

一些多项式 $x^n \pm cx^{n-1} \pm d$ 的不可约性研究*

郑 惠¹ 杨仕椿¹ 袁平之²

提要 设 n, c, d 为正整数, 满足 $n \geq 2$, 且 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$. 利用 Rouché 定理以及整系数多项式的牛顿多边形关于素数 p 的线段向量系统的结论, 讨论了三项整系数多项式 $x^n \pm cx^{n-1} \pm d$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的不可约性. 首先, 研究了多项式 $f(x) = x^n + \varepsilon_1 2^{r-1} x^{n-1} + \varepsilon_2 2^r$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的不可约性, 其中 r 为正整数. 其次, 研究了多项式 $g(x) = x^n + 4\varepsilon_1 x^{n-1} + 9\varepsilon_2$, $x^n + 2\varepsilon_1 x^{n-1} + 3\varepsilon_2$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的不可约性.

关键词 不可约性, 有理数域, 整系数多项式, 三项式

MR (2020) 主题分类 11C08, 12E05, 26C10

中图法分类 O156.1

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2026)01-0077-08

1 引 言

关于有理数域 $\mathbb{Q}$ 上多项式的不可约性的研究是一个经典的课题, 有着重要的理论意义和应用价值 (见 [1–2]). 但有理数域上大多数多项式的不可约性, 不能用经典的不可约性的方法来判定, 许多关于多项式的不可约性问题仍未解决 (见 [3–9]).

对于三项整系数多项式

$$f(x) = x^n + cx^{n-1} + d \quad (1.1)$$

在 $\mathbb{Q}$ 上的不可约性, 许多学者研究了常数项 d 为素数或素数幂的情形. 2012 年, Harrington 在文 [7] 中证明了如下结果.

定理 A 设 $n \geq 3$, $|d| \neq |c|$, $|d| \leq 2(|c| + 1)$, 且 $(n, c) \neq (3, 3)$. 若多项式 (1.1) 在 $\mathbb{Q}$ 上可约, 则 $f(x) = (x \pm 1)g(x)$, 其中 $g(x)$ 为 $\mathbb{Q}$ 上不可约多项式.

当 $|d| = |c|$ 时, Harrington 在文 [7] 中提出了如下猜想.

猜想 设 n, c 为正整数, 且 $n \geq 2$, 多项式 $f(x) = x^n \pm cx^{n-1} \pm c$, 若 $f(x) \neq x^2 + 4x + 4$ 且 $f(x) \neq x^2 - 4x + 4$, 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

2020 年, Sawin, Shusterman 和 Mtoll (见 [10]) 研究了多项式

$$f_N(x) = x^N c(x^{-1}) + d(x) \quad (1.2)$$

本文 2025 年 5 月 29 日收到, 2026 年 2 月 11 日收到修改稿.

¹阿坝师范学院数学学院, 四川 汶川 623002. E-mail: zh_9203@qq.com; ysc1020@sina.com

²通信作者. 华南师范大学数学科学学院, 广州 510631. E-mail: yuanpz@scnu.edu.cn

*本文受到国家自然科学基金 (No. 12361001, No. 12571003) 和阿坝师范学院校级课题 (No. AS-PYYB2023-08) 的资助.

在 $\mathbb{Q}$ 上的不可约性, 其中 $c(x), d(x) \in \mathbb{Z}[x]$, 获得了许多结论. 利用文 [10] 中的命题 7.6, 可直接推出以上猜想. 2023 年, 张伟霖和袁平之 (见 [11]) 研究了常数项为素数或素数幂的更多项多项式在 $\mathbb{Q}$ 上的不可约性, 并利用 Newton 多边形的性质, 给出了以上猜想的一个新证明 (见文 [11] 中的定理 1.9).

在文 [12] 中, 作者研究了多项式 $f(x) = x^n \pm cx^{n-1} \pm c$ 的不可约性, 获得了一些结论, 探讨了当 $2c - 1 \leq d < 3c$ 且 d 为奇数时, 以及当 $d = 2c$ 且 $c \neq 2^r$ (r 为正整数) 时, 多项式 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的不可约性.

