

具部分分数阶耗散的二维不可压缩磁流体方程的稳定性*

杨巧琦¹ 朱永刚¹ 邓雪梅² 周艳平¹

提要 作者研究了具有垂直分数阶耗散 $\nu\Lambda_2^{2\alpha}u$ 和分数阶磁扩散 $\eta\Lambda^{2\beta}b$ 的二维不可压缩磁流体动力学方程解的稳定性. 对于该系统, 文 [Feng W, Wang W, Wu J. Stability for a system of the 2D incompressible MHD equations with fractional dissipation [J]. *J Math Fluid Mech*, 2024, 26(4):57] 建立了在 Sobolev 空间 $H^3(\mathbb{R}^2)$ 上的稳定性. 通过引入新的带有分数阶导数的各向异性不等式, 将其稳定性结果推广至更低的正则性空间 $H^2(\mathbb{R}^2)$.

关键词 MHD 方程, 分数阶耗散, 稳定性

MR (2020) 主题分类 76W05, 47G20, 76D03

中图法分类 O175.2

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2026)01-0045-14

1 引 言

磁流体动力学 (MHD) 方程作为描述导电流体 (如等离子体、液态金属和电解质等) 在电磁场中运动的核心数学模型, 其适定性与稳定性分析一直是偏微分方程领域的核心课题之一, 在天体物理 (如太阳耀斑演化)、实验室核聚变 (如托卡马克装置等离子体约束) 及空间物理 (如太阳风与地磁层相互作用) 中具有不可替代的应用价值 (见 [1–3]).

对于完全耗散的 MHD 方程, 早在 1972 年, Duvaut 和 Lions [4] 建立了全局 Leray-Hopf 弱解的存在性. 1983 年, Sermange 和 Temam [5] 又证明了局部强解的存在性与唯一性. 2008 年, Abidi 和 Paicu [6] 证明了在临界 Besov 空间存在全局适定性, 即当初始数据足够小时, 存在唯一全局强解.

分数阶耗散的 MHD 方程是对经典的 MHD 方程的推广, 引入分数阶耗散项可以更准确地描述一些复杂的物理现象. 近年来, 关于分数阶耗散的 MHD 方程的研究受到了广泛关注. Ren, Wang 和 Wu [7] 研究了多维 MHD 方程在分数阶耗散情况下的正则性问题. Dai, Ji 和 Wu [8] 研究了带有分数阶耗散 $(-\Delta)^\alpha u$ 和分数阶磁扩散 $(-\Delta)^\beta b$ 的 MHD 方程弱解的存在性和唯一性. 姬瑞红, 叶苏慧和龙欢 [9] 建立了具有速度阻尼 νu 和垂直分数阶磁扩散 $\eta\partial_2^{2\beta}b$ 的二维不可压缩 MHD 方程解的稳定性. 更多关于分数阶耗散的 MHD 方程的研究成果可以参考文 [10–14].

本文 2025 年 10 月 18 日收到, 2026 年 1 月 31 日收到修改稿.

¹三峡大学数理学院, 湖北 宜昌 443002. E-mail: 1625717148@qq.com; zygpf@163.com; zyp5208@ctgu.edu.cn

²通信作者. 三峡大学数理学院, 湖北 宜昌 443002. E-mail: dxmeisx@126.com

*本文受到国家自然科学基金项目 (No. 11871305, No. 11901346) 和湖北省自然科学基金项目 (No. 2025AFB530) 的资助.

特别地, Feng, Wang 和 Wu [10] 研究了如下具有垂直分数阶速度耗散和分数阶磁扩散的二维不可压缩 MHD 方程:

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla P + \nu \Lambda_2^{2\alpha} u = B \cdot \nabla B, & x \in \mathbb{R}^2, t > 0, \\ \partial_t B + u \cdot \nabla B + \eta \Lambda^{2\beta} B = B \cdot \nabla u, \\ \nabla \cdot u = \nabla \cdot B = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $u = u(x, t)$ 表示流体的速度场, $B = B(x, t)$ 表示磁场, $P = P(x, t)$ 表示压力. $0 < \alpha, \beta \leq 1$, $\nu, \eta > 0$ 都是正实数. 分数阶偏微分算子 $\Lambda_2^{2\alpha}, \Lambda^{2\beta}$ 由其傅里叶变换分别定义为

$$\widehat{\Lambda_2^{2\alpha} f}(\xi) = |\xi_2|^{2\alpha} \widehat{f}(\xi), \quad \widehat{\Lambda^{2\beta} f}(\xi) = |\xi|^{2\beta} \widehat{f}(\xi).$$

方程 (1.1) 具有稳态解

$$u^{(0)}(x) = (0, 0), \quad B^{(0)}(x) = e_1 = (1, 0).$$

在背景磁场附近施加扰动 $b = B - e_1$, 扰动后的方程可以写成如下形式:

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla P + \nu \Lambda_2^{2\alpha} u = b \cdot \nabla b + \partial_1 b, & x \in \mathbb{R}^2, t > 0, \\ \partial_t b + u \cdot \nabla b + \eta \Lambda^{2\beta} b = b \cdot \nabla u + \partial_1 u, \\ \nabla \cdot u = \nabla \cdot b = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad b(x, 0) = b_0(x). \end{cases} \quad (1.2)$$

文 [10] 证明了当 $(u_0, b_0) \in H^3(\mathbb{R}^2)$ 时, 方程 (1.2) 具有唯一的全局解, 从而得到了方程 (1.1) 在 $H^3(\mathbb{R}^2)$ 上解的稳定性. 本文将证明当 $(u_0, b_0) \in H^2(\mathbb{R}^2)$ 时, 方程 (1.2) 仍具有唯一的全局解, 即可以得到方程 (1.1) 在 $H^2(\mathbb{R}^2)$ 上解的稳定性.

下面给出本文的主要结果.

定理 1.1 令 $\nu, \eta > 0$, $0 < \alpha, \beta \leq 1$. 假设方程的初值 $(u_0, b_0) \in H^2(\mathbb{R}^2)$, 且 $\operatorname{div} u_0 = \operatorname{div} b_0 = 0$, 则存在常数 $\varepsilon = \varepsilon(\nu, \eta) > 0$, 使得如果

$$\|u_0\|_{H^2} + \|b_0\|_{H^2} \leq \varepsilon, \quad (1.3)$$

那么方程 (1.2) 存在唯一的全局解, 并且对于任意的 $t > 0$ 和某个常数 C , 满足

$$\|u(t)\|_{H^2}^2 + \|b(t)\|_{H^2}^2 + \int_0^t (\|\partial_1 u(\tau)\|_{H^1}^2 + \|\Lambda_2^\alpha u(\tau)\|_{H^2}^2 + \|\Lambda^\beta b(\tau)\|_{H^2}^2) d\tau \leq C\varepsilon^2. \quad (1.4)$$

注 1.1 定理 1.1 是对文 [10] 结果的推广, 将原来的正则性空间由 H^3 降低到 H^2 , 放宽了对初始条件的正则性要求.

注 1.2 这种推广依赖于新的分析工具的使用. 在文 [10] 中, 作者使用了经典的 Sobolev 不等式

$$\|f\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}},$$

这里的整数阶导数使系统的正则性最低控制在 H^3 . 而本文通过使用如下具有分数阶导数的 Sobolev 不等式:

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C (\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\Lambda^{\frac{1}{2}+\epsilon} f\|_{L^2(\mathbb{R})}),$$

使得可以在更低的正则性空间 H^2 中去处理分数阶耗散项.

