

琼斯多项式和 4-变换*

张 恺¹ 杨志青²

提要 作者通过分析一次 4-变换对定向链环 L 的琼斯多项式 $V_L(t)$ 的影响, 证明了若分支数为 l 的定向链环 L_1 和定向链环 L_2 是 4-变换等价的, 则当 l 是奇数时, $V_{L_1}(-1) - V_{L_2}(-1) = 4k$; 当 l 是偶数时, $V_{L_1}(-1) - V_{L_2}(-1) = 4ki$, 其中 $k \in \mathbb{Z}$, $i^2 = -1$. 并且, 若 K_1 和 K_2 是 4-变换等价的纽结, 则 $V'_{K_1}(-1) - V'_{K_2}(-1) = 4k$. 这些结论为我们判断纽结是否 4-变换等价于平凡结提供了必要条件.

关键词 琼斯多项式, 4-变换, 4-变换等价

MR (2020) 主题分类 57K10, 57K12

中图法分类 O189.3

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2026)01-0059-08

1 引 言

n -变换是链环图的一种局部变换, 如图 1 所示. 若链环 L_1 的一个投影图能通过有限次的 n -变换和同痕变换变成链环 L_2 的一个投影图, 则称 L_1 和 L_2 是 n -变换等价的.



图 1 n -变换

4-变换是 n -变换中一种有趣的变换. 在 1970 年代末, Nakanishi 首次系统地研究了 4-变换 (见 [1]). 1979 年, 他猜想任意纽结都是 4-变换等价于平凡结 (见文 [2] 中的 Problem 1.59(3)(a)).

猜想 1.1 (1979 Nakanishi) 任意纽结 4-变换等价于平凡结.

虽然已有几类纽结被验证是满足该猜想的, 例如 2-桥结、3-辨结以及交叉点数不超过 12 的纽结 (见 [3]), 但是该猜想目前仍未解决.

环绕数模 2 是 4-变换不变量, 由此可得并不是所有分支数至少是 2 的链环都是 4-变换等价于平凡结. 1985 年, Kawauchi 提出如下问题: 链环同伦的两个链环是否 4-变换等价? (见文 [2] 中的 Problem 1.59(3)(b)), 其中, 两个链环同伦是指其中一个链环可以通过有限次的自交叉点变换和合痕变成另一个链环. 2011 年, Dabkowski 和 Przytycki [3] 利用链环的第 4 Burnside 群给出上述问题在分支数至少是 3 时情形的否定回答. 但

本文 2025 年 9 月 17 日收到, 2026 年 2 月 25 日收到修改稿.

¹江西财经大学统计与数据科学学院, 南昌 330013. E-mail: A0721zhangkai@163.com

²大连理工大学数学科学学院, 辽宁 大连 116024. E-mail: yangzhiq@dlut.edu.cn

*本文受到国家自然科学基金项目 (No. 12301083) 的资助.

是, 对 2 分支的链环, 该问题至今仍未解决. 因为两个 2 分支的链环同伦等价于它们具有相同的环绕数, 因此 Kawauchi 提出的问题可以重新表述如下.

猜想 1.2 (1985 Nakanishi-Kawauchi) 任意 2 分支链环 4-变换等价于 2 分支平凡链环或者 Hopf 链环.

该猜想已被证明对多类 2 分支链环成立, 例如 2-代数链环、3-辫链环、交叉点数不超过 11 的链环, 以及交叉点数为 12 的交错链环 (见 [1, 4]).

2011 年, Dabkowski 和 Przytycki 证明了当 $n = 3$ 或 $n \geq 5$ 时, n -变换不是解结运算 (见 [3]). 这一结论使得学者们倾向于认为上述两个猜想不成立. 为构造这些猜想的反例, 我们需要构造 4-变换不变量. 本文我们将证明以下两个定理.

定理 1.1 设 L_1 和 L_2 是分支数为 l 的定向链环, 且 L_1 和 L_2 是 4-变换等价的, 则它们的琼斯多项式满足:

(1) 若 l 是奇数, 则 $V_{L_1}(-1) - V_{L_2}(-1) = 4k$;

(2) 若 l 是偶数, 则 $V_{L_1}(-1) - V_{L_2}(-1) = 4ki$,

其中 $k \in \mathbb{Z}$, $i^2 = -1$.

