathrm{d}x-\frac{\gamma}{2}\int\frac{|\psi(t_n,x)|^2}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x\Big).\end{aligned}$$

接着, 根据 Gagliardo-Nirenberg 不等式

$$\int|\psi(x)|^{p+1}\mathrm{d}x\leqslant C_1\|\psi\|_2^{p+1-\frac{N(p-1)}{2}}\|\nabla\psi\|_2^{\frac{N(p-1)}{2}}$$

以及推广的 Hardy 不等式

$$\int\frac{|\psi|^2}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x\leqslant C_2\|\nabla\psi\|_2^\alpha,$$

可以推断出

$$\begin{aligned}|A(v_n)|&\leqslant\rho_n^2\Big(|E_0|+\frac{\gamma}{2}\int\frac{|\psi(t_n,x)|^2}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x+\frac{1}{p+1}\int|\psi(t_n,x)|^{p+1}\mathrm{d}x\Big)\\&\leqslant\frac{|E_0|\|\nabla Q\|_2^2}{\|\nabla\psi(t_n)\|_2^2}+\widetilde{C_2}\frac{\|\nabla Q\|_2^2}{\|\nabla\psi(t_n)\|_2^{2-\alpha}}+\widetilde{C_1}\frac{\|\nabla Q\|_2^2}{\|\nabla\psi(t_n)\|_2^{2-\frac{N(p-1)}{2}}}\\&\to0,\quad n\to\infty.\end{aligned}$$

进一步地, 有

$$\int|v_n(x)|^{q+1}\mathrm{d}x\to\frac{N+2}{N}\|\nabla Q\|_2^2. \tag{5.3}$$

记 $m^{2+\frac{4}{N}}=\frac{N+2}{N}\|\nabla Q\|_2^2$, $M=\|\nabla Q\|_2$. 据引理 5.1, 存在 $W\in H^1$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}^N$, 使得对于子列 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$, 有

$$v_n(x+x_n)=\rho_n^{\frac{N}{2}}\psi(t_n,\rho_n(x+x_n))\rightharpoonup W\ \ \text{弱收敛于 } H^1, \tag{5.4}$$

且

$$\|W\|_2\geqslant\|Q\|_2. \tag{5.5}$$

注意到

$$\frac{b(t_n)}{\rho_n}=\frac{b(t_n)\|\nabla\psi(t_n)\|_2}{\|\nabla Q\|_2}\to\infty,\quad n\to\infty,$$

则 $\forall C>0$, $\exists N$, $\forall n>N$, 有 $C\rho_n\leqslant b(t_n)$. 故可得

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}\int_{|x|\leqslant C}|v_n(t,x+x_n)|^2\mathrm{d}x&=\liminf_{n\to\infty}\int_{|x|\leqslant C}\rho_n^N|\psi(t_n,\rho_nx+x_n)|^2\mathrm{d}x\\&=\liminf_{n\to\infty}\int_{|x-x_n|\leqslant C\rho_n}|\psi(t_n,x)|^2\mathrm{d}x\\&\leqslant\liminf_{n\to\infty}\sup_{y\in\mathbb{R}^N}\int_{|x-y|\leqslant C\rho_n}|\psi(t_n,x)|^2\mathrm{d}x\\&\leqslant\liminf_{n\to\infty}\sup_{y\in\mathbb{R}^N}\int_{|x-y|\leqslant b(t_n)}|\psi(t_n,x)|^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由 (5.4) 得

$$\liminf_{n\to\infty}\int_{|x|\leqslant C}|v_n(t,x+x_n)|^2\mathrm{d}x\geqslant\int_{|x|\leqslant C}|W(x)|^2\mathrm{d}x,\quad\forall C>0,$$

进一步地, 有

$$\liminf_{n\to\infty}\sup_{y\in\mathbb{R}^N}\int_{|x-y|\leqslant b(t_n)}|\psi(t_n,x)|^2\mathrm{d}x\geqslant\int|W(x)|^2\mathrm{d}x.$$