定理 1.1 的证明的主要方法是能量估计和鞅带原理. 首先, 需要建立一个合适的能量泛函, 它由两部分组成:

$$E(t) := E_1(t) + E_2(t), \quad (1.5)$$

其中

$$E_1(t) := \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|(u, b)(\tau)\|_{H^2}^2 + 2 \int_0^t (\nu \|\Lambda_2^\alpha u(\tau)\|_{H^2}^2 + \eta \|\Lambda^\beta b(\tau)\|_{H^2}^2) d\tau, \quad (1.6)$$

$$E_2(t) := \int_0^t \|\partial_1 u(\tau)\|_{H^1}^2 d\tau. \quad (1.7)$$

本文将证明 $E(t)$ 满足一个合适的能量不等式

$$E(t) \leq E(0) + CE(t)^{\frac{3}{2}}. \quad (1.8)$$

由此, 在初始数据足够小的条件下推导出 $E(t)$ 的一致全局上界, 从而得到稳定性结果.

2 预备知识

本节首先介绍 $\mathbb{R}$ 上的一元函数的基本插值不等式, 这些插值不等式对 $\mathbb{R}^2$ 上的各向异性不等式的推导发挥着重要作用.

引理 2.1 (见 [15]) 对于任意函数 $f = f(x)$,

(1) 假设 $f(x) \in H^1(\mathbb{R})$, 那么

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \sqrt{2} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} \|f'\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}}. \quad (2.1)$$

(2) 假设 $f(x) \in H^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\mathbb{R})$, $\epsilon \in (0, +\infty)$, 那么

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C(\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\Lambda^{\frac{1}{2}+\epsilon} f\|_{L^2(\mathbb{R})}). \quad (2.2)$$

(3) 假设 $f(x) \in H^\alpha(\mathbb{R})$, $\alpha \in [0, 1]$, 那么

$$\|f\|_{L^{\frac{2}{1-\alpha}}(\mathbb{R})} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} \|\Lambda^\alpha f\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}}. \quad (2.3)$$

借助引理 2.1 中的基本插值不等式, 可以推导出以下的各向异性不等式, 这些各向异性不等式是证明定理 1.1 中解的稳定性的工具. 通过对 x_1 和 x_2 方向施加不同的导数, 突破了经典的各向同性不等式对各方向正则性的统一要求, 从而能适配垂直分数阶耗散 $\Lambda_2^{2\alpha} u$ (仅作用于 x_2 方向) 的部分耗散特性, 为降低正则性门槛提供了关键支撑.

引理 2.2 对于 $\mathbb{R}^2$ 上的任意函数 $f = f(x_1, x_2)$,

(1) 假设 $f \in H^\gamma(\mathbb{R}^2)$, $\gamma \in [0, 1]$, 那么

$$\|f\|_{L^{\frac{2}{1-\gamma}}_{x_2} L^2_{x_1}(\mathbb{R}^2)} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{2}} \|\Lambda_2^\gamma f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{2}}. \quad (2.4)$$

特别地, 当 $\gamma = 1$ 时,

$$\|f\|_{L^\infty_{x_2} L^2_{x_1}(\mathbb{R}^2)} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{2}} \|\partial_2 f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{2}}. \quad (2.5)$$

(2) 假设 $f \in H^2(\mathbb{R}^2)$, 那么

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{4}} \|\partial_1 f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{4}} \|\partial_2 f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{4}} \|\partial_1 \partial_2 f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{4}}. \quad (2.6)$$

如果 $f \in H^{1+2\epsilon}(\mathbb{R}^2)$, $\epsilon > 0$, 那么

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} &\leq C(\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|\Lambda_1^{\frac{1}{2}+\epsilon} f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &\quad + \|\Lambda_2^{\frac{1}{2}+\epsilon} f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|\Lambda_1^{\frac{1}{2}+\epsilon} \Lambda_2^{\frac{1}{2}+\epsilon} f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}). \end{aligned} \quad (2.7)$$

(3) 假设 $f \in H^{1+\epsilon}(\mathbb{R}^2)$, $\epsilon > 0$, 那么

$$\|f\|_{L_{x_2}^{\frac{2}{\eta}} L_{x_1}^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq C(\|\Lambda_2^{\frac{1-\eta}{2}} f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|\Lambda_2^{\frac{1-\eta}{2}} \Lambda_1^{\frac{1}{2}+\epsilon} f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}), \quad (2.8)$$

这里 $\eta \in (0, 1]$.

证 首先证明 (2.4). 由 (2.3), 可得

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_{x_2}^{\frac{2}{1-\gamma}} L_{x_1}^2(\mathbb{R}^2)} &\leq \| \|f\|_{L_{x_2}^{\frac{2}{1-\gamma}}(\mathbb{R})} \|_{L_{x_1}^2(\mathbb{R})} \\ &\leq C \| \|f\|_{L_{x_2}^2(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} \|\Lambda_2^\gamma f\|_{L_{x_2}^2(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} \|_{L_{x_1}^2(\mathbb{R})} \\ &\leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{2}} \|\Lambda_2^\gamma f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

为了证明 (2.6), 利用 Minkowski 不等式和 (2.1), 可得

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_{x_2}^\infty L_{x_1}^\infty(\mathbb{R}^2)} &= \| \|f\|_{L_{x_2}^\infty(\mathbb{R})} \|_{L_{x_1}^\infty(\mathbb{R})} \\ &\leq C \| \|f\|_{L_{x_2}^2(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} \|\partial_2 f\|_{L_{x_2}^2(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} \|_{L_{x_1}^\infty(\mathbb{R})} \\ &\leq C \| \|f\|_{L_{x_1}^\infty(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} \|\partial_2 f\|_{L_{x_1}^\infty(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} \|_{L_{x_2}^2(\mathbb{R})} \\ &\leq C \| \|f\|_{L_{x_1}^2(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} \|\partial_1 f\|_{L_{x_1}^2(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} \|_{L_{x_2}^2(\mathbb{R})} \| \|\partial_2 f\|_{L_{x_1}^2(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} \|\partial_1 \partial_2 f\|_{L_{x_1}^2(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} \|_{L_{x_2}^2(\mathbb{R})} \\ &\leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{4}} \|\partial_1 f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{4}} \|\partial_2 f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{4}} \|\partial_1 \partial_2 f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

同样地, 对于 (2.7), 利用 (2.2), 可得

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_{x_2}^\infty L_{x_1}^\infty(\mathbb{R}^2)} &= \| \|f\|_{L_{x_2}^\infty(\mathbb{R})} \|_{L_{x_1}^\infty(\mathbb{R})} \leq C \| \|f\|_{L_{x_2}^2(\mathbb{R})} + \|\Lambda_2^{\frac{1}{2}+\epsilon} f\|_{L_{x_2}^2(\mathbb{R})} \|_{L_{x_1}^\infty(\mathbb{R})} \\ &\leq C(\| \|f\|_{L_{x_1}^\infty(\mathbb{R})} \|_{L_{x_2}^2(\mathbb{R})} + \| \|\Lambda_2^{\frac{1}{2}+\epsilon} f\|_{L_{x_1}^\infty(\mathbb{R})} \|_{L_{x_2}^2(\mathbb{R})}) \\ &\leq C(\| \|f\|_{L_{x_1}^2(\mathbb{R})} + \|\Lambda_1^{\frac{1}{2}+\epsilon} f\|_{L_{x_1}^2(\mathbb{R})} \|_{L_{x_2}^2(\mathbb{R})} \\ &\quad + C \| \|\Lambda_2^{\frac{1}{2}+\epsilon} f\|_{L_{x_1}^2(\mathbb{R})} + \|\Lambda_1^{\frac{1}{2}+\epsilon} \Lambda_2^{\frac{1}{2}+\epsilon} f\|_{L_{x_1}^2(\mathbb{R})} \|_{L_{x_2}^2(\mathbb{R})}) \\ &\leq C(\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|\Lambda_1^{\frac{1}{2}+\epsilon} f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|\Lambda_2^{\frac{1}{2}+\epsilon} f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|\Lambda_1^{\frac{1}{2}+\epsilon} \Lambda_2^{\frac{1}{2}+\epsilon} f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}). \end{aligned}$$