定理 1.2 设 K_1 和 K_2 是纽结, 且 K_1 和 K_2 是 4-变换等价的, 则 $V'_{K_1}(-1) - V'_{K_2}(-1) = 4k$, 其中 $k \in \mathbb{Z}$.

上述两个定理为我们判断纽结 (链环) 是否 4-变换等价于平凡结 (平凡链环) 提供了必要条件.

2 定理 1.1 和定理 1.2 的证明

琼斯多项式 $V_L(t)$ 是定向纽结和链环最著名的拓扑不变量之一 (见 [5]). 该多项式可通过以下条件定义:

(1) 若 L 是平凡结, 则 $V_L(t) = 1$;

(2) 满足如下拆接关系式

$$t^{-1} V_{L_+}(t) - t V_{L_-}(t) + (t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}) V_{L_0}(t) = 0,$$

其中 L_+ , L_- , L_0 是如图 2 所示的 3 个定向链环, 除图示部分不同, 其他部分完全相同.

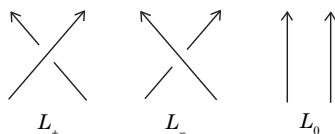


图 2 L_+ , L_- , L_0

Homfly 多项式 $P_L(x, y, z)$ 是琼斯多项式 $V_L(t)$ 的推广 (见 [6]). $P_L(x, y, z)$ 可通过以下条件定义:

(1) 若 L 是平凡结, 则 $P_L(x, y, z) = 1$;

(2) 满足如下拆接关系式

$$xP_{L_+}(x, y, z) + yP_{L_-}(x, y, z) + zP_{L_0}(x, y, z) = 0.$$

显然 $V_L(t) = P_L(t^{-1}, -t, t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})$. 设 L 是分支数为 l 的定向链环, 根据文 [6] 中的性质 9 可知, 存在关于 x, y 的洛朗多项式 $c_{2k}(x, y)$, $k = 1, 2, \dots, n$, 使得

$$P_L(x, y, z) = z^{1-l}(c_0(x, y) + c_2(x, y)z^2 + c_4(x, y)z^4 + \dots + c_{2n}(x, y)z^{2n}).$$

根据 $V_L(t) = P_L(t^{-1}, -t, t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})$ 可知, 当 l 为奇数时, $V_L(t)$ 是关于变量 t 的洛朗多项式; 当 l 为偶数时, $t^{\frac{1}{2}}V_L(t)$ 是关于变量 t 的洛朗多项式.

定理 1.1 的证明 首先, 我们分析一次 4-变换对定向链环 L 琼斯多项式 $V_L(t)$ 的影响. 根据实施 4-变换的局部定向方式, 分两种情形讨论, 如图 3 所示.



图 3 带方向的 4-变换

情形 1 反复利用琼斯多项式的拆接关系式, 得

$$\begin{aligned} V_{\infty\infty\infty}(t) &= t^2 V_{\infty\infty}(t) - t(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}) V_{\infty\infty}(t) \\ &= t^2 V_{\infty\infty}(t) - t(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})(t^2 V_{\infty}(t) - t(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}) V_{\infty}(t)) \\ &= (t^2 + t^2(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})^2) V_{\infty\infty}(t) - t^3(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}) V_{\infty}(t) \\ &= (t - t^2 + t^3)(t^2 V_{\infty}(t) - t(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}) V_{\infty}(t)) - t^3(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}) V_{\infty}(t) \\ &= (t^3 - t^4 + t^5) V_{\infty}(t) - t^{\frac{3}{2}}(1 + t^2)(1 - t) V_{\infty}(t). \end{aligned}$$

因此,

$$V_{\infty\infty\infty}(t) - V_{\infty}(t) = (t^3 - t^4 + t^5 - 1) V_{\infty}(t) - t^{\frac{3}{2}}(1 + t^2)(1 - t) V_{\infty}(t).$$

设定向链环 $(\infty\infty\infty)$ 的分支数为 l , 则 (∞) 的分支数为 l , (∞) 的分支数为 $l-1$ 或 $l+1$. 若 l 是奇数, 则 $V_{\infty\infty\infty}(t)$, $V_{\infty}(t)$, $t^{\frac{1}{2}}V_{\infty}(t)$ 均是关于变量 t 的洛朗多项式. 令 $t^{\frac{1}{2}} = i$, $t = -1$, 则 $V_{\infty\infty\infty}(-1)$, $V_{\infty}(-1)$, $iV_{\infty}(-1)$ 都是整数, 且有

$$V_{\infty\infty\infty}(-1) - V_{\infty}(-1) = -4V_{\infty}(-1) + 4iV_{\infty}(-1) = 4k,$$

其中 $k = -V_{\infty}(-1) + iV_{\infty}(-1) \in \mathbb{Z}$.