本文运用文 [11] 中的思路、方法和结论, 结合 Rouché 定理以及整系数多项式的牛顿多边形关于素数 p 的线段向量系统的性质, 讨论了三项整系数多项式 $x^n \pm cx^{n-1} \pm d$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的不可约性, 研究了 $f(x) = x^n + \varepsilon_1 2^{r-1} x^{n-1} + \varepsilon_2 2^r$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的不可约性, 其中 r 为正整数, 以及多项式 $g(x) = x^n + 4\varepsilon_1 x^{n-1} + 9\varepsilon_2$, $x^n + 2\varepsilon_1 x^{n-1} + 3\varepsilon_2$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的不可约性, 其中 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{1, -1\}$, 从而解决了文 [12] 中的一些遗留问题.

2 一些引理

引理 2.1 (见 [3, 11]) 设多项式 $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $\alpha \in \mathbb{C}$, r 为正实数. 如果对任意的 z_0 满足 $z_0 \in \{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| = r\}$, 均有 $|g(z_0)| < |f(z_0)|$, 则 $f(x)$ 与 $f(x) + g(x)$ 在集合 $\{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| < r\}$ 中有相同的根.

证 见文 [3] 中 p125 的定理, 也可见文 [11] 中的 Rouché 定理.

引理 2.2 设多项式 $f(x) = x^n + \varepsilon_1 cx^{n-1} + \varepsilon_2 d \in \mathbb{Z}[x]$, 其中 $n \geq 4$, $0 < \delta \leq 1$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$, $d < c^n \delta (1 - \delta)^{n-1}$, 则

- (1) $f(x)$ 在 $\{z \in \mathbb{C} : |z + \varepsilon_1 c| < \delta c\}$ 中有唯一根;
- (2) 若 α 是 $f(x)$ 的根, 且 $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z + \varepsilon_1 c| < (1 - \delta)c\}$, 则 $|\alpha| \leq (\frac{d}{\delta c})^{\frac{1}{n-1}}$.

证 (1) 设 $g(x) = x^n + \varepsilon_1 cx^{n-1} = x^{n-1}(x + \varepsilon_1 c)$, $h(x) = \varepsilon_2 d$, 则 $f(x) = g(x) + h(x)$. 当 $z_0 \in \{z \in \mathbb{C} : |z + \varepsilon_1 c| = \delta c\}$ 时, 注意到 $n \geq 4$, 则有

$$\begin{aligned} |g(z_0)| &= |z_0|^{n-1} \cdot |z_0 + \varepsilon_1 c| = |- \varepsilon_1 c + (z_0 + \varepsilon_1 c)|^{n-1} \cdot |z_0 + \varepsilon_1 c| \\ &\geq (c - |z_0 + \varepsilon_1 c|)^{n-1} \cdot |z_0 + \varepsilon_1 c| = c^n \delta (1 - \delta)^{n-1} \\ &> d = |h(z_0)|. \end{aligned}$$

由引理 2.1 知, $g(x)$ 与 $g(x) + h(x) = f(x)$ 在 $\{z \in \mathbb{C} : |z + \varepsilon_1 c| < \delta c\}$ 中有相同的根, 又 $g(x)$ 只有一个根 $x = -\varepsilon_1 c \in \{z \in \mathbb{C} : |z + \varepsilon_1 c| < \delta c\}$, 所以, $f(x)$ 在 $\{z \in \mathbb{C} : |z + \varepsilon_1 c| < \delta c\}$ 中有唯一根.

- (2) 设 α 是 $f(x)$ 的根, 且 $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z + \varepsilon_1 c| < (1 - \delta)c\}$. 若 $|\alpha| > (1 - \delta)c$,

则

$$|\alpha + \varepsilon_1 c| = \frac{d}{|\alpha|^{n-1}} \leq \frac{d}{|(1-\delta)c|^{n-1}} \leq \frac{c^n \delta (1-\delta)^{n-1}}{c^{n-1} (1-\delta)^{n-1}} = c\delta,$$

故 $\alpha \in \{z \in \mathbb{C} : |z + \varepsilon_1 c| < c\delta