

关于平面浸入星形曲线的一类演化问题*

田 亚¹ 方建波²

摘要 受 [Gao L Y, Wang Z Q. Evolving an immersed star-shaped curve to another one with same winding number [J]. *J Differential Equations*, 2025, 424:421–437] 工作的启发, 对于平面浸入星形曲线, 引入了一种能量 $E(t) = \int_{mS^1} \frac{1}{r \ln(r+1)} d\theta$, 并通过构造一类含有非局部项的抛物型曲线流, 得到了在这个流下, 演化曲线能保持星形性及上述能量守恒; 同时, 当时间 t 趋于无穷时, 演化曲线会光滑收敛到与它具有相同缠绕数的星形曲线. 这一结果回答了 Yau 在 2007 年提出的一个问题.

关键词 局部星形曲线, Yau 问题, 径向函数, 抛物方程

MR (2020) 主题分类 53C20, 53C44

中图法分类 O1865.11

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2026)01-0033-12

1 引 言

2007 年, 丘成桐先生提出能否用抛物型曲率流将一条曲线演化成另一条曲线. 后来, Lin 和 Tsai [1] 引入了一种新的曲率流, 证明长度相同的凸曲线, 其全局流可实现曲线之间的转化问题. 最近, Gao 和 Zhang [2] 推广了 Gage [3] 的保面积流, 解决了凸曲线情形下该问题, 之后 Gao 又继续研究并解决了局部凸曲线情形 (见 [4]) 的问题, 关于该问题的最新进展见 McCoy 等人的论文 (见 [5]).

在过去几十年, 曲线演化理论广受关注, 有曲线收缩流 (见 [6–10])、扩张流 (见 [11–12])、保面积流 (见 [3, 13–14])、保长度流、Chou 和 Zhu 提出各向异性流 (见 [15–16]) 以及 Agnenti 等人提出的曲线流在几何不等式 (见 [17]) 中的应用等等. 近年来, 星形曲线曲率流同样受到了广泛的关注. Tsai [18] 和 Yagisita [19] 研究其扩张问题; Mantegazza [20] 指出在曲线缩短流下, 星形曲线在接触某点前仍保持其星形性; Gao 和 Pan [21] 证明 Gage 的保面积流能全局演化中心对称的星形曲线, 且随时间趋于无穷, 演化曲线收敛于圆, 关于星形超曲面曲率流研究结果可参考相关论文 (见 [22–25]).

本文受 Gao 和 Wang [26] 将一条浸入的星形曲线演化成另一条具有相同缠绕数的星形曲线保持演化曲线弹性能量不变的工作启发, 对于平面上关于原点 O 的光滑浸入星形曲线 X , 我们定义一类如下形式的能量

$$E(t) = \int_{mS^1} \frac{1}{r \ln(r+1)} d\theta, \quad (1.1)$$

本文 2025 年 12 月 13 日收到, 2026 年 3 月 4 日收到修改稿.

¹ 贵州财经大学数学与统计学院, 贵阳 550025. E-mail: 2164611571@qq.com

² 通信作者. 贵州财经大学数学与统计学院, 贵阳 550025. E-mail: fjbwcj@126.com

* 本文受国家自然科学基金 (No. 12561011) 和贵州省科技厅项目: 黔科合基础 (No. MS(2026)071) 的资助.

在保持这个能量不变的前提之下, 我们构造了一类含有非局部项的抛物型曲线流, 运用这个流也能实现将平面上一条浸入的星形曲线演化为另一条具有相同缠绕数的星形曲线.

设 $X_0, \tilde{X} : mS^1 \rightarrow E^2$ 是平面中关于原点 O 的两条光滑、闭的星形曲线. $X_0(\theta)$ 按如下方程进行演化:

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t}(\theta, t) = \alpha(\theta, t)T(\theta, t) + \beta(\theta, t)N(\theta, t), & (\theta, t) \in mS^1 \times (0, \omega), \\ X(\theta, 0) = X_0(\theta), & \theta \in mS^1, \end{cases} \quad (1.2)$$

其中 θ 是极角, T 和 N 的系数由下式给出

$$\beta = -\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(r - \tilde{r}) - (r - \tilde{r}) + f(t)\right) \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 + (r_\theta)^2}}, \quad \alpha = -\frac{\beta}{r} \frac{\partial r}{\partial \theta}. \quad (1.3)$$

而非局部项 $f(t)$ 定义为

$$f(t) = -\frac{\int \frac{\ln(r+1) + \frac{r}{r+1}}{(r \ln(r+1))^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(r - \tilde{r}) - (r - \tilde{r})\right) d\theta}{\int \frac{\ln(r+1) + \frac{r}{r+1}}{(r \ln(r+1))^2} d\theta}, \quad (1.4)$$