若 l 是偶数, 则 $t^{\frac{1}{2}}V_{\infty\infty\infty}(t)$, $t^{\frac{1}{2}}V_{\infty}(t)$, $V_{\infty}(t)$ 均是关于变量 t 的洛朗多项式. 令 $t^{\frac{1}{2}} = i$, $t = -1$, 则 $iV_{\infty\infty\infty}(-1)$, $iV_{\infty}(-1)$, $V_{\infty}(-1)$ 都是整数, 且有

$$V_{\infty\infty\infty}(-1) - V_{\infty}(-1) = -4V_{\infty}(-1) + 4iV_{\infty}(-1) = 4ki,$$

其中 $k = iV_{\infty}(-1) + V_{\infty}(-1) \in \mathbb{Z}$.

情形 2 同理, 反复利用琼斯多项式的拆接关系式, 得

$$V_{\infty\infty\infty}(t) = t^{-2} V_{\infty\infty}(t) + t^{-1}(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}) V_{\infty}(t)$$

$$\begin{aligned}
&= t^{-4} V_{\neg}(t) + t^{-3}(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}) V_{\neg}(t) + t^{-1}(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}) V_{\neg}(t) \\
&= t^{-4} V_{\neg}(t) + t^{-\frac{1}{2}}(t^{-2} + 1)(t^{-1} - 1) V_{\neg}(t),
\end{aligned}$$

因此

$$V_{\infty\infty\infty}(t) - V_{\neg}(t) = (t^{-4} - 1) V_{\neg}(t) + t^{-\frac{1}{2}}(t^{-2} + 1)(t^{-1} - 1) V_{\neg}(t).$$

类似地, 若定向链环 $(\infty\infty\infty)$ 的分支数 l 是奇数, 并且令 $t^{\frac{1}{2}} = i$, $t = -1$, 则有

$$V_{\infty\infty\infty}(-1) - V_{\neg}(-1) = 4i V_{\neg}(-1) = 4k,$$

其中 $k = i V_{\neg}(-1) \in \mathbb{Z}$.

若 l 是偶数, 则

$$V_{\infty\infty\infty}(-1) - V_{\neg}(-1) = 4i V_{\neg}(-1) = 4ki,$$

其中 $k = V_{\neg}(-1) \in \mathbb{Z}$.

现假设 L_1 和 L_2 是分支数为 l 的定向链环, 并且 L_1 和 L_2 是 4-变换等价的, 则一定存在有限的链环序列 $G_1, G_2, \dots, G_n$, 使得 G_{i+1} 是 G_i 通过实施一次 4-变换得到, 其中 G_1 是 L_1 , G_n 是 L_2 . 由以上关于 4-变换和琼斯多项式的讨论可知, 若 l 是奇数, 则存在 $k_i \in \mathbb{Z}$, 使得

$$V_{G_i}(-1) - V_{G_{i+1}}(-1) = 4k_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

注意到

$$\begin{aligned}
V_{L_1}(-1) - V_{L_2}(-1) &= (V_{G_1}(-1) - V_{G_2}(-1)) + (V_{G_2}(-1) - V_{G_3}(-1)) + \dots \\
&\quad + (V_{G_{n-1}}(-1) - V_{G_n}(-1)) \\
&= 4k_1 + 4k_2 + \dots + 4k_{n-1} = 4k,
\end{aligned}$$

其中 $k = k_1 + k_2 + \dots + k_{n-1} \in \mathbb{Z}$.

同理, 若 l 是偶数, 则 $V_{L_1}(-1) - V_{L_2}(-1) = 4ki$, $k \in \mathbb{Z}$. 因此, 我们完成了定理 1.1 的证明.