因为数列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的任意性, 有

$$\liminf_{t\to T}\sup_{y\in\mathbb{R}^N}\int_{|x-y|\leqslant b(t)}|\psi(t,x)|^2\mathrm{d}x\geqslant\int|W(x)|^2\mathrm{d}x.\tag{5.6}$$

观察得到, $\forall t\in[0,T)$, 函数

$$f(y):=\int_{|x-y|\leqslant b(t)}|\psi(t,x)|^2\mathrm{d}x$$

在 $y\in\mathbb{R}^N$ 内是连续的, 且当 $|y|\to+\infty$ 时, 有 $f(y)\to 0$. 故存在一个函数 $x(t)\in\mathbb{R}^N$, 使得 $\forall t\in[0,T)$, 有

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^N}\int_{|x-y|\leqslant b(t)}|\psi(t,x)|^2\mathrm{d}x=\int_{|x-x(t)|\leqslant b(t)}|\psi(t,x)|^2\mathrm{d}x.$$

再结合 (5.5)–(5.6), 可得 (5.1).

接下来讨论柯西问题 (1.1) 爆破解在爆破时刻附近的精细集中性质, 即 $|\psi(t,x)|^2$ 在爆破时刻附近收敛于一个 δ-函数, 且爆破解的质量集中在一点处.

定理 5.2　令

$$\psi_0\in\Sigma,\quad 1<p<1+\frac{4}{N},\quad q=1+\frac{4}{N}.$$

若柯西问题 (1.1) 的解 $\psi(t,x)$ 在有限时间 $T>0$ 爆破, 且 $\|\psi_0\|_2=\|Q\|_2$, 则存在 $y_0\in\mathbb{R}^N$, 使得

$$|\psi(t,x)|^2\to\|Q\|_2^2\delta_{y_0}\tag{5.7}$$

在分布意义下成立.

证　由定理 5.1 可得, $\forall a>0$, 有

$$\liminf_{t\to T}\int_{|x-x(t)|<a}|\psi(t,x)|^2\mathrm{d}x\geqslant\|Q\|_2^2.$$

再结合质量守恒律 $\|\psi(t)\|_2^2=\|\psi_0\|_2^2=\|Q\|_2^2$, 可以推断出, $\forall a>0$,

$$\liminf_{t\to T}\int_{|x-x(t)|<a}|\psi(t,x)|^2\mathrm{d}x=\|Q\|_2^2.$$

进一步地, 有

$$|\psi(t,x+x(t))|^2\to\|Q\|_2^2\delta_{x=0}. \tag{5.8}$$

利用 (2.8), $\forall\beta>0$, $\forall\theta(x)$: $\mathbb{R}^N\mapsto\mathbb{R}$, 可得

$$A(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta\theta}\psi)\geqslant\frac{1}{2}\int|\nabla(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta\theta}\psi)|^2\mathrm{d}x\Big(1-\frac{\|\psi\|_2^{q-1}}{\|Q\|_2^{q-1}}\Big)=0.$$

因此

$$0\leqslant A(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta\theta}\psi)=\frac{\beta^2}{2}\int|\psi|^2|\nabla\theta|^2\mathrm{d}x-\beta\Im\int\overline{\psi}\nabla\psi\cdot\nabla\theta\mathrm{d}x+A(\psi),$$

从而有

$$\Big|\Im\int\overline{\psi}\nabla\psi\cdot\nabla\theta\mathrm{d}x\Big|\leqslant\Big(2A(\psi)\int|\nabla\theta|^2|\psi|^2\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.9}$$

对于任意的 $j=1,2,\cdots,N$, 根据 (5.9) 和

$$A(\psi(t))\leqslant E(\psi(t))=E(\psi_0),$$

可以推断出

$$\begin{aligned}\Big|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int|\psi(t,x)|^2x_j\mathrm{d}x\Big|&=\Big|2\Im\int\overline{\psi}\nabla\psi\nabla x_j\mathrm{d}x\Big|\\&\leqslant2\Big(2E(\psi)\int|\nabla x_j|^2|\psi|^2\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant C,\end{aligned}$$

即

$$\Big|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int|\psi(t,x)|^2x_j\mathrm{d}x\Big|\leqslant C. \tag{5.10}$$