对于 (2.8), 利用 Minkowski 不等式, (2.2) 和 Sobolev 嵌入 $\dot{W}^{\frac{1-\eta}{2}, 2}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^{\frac{2}{\eta}}(\mathbb{R})$, 对于 $\eta \in (0, 1]$, 有

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_{x_2}^{\frac{2}{\eta}} L_{x_1}^\infty(\mathbb{R}^2)} &= C \| \|f\|_{L_{x_1}^\infty(\mathbb{R})} \|_{L_{x_2}^{\frac{2}{\eta}}(\mathbb{R})} \\ &\leq C \| \|f\|_{L_{x_1}^2(\mathbb{R})} + \|\Lambda_1^{\frac{1}{2}+\epsilon} f\|_{L_{x_1}^2(\mathbb{R})} \|_{L_{x_2}^{\frac{2}{\eta}}(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C(\|f\|_{L^2_{x_2}(\mathbb{R})}^{\frac{2}{\eta}} \|f\|_{L^2_{x_1}(\mathbb{R})} + \|\Lambda_1^{\frac{1}{2}+\epsilon} f\|_{L^2_{x_2}(\mathbb{R})}^{\frac{2}{\eta}} \|f\|_{L^2_{x_1}(\mathbb{R})}) \\
&\leq C(\|\Lambda_2^{\frac{1-\eta}{2}} f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|\Lambda_2^{\frac{1-\eta}{2}} \Lambda_1^{\frac{1}{2}+\epsilon} f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}).
\end{aligned}$$

引理 2.2 得证.

3 定理 1.1 的证明

为了建立方程 (1.2) 解的全局存在性和稳定性, 首先要得到解的局部存在性. 为此, 可以通过标准的压缩映射原理和局部时间先验估计加以证明. 其中, 标准的压缩映射原理部分可以参考文 [16]. 由于 $\|(u, b)\|_{H^2}$ 和 $\|(u, b)\|_{L^2} + \|(u, b)\|_{\dot{H}^2}$ 的等价性, 只需要估计 (u, b) 的 L^2 和齐次 $\dot{H}^2$ 范数的界, 由 $\nabla \cdot u = \nabla \cdot b = 0$, 得到

$$\begin{aligned}
&\|u(t)\|_{L^2}^2 + \|b(t)\|_{L^2}^2 + 2\nu \int_0^t \|\Lambda_2^\alpha u(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau + 2\eta \int_0^t \|\Lambda^\beta b(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau \\
&= \|u_0\|_{L^2}^2 + \|b_0\|_{L^2}^2.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

为了估计 $\dot{H}^2$ -范数, 对方程 (1.2) 作用 ∂_i^2 ($i = 1, 2$), 再分别与 $(\partial_i^2 u, \partial_i^2 b)$ 作内积, 可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^2 (\|\partial_i^2 u(t)\|_{L^2}^2 + \|\partial_i^2 b(t)\|_{L^2}^2) + \nu \sum_{i=1}^2 \|\partial_i^2 \Lambda_2^\alpha u\|_{L^2}^2 + \eta \sum_{i=1}^2 \|\partial_i^2 \Lambda^\beta b\|_{L^2}^2 \\
&=: I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

其中

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{i=1}^2 \int (\partial_i^2 \partial_1 b \cdot \partial_i^2 u + \partial_i^2 \partial_1 u \cdot \partial_i^2 b) dx, \\
I_2 &= - \sum_{i=1}^2 \int \partial_i^2 (u \cdot \nabla u) \cdot \partial_i^2 u dx, \\
I_3 &= \sum_{i=1}^2 \int (\partial_i^2 (b \cdot \nabla b) - b \cdot \nabla \partial_i^2 b) \cdot \partial_i^2 u dx, \\
I_4 &= - \sum_{i=1}^2 \int \partial_i^2 (u \cdot \nabla b) \cdot \partial_i^2 b dx, \\
I_5 &= \sum_{i=1}^2 \int (\partial_i^2 (b \cdot \nabla u) - b \cdot \nabla \partial_i^2 u) \cdot \partial_i^2 b dx.
\end{aligned}$$

这里用到了

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^2 \int (-b \cdot \nabla \partial_i^2 b \cdot \partial_i^2 u - b \cdot \nabla \partial_i^2 u \cdot \partial_i^2 b) dx \\
&= \sum_{i=1}^2 \int (b \cdot \nabla \partial_i^2 u \cdot \partial_i^2 b - b \cdot \nabla \partial_i^2 u \cdot \partial_i^2 b) dx = 0.
\end{aligned}$$

通过分部积分, 可得

$$I_1 = 0. \quad (3.3)$$

为了估计 I_2 , 将其分成 4 个部分:

$$\begin{aligned} I_2 &= - \int \partial_1^2(u \cdot \nabla u) \cdot \partial_1^2 u dx - \int \partial_2^2(u \cdot \nabla u) \cdot \partial_2^2 u dx \\ &= - \int \partial_1^2 u \cdot \nabla u \cdot \partial_1^2 u dx - 2 \int \partial_1 u \cdot \nabla \partial_1 u \cdot \partial_1^2 u dx \\ &\quad - \int \partial_2^2 u \cdot \nabla u \cdot \partial_2^2 u dx - 2 \int \partial_2 u \cdot \nabla \partial_2 u \cdot \partial_2^2 u dx \\ &=: I_{21} + I_{22} + I_{23} + I_{24}. \end{aligned}$$

下面逐一估计右边各项. 首先, 通过 Hölder 不等式和 (2.7), 有

$$\begin{aligned} I_{21} &= - \int \partial_1^2 u \cdot \nabla u \cdot \partial_1^2 u dx \leq \|\partial_1^2 u\|_{L^2} \|\nabla u\|_{L^\infty} \|\partial_1^2 u\|_{L^2} \\ &\leq C \|\partial_1^2 u\|_{L^2}^2 (\|\nabla u\|_{L^2} + \|\Lambda_1^{\frac{1}{2}+\epsilon} \nabla u\|_{L^2} + \|\Lambda_2^{\frac{1}{2}+\epsilon} \nabla u\|_{L^2} + \|\Lambda_1^{\frac{1}{2}+\epsilon} \Lambda_2^{\frac{1}{2}+\epsilon} \nabla u\|_{L^2}) \\ &\leq C (\|\partial_1 u\|_{H^1}^2 \|u\|_{H^2} + \|\partial_1 u\|_{H^1} \|u\|_{H^2} \|\Lambda_2^\alpha u\|_{H^2}) \\ &\leq C \|u\|_{H^2} (\|\partial_1 u\|_{H^1}^2 + \|\Lambda_2^\alpha u\|_{H^2}^2), \end{aligned}$$