定理 1.2 的证明 类似于定理 1.1 的证明, 根据 4-变换的局部方向, 我们分两种情形讨论. 采用定理 1.1 证明中的符号, 并根据定理 1.1 的证明, 有下面的两种情形:

情形 1

$$V_{\infty\infty\infty}(t) - V_{\neg}(t) = (t^3 - t^4 + t^5 - 1) V_{\neg}(t) + (t^4 - t^3 + t^2 - t) t^{\frac{1}{2}} V_{\times}(t).$$

若 $(\infty\infty\infty)$ 是纽结, 则 $V_{\infty\infty\infty}(t)$, $V_{\neg}(t)$, $t^{\frac{1}{2}} V_{\times}(t)$ 均是关于变量 t 的洛朗多项式. 故有

$$\begin{aligned}
V'_{\infty\infty\infty}(t) - V'_{\neg}(t) &= (3t^2 - 4t^3 + 5t^4) V_{\neg}(t) + (t^3 - t^4 + t^5 - 1) V'_{\neg}(t) \\
&\quad + (4t^3 - 3t^2 + 2t - 1) (t^{\frac{1}{2}} V_{\times}(t)) + (t^4 - t^3 + t^2 - t) (t^{\frac{1}{2}} V_{\times}(t))'.
\end{aligned}$$

因为 $(\times)$ 是 2 分支的链环, 所以 $(t^{\frac{1}{2}} V_{\times}(t))|_{t=-1} = -2$. 又因为 $(t^{\frac{1}{2}} V_{\times}(t))|_{t=1} + (t^{\frac{1}{2}} V_{\times}(t))|_{t=-1}$ 等于洛朗多项式 $(t^{\frac{1}{2}} V_{\times}(t))$ 中偶数次幂系数之和的 2 倍, 故是偶数, 因此 $(t^{\frac{1}{2}} V_{\times}(t))|_{t=-1}$ 是偶数. 令 $t^{\frac{1}{2}} = i$, $t = -1$, 则有

$$V'_{\infty\infty\infty}(-1) - V'_{\neg}(-1) = 12V_{\neg}(-1) - 4V'_{\neg}(-1) - 10(t^{\frac{1}{2}} V_{\times}(t))|_{t=-1} - 4(t^{\frac{1}{2}} V_{\times}(t))'|_{t=-1}$$

$$= 4 \left(3V_{\neg}(-1) - V'_{\neg}(-1) - \frac{5}{2}(t^{\frac{1}{2}}V_{\searrow}(t))|_{t=-1} - (t^{\frac{1}{2}}V_{\searrow}(t))'|_{t=-1} \right).$$

因此

$$V'_{\searrow\searrow\searrow}(-1) - V'_{\neg}(-1) = 4k,$$

其中 $k = 3V_{\neg}(-1) - V'_{\neg}(-1) - \frac{5}{2}(t^{\frac{1}{2}}V_{\searrow}(t))|_{t=-1} - (t^{\frac{1}{2}}V_{\searrow}(t))'|_{t=-1} \in \mathbb{Z}$.

情形 2

$$V_{\searrow\searrow\searrow}(t) - V_{\neg}(t) = (t^{-4} - 1)V_{\neg}(t) + (t^{-3} - t^{-2} + t^{-1} - 1)(t^{-\frac{1}{2}}V_{\neg}(t)).$$

若 $(\searrow\searrow\searrow)$ 是纽结, 则 $V_{\searrow\searrow\searrow}(t)$, $V_{\neg}(t)$, $t^{-\frac{1}{2}}V_{\neg}(t)$ 均是关于变量 t 的洛朗多项式. 故

$$\begin{aligned} V'_{\searrow\searrow\searrow}(t) - V'_{\neg}(t) &= -4t^{-5}V_{\neg}(t) + (t^{-4} - 1)V'_{\neg}(t) + (-3t^{-4} + 2t^{-3} - t^{-2})(t^{-\frac{1}{2}}V_{\neg}(t)) \\ &\quad + (t^{-3} - t^{-2} + t^{-1} - 1)(t^{-\frac{1}{2}}V_{\neg}(t))'. \end{aligned}$$