在 (5.10) 两边对 t 积分, 可得

$$\int|\psi(t,x)|^2x_j\mathrm{d}x\leqslant Ct.$$

令 $t_s,t_r\in(0,T)$ 为任意两个数列, 使其满足

$$\lim_{s\to\infty}t_s=\lim_{r\to\infty}t_r=T,$$

则有

$$\Big|\int|\psi(t_s,x)|^2x_j\mathrm{d}x-\int|\psi(t_r,x)|^2x_j\mathrm{d}x\Big|\leqslant C|t_s-t_r|\to0,\quad s,r\to\infty.$$

由柯西收敛准则, 可知

$$\lim_{t\to T}\int|\psi(t,x)|^2x_j\mathrm{d}x\ \text{存在},\quad\forall j=1,2,\cdots,N.$$

令

$$y_0=\|Q\|_2^{-2}\lim_{t\to T}\int|\psi(t,x)|^2x\mathrm{d}x,$$

则有

$$\lim_{t\to T}\int|\psi(t,x)|^2x\mathrm{d}x=y_0\|Q\|_2^2. \tag{5.11}$$

而由命题 2.2 可得, $J''(t)<16E(\psi_0)$. 故存在一个常数 c_1, 使得

$$\int|x|^2|\psi(t,x)|^2\mathrm{d}x\leqslant c_1.$$

进一步地, 有

$$\begin{aligned}\int|x|^2|\psi(t,x+x(t))|^2\mathrm{d}x&\leqslant\int|x+x(t)|^2|\psi(t,x+x(t))|^2\mathrm{d}x+|x(t)|^2\int|\psi(t,x+x(t))|^2\mathrm{d}x\\&\leqslant c_1+|x(t)|^2\|\psi_0\|_2^2,\end{aligned}$$

即

$$\int|x|^2|\psi(t,x+x(t))|^2\mathrm{d}x\leqslant c_1+|x(t)|^2\|\psi_0\|_2^2. \tag{5.12}$$

再根据 (5.8) 可得

$$\begin{aligned}\limsup_{t\to T}|x(t)|^2\|Q\|_2^2&=\limsup_{t\to T}\int_{|x|\leqslant1}|x+x(t)|^2|\psi(t,x+x(t))|^2\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_{\mathbb{R}^N}|x|^2|\psi(t,x)|^2\mathrm{d}x\\&\leqslant c_1.\end{aligned}$$

因此

$$\limsup_{t\to T}|x(t)|\leqslant\frac{\sqrt{c_1}}{\|Q\|_2}. \tag{5.13}$$

结合 (5.12)–(5.13), 有

$$\limsup_{t\to T}\int|x|^2|\psi(t,x+x(t))|^2\mathrm{d}x\leqslant C.$$

故 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $M_0=M_0(\varepsilon)$, 使得

$$\limsup_{t\to T}\Big|\int_{|x|\geqslant M_0}x|\psi(t,x+x(t))|^2\mathrm{d}x\Big|\leqslant\frac{C}{M_0}<\varepsilon.$$

根据 (5.8) 可得

$$\begin{aligned}\limsup_{t\to T}\Big|\int|\psi(t,x)|^2x\mathrm{d}x-x(t)\|Q\|_2^2\Big|&=\limsup_{t\to T}\Big|\int|\psi(t,x)|^2(x-x(t))\mathrm{d}x\Big|\\&\leqslant\limsup_{t\to T}\Big|\int_{|x|\leqslant M_0}|\psi(t,x+x(t))|^2x\mathrm{d}x\Big|+\varepsilon\\&\leqslant\varepsilon.\end{aligned}$$

再结合 (5.11), 有 $\lim\limits_{t\to T}x(t)=y_0$. 因此

$$\limsup_{t\to T}\int|\psi(t,x)|^2x\mathrm{d}x=\|Q\|_2^2y_0,$$

且

$$|\psi(t,x)|^2\to\|Q\|_2^2\delta_{y_0},\quad t\to T$$

在分布意义下成立.

§6 爆破解的极限图景

根据第 5 节的结论, 本节将进一步讨论柯西问题 (1.1) 爆破解的极限行为.

首先, 由质量守恒 (2.4) 可知, 柯西问题 (1.1) 的爆破解 $\psi(t,x)$ 在 L^2 空间中有界, 于是有 $\psi(t,x)$ 在 L^2 空间存在弱极限. 基于这一事实，可以得出以下结论.

定理 6.1 令 $\psi_0\in\Sigma$, 且 $\psi(t,x)\in C([0,T);H^1)$ 是其对应的柯西问题 (1.1) 的爆破解. 当 $t\to T$ 时, 令 $\mathcal{L}$ 为 $\psi(t,x)$ 在 L^2 空间中的弱极限点的集合, 则对于任意的 $W\in\mathcal{L}$, 有

$$\|W\|_2^2\leqslant\|\psi_0\|_2^2-\|Q\|_2^2. \tag{6.1}$$

证 假设 $\{t_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 是任意的时间序列, 且当 $n\to+\infty$ 时, $t_n\to T$. 记

$$\psi_n=\psi(t_n,x),\quad b(t_n)=\frac{1}{\|\nabla\psi_n\|_2^{1-\theta}},$$

其中 $0<\theta<1$. 于是由定理 5.1 可得, 对于任意的 $\eta>0$, $B>0$, 当 n 充分大时, 有

$$\int_{|x-y(t_n)|<B}|\psi_n|^2\mathrm{d}x\geqslant\int Q^2\mathrm{d}x-\eta. \tag{6.2}$$

又由定理 5.2 可知, $|y(t_n)|$ 是有界的. 因此, 可假设存在 $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 的子列 (仍记为 $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$), 使得当 $n\to+\infty$ 时, 要么 $y(t_n)\to0$, 要么存在 $y\in\mathbb{R}^N$, 使得 $y(t_n)\to y$.

注意到, 当 $n\to+\infty$, $y(t_n)\to0$ 时, 对任意的 $M>0$, 有

$$\psi_n\rightharpoonup W\ \ \text{弱收敛于 } L^2(|x|\geqslant M),$$

则

$$\begin{aligned}\int_{|x|\geqslant M}|W|^2\mathrm{d}x&\leqslant\liminf_{n\to+\infty}\int_{|x|\geqslant M}|\psi_n|^2\mathrm{d}x\\&=\liminf_{n\to+\infty}\Big(\int|\psi_n|^2\mathrm{d}x-\int_{|x|<M}|\psi_n|^2\mathrm{d}x\Big)\\&=\|\psi_0\|_2^2-\limsup_{n\to+\infty}\int_{|x|<M}|\psi_n|^2\mathrm{d}x\\&\leqslant\|\psi_0\|_2^2-\|Q\|_2^2+\eta.\end{aligned}$$

令 $\eta\to0$, $M\to0$, 可得 (6.1) 成立. 若当 $n\to+\infty$ 时, 存在 $y\in\mathbb{R}^N$, 使得 $y_n\to y$, 则对于任意的 $M_1>0$, 有

$$\psi_n\rightharpoonup W\ \ \text{弱收敛于 } L^2(|x-y|\geqslant M_1).$$

于是有

$$\begin{aligned}\int_{|x-y|\geqslant M_1}|W|^2\mathrm{d}x&\leqslant\liminf_{n\to+\infty}\int_{|x-y|\geqslant M_1}|\psi_n|^2\mathrm{d}x\\&=\liminf_{n\to+\infty}\Big(\int|\psi_n|^2\mathrm{d}x-\int_{|x-y|<M_1}|\psi_n|^2\mathrm{d}x\Big)\\&=\|\psi_0\|_2^2-\limsup_{n\to+\infty}\int_{|x-y|<M_1}|\psi_n|^2\mathrm{d}x\\&\leqslant\|\psi_0\|_2^2-\|Q\|_2^2+\eta,\end{aligned}$$

令 $\eta\to0$, $M_1\to0$, 可得 (6.1) 成立. 证毕.

其次, 通过利用非线性椭圆方程 (2.9) 基态解, 结合变分特征与尺度变换技巧, 可以得到柯西问题 (1.1) 的具临界质量爆破解的极限图景.

定理 6.2 令

$$\psi_0 \in H^1, \quad 1<p<q=1+\frac{4}{N}.$$

假设 $\|\psi_0\|_2=\|Q\|_2$, 且柯西问题 (1.1) 的解在有限时间 $T>0$ 爆破, 则存在 $x(t)\in\mathbb{R}^N$, $\theta(t)\in[0,2\pi)$, 使得

$$\rho^{\frac{N}{2}}(t)\psi(t,\rho(t)(x+x(t)))\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)}\to Q \text{ 强收敛于 } H^1, \quad t\to T, \tag{6.3}$$

这里 $\rho(t)=\frac{\|\nabla Q\|_2}{\|\nabla\psi(t)\|_2}$.

证 在定理 5.1 中, 有 $\|W\|_2\geqslant\|Q\|_2$. 由于在 L^2 中, $v_n\rightharpoonup W$, 则有

$$\|W\|_2\leqslant\liminf_{n\to\infty}\|v_n\|_2=\|\psi_0\|_2=\|Q\|_2,$$

即有

$$\lim_{n\to\infty}\|v_n\|_2=\|W\|_2=\|Q\|_2,$$

则

$$v_n(x+x_n)\to W(x) \text{ 强收敛于 } L^2, \quad n\to\infty.$$

因为 $\|\nabla v_n(x+x_n)\|_2$ 有界, 可得

$$v_n(x+x_n)\to W \text{ 强收敛于 } L^{q+1}, \quad n\to\infty.$$

第 2 步, 证明 $v_n(x+x_n)\to W$ 强收敛于 H^1. 首先, 需要如下估计:

$$\begin{aligned}0&=\lim_{n\to\infty}A(v_n)\\&=\frac{1}{2}\int|\nabla Q|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{q+1}\lim_{n\to\infty}\int|v_n(x)|^{q+1}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int|\nabla Q|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{q+1}\int|W(x)|^{q+1}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因此, 由 (2.8) 可以推断出

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int|\nabla Q|^2\mathrm{d}x=\frac{1}{q+1}\int|W(x)|^{q+1}\mathrm{d}x&\leqslant\frac{1}{2}\frac{\|W\|_2^{q-1}}{\|Q\|_2^{q-1}}\|\nabla W\|_2^2\\&=\frac{1}{2}\|\nabla W\|_2^2.\end{aligned}$$

另一方面, 由 (5.2) 可以得到

$$\|\nabla W\|_2\leqslant\liminf_{n\to\infty}\|\nabla v_n(x+x_n)\|_2=\|\nabla Q\|_2.$$

则有 $\|W\|_{H^1}=\|Q\|_{H^1}$ 和

$$v_n(x+x_n)\to W \text{ 强收敛于 } H^1, \quad n\to\infty.$$

进一步地, 有

$$A(W)=\frac{1}{2}\int|\nabla W(x)|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{q+1}\int|W(x)|^{q+1}\mathrm{d}x=0.$$

现在已有如下结果:

$$\|W\|_2=\|Q\|_2,\quad \|\nabla W\|_2=\|\nabla Q\|_2,\quad A(W)=0.$$

根据基态解的变分特征, 即得

$$W(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}Q(x+x_0),\quad 存在\ \theta\in[0,2\pi),\quad x_0\in\mathbb{R}^N$$

和

$$\rho_n^{\frac{N}{2}}\psi(t_n,\rho_n(x+x_0))\to\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}Q(x+x_0)\ \ 强收敛于\ H^1,\quad n\to\infty.$$

由于 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的任意性可知, 存在两个函数 $x(t)\in\mathbb{R}^N$ 和 $\theta(t)\in[0,2\pi)$, 使得

$$\rho^{\frac{N}{2}}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)}\psi(t,\rho(t)(x+x(t)))\to Q\ \ 强收敛于\ H^1,\quad t\to T.$$

§7 爆破速率下界

在本节中, 利用文 [17] 的方法给出柯西问题 (1.1) 的爆破解在临界质量时的爆破速率下界.

定理 7.1 假设 $\psi_0\in\Sigma$, $1<p<q=1+\frac{4}{N}$. 若柯西问题 (1.1) 的解在有限时间 $T>0$ 爆破, 并且有

$$\|\psi_0\|_2=\|Q\|_2,$$

则存在一个常数 $D>0$, 使得

$$\|\nabla\psi(t)\|_2\geqslant\frac{D}{T-t},\quad \forall t\in[0,T).\tag{7.1}$$

证 令 $g\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ 为一个非负径向函数, 满足当 $|x|<1$ 时, 有

$$g(x):=g(|x|)=|x|^2,$$

且对任意的 $x\in\mathbb{R}^N$, 有

$$|\nabla g(x)|^2\leqslant Cg(x).$$

$\forall h>0$, 定义

$$g_h(x):=h^2g\Big(\frac{x}{h}\Big),\quad G_h(t):=\int g_h(x-y_0)|\psi(t,x)|^2\mathrm{d}x,$$

这里 y_0 在定理 5.2 已给出定义.

利用 (5.9), $\forall t\in[0,T)$, 可得

$$\begin{aligned}\Big|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_h(t)\Big|&=4\Big|\Im\int\overline{\psi}\nabla\psi\cdot(x-y_0)\mathrm{d}x\Big|\\&=2\Big|\Im\int\overline{\psi}\nabla\psi\cdot\nabla g_h(x-y_0)\mathrm{d}x\Big|\\&\leqslant\Big(8E_0\int|\psi(t,x)|^2|\nabla g_h(x-y_0)|^2\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant C\sqrt{G_h(t)}.\end{aligned}$$

两边关于 t 积分, 得到 $\forall t\in[0,T)$,

$$|\sqrt{G_h(t)}-\sqrt{G_h(t_n)}|\leqslant C|t-t_n|.\tag{7.2}$$

根据 (5.7), 有

$$G_h(t_n) \to \|Q\|_2^2 g_h(0) = 0, \quad t_n \to T.$$

因此, 在 (7.2) 中, 令 $t_n \to T$, 有

$$G_h(t) \leqslant C(T-t)^2.$$

此外, 对于一个固定的 $t \in [0,T)$, 当 $h \to \infty$ 时, 观察到

$$\int |x-y_0|^2 |\psi(t,x)|^2 \mathrm{d}x \leqslant C(T-t)^2.$$

再结合如下不等式 [43]

$$\Big(\int |\psi(t,x)|^2 \mathrm{d}x\Big)^2 \leqslant \Big(\int |x-y_0|^2 |\psi(t,x)|^2 \mathrm{d}x\Big)\Big(\int |\nabla\psi(t,x)|^2 \mathrm{d}x\Big),$$

可得爆破速率下界

$$\|\nabla\psi(t)\|_2 \geqslant \frac{D}{T-t}, \quad \forall t \in [0,T).$$

参　考　文　献

[1] Messiah A. Quantum mechanics [M]. Amsterdam: North-Holland, 1961.

[2] Series G. Spectrum of atomic hydrogen [M]. Oxford: Oxford University Press, 1957.

[3] Astrakharchik G E, Malomed B A. Quantum versus mean-field collapse in a many-body system [J]. *Phys Rev A*, 2015, 92(4):043632.

[4] Camblong H E, Epele L N, Fanchiotti H, et al. Quantum anomaly in molecular physics [J]. *Phys Rev Lett*, 2001, 87(22):220302.

[5] Case K M. Singular potentials [J]. *Phy Rev*, 1950, 80(2):797–806.

[6] Kalf H, Schmincke U W, Walter J, et al. On the spectral theory of Schrödinger and Dirac operators with strongly singular potentials [M]//Everitt W N (ed). Spectral Theory and Differential Equations, Berlin: Springer, 1975:182–226.

[7] Sakaguchi H, Malomed B A. Suppression of quantum-mechanical collapse by repulsive interactions in a quantum gas [J]. *Phys Rev A*, 2011, 83(1):013607.

[8] Sakaguchi H, Malomed B A. Suppression of the quantum collapse in binary bosonic gases [J]. *Phys Rev A*, 2013, 88(4):043638.

[9] Golenia S, Mandich M. Limiting absorption principle for discrete Schrödinger operators with a Wigner-von Neumann potential and a slowly decaying potential [J]. *Ann Henri Poincaré*, 2021, 22(1):83–120.

[10] Cazenave T. Semilinear Schrödinger equations [M]. New York: American Mathematical Society, 2003.

[11] Li X F, Zhao J Y. Orbital stability of standing waves for Schrödinger type equations with slowly decaying linear potential [J]. *Comput Math Appl*, 2020, 79(2):303–316.

[12] Matsui N. Minimal mass blow-up solutions for double power nonlinear Schrödinger equations with an inverse power potential [J]. *Nonlinear Anal*, 2021, 213:112497.

[13] 秦绪芬. 带 Hardy 位势的非线性薛定谔方程驻波解的强不稳定性 [J]. *理论数学*, 2023, 13(7):2057–2068.

[14] 曹磊金. 带 Hardy 位势的非线性薛定谔方程驻波解的轨道稳定性 [D]. 兰州: 西北师范大学, 2023.

[15] Cheng X, Miao C X, Zhao L F. Global well-posedness and scattering for nonlinear Schrödinger equations with combined nonlinearities in the radial case [J]. *J Differ Equ*, 2016, 261(6):2881–2934.

[16] Duyckaerts T, Roudenko S. Going beyond the threshold: Scattering and blow-up in the focusing NLS equation [J]. *Comm Math Phys*, 2017, 334(3):1573–1615.

[17] Feng B H. On the blow-up solutions for the nonlinear Schrödinger equation with combined power-type nonlinearities [J]. *J Evol Equ*, 2018, 18(1):203–220.

[18] Guo B L, Huang D W. Existence and stability of standing waves for nonlinear fractional Schrödinger equations [J]. *J Math Phys*, 2012, 53(8):083702.

[19] Holmer J, Platte R, Roudenko S. Blow-up criteria for the $3D$ cubic nonlinear Schrödinger equation [J]. *Nonlinearity*, 2010, 23(4):977–1030.

[20] Kenig C E, Merle F. Global well-posedness, scattering, and blow-up for the energy-critical focusing nonlinear Schrödinger equation in the radial case [J]. *Invent Math*, 2006, 166(4):645–675.

[21] Tian S, Yang Y, Zhou R, et al. Energy thresholds of blowup for the Hartree equation with a focusing subcritical perturbation [J]. *Stud Appl Math*, 2021, 146(3):658–676.

[22] Tian S, Zhu S H. Dynamics of the nonlinear Hartree equation with a focusing and defocusing perturbation [J]. *Nonlinear Anal*, 2022, 222(4):112980.

[23] Zhang J. Sharp conditions of global existence for the nonlinear Schrödinger equations and Klein-Gordon equations [J]. *Nonlinear Anal*, 2002, 48(2):191–207.

[24] Zhang J, Zhu S H. Sharp energy criteria and singularity of blow-up solutions for the Davey-Stewartson system [J]. *Commun Math Sci*, 2019, 17(3):653–667.

[25] Zhang J, Zhu S H. Sharp blow-up criteria for the Davey-Stewartson system in R^3 [J]. *Dyn Partial Differ Equ*, 2011, 8(3):239–260.

[26] Hmidi T, Keraani S. Blowup theory for the critical nonlinear Schrödinger equations revisited [J]. *Int Math Res Not*, 2005, 46:2815–2828.

[27] Matsui N. Minimal mass blow-up solutions for nonlinear Schrödinger equations with a potential [J]. *Tôhoku Math J*, 2023, 75(2):215–232.

[28] Pan J J, Zhang J. Mass concentration for nonlinear Schrödinger equation with partial confinement [J]. *J Math Anal Appl*, 2020, 481(2):123484.

[29] Pan J J, Zhang J. Blow-up solutions with minimal mass for nonlinear Schrödinger equation with variable potential [J]. *Adv Nonlinear Anal*, 2022, 11(1):58–71.

[30] Pan J J, Zhang J. On the minimal mass blow-up solutions for the nonlinear Schrödinger equation with Hardy potential [J]. *Nonlinear Anal*, 2020, 197:111829.

[31] Masaru H, Masahiro I. Equivalence of conditions on initial data below the ground state to NLS with a repulsive inverse power potential [J]. *J Math Phys*, 2022, 63(3):16 pp.

[32] Dinh V D. On nonlinear Schrödinger equations with attractive inverse-power potential [J]. *Topol Methods Nonlinear Anal*, 2021, 57(2):489–523.

[33] Meng Y L. Existence of stable standing waves for the nonlinear Schrödinger equation with attactive inverse-power potentials [J]. *AIMS Math*, 2022, 7(4):5957–5970.

[34] Tao T, Visan M, Zhang X. The nonlinear Schrödinger equation with combined power-type nonlinearities [J]. *Comm Partial Differ Equ*, 2007, 32(8):1281–1343.

[35] Soave N. Normalized ground states for the NLS equation with combined nonlinearities [J]. *J Differ Equ*, 2020, 269(9):6941–6987.

[36] Coz S L, Martel Y, Raphaël P. Minimal mass blow up solutions for a double power nonlinear Schrödinger equation [J]. *Rev Mat Iberoam*, 2016, 32(3):795–833.

[37] Shu J, Zhang J. Instability of standing waves for a class of nonlinear Schrödinger equations [J]. *J Math Anal Appl*, 2007, 327(2):878–890.

[38] Miao C X, Xu G X, Zhao L F. The dynamics of the $3D$ radial NLS with the combined terms [J]. *Comm Math Phys*, 2013, 318(3):767–808.

[39] Miao C X, Xu G X, Zhao L F. The dynamics of the NLS with the combined terms in five and higher dimensions [C]//Some topics in harmonic analysis and applications, Advanced Lectures in Mathematics, Beijing: Higher Education Press, USA: International Press, 2015, 34, 265–298.

[40] Xu G X, Yang J W. Long time dynamics of the $3D$ radial NLS with the combined terms [J]. *Acta Math Sin, English Series*, 2016, 32(5):521–540.

[41] Cheng X, Miao, C X, Zhao L F. Global well-posedness and scattering for nonlinear Schrödinger equations with combined nonlinearities in the radial case [J]. *J Differ Equ*, 2016, 261(6):2881–2934.

[42] Glassey R T. On the blowing up of solution to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations [J]. *J Math Phys*, 1977, 18:1794–1797.

[43] Weinstein M I. Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates [J]. *Comm Math Phys*, 1983, 87(4):567–576.

[44] Zhang J. Stability of attractive Bose-Einstein condensates [J]. *J Stat Phys*, 2000, 101(3/4):731–746.

[45] Zhang J Y. Extensions of Hardy inequality [J]. *J Inequal Appl*, 2006, 2006(1):69379.

Dynamics of the Double Power Nonlinear Schrödinger Equation with Slowly Decaying Potential

QIN Si[1] WANG Chenglin[2] ZHANG Jian[1]

[1]School of Mathematical Sciences, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China. E-mail: somting20010203@163.com; zhangjian@uestc.edu.cn

[2]School of Science, Xihua University, Chengdu 610039, China.
E-mail: wangchenglinedu@163.com

Abstract This paper considers the double power nonlinear Schrödinger equation with slowly decaying potential possessing multiple physical backgrounds. The invariant manifolds and sharp thresholds are constructed by analyzing the variational characteristics of the corresponding nonlinear elliptic equation, mass conservation and energy conservation and the different range of power exponents. Furthermore, the authors investigate the dynamical properties of blow-up solutions in the critical mass, including mass concentration, limiting profile and rate of blow-up solutions based on relevant compactness lemmas.

Keywords The nonlinear Schrödinger equation, Invariant manifolds, Blow-up solutions, Mass concentration, Limiting profile

2020 MR Subject Classification 35Q55

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 46 No. 4, 2025
by ALLERTON PRESS, INC., USA