这里 $r(\theta, t)$ 和 $\tilde{r}(\theta)$ 分别是演化曲线 $X(\cdot, t)$ 和目标曲线 $\tilde{X}(\cdot)$ 的径向函数. 根据文 [27] 中的公式, 可得

$$k_t = \beta_{ss} + k^2 F, \quad \partial_t(ds) = -\beta k ds.$$

注意到缠绕数 $m = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma k ds$, 则有

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= \frac{1}{2\pi} \int_\gamma k_t ds + \frac{1}{2\pi} \int_\gamma k \partial_t(ds) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_\gamma (\beta_{ss} + k^2 \beta) ds - \frac{1}{2\pi} \int_\gamma k^2 \beta ds = 0. \end{aligned}$$

这表明在流 (1.2) 下演化曲线的缠绕数保持不变. 流 (1.2) 的另一个特征是, 它能够使我们定义的能量 E 保持为常数. 本文的主要结果如下.

定理 1.1 设 X_0 和 $\tilde{X}$ 是两条关于原点 O 光滑、闭且星形的曲线. 假设 X_0 与参考曲线 $\tilde{X}$ 具有相同的缠绕数, 以及由 (1.1) 定义的同能量 E . 以 X_0 为初始条件的流 (1.2), 在演化过程中会保持演化曲线的星形性, 且流整体存在; 当时间 $t \rightarrow +\infty$ 时, $X(\cdot, t)$ 在 C^∞ 度量意义下收敛到目标曲线 $\tilde{X}$.

注 1.1 在流的作用下, 演化曲线的星形性得以保持, 因此径向角 θ 可以作为演化曲线的参数.

本文的结构安排如下: 在第 2 节中, 我们推导了一些几何量的演化方程, 并证明了流 (1.2) 的短时存在性与整体存在性; 在第 3 节中, 我们证明了该流的收敛性.

2 存在性

在本节中, 首先将流 (1.2) 简化为关于径向函数的单个抛物方程, 并得到短时存在性. 然后再将流全部延拓, 即证明了演化曲线在时间区间 $[0, +\infty)$ 上是光滑的.

2.1 短时存在性

假设存在一条关于原点 O 的星形曲线族, 其在流 (1.2) 下演化, 此时我们可以将演化曲线表示为

$$X(\theta, t) = r(\theta, t)P(\theta), \quad (\theta, t) \in mS^1 \times [0, \omega). \quad (2.1)$$

由于 $X_\theta = r_\theta P + rQ$, 可以计算得到

$$g = \left| \frac{\partial X}{\partial \theta} \right| = \sqrt{r^2 + (r_\theta)^2}, \quad T = \frac{r_\theta}{g}P + \frac{r}{g}Q, \quad N = -\frac{r}{g}P + \frac{r_\theta}{g}Q, \quad (2.2)$$

其中下标表示偏导数.

引理 2.1 在流 (1.2) 下, 极角 θ 与径向函数 r 的演化方程如下:

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \alpha \frac{\partial r}{\partial s} - \beta \frac{r}{g}, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\alpha}{g} + \frac{\beta r_\theta}{r g}. \quad (2.4)$$

证 将 (2.1) 两边关于时间 t 求导, 则有

$$\frac{\partial X}{\partial t}(\theta, t) = \frac{\partial r}{\partial t}(\theta, t)P + r(\theta, t)\frac{\partial \theta}{\partial t}Q. \quad (2.5)$$

将 (2.2) 代入流 (1.2) 中, 则有

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial t} &= \alpha T + \beta N \\ &= \alpha \left(\frac{r_\theta}{g}P + \frac{r}{g}Q \right) + \beta \left(-\frac{r}{g}P + \frac{r_\theta}{g}Q \right) \\ &= \left(\alpha \frac{r_\theta}{g} - \beta \frac{r}{g} \right)P + \left(\alpha \frac{r}{g} + \beta \frac{r_\theta}{g} \right)Q. \end{aligned} \quad (2.6)$$

现比较 (2.5) 和 (2.6) 中的系数, 即可得到演化方程 (2.3) 和 (2.4). 因此, α 的选择意味着在流 (1.2) 下极角 θ 与时间的选取无关, 即

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0. \quad (2.7)$$

现在我们可以计算在区域 $mS^1 \times [0, \omega)$ 上 r 的演化方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial t} &= \alpha \frac{\partial r}{\partial s} - \frac{r\beta}{g} \\ &= -\frac{\beta}{r} \frac{\partial r}{\partial \theta} \frac{\partial r}{\partial \theta} - \frac{r\beta}{g} \\ &= -\frac{\beta}{rg} (r_\theta)^2 - \frac{r\beta}{g} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\beta}{rg}[(r_\theta)^2 + r^2] = -\frac{\beta g}{r} \\
&= \frac{\partial^2 r}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \tilde{r}}{\partial \theta^2} - r + \tilde{r} + f(t).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

由于径向函数 $r(\theta, t)$ 决定了演化曲线的形状, 流 (1.2) 可以简化为初始条件 $r(\theta, 0) = r_0(\theta)$ 在某一小段时间上的方程 (2.8).

引理 2.2 假设 X_0 是一条关于原点 O 的星形曲线, 那么流 (1.2) 等价于满足初始条件 $r(\theta, 0) = r_0(\theta)$ 的演化方程 (2.8) 在某个短时区间上成立.

证 设 $X(\cdot, t)$ 是演化曲线在流 (1.2) 下的一族光滑、闭的关于原点 O 的星形曲线. 由上述计算可知该曲线满足演化方程 (2.8).

另一方面, 设 $r(\theta, t)$ 是定义在 $S^1 \times [0, \omega]$ 上的光滑函数, 且满足带有初始条件 $r(\theta, 0) = r_0(\theta)$ 的演化方程 (2.8). 由连续性可知, 存在一个正数 $t_0 > 0$, 使得对所有 $(\theta, t) \in S^1 \times [0, t_0]$, 都有 $r(\theta, t) \geq 0$. 我们通过如下方式构造一族星形曲线

$$X(\theta, t) = r(\theta, t)P(\theta),$$

其中 $(\theta, t) \in S^1 \times [0, t_0]$, 曲线 $X(\theta, t)$ 的度量和弗雷内标架由 (2.2) 给出. 由于蔡氏标架 (见 [18]) 可表示为

$$P = \frac{r_\theta}{g}T - \frac{r}{g}N, \quad Q = \frac{r}{g}T + \frac{r_\theta}{g}N, \tag{2.9}$$

故曲线 $X(\cdot, t)$ 满足

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial r}{\partial t}P = \frac{\partial r}{\partial t} \left(\frac{r_\theta}{g}T - \frac{r}{g}N \right),$$

这是初始值为 $X_0(\cdot)$ 的流 (1.2) 的方程.

引理 2.3 流 (1.2) 在某个时间区间 $[0, \omega]$ 上存在唯一光滑解, 其中 $\omega > 0$ 是一个有限数.

证 方程 (2.8) 是一个半线性方程, 且包含一个涉及 r 的非线性的非局部项 $f(t)$. 接下来我们证明该方程在某小区间上存在唯一光滑解, 再由引理 2.2 可知, 此流存在短时光滑解. 对 (2.8) 求导, 可得

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} (r - \tilde{r}) - \frac{\partial}{\partial \theta} (r - \tilde{r}), \quad (\theta, t) \in mS^1 \times [0, \omega]. \tag{2.10}$$

记 $h(\theta, t) = \frac{\partial r}{\partial \theta} - \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \theta}$, 方程 (2.10) 可以重写为

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} - h, \tag{2.11}$$

其初始值为 $h(\theta, 0) = \frac{\partial r}{\partial \theta}(\theta, 0) - \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \theta}(\theta)$, 这是一个线性抛物方程, 它在区域 $S^1 \times [0, +\infty)$ 上有唯一光滑解 $h(\theta, t)$. 根据 h 的定义, 可得

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(r(\theta, t) - \int_0^\theta h(\tilde{\theta}, t) d\tilde{\theta} - \tilde{r}(\theta) \right) = 0.$$

因此, 对每一个 t , 存在唯一的实数 $\lambda(t) \in \mathbb{R}$, 使得

$$r(\theta, t) = \int_0^\theta h(\tilde{\theta}, t) d\tilde{\theta} + \tilde{r}(\theta) + \lambda(t). \quad (2.12)$$

如果能找到 $\lambda(t)$ 的值, 我们就能解出方程 (2.8). 根据方程 (1.4) 与 (2.8) 可知, 能量 $E(t)$ 是一个常数. 由 (2.12) 可得

$$E(0) = \int_{mS^1} \frac{1}{\left(\int_0^\theta h(\tilde{\theta}, t) d\tilde{\theta} + \tilde{r}(\theta) + \lambda(t) \right) \cdot \ln \left(\int_0^\theta h(\tilde{\theta}, t) d\tilde{\theta} + \tilde{r}(\theta) + \lambda(t) + 1 \right)} d\theta,$$

$$E(0) = \int_{mS^1} \frac{d\theta}{r_0 \ln(r_0 + 1)},$$

所以

$$\begin{aligned} & \int_{mS^1} \frac{1}{\left(\int_0^\theta h(\tilde{\theta}, t) d\tilde{\theta} + \tilde{r}(\theta) + \lambda(t) \right) \cdot \ln \left(\int_0^\theta h(\tilde{\theta}, t) d\tilde{\theta} + \tilde{r}(\theta) + \lambda(t) + 1 \right)} d\theta \\ &= \int_{mS^1} \frac{d\theta}{r_0 \ln(r_0 + 1)}. \end{aligned}$$

在这种情况下, $\lambda(t)$ 可唯一被确定. 因此, 方程 (2.8) 有唯一解. 由于初始值 r_0 是光滑的, 并且高阶导数按照线性方程演化

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^k r}{\partial \theta^k} = \frac{\partial^{k+2} r}{\partial \theta^{k+2}} - \frac{\partial^{k+2} \tilde{r}}{\partial \theta^{k+2}} + \frac{\partial^k \tilde{r}}{\partial \theta^k} - \frac{\partial^k r}{\partial \theta^k}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.13)$$

则 $r(\theta, t)$ 的高阶正则性可通过线性抛物方程的经典理论得到. 由 r 的连续性可知, 函数 $r(\theta, t)$ 在某个时间区间 $[0, \omega)$ 内对所有 θ 都是正的. 因此, 它定义了一族星形曲线 $X(\theta, t) = r(\theta, t)P(\theta)$, 该曲线按照流 (1.2) 演化.

2.2 整体存在性

在本小节中, 我们将证明径向函数 $r(\theta, t)$ 在时间区间 $[0, +\infty)$ 上具有一致的上下界. 因此, 演化曲线 $X(\cdot, t)$ 在每个 $t \geq 0$ 时都是光滑的, 这意味着流 (1.2) 都是整体存在的.

引理 2.4 若流在 (1.2) 作用下, 曲线 $X(\theta, t)$ 的径向函数 $r(\theta, t)$ 满足方程 (2.8). 因此, 演化曲线的能量 E 满足

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt}(t) &= \frac{d}{dt} \int_{mS^1} \frac{1}{r \ln(r + 1)} d\theta \\ &= \int_{mS^1} \frac{-\left[r_t \ln(r + 1) + \frac{r_t r}{r + 1} \right]}{(r \ln(r + 1))^2} d\theta \\ &= - \int_{mS^1} \frac{r_t \left(\ln(r + 1) + \frac{r}{r + 1} \right)}{(r \ln(r + 1))^2} d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{mS^1} \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(r - \tilde{r}) - (r - \tilde{r}) + f(t) \right) \left(\ln(r+1) + \frac{r}{r+1} \right)}{(r \ln(r+1))^2} d\theta \\
&= - \int_{mS^1} \frac{\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(r - \tilde{r}) - (r - \tilde{r}) \right] \left(\ln(r+1) + \frac{r}{r+1} \right)}{(r \ln(r+1))^2} d\theta \\
&\quad - f(t) \int_{mS^1} \frac{\ln(r+1) + \frac{r}{r+1}}{(r \ln(r+1))^2} d\theta. \tag{2.14}
\end{aligned}$$

通过选择非局部项 $f(t)$, 有 $\frac{dE}{dt} = 0$. 对于定义在 $S^1 \times [0, \omega)$ 上的连续函数 $r = r(\theta, t)$, 记

$$r_{\max}(t) := \max\{r(\theta, t) \mid \theta \in S^1\}, \quad r_{\min}(t) := \min\{r(\theta, t) \mid \theta \in S^1\}.$$

推论 2.1 若流 (1.2) 在 $t \in [0, \omega)$ 时间段内保持演化曲线的星形性, 则在同一时间区间内, 有

$$r_{\min}(t) \leq e^{\sqrt{\frac{2m\pi}{E}}} - 1. \tag{2.15}$$

证 由于能量 E 在流 (1.2) 作用下保持不变, 因此

$$\begin{aligned}
E &= \int_{mS^1} \frac{1}{r \ln(r+1)} d\theta \\
&\leq \int_{mS^1} \frac{1}{\ln^2(r+1)} d\theta \\
&\leq \int_{mS^1} \frac{1}{\ln^2(r_{\min}(t)+1)} d\theta \\
&\leq 2m\pi \cdot \frac{1}{\ln^2(r_{\min}(t)+1)},
\end{aligned}$$

则有

$$r_{\min}(t) \leq e^{\sqrt{\frac{2m\pi}{E}}} - 1.$$

因此不等式 (2.15) 得证.

引理 2.5 设 X_0 是平面上关于原点 O 的星形曲线. 若流 (1.2) 保持 $X(\cdot, t)$ 的星形性, 则存在与时间无关的常数 H , 使得

$$r_{\max}(t) \leq r_{\min}(t) + H, \quad t \in [0, \omega). \tag{2.16}$$

证 令 $u(\theta, t) = r(\theta, t) - \tilde{r}(\theta)$. 由 r 的演化方程 (2.8), 可得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - u + f(t), \quad (\theta, t) \in mS^1 \times [0, \omega), \tag{2.17}$$

以及 $\left(\frac{\partial^i u}{\partial \theta^i}\right)^2$ 按照以下方式演化

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^i u}{\partial \theta^i} \right)^2 = 2 \frac{\partial^i u}{\partial \theta^i} \left(\frac{\partial^{i+1} u}{\partial \theta^{i+1}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial^i u}{\partial \theta^i} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial^{i+1} u}{\partial \theta^{i+1}} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial^i u}{\partial \theta^i} \right)^2 \\
&\leq \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial^i u}{\partial \theta^i} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial^i u}{\partial \theta^i} \right)^2.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

设 $w = \left(\frac{\partial^i u}{\partial \theta^i} \right)^2$ 和 $v = we^{2t}$, 则 $\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial w}{\partial \theta} e^{2t}$ 且 $\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} e^{2t}$. 因此由上述估计, 可得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial t} e^{2t} + 2we^{2t} \\
&\leq \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial^i u}{\partial \theta^i} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial^i u}{\partial \theta^i} \right)^2 \right] e^{2t} + 2 \left(\frac{\partial^i u}{\partial \theta^i} \right)^2 e^{2t} \\
&= \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial^i u}{\partial \theta^i} \right)^2 e^{2t} = \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}.
\end{aligned}$$

应用最大值原理, 可得 $v_{\max}(t) \leq v_{\max}(0) = w_{\max}(0)$, 所以

$$\left(\frac{\partial^i u}{\partial \theta^i} \right)^2 \leq C_i e^{-2t}, \quad i = 1, 2, \dots, \tag{2.19}$$

其中常数 C_i 依赖于初始曲线 X_0 , 定义为

$$C_i = \max \left\{ \left(\frac{\partial^i u}{\partial \theta^i}(\theta, 0) \right)^2 \mid \theta \in mS^1 \right\}.$$

由于 $r(\theta, t) = u(\theta, t) + \tilde{r}(\theta)$, 两边同时对 θ 作 i 阶偏导, 有

$$\frac{\partial^i r}{\partial \theta^i}(\theta, t) = \frac{\partial^i u}{\partial \theta^i}(\theta, t) + \frac{\partial^i \tilde{r}}{\partial \theta^i}(\theta).$$

对上述公式两边取绝对值, 由三角不等式, 可得

$$\left| \frac{\partial^i r}{\partial \theta^i}(\theta, t) \right| = \left| \frac{\partial^i u}{\partial \theta^i}(\theta, t) + \frac{\partial^i \tilde{r}}{\partial \theta^i}(\theta) \right| \leq \left| \frac{\partial^i u}{\partial \theta^i}(\theta, t) \right| + \left| \frac{\partial^i \tilde{r}}{\partial \theta^i}(\theta) \right|.$$

存在一个仅依赖于初始曲线 X_0 的常数, 记为 M_i , 使得

$$\left| \frac{\partial^i r}{\partial \theta^i} \right| \leq M_i, \quad i = 1, 2, \dots. \tag{2.20}$$

固定时间 t , 假设函数 $r(\theta, t)$ 在点 θ_1, θ_2 处分别取得关于 θ 的最小值与最大值. 计算可得

$$\begin{aligned}
r_{\max}(t) - r_{\min}(t) &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} dr = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\partial r}{\partial \theta} d\theta \\
&\leq \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left| \frac{\partial r}{\partial \theta} \right| d\theta \\
&\leq 2m\pi \cdot M_1.
\end{aligned}$$

因此

$$r_{\max}(t) \leq r_{\min}(t) + 2m\pi \cdot M_1.$$

取 $H = 2m\pi M_1$, 应用 (2.15), 即可得到估计式 (2.16).

引理 2.6 流 (1.2) 保持演化曲线的星形性.

证 通过演化曲线的连续性, 存在 $t_0 > 0$, 使得 $X(\cdot, t)$ 在时间区间 $[0, t_0]$ 上关于原点 O 是星形的. 在该时间区间上应用推论 2.1 与引理 2.5, 可得

$$r(\theta, t) \leq r_{\max}(t) \leq r_{\min}(t) + 2mM_1\pi \leq e^{\sqrt{\frac{2m\pi}{E}}} - 1 + 2mM_1\pi. \tag{2.21}$$

下面我们估计径向函数 $r(\theta, t)$ 具有一致正的下界. 运用反证法, 假设结论不成立, 即存在时间序列 $\{t_n\}$, 当 $t_n \rightarrow +\infty$ 时, $r_{\min}(t_n) \rightarrow 0$. 对于每一个 n , 取 $\theta_n \in mS^1$, 满足 $r(\theta_n, t_n) = r_{\min}(t_n)$. 由 $r(\theta, t)$ 对于 θ 的一致有界性, 我们考虑对于任意的区间 $\theta \in [\theta_n - \delta_n, \theta_n + \delta_n]$, 有

$$r(\theta, t_n) \leq r_{\min}(t_n) + 2M_1\delta_n = r_{\min}(t_n) + 2M_1 \cdot \frac{r_{\min}(t_n)}{2M_1} = 2r_{\min}(t_n),$$

其中取 $\delta_n = \frac{r_{\min}(t_n)}{2M_1}$. 则在该区间上, 区间长度 $L_n = 2\delta_n = \frac{r_{\min}(t_n)}{M_1}$, 计算能量在该区间上的贡献

$$\begin{aligned} \int_{\theta_n - \delta_n}^{\theta_n + \delta_n} \frac{1}{r \ln(r+1)} d\theta &\geq L_n \cdot \frac{1}{2r_{\min}(t_n) \ln(2r_{\min}(t_n) + 1)} \\ &= 2\delta_n \cdot \frac{1}{2r_{\min}(t_n) \ln(2r_{\min}(t_n) + 1)} \\ &= \frac{r_{\min}(t_n)}{M_1} \cdot \frac{1}{2r_{\min}(t_n) \ln(2r_{\min}(t_n) + 1)} \\ &= \frac{1}{2M_1} \cdot \frac{1}{\ln(2r_{\min}(t_n) + 1)}. \end{aligned}$$

故当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 有 $r_{\min}(t_n) \rightarrow 0$, 其中 $\frac{1}{\ln(2r_{\min}(t_n)+1)} \rightarrow \infty$, 从而在小区间上的能量贡献趋于无穷. 因此

$$E \geq \int_{\theta_n - \delta_n}^{\theta_n + \delta_n} \frac{1}{r \ln(r+1)} d\theta \rightarrow +\infty,$$

这与能量 E 为一个常数矛盾. 则假设不成立, 即存在一个常数 $a > 0$, 使得对于任意 $t \geq 0$ 时, 有

$$0 < a \leq r_{\min}(t) \leq e^{\sqrt{\frac{2m\pi}{E}}} - 1. \quad (2.22)$$

通过 (2.1)–(2.2) 和 (2.20), 支撑函数满足

$$\begin{aligned} p(\theta, t) &= -\langle X, N \rangle = -\left\langle rP, -\frac{r}{g}P + \frac{r_\theta}{g}Q \right\rangle = \frac{r^2}{g} \\ &\geq \frac{a^2}{\sqrt{M_1^2 + (e^{\sqrt{\frac{2m\pi}{E}}} - 1 + 2m\pi M_1)^2}} > 0, \end{aligned}$$

其中 $(\theta, t) \in mS^1 \times [0, t_0]$, 径向函数 $r(\cdot, t)$ 在该流下是光滑的, 并且它有一致正的上、下界 (2.21)–(2.22); 它的导数 $\frac{\partial r}{\partial \theta}$ 在 (2.20) 中也一致有界. 因此流存在, 演化曲线始终是星形的.

引理 2.7 流 (1.2) 在时间区间 $[0, +\infty)$ 上整体存在.

证 我们已经证明径向函数 $r(\theta, t)$ 在区域 $S^1 \times [0, +\infty)$ 上是一致有界且正的; 所有高阶导数 $\frac{\partial^i r}{\partial \theta^i}$ 都满足线性抛物方程, 因此它们在有限时间区间上也一致有界. 流 (1.2) 的速度 $\frac{\partial X}{\partial t}$ 对所有 $t > 0$ 都是光滑的, 对方程 (1.2) 积分, 有

$$X(\theta, t) = X_0(\theta) + \int_0^t \frac{\partial X}{\partial t}(\theta, \tilde{t}) d\tilde{t}.$$

这表明了对于每个 $t \in [0, +\infty)$, 演化曲线 $X(\cdot, t)$ 是光滑的, 则该流整体存在.

3 收敛性

在本节中, 我们将证明径向函数当 $t \rightarrow +\infty$ 时收敛, 这意味着演化曲线 $X(\cdot, t)$ 的收敛性.

引理 3.1 假设初始曲线 X_0 与目标曲线 $\tilde{X}$ 有相同的几何量 E . 在流 (1.1) 下, 演化曲线的径向函数 $r(\theta, t)$ 收敛. 即

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} r(\theta, t) = \tilde{r}(\theta). \quad (3.1)$$

证 通过 (2.20)–(2.22), r 和 $\frac{\partial r}{\partial \theta}$ 在时间区间 $[0, +\infty)$ 上都是一致有界的. 应用 Arzelà–Ascoli 定理, 存在一个收敛的子列 $r(\theta, t_i)$, 当 $t_i \rightarrow +\infty$ 时收敛. 设 $\lim_{t_i \rightarrow +\infty} r(\theta, t_i) = r_\infty(\theta)$, 由 (2.20) 知, $r(\theta, t)$ 是光滑的且它的所有导数都是一致有界的, 则 $r_\infty(\theta)$ 是光滑的; 同时存在子列 $\{t_j\} \subseteq \{t_i\}$, 使得

$$\lim_{t_j \rightarrow \infty} \frac{\partial r}{\partial \theta}(\theta, t_j) = \frac{dr_\infty}{d\theta}(\theta). \quad (3.2)$$

通过 (2.19), 可得

$$\left| \frac{\partial(r - \tilde{r})}{\partial \theta} \right| \leq C_1 e^{-t}.$$

令 $t \rightarrow +\infty$, 固定 $\theta \in mS^1$, 有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\partial r}{\partial \theta}(\theta, t) = \frac{d\tilde{r}}{d\theta}(\theta). \quad (3.3)$$

因此, 结合 (3.2)–(3.3), 有

$$\frac{d\tilde{r}}{d\theta}(\theta) = \lim_{t_j \rightarrow \infty} \frac{\partial r}{\partial \theta}(\theta, t_j) = \frac{dr_\infty}{d\theta}(\theta), \quad (3.4)$$

$$r_\infty(\theta) = \tilde{r}(\theta) + C_0, \quad \theta \in mS^1. \quad (3.5)$$

回顾流的能量保持不变 (1.1), 有

$$\begin{aligned} \int_{mS^1} \frac{1}{r_\infty(\theta) \ln(r_\infty(\theta) + 1)} d\theta &= \int_{mS^1} \frac{1}{r(\theta, t) \ln(r(\theta, t) + 1)} d\theta \\ &= \int_{mS^1} \frac{1}{r_0(\theta) \ln(r_0(\theta) + 1)} d\theta. \end{aligned} \quad (3.6)$$

由于初始曲线 X_0 和目标曲线 $\tilde{X}$ 具有相同的能量 E , 也就是

$$\int_{mS^1} \frac{1}{r_0(\theta) \ln(r_0(\theta) + 1)} d\theta = \int_{mS^1} \frac{1}{\tilde{r}(\theta) \ln(\tilde{r}(\theta) + 1)} d\theta, \quad (3.7)$$

因此

$$\int_{mS^1} \frac{1}{r_\infty(\theta) \ln(r_\infty(\theta) + 1)} d\theta = \int_{mS^1} \frac{1}{\tilde{r}(\theta) \ln(\tilde{r}(\theta) + 1)} d\theta. \quad (3.8)$$

将 (3.5) 代入 (3.8), 可得

$$\int_{mS^1} \frac{1}{(\tilde{r}(\theta) + C_0) \ln(\tilde{r}(\theta) + C_0 + 1)} d\theta = \int_{mS^1} \frac{1}{\tilde{r}(\theta) \ln(\tilde{r}(\theta) + 1)} d\theta.$$

比较等式两边, 可得 $C_0 = 0$. 因此, (3.5) 说明 $r(\theta, t)$ 的每个收敛子列都趋于同一极限 $\tilde{r}(\theta)$. 因此函数 $r(\cdot, t)$ 本身也收敛到极限 $\tilde{r}(\theta)$. 通过 (2.19), 有极限

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\partial^i r}{\partial \theta^i}(\theta, t) = \frac{d^i \tilde{r}}{d\theta^i}(\theta), \quad i = 1, 2, \dots.$$

总结, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $r(\cdot, t)$ 在 C^∞ 度量下收敛到 $\tilde{r}(\cdot)$.

定理 3.1 在前面定理 1.1 的假设条件下, 演化曲线在流 (1.2) 作用下收敛到目标曲线 $\tilde{X}(\theta)$.

证 通过引理 2.6 可知, 演化曲线始终保持星形, 因此 $X(\cdot, t)$ 可由径向函数 $r(\theta, t)$ 确定. 因此, 径向函数 $r(\theta, t)$ 的收敛性可推出演化曲线的收敛性, 如下所示

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} X(\theta, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} r(\theta, t)P(\theta) = \tilde{r}(\theta)P(\theta) = \tilde{X}(\theta).$$

最后, 结合引理 2.3, 引理 2.7 与定理 3.1 的结论, 可完成定理 1.1 的证明.

致谢 非常感谢评审专家提出的宝贵意见!

参 考 文 献

- [1] Lin Y C, Tsai D H. Evolving a convex closed curve to another one via a length-preserving linear flow [J]. *J Differential Equations*, 2009, 247(9):2620–2636.
- [2] Gao L Y, Zhang Y T. On Yau’s problem of evolving one curve to another: Convex case [J]. *J Differential Equations*, 2019, 266(1):179–201.
- [3] Gage M. On an area-preserving evolution equation for plane curves [J]. *Nonlinear Probl Geom*, 1986, 51:51–62.
- [4] Gao L Y. Whitney-Graustein homotopy of locally convex curves via a curvature flow [J]. *Math Res Lett*, 2023, 30(4):1045–1062.
- [5] McCoy J A, Schrader P, Wheeler G. Representation formulae for higher order curvature flows [J]. *J Differential Equations*, 2023, 344:1–43.
- [6] Gage M E. An isoperimetric inequality with applications to curve shortening [J]. *Duke Math J*, 1983, 50(4):1225–1229.
- [7] Gage M, Hamilton R S. The heat equation shrinking convex plane curves [J]. *J Differential Geom*, 1986, 23(1):69–96.
- [8] Gage M E. Curve shortening makes convex curves circular [J]. *Invent Math*, 1984, 76(2):357–364.
- [9] Grayson M A. The heat equation shrinks embedded plane curves to round points [J]. *J Differential Geom*, 1987, 26(2):285–314.
- [10] Grayson M A. Shortening embedded curves [J]. *Ann Math*, 1989, 129(1):71–111.

- [11] Chow B, Liou L P, Tsai D H. Expansion of embedded curves with turning angle greater than π [J]. *Invent Math*, 1996, 123(1):415–429.
- [12] Tsai D H. Asymptotic closeness to limiting shapes for expanding embedded plane curves [J]. *Invent Math*, 2005, 162(3):473–492.
- [13] Chao X L, Ling X R, Wang X L. On a planar area-preserving curvature flow [J]. *Proc Amer Math Soc*, 2013, 141(5):1783–1789.
- [14] Wang X L, Kong L H. Area-preserving evolution of nonsimple symmetric plane curves [J]. *J Evol Equ*, 2014, 14(2):387–401.
- [15] Chou K S, Zhu X P. Anisotropic flows for convex plane curves [J]. *Duke Math J*, 1999, 97(3):579–619.
- [16] Chou K S, Zhu X P. A convexity theorem for a class of anisotropic flows of plane curves [J]. *Indiana Univ Math J*, 1999, 48(1):139–154.
- [17] Angenent S B. Curve shortening and the topology of closed geodesics on surfaces [J]. *Ann Math*, 2005, 162(3):1187–1241.
- [18] Tsai D H. Geometric expansion of starshaped plane curves [J]. *Commun Anal Geom*, 1996, 4(3):459–480.
- [19] Yagisita H. Asymptotic behaviors of star-shaped curves expanding by $v = 1 - k$ [J]. *Differ Integral Equ*, 2005, 18(2):225–232.
- [20] Mantegazza C. Star-shapedness under mean curvature flow [R]. Unpublished Notes, 2010.
- [21] Gao L Y, Pan S L. Star-shaped centrosymmetric curves under Gage’s area-preserving flow [J]. *J Geom Anal*, 2023, 33(11):348.
- [22] Guan P F, Li J F. A mean curvature type flow in space forms [J]. *Int Math Res Notices*, 2015, 2015(13):4716–4740.
- [23] Kim I, Kwon D. Volume preserving mean curvature flow for star-shaped sets [J]. *Calc Var Partial Differential Equ*, 2020, 59(2):81.
- [24] Smoczyk K. Starshaped hypersurfaces and the mean curvature flow [J]. *Manuscr Math*, 1998, 95(2):225–236.
- [25] Urbas J I. On the expansion of starshaped hypersurfaces by symmetric functions of their principal curvatures [J]. *Math Z*, 1990, 205(1):355–372.
- [26] Gao L Y, Wang Z Q. Evolving an immersed star-shaped curve to another one with same winding number [J]. *J Differential Equations*, 2025, 424:421–437.
- [27] Chou K S, Zhu X P. The curve shortening problem [M]. Chapman and Hall/CRC, 2001.

A Class of Evolution Problems for Planar Immersed Star-Shaped Curves

TIAN Ya¹ FANG Jianbo²

¹School of Mathematics and Statistics, Guizhou University of Finance and Economics, Guiyang 550025, China. E-mail: 2164611571@qq.com

²Corresponding author. School of Mathematics and Statistics, Guizhou University of Finance and Economics, Guiyang 550025, China.
E-mail: fjbwcj@126.com

Abstract Inspired by the work of [Gao L Y, Wang Z Q. Evolving an immersed star-shaped curve to another one with same winding number [J]. *J Differential Equations*, 2025, 424:421–437], the authors introduce an energy functional $E(t) = \int_{mS^1} \frac{1}{r \ln(r+1)} d\theta$ for planar immersed star-shaped curves. By constructing a parabolic curve flow involving a nonlocal term, the authors show that under this flow the evolving curves preserve star-shapedness and the energy remains constant. Moreover, as time t tends to infinity, the evolving curve converges smoothly to a star-shaped curve with the same winding number as the initial curve. This result answers a question posed by Yau in 2007.

Keywords Locally star-shaped curves, Yau's problem, Radial function,
Parabolic equation

2020 MR Subject Classification 53C20, 53C44