因为 $(\neg)$ 是 2 分支的链环, 所以

$$(t^{-\frac{1}{2}}V_{\neg}(t))|_{t=-1} = -2,$$

故 $(t^{-\frac{1}{2}}V_{\searrow}(t))|_{t=-1}$ 是偶数. 令 $t^{\frac{1}{2}} = i$, $t = -1$, 则有

$$\begin{aligned} V'_{\searrow\searrow\searrow}(-1) - V'_{\neg}(-1) &= 4V_{\neg}(-1) - 6(t^{-\frac{1}{2}}V_{\neg}(t))|_{t=-1} - 4(t^{-\frac{1}{2}}V_{\neg}(t))'|_{t=-1} \\ &= 4 \left(V_{\neg}(-1) - \frac{3}{2}(t^{-\frac{1}{2}}V_{\neg}(t))|_{t=-1} - (t^{-\frac{1}{2}}V_{\neg}(t))'|_{t=-1} \right). \end{aligned}$$

因此

$$V'_{\searrow\searrow\searrow}(-1) - V'_{\neg}(-1) = 4k,$$

其中 $k = V_{\neg}(-1) - \frac{3}{2}(t^{-\frac{1}{2}}V_{\neg}(t))|_{t=-1} - (t^{-\frac{1}{2}}V_{\neg}(t))'|_{t=-1} \in \mathbb{Z}$.

现假设 K_1 和 K_2 是纽结, K_1 是 4-变换等价于 K_2 的, 则存在有限的纽结序列 $G_1, G_2, \dots, G_n$, 使得 G_{i+1} 是通过 G_i 实施一次 4-变换得到的, 其中 G_1 是 K_1 , G_n 是 K_2 . 由上述讨论可知, 存在 $k_i \in \mathbb{Z}$, 使得

$$V'_{G_i}(-1) - V'_{G_{i+1}}(-1) = 4k_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

注意到

$$\begin{aligned} V'_{K_1}(-1) - V'_{K_2}(-1) &= (V'_{G_1}(-1) - V'_{G_2}(-1)) + (V'_{G_2}(-1) - V'_{G_3}(-1)) + \dots \\ &\quad + (V'_{G_{n-1}}(-1) - V'_{G_n}(-1)) \\ &= 4k_1 + 4k_2 + \dots + 4k_{n-1} = 4k, \end{aligned}$$

其中

$$k = k_1 + k_2 + \dots + k_{n-1} \in \mathbb{Z}.$$

至此, 完成定理 1.2 的证明.

分支数为 l 的平凡链环的琼斯多项式是 $(-(t^{-\frac{1}{2}} + t^{\frac{1}{2}}))^{l-1}$, 因此我们有如下两个推论.

推论 2.1 若分支数为 l ($l \geq 2$) 的链环 L 是 4-变换等价于平凡链环的, $\bar{L}$ 是 L 的每个分支任意加方向后得到的定向链环, 则当 l 是奇数时, 有

$$V_{\bar{L}}(-1) = 4k;$$

当 l 是偶数时, 有

$$V_{\bar{L}}(-1) = 4ki,$$

其中 $k \in \mathbb{Z}$.

推论 2.2 若纽结 K 是 4-变换等价于平凡结的, 则

$$V_K(-1) = 4k + 1,$$

并且 $V'_K(-1) = 4r$, 其中 $k, r \in \mathbb{Z}$.

例 2.1 设 L_1 是 2 分支的平凡链环, L_2 是如图 4 所示的定向 Hopf 链环, 则

$$V_{L_1}(t) = -t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}, \quad V_{L_2}(t) = -t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{5}{2}},$$

$$V_{L_1}(-1) = 0, \quad V_{L_2}(-1) = -2i.$$

因此, 根据推论 2.1 可知, Hopf 链环不是 4-变换等价于 2 分支的平凡链环.

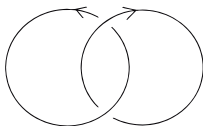


图 4 定向 Hopf 链环

注 2.1 若令 $t = i$, 由定理 1.1 的证明, 可知

$$V_{\infty\infty\infty}(i) = -V_{\neg}(i), \quad V_{\neg\infty\infty}(i) = V_{\neg}(i).$$

因此, 若 L_1 和 L_2 是定向链环, 且 L_1 是 4-变换等价于 L_2 的, 则

$$V_{L_1}(i) = \pm V_{L_2}(i).$$

在文 [7] 中, Murakami 证明了若定向链环 L 的分支数是 $c(L)$, 则

$$V_L(i) = \begin{cases} (-\sqrt{2})^{c(L)-1}(-1)^{\text{Arf}(L)}, & \text{若 } \text{Arf}(L) \text{ 存在} \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (2.1)$$

因此, 根据 (2.1), 我们不能利用 $V_K(i)$ 判断纽结 K 是否 4-变换等价于平凡结.