其中第 3 个不等式用到了

$$\|\nabla u\|_{L^2} + \|\Lambda_1^{\frac{1}{2}+\epsilon} \nabla u\|_{L^2} + \|\Lambda_2^{\frac{1}{2}+\epsilon} \nabla u\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^2}$$

及

$$\|\Lambda_1^{\frac{1}{2}+\epsilon} \Lambda_2^{\frac{1}{2}+\epsilon} \nabla u\|_{L^2} \leq \|\Lambda_2^\alpha u\|_{H^2}. \quad (3.4)$$

这里 (3.4) 成立是基于以下原因: 如果 $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$, 只要取 ϵ 足够小, 可得

$$\|\Lambda_1^{\frac{1}{2}+\epsilon} \Lambda_2^{\frac{1}{2}+\epsilon} \nabla u\|_{L^2} = \|\Lambda_1^{\frac{1}{2}+\epsilon} \Lambda_2^{\frac{1}{2}+\epsilon-\alpha} \Lambda_2^\alpha \nabla u\|_{L^2} \leq \|\Lambda_2^\alpha u\|_{H^2};$$

如果 $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$, 由于引理 2.2 对任意的 $\epsilon > 0$ 都成立, 所以可令 $\epsilon = \alpha - \frac{1}{2}$, 有

$$\|\Lambda_1^{\frac{1}{2}+\epsilon} \Lambda_2^{\frac{1}{2}+\epsilon} \nabla u\|_{L^2} = \|\Lambda_1^\alpha \Lambda_2^\alpha \nabla u\|_{L^2} \leq \|\Lambda_2^\alpha u\|_{H^2}.$$

因此, 对于任意 $\alpha \in (0, 1]$ 和恰当的 ϵ , 有 (3.4) 成立. 同样地, 对于 I_{22} , I_{23} 和 I_{24} , 有

$$\begin{aligned} I_{22} &= -2 \int \partial_1 u \cdot \nabla \partial_1 u \cdot \partial_1^2 u dx \leq C \|\partial_1 u\|_{L^\infty} \|\nabla \partial_1 u\|_{L^2} \|\partial_1^2 u\|_{L^2} \\ &\leq C \|\partial_1 u\|_{H^1}^2 (\|\partial_1 u\|_{L^2} + \|\Lambda_1^{\frac{1}{2}+\epsilon} \partial_1 u\|_{L^2} + \|\Lambda_2^{\frac{1}{2}+\epsilon} \partial_1 u\|_{L^2} + \|\Lambda_1^{\frac{1}{2}+\epsilon} \Lambda_2^{\frac{1}{2}+\epsilon} \partial_1 u\|_{L^2}) \\ &\leq C (\|\partial_1 u\|_{H^1}^2 \|u\|_{H^2} + \|\partial_1 u\|_{H^1} \|u\|_{H^2} \|\Lambda_2^\alpha u\|_{H^2}) \\ &\leq C \|u\|_{H^2} (\|\partial_1 u\|_{H^1}^2 + \|\Lambda_2^\alpha u\|_{H^2}^2), \\ I_{23} &= - \int \partial_2^2 u \cdot \nabla u \cdot \partial_2^2 u dx \leq \|\partial_2^2 u\|_{L^2}^2 \|\nabla u\|_{L^\infty} \\ &\leq C \|\partial_2^2 u\|_{L^2}^2 (\|\nabla u\|_{L^2} + \|\Lambda_1^{\frac{1}{2}+\epsilon} \nabla u\|_{L^2} + \|\Lambda_2^{\frac{1}{2}+\epsilon} \nabla u\|_{L^2} + \|\Lambda_1^{\frac{1}{2}+\epsilon} \Lambda_2^{\frac{1}{2}+\epsilon} \nabla u\|_{L^2}) \\ &\leq C \|u\|_{H^2} \|\Lambda_2^\alpha u\|_{H^2}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{24} &= -2 \int \partial_2 u \cdot \nabla \partial_2 u \cdot \partial_2^2 u dx \leq C \|\partial_2 u\|_{L^\infty} \|\nabla \partial_2 u\|_{L^2} \|\partial_2^2 u\|_{L^2} \\
&\leq C \|\partial_2 u\|_{H^1}^2 (\|\partial_2 u\|_{L^2} + \|\Lambda_1^{\frac{1}{2}+\epsilon} \partial_2 u\|_{L^2} + \|\Lambda_2^{\frac{1}{2}+\epsilon} \partial_2 u\|_{L^2} + \|\Lambda_1^{\frac{1}{2}+\epsilon} \Lambda_2^{\frac{1}{2}+\epsilon} \partial_2 u\|_{L^2}) \\
&\leq C \|u\|_{H^2} \|\Lambda_2^\alpha u\|_{H^2}^2.
\end{aligned}$$

因此, 可得

$$I_2 \leq C \|u\|_{H^2} (\|\partial_1 u\|_{H^1}^2 + \|\Lambda_2^\alpha u\|_{H^2}^2). \quad (3.5)$$

对于 I_3 , 首先将其分成两部分:

$$\begin{aligned}
I_3 &= 2 \sum_{i=1}^2 \int \partial_i b \cdot \nabla \partial_i b \cdot \partial_i^2 u dx + \sum_{i=1}^2 \int \partial_i^2 b \cdot \nabla b \cdot \partial_i^2 u dx \\
&=: I_{31} + I_{32}.
\end{aligned}$$

进一步将 I_{31} 写成下面两项的和:

$$\begin{aligned}
I_{31} &= 2 \int \partial_1 b \cdot \nabla \partial_1 b \cdot \partial_1^2 u dx + 2 \int \partial_2 b \cdot \nabla \partial_2 b \cdot \partial_2^2 u dx \\
&=: I_{311} + I_{312}.
\end{aligned}$$

接下来估计 I_{311} 及 I_{312} . 对于 I_{311} , 利用 Hölder 不等式, (2.4) 和 (2.8), 有

$$\begin{aligned}
I_{311} &= 2 \int \partial_1 b \cdot \nabla \partial_1 b \cdot \partial_1^2 u dx \\
&\leq C \|\partial_1 b\|_{L_{x_2}^{\frac{2}{\alpha}} L_{x_1}^\infty} \|\nabla \partial_1 b\|_{L_{x_2}^2 L_{x_1}^2} \|\partial_1^2 u\|_{L_{x_2}^{\frac{2}{1-\alpha}} L_{x_1}^2} \\
&\leq C (\|\Lambda_2^{\frac{1-\alpha}{2}} \partial_1 b\|_{L^2} + \|\Lambda_2^{\frac{1-\alpha}{2}} \Lambda_1^{\frac{1}{2}+\epsilon} \partial_1 b\|_{L^2}) \|\nabla \partial_1 b\|_{L^2} \|\partial_1^2 u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\Lambda_2^\alpha \partial_1^2 u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \|b\|_{H^2} \|\Lambda^\beta b\|_{H^2} \|\partial_1 u\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \|\Lambda_2^\alpha u\|_{H^2}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \|b\|_{H^2} (\|\partial_1 u\|_{H^1}^2 + \|\Lambda_2^\alpha u\|_{H^2}^2 + \|\Lambda^\beta b\|_{H^2}^2).
\end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned}
I_{312} &= 2 \int \partial_2 b \cdot \nabla \partial_2 b \cdot \partial_2^2 u dx \\
&\leq C \|\partial_2 b\|_{L_{x_2}^{\frac{2}{\alpha}} L_{x_1}^\infty} \|\nabla \partial_2 b\|_{L_{x_2}^2 L_{x_1}^2} \|\partial_2^2 u\|_{L_{x_2}^{\frac{2}{1-\alpha}} L_{x_1}^2} \\
&\leq C (\|\Lambda_2^{\frac{1-\alpha}{2}} \partial_2 b\|_{L^2} + \|\Lambda_2^{\frac{1-\alpha}{2}} \Lambda_1^{\frac{1}{2}+\epsilon} \partial_2 b\|_{L^2}) \|\nabla \partial_2 b\|_{L^2} \|\partial_2^2 u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\Lambda_2^\alpha \partial_2^2 u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \|b\|_{H^2} \|\Lambda^\beta b\|_{H^2} \|\Lambda_2^\alpha u\|_{H^2} \\
&\leq C \|b\|_{H^2} (\|\Lambda_2^\alpha u\|_{H^2}^2 + \|\Lambda^\beta b\|_{H^2}^2).
\end{aligned}$$

I_{32} 可以被分成

$$\begin{aligned}
I_{32} &= \int \partial_1^2 b \cdot \nabla b \cdot \partial_1^2 u dx + \int \partial_2^2 b \cdot \nabla b \cdot \partial_2^2 u dx \\
&=: I_{321} + I_{322}.
\end{aligned}$$

对于 I_{321} , 利用 Hölder 不等式, (2.4) 和 (2.8), 有

$$\begin{aligned}
 I_{321} &= \int \partial_1^2 b \cdot \nabla b \cdot \partial_1^2 u dx \\
 &\leq \|\partial_1^2 b\|_{L_{x_2}^2 L_{x_1}^2} \|\nabla b\|_{L_{x_2}^{\frac{2}{\alpha}} L_{x_1}^\infty} \|\partial_1^2 u\|_{L_{x_2}^{\frac{2}{1-\alpha}} L_{x_1}^2} \\
 &\leq C \|\partial_1^2 b\|_{L^2} (\|\Lambda_2^{\frac{1-\alpha}{2}} \nabla b\|_{L^2} + \|\Lambda_2^{\frac{1-\alpha}{2}} \Lambda_1^{\frac{1}{2}+\epsilon} \nabla b\|_{L^2}) \|\partial_1^2 u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\Lambda_2^\alpha \partial_1^2 u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq C \|\Lambda^\beta b\|_{H^2} \|b\|_{H^2} \|\partial_1 u\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \|\Lambda_2^\alpha u\|_{H^2}^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq C \|b\|_{H^2} (\|\partial_1 u\|_{H^1}^2 + \|\Lambda_2^\alpha u\|_{H^2}^2 + \|\Lambda^\beta b\|_{H^2}^2).
 \end{aligned}$$

同理,

$$\begin{aligned}
 I_{322} &= \int \partial_2^2 b \cdot \nabla b \cdot \partial_2^2 u dx \\
 &\leq \|\partial_2^2 b\|_{L_{x_2}^2 L_{x_1}^2} \|\nabla b\|_{L_{x_2}^{\frac{2}{\alpha}} L_{x_1}^\infty} \|\partial_2^2 u\|_{L_{x_2}^{\frac{2}{1-\alpha}} L_{x_1}^2} \\
 &\leq C \|\partial_2^2 b\|_{L^2} (\|\Lambda_2^{\frac{1-\alpha}{2}} \nabla b\|_{L^2} + \|\Lambda_2^{\frac{1-\alpha}{2}} \Lambda_1^{\frac{1}{2}+\epsilon} \nabla b\|_{L^2}) \|\partial_2^2 u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\Lambda_2^\alpha \partial_2^2 u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq C \|\Lambda^\beta b\|_{H^2} \|b\|_{H^2} \|\Lambda_2^\alpha u\|_{H^2} \\
 &\leq C \|b\|_{H^2} (\|\Lambda_2^\alpha u\|_{H^2}^2 + \|\Lambda^\beta b\|_{H^2}^2).
 \end{aligned}$$

因此

$$I_3 \leq C \|b\|_{H^2} (\|\partial_1 u\|_{H^1}^2 + \|\Lambda_2^\alpha u\|_{H^2}^2 + \|\Lambda^\beta b\|_{H^2}^2). \quad (3.6)$$

下面处理 I_4 . 首先将 I_4 分成

$$\begin{aligned}
 I_4 &= -2 \sum_{i=1}^2 \int \partial_i u \cdot \nabla \partial_i b \cdot \partial_i^2 b dx - \sum_{i=1}^2 \int \partial_i^2 u \cdot \nabla b \cdot \partial_i^2 b dx \\
 &=: I_{41} + I_{42}.
 \end{aligned}$$

对于 I_{41} , 通过 Hölder 不等式, (2.7) 和 (3.4), 可得

$$\begin{aligned}
 I_{41} &= -2 \sum_{i=1}^2 \int \partial_i u \cdot \nabla \partial_i b \cdot \partial_i^2 b dx \\
 &\leq C \|\nabla^2 b\|_{L^2}^2 \|\nabla u\|_{L^\infty} \\
 &\leq C \|b\|_{H^2}^2 (\|\nabla u\|_{L^2} + \|\Lambda_1^{\frac{1}{2}+\epsilon} \nabla u\|_{L^2} + \|\Lambda_2^{\frac{1}{2}+\epsilon} \nabla u\|_{L^2} + \|\Lambda_1^{\frac{1}{2}+\epsilon} \Lambda_2^{\frac{1}{2}+\epsilon} \nabla u\|_{L^2}) \\
 &\leq C \|\Lambda^\beta b\|_{H^2}^2 \|u\|_{H^2} + \|b\|_{H^2} \|\Lambda^\beta b\|_{H^2} \|\Lambda_2^\alpha u\|_{H^2} \\
 &\leq C (\|u\|_{H^2} + \|b\|_{H^2}) (\|\Lambda_2^\alpha u\|_{H^2}^2 + \|\Lambda^\beta b\|_{H^2}^2).
 \end{aligned}$$

由于 I_{42} 与 I_{32} 的结构相同, I_{42} 的估计与 I_{32} 类似. 因此

$$I_4 \leq C (\|u\|_{H^2} + \|b\|_{H^2}) (\|\partial_1 u\|_{H^1}^2 + \|\Lambda_2^\alpha u\|_{H^2}^2 + \|\Lambda^\beta b\|_{H^2}^2). \quad (3.7)$$

类似于 I_4 , 有

$$I_5 \leq C (\|u\|_{H^2} + \|b\|_{H^2}) (\|\partial_1 u\|_{H^1}^2 + \|\Lambda_2^\alpha u\|_{H^2}^2 + \|\Lambda^\beta b\|_{H^2}^2). \quad (3.8)$$

现在将 (3.3) 和 (3.5)–(3.8) 代入 (3.2), 再在 $[0, t]$ 上积分, 可得

$$\begin{aligned}
 & \|u(t)\|_{\dot{H}^2}^2 + \|b(t)\|_{\dot{H}^2}^2 + 2 \int_0^t (\nu \|\Lambda_2^\alpha u\|_{\dot{H}^2}^2 + \eta \|\Lambda^\beta b\|_{\dot{H}^2}^2) d\tau \\
 & \leq \|u_0\|_{\dot{H}^2}^2 + \|b_0\|_{\dot{H}^2}^2 + C \int_0^t (\|u\|_{H^2} + \|b\|_{H^2}) (\|\partial_1 u\|_{H^1}^2 + \|\Lambda_2^\alpha u\|_{\dot{H}^2}^2 + \|\Lambda^\beta b\|_{\dot{H}^2}^2) d\tau \\
 & \leq \|u_0\|_{\dot{H}^2}^2 + \|b_0\|_{\dot{H}^2}^2 \\
 & \quad + C \sup_{0 \leq \tau \leq t} (\|u\|_{H^2} + \|b\|_{H^2}) \int_0^t (\|\partial_1 u\|_{H^1}^2 + \|\Lambda_2^\alpha u\|_{\dot{H}^2}^2 + \|\Lambda^\beta b\|_{\dot{H}^2}^2) d\tau. \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

利用 (3.1) 和 Cauchy-Schwarz 不等式, 可得

$$E_1(t) \leq E_1(0) + CE_1(t)^{\frac{3}{2}} + CE_2(t)^{\frac{3}{2}}. \tag{3.10}$$

接下来, 估计 $\|\partial_1 u\|_{H^1}$. 下面分别估计 $\|\partial_1 u\|_{L^2}$ 和 $\|\partial_1 u\|_{\dot{H}^1}$. 由 (1.2) 的第 2 个方程可知

$$\partial_1 u = \partial_t b + u \cdot \nabla b + \eta \Lambda^{2\beta} b - b \cdot \nabla u. \tag{3.11}$$

将 (3.11) 与 $\partial_1 u$ 作内积, 并在 $\mathbb{R}^2$ 上进行积分, 可得

$$\begin{aligned}
 \|\partial_1 u\|_{L^2}^2 &= \int \partial_1 u \cdot \partial_t b dx + \int u \cdot \nabla b \cdot \partial_1 u dx \\
 &\quad + \eta \int \Lambda^{2\beta} b \cdot \partial_1 u dx - \int b \cdot \nabla u \cdot \partial_1 u dx =: N_1 + N_2 + N_3 + N_4. \tag{3.12}
 \end{aligned}$$

对于 N_1 , 利用 (1.2) 中的速度方程, 有

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{d}{dt} \int \partial_1 u \cdot b dx - \int b \cdot \partial_1 (-\nu \Lambda_2^{2\alpha} u + b \cdot \nabla b + \partial_1 b - u \cdot \nabla u - \nabla P) dx \\
 &=: N_{11} + N_{12} + N_{13} + N_{14} + N_{15} + N_{16}.
 \end{aligned}$$

根据 $\nabla \cdot b = 0$, 有 $N_{16} = 0$. 通过 Hölder 不等式, Young 不等式和分部积分, 可得

$$\begin{aligned}
 N_{12} &= \nu \int b \cdot \partial_1 \Lambda_2^{2\alpha} u dx = -\nu \int \partial_1 b \cdot \Lambda_2^{2\alpha} u dx \\
 &\leq C \|\partial_1 b\|_{L^2} \|\Lambda_2^{2\alpha} u\|_{L^2} \leq C \|\Lambda^\beta b\|_{H^2} \|\Lambda_2^\alpha u\|_{H^2} \leq C (\|\Lambda_2^\alpha u\|_{\dot{H}^2}^2 + \|\Lambda^\beta b\|_{\dot{H}^2}^2).
 \end{aligned}$$

同样地, 对于 N_{13} 和 N_{14} , 有

$$\begin{aligned}
 N_{13} &= - \int b \cdot \partial_1 (b \cdot \nabla b) dx = \int \partial_1 b \cdot b \cdot \nabla b dx \\
 &\leq \|\partial_1 b\|_{L^2} \|b\|_{L^\infty} \|\nabla b\|_{L^2} \leq C \|b\|_{H^2} \|\Lambda^\beta b\|_{\dot{H}^2}^2, \\
 N_{14} &= - \int b \cdot \partial_1^2 b dx = \int |\partial_1 b|^2 dx = \|\partial_1 b\|_{L^2}^2 \leq \|\Lambda^\beta b\|_{\dot{H}^2}^2.
 \end{aligned}$$

通过 Hölder 不等式, 分部积分以及 (2.5), 可得

$$\begin{aligned}
 N_{15} &= \int b \cdot \partial_1 (u \cdot \nabla u) dx = - \int \partial_1 b \cdot u \cdot \nabla u dx \\
 &\leq \|\partial_1 b\|_{L_{x_2}^2 L_{x_1}^2} \|u\|_{L_{x_2}^\infty L_{x_1}^2} \|\nabla u\|_{L_{x_2}^2 L_{x_1}^\infty} \\
 &\leq C \|\partial_1 b\|_{L^2} \|u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\partial_2 u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\partial_1 \nabla u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C\|u\|_{H^2}\|\partial_1 u\|_{H^1}^{\frac{1}{2}}\|\Lambda_2^\alpha u\|_{H^2}^{\frac{1}{2}}\|\Lambda^\beta b\|_{H^2} \\
&\leq C\|u\|_{H^2}(\|\partial_1 u\|_{H^1}^2 + \|\Lambda_2^\alpha u\|_{H^2}^2 + \|\Lambda^\beta b\|_{H^2}^2),
\end{aligned}$$

这里用到了

$$\|f\|_{L_{x_2}^2 L_{x_1}^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{2}}\|\partial_1 f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{2}}. \quad (3.13)$$

它的证明与 (2.5) 相似. 另外类似于 N_{15} 的处理, N_2 和 N_4 可以被估计为

$$\begin{aligned}
N_2 &= \int u \cdot \nabla b \cdot \partial_1 u dx \\
&\leq C\|\partial_1 u\|_{L^2}\|\nabla b\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\partial_2 \nabla b\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\partial_1 u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\|\partial_1 u\|_{H^1}^{\frac{3}{2}}\|\Lambda^\beta b\|_{H^2}^{\frac{1}{2}}(\|b\|_{H^2} + \|u\|_{H^2}) \\
&\leq C(\|u\|_{H^2} + \|b\|_{H^2})(\|\partial_1 u\|_{H^1}^2 + \|\Lambda^\beta b\|_{H^2}^2), \\
N_4 &= - \int b \cdot \nabla u \cdot \partial_1 u dx \\
&\leq C\|\partial_1 u\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\partial_1 \nabla u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|b\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\partial_2 b\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\|\partial_1 u\|_{H^1}^{\frac{3}{2}}\|\Lambda^\beta b\|_{H^2}^{\frac{1}{2}}(\|b\|_{H^2} + \|u\|_{H^2}) \\
&\leq C(\|u\|_{H^2} + \|b\|_{H^2})(\|\partial_1 u\|_{H^1}^2 + \|\Lambda^\beta b\|_{H^2}^2).
\end{aligned}$$

同样地, 有

$$\begin{aligned}
N_3 &= \eta \int \Lambda^{2\beta} b \cdot \partial_1 u dx \leq C\|\partial_1 u\|_{L^2}\|\Lambda^{2\beta} b\|_{L^2} \\
&\leq C\|\partial_1 u\|_{H^1}\|\Lambda^\beta b\|_{H^2} \leq C(\|\partial_1 u\|_{H^1}^2 + \|\Lambda^\beta b\|_{H^2}^2).
\end{aligned}$$

至此, 完成了对 $\partial_1 u$ 的 L^2 估计. 现在进行 $\partial_1 u$ 的 $\dot{H}^1$ 估计. 借助于 (3.11), 可得

$$\begin{aligned}
\|\nabla \partial_1 u\|_{L^2}^2 &= \int \nabla \partial_1 u \cdot \partial_t \nabla b dx + \int \nabla \partial_1 u \cdot \nabla(u \cdot \nabla b) dx \\
&\quad + \eta \int \nabla \partial_1 u \cdot \nabla \Lambda^{2\beta} b dx - \int \nabla \partial_1 u \cdot \nabla(b \cdot \nabla u) dx \\
&=: M_1 + M_2 + M_3 + M_4.
\end{aligned} \quad (3.14)$$

对于 M_1 , 通过分部积分并使用 (1.2) 中关于 u 的方程, 可得

$$\begin{aligned}
M_1 &= \frac{d}{dt} \int \nabla \partial_1 u \cdot \nabla b dx - \int \nabla b \cdot \nabla \partial_1 (-\nu \Lambda_2^{2\alpha} u + b \cdot \nabla b + \partial_1 b - u \cdot \nabla u - \nabla P) dx \\
&=: M_{11} + M_{12} + M_{13} + M_{14} + M_{15} + M_{16}.
\end{aligned}$$

通过分部积分和 $\nabla \cdot b = 0$, 有 $M_{16} = 0$. 再通过分部积分, 应用 Hölder 不等式以及 Young 不等式, 可得

$$\begin{aligned}
M_{12} &= \nu \int \nabla b \cdot \nabla \partial_1 \Lambda_2^{2\alpha} u dx = -\nu \int \partial_1 \nabla b \cdot \Lambda_2^{2\alpha} \nabla u dx \\
&\leq C\|\partial_1 \nabla b\|_{L^2}\|\Lambda_2^{2\alpha} \nabla u\|_{L^2} \leq C\|\Lambda^\beta b\|_{H^2}\|\Lambda_2^\alpha u\|_{H^2} \leq C(\|\Lambda_2^\alpha u\|_{H^2}^2 + \|\Lambda^\beta b\|_{H^2}^2).
\end{aligned}$$

通过分部积分, Hölder 不等式和各向异性不等式 (3.13), 可得

$$\begin{aligned}
 M_{13} &= - \int \nabla b \cdot \nabla \partial_1 (b \cdot \nabla b) dx = \int \partial_1 \nabla b \cdot \nabla (b \cdot \nabla b) dx \\
 &= \int \partial_1 \nabla b \cdot \nabla b \cdot \nabla b dx + \int \partial_1 \nabla b \cdot b \cdot \nabla^2 b dx \\
 &\leq C \|\partial_1 \nabla b\|_{L^2} \|\nabla b\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\partial_1 \nabla b\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla b\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\partial_2 \nabla b\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} + \|\partial_1 \nabla b\|_{L^2} \|\nabla^2 b\|_{L^2} \|b\|_{L^\infty} \\
 &\leq C \|b\|_{H^2} \|\Lambda^\beta b\|_{H^2}^2, \\
 M_{15} &= \int \nabla b \cdot \nabla \partial_1 (u \cdot \nabla u) dx = - \int \Delta b \cdot \partial_1 (u \cdot \nabla u) dx \\
 &= - \int \Delta b \cdot \partial_1 u \cdot \nabla u dx - \int \Delta b \cdot u \cdot \partial_1 \nabla u dx \\
 &\leq C \|\Delta b\|_{L^2} \|\partial_1 u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\partial_1 \partial_1 u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\partial_2 \nabla u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} + \|\Delta b\|_{L^2} \|u\|_{L^\infty} \|\partial_1 \nabla u\|_{L^2} \\
 &\leq C \|u\|_{H^2} \|\partial_1 u\|_{H^1} \|\Lambda^\beta b\|_{H^2} \\
 &\leq C \|u\|_{H^2} (\|\partial_1 u\|_{H^1}^2 + \|\Lambda^\beta b\|_{H^2}^2).
 \end{aligned}$$

同样地,

$$M_{14} = - \int \nabla b \cdot \nabla \partial_1^2 b dx = \int \partial_1 \nabla b \cdot \partial_1 \nabla b dx = \|\partial_1 \nabla b\|_{L^2}^2 \leq \|\Lambda^\beta b\|_{H^2}^2.$$

M_2 和 M_4 的估计与 M_{15} 类似,

$$\begin{aligned}
 M_2 &= \int \nabla \partial_1 u \cdot \nabla (u \cdot \nabla b) dx \\
 &= \int \nabla \partial_1 u \cdot \nabla u \cdot \nabla b dx + \int \nabla \partial_1 u \cdot u \cdot \nabla^2 b dx \\
 &\leq C \|\nabla \partial_1 u\|_{L^2} \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\partial_2 \nabla u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla b\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\partial_1 \nabla b\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} + \|\nabla \partial_1 u\|_{L^2} \|u\|_{L^\infty} \|\nabla^2 b\|_{L^2} \\
 &\leq C \|u\|_{H^2} \|\partial_1 u\|_{H^1} \|\Lambda^\beta b\|_{H^2} \\
 &\leq C \|u\|_{H^2} (\|\partial_1 u\|_{H^1}^2 + \|\Lambda^\beta b\|_{H^2}^2), \\
 M_4 &= - \int \nabla \partial_1 u \cdot \nabla (b \cdot \nabla u) dx \\
 &= - \int \nabla \partial_1 u \cdot \nabla b \cdot \nabla u dx - \int \nabla \partial_1 u \cdot b_1 \partial_1 \nabla u dx - \int \nabla \partial_1 u \cdot b_2 \partial_2 \nabla u dx \\
 &\leq C \|\nabla \partial_1 u\|_{L^2} \|\nabla b\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\partial_2 \nabla b\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\partial_1 \nabla u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \|\nabla \partial_1 u\|_{L^2}^2 \|b_1\|_{L^\infty} + \|\nabla \partial_1 u\|_{L^2} \|b_2\|_{L^\infty} \|\partial_2 \nabla u\|_{L^2} \\
 &\leq C \|\partial_1 u\|_{H^1}^{\frac{3}{2}} \|\Lambda^\beta b\|_{H^2}^{\frac{1}{2}} \|b\|_{H^2}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^2}^{\frac{1}{2}} + \|b\|_{H^2} \|\partial_1 u\|_{H^1}^2 + \|b\|_{H^2} \|\partial_1 u\|_{H^1} \|\Lambda_2^\alpha u\|_{H^2} \\
 &\leq C (\|u\|_{H^2} + \|b\|_{H^2}) (\|\partial_1 u\|_{H^1}^2 + \|\Lambda_2^\alpha u\|_{H^2}^2 + \|\Lambda^\beta b\|_{H^2}^2).
 \end{aligned}$$

同理, 可得

$$\begin{aligned}
 M_3 &= \eta \int \nabla \partial_1 u \cdot \nabla \Lambda^{2\beta} b dx \leq C \|\nabla \partial_1 u\|_{L^2} \|\nabla \Lambda^{2\beta} b\|_{L^2} \\
 &\leq C \|\partial_1 u\|_{H^1} \|\Lambda^\beta b\|_{H^2} \leq C (\|\partial_1 u\|_{H^1}^2 + \|\Lambda^\beta b\|_{H^2}^2).
 \end{aligned}$$

将 (3.12) 和 (3.14) 相加, 结合对 N_1 – N_4 和 M_1 – M_4 的估计, 可得

$$\begin{aligned} \|\partial_1 u\|_{H^1}^2 &\leq \frac{d}{dt} \int \partial_1 u \cdot b dx + \frac{d}{dt} \int \nabla \partial_1 u \cdot \nabla b dx \\ &\quad + C(\|\Lambda_2^\alpha u\|_{H^2}^2 + \|\Lambda^\beta b\|_{H^2}^2 + \|\partial_1 u\|_{H^1}^2) \\ &\quad + C(\|u\|_{H^2} + \|b\|_{H^2})(\|\partial_1 u\|_{H^1}^2 + \|\Lambda_2^\alpha u\|_{H^2}^2 + \|\Lambda^\beta b\|_{H^2}^2). \end{aligned}$$

上式在 $[0, t]$ 上积分, 可得

$$\begin{aligned} \int_0^t \|\partial_1 u\|_{H^1}^2 d\tau &\leq \int \partial_1 u \cdot b dx - \int \partial_1 u(x, 0) \cdot b(x, 0) dx \\ &\quad + \int \nabla \partial_1 u \cdot \nabla b dx - \int \nabla \partial_1 u(x, 0) \cdot \nabla b(x, 0) dx \\ &\quad + C \int_0^t (\|\Lambda_2^\alpha u\|_{H^2}^2 + \|\Lambda^\beta b\|_{H^2}^2 + \|\partial_1 u\|_{H^1}^2) d\tau \\ &\quad + C \int_0^t (\|u\|_{H^2} + \|b\|_{H^2})(\|\partial_1 u\|_{H^1}^2 + \|\Lambda_2^\alpha u\|_{H^2}^2 + \|\Lambda^\beta b\|_{H^2}^2) d\tau \\ &\leq C\|(u, b)\|_{H^2}^2 + C\|(u_0, b_0)\|_{H^2}^2 + C \int_0^t (\|\Lambda_2^\alpha u\|_{H^2}^2 + \|\Lambda^\beta b\|_{H^2}^2 + \|\partial_1 u\|_{H^1}^2) d\tau \\ &\quad + C \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|(u, b)\|_{H^2} \int_0^t (\|\partial_1 u\|_{H^1}^2 + \|\Lambda_2^\alpha u\|_{H^2}^2 + \|\Lambda^\beta b\|_{H^2}^2) d\tau \\ &\leq CE_1(0) + CE_1(t) + CE_2(t) + CE_1(t)^{\frac{3}{2}} + CE_2(t)^{\frac{3}{2}}, \end{aligned}$$

即

$$E_2(t) \leq CE_1(0) + CE_1(t) + CE_1(t)^{\frac{3}{2}} + CE_2(t)^{\frac{3}{2}}. \quad (3.15)$$

再将 (3.10) 和 (3.15) 相加, 根据定义 (1.5), 最终得

$$E(t) \leq E(0) + CE(t)^{\frac{3}{2}}.$$

靴带原理表明存在 $\varepsilon > 0$, 使得如果 $E(0) < \varepsilon^2$, 那么

$$E(t) \leq C\varepsilon^2.$$

定理 1.1 证毕.

4 结 论

磁流体方程作为流体动力学典型方程, 广泛应用于天体物理、实验室等离子体 (核聚变)、地球物理、工程技术等关键领域. 本文对具有垂直分数阶耗散和分数阶磁扩散的二维不可压缩磁流体方程进行了研究, 得到了在平衡态附近扰动后解的稳定性, 推广了文 [10] 的结果. 具体地说, 通过引入新的带分数阶导数的各向异性 Sobolev 不等式, 将文 [10] 在 $H^3(\mathbb{R}^2)$ 上的稳定性结果推广到 $H^2(\mathbb{R}^2)$. 本文发展的各向异性不等式也可以应用于其他具有部分分数阶耗散 (即耗散只作用于某些方向或某些分量) 的流体模型的稳定性分析.

参 考 文 献

- [1] Biskamp D. Nonlinear magnetohydrodynamics [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [2] Davidson P A. Introduction to magnetohydrodynamics [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2017.
- [3] Priest E, Forbes T. Magnetic reconnection, MHD theory and applications [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- [4] Duvaut G, Lions, J L. Inéquations en thermoélasticité et magnétohydrodynamique [J]. *Arch Ration Mecha Anal*, 1972, 46(4):241–279.
- [5] Sermange M, Temam R. Some mathematical questions related to the MHD equations [J]. *Commun Pure Appl Math*, 1983, 36(5):635–664.
- [6] Abidi H, Paicu M. Global existence for the magnetohydrodynamic system in critical spaces [J]. *Proc R Soc Edinb A: Mathematics*, 1983, 138(3):447–476.
- [7] Ren W, Wang Y, Wu G. Partial regularity of suitable weak solutions to the multi-dimensional generalized magnetohydrodynamics equations [J]. *Commun Contemp Math*, 2016, 18(6):1650018.
- [8] Dai Y, Ji R, Wu J. Unique weak solutions of the magnetohydrodynamic equations with fractional dissipation [J]. *Z Angew Math Mech*, 2020, 100(7):e201900290.
- [9] 姬瑞红, 叶苏慧, 龙欢, 具有分数阶耗散的 2 维不可压缩 MHD 方程解的稳定性 [J]. 成都理工大学学报 (自然科学版), 2025, 53:1–8.
- [10] Feng W, Wang W, Wu J. Stability for a system of the 2D incompressible MHD equations with fractional dissipation [J]. *J Math Fluid Mech*, 2024, 26(4):57.
- [11] Feng W, Wang W, Wu J. Nonlinear stability for the 2D incompressible MHD system with fractional dissipation in the horizontal direction [J]. *J Evol Equ*, 2023, 23(2):32.
- [12] Wu J. The 2D magnetohydrodynamic equations with partial or fractional dissipation [C]. Lectures on the analysis of nonlinear partial differential equations, 2018:283–332.
- [13] Li J, Wang H, Zheng D. Stability and sharp decay for 3D incompressible MHD system with fractional horizontal dissipation and magnetic diffusion [J]. *Z Angew Math Phy*, 2023, 74(2):44.
- [14] Jin M, Jiu Q, Xie Y. Global well-posedness and optimal decay for incompressible MHD equations with fractional dissipation and magnetic diffusion [J]. *Z Angew Math Phy*, 2024, 75(2):73.

- [15] Brezis H, Mironescu P. Where Sobolev interacts with Gagliardo-Nirenberg [J]. *J Funct Anal*, 2019, 277(8):2839–2864.
- [16] Majda A J, Bertozzi A L, Ogawa A. Vorticity and incompressible flow [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

Stability of the 2D Incompressible Magnetohydrodynamic Equations with Partial Fractional Dissipation

YANG Qiaoqi¹ ZHU Yonggang¹ DENG Xuemei² ZHOU Yanping¹

¹College of Mathematics and Physics, China Three Gorges University,
Yichang 443002, Hubei, China.

E-mail: 1625717148@qq.com; zygp@163.com; zyp5208@ctgu.edu.cn

²Corresponding author. College of Mathematics and Physics, China
Three Gorges University, Yichang 443002, Hubei, China.

E-mail: dxmeisx@126.com

Abstract In this paper, the authors study the stability of solutions of the two-dimensional incompressible magnetohydrodynamic equations with fractional vertical dissipation $\nu\Lambda_2^{2\alpha}u$ and fractional magnetic diffusion $\eta\Lambda^{2\beta}b$. For this system, [Feng W, Wang W, Wu J. Stability for a system of the 2D incompressible MHD equations with fractional dissipation [J]. *J Math Fluid Mech*, 2024, 26(4):57] established the stability in the Sobolev space $H^3(\mathbb{R}^2)$. The authors extend the result to the lower regularity space $H^2(\mathbb{R}^2)$ by introducing new anisotropic inequalities involving fractional derivatives.

Keywords MHD equations, Fractional dissipation, Stability

2020 MR Subject Classification 76W05, 47G20, 76D03