注 2.2 在文 [8] 中, Askitas 认为 8 字结的 (2, 1)-缆绳结 (具有 17 个交叉点), 是 Nakanishi 的 4-变换猜想的最简单反例 (如图 5 所示).

利用文 [9], 我们计算出 Askitas 纽结的琼斯多项式为

$$V_K(t) = t^7 - t^6 + 1 - t^{-5} + t^{-6}.$$

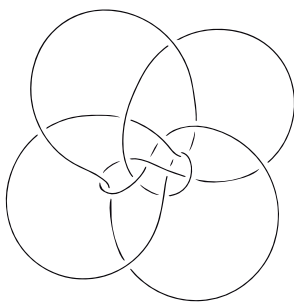


图 5 8 字结的 $(2, 1)$ -缆绳结 (Askitas 纽结)

因此

$$V_K(-1) = 1, \quad V'_K(-1) = 24.$$

故由推论 2.1–2.2, 我们不能根据 $V_K(-1)$ 和 $V'_K(-1)$ 判断 Askitas 纽结是否 4-变换等价于平凡结.

参 考 文 献

- [1] Przytycki J H. On Slavik Jablan's work of 4-moves [J]. *J Knot Theory Ramifications*, 2016, 25(9):1641014, 26 pp.
- [2] Kirby R. Problems in low-dimensional topology [M]//Geometric Topology (Athens, GA, 1993), AMS/IP Stud Adv Math, Vol 2.2, Providence, RI: Amer Math Soc, 1997:57–62.
- [3] Dabkowski M K, Przytycki J H. Unexpected connections between Burnside groups and knot theory [J]. *Proc Natl Acad Sci*, 2011, 101(50):17357–17360.
- [4] Dabkowski M K, Jablan S, Khan N A, Sahi R K. On 4-equivalence classes of knots and links of two components [J]. *J Knot Theory Ramifications*, 2011, 20(1):47–90.
- [5] Jones V F R. A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras [J]. *Bull Amer Math Soc*, 1985, 12(1):103–111.
- [6] Hoste J. A polynomial invariant of knots and links [J]. *Pacific J Math*, 1986, 124(2):295–320.
- [7] Murakami H. A recursive calculation of the Arf invariant of a link [J]. *J Math Soc Japan*, 1986, 38(2):335–338.
- [8] Askitas N. A note on 4-equivalence [J]. *J Knot Theory Ramifications*, 1999, 8(3):261–263.
- [9] Livingston C, Moore A H. KnotInfo: Table of knot invariants [EB/OL]. <https://knotinfo.math.indiana.edu>.

The Jones Polynomial and 4-Moves

ZHANG Kai¹ YANG Zhiqing²

¹School of Statistics and Data Science, Jiangxi University of Finance and Economics, Nanchang 330013, China. E-mail: A0721zhangkai@163.com

²School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian 116024, Liaoning, China. E-mail: yangzhq@dlut.edu.cn

Abstract In this paper, the authors analyze the effect of a 4-move on the Jones polynomial $V_L(t)$ associated with an oriented link L . The authors show that if an oriented link L_1 with l components is 4-move equivalent to an oriented link L_2 , then their Jones polynomials satisfy $V_{L_1}(-1) - V_{L_2}(-1) = 4k$ if l is odd, and $V_{L_1}(-1) - V_{L_2}(-1) = 4ki$ if l is even, where $k \in \mathbb{Z}$, $i^2 = -1$. Moreover, if two knots K_1 and K_2 are 4-move equivalent, then $V'_{K_1}(-1) - V'_{K_2}(-1) = 4k$. These conclusions provide necessary conditions for determining whether a knot is 4-move equivalent to the trivial knot.

Keywords Jones polynomial, 4-Move, 4-Move equivalent

2020 MR Subject Classification 57K10, 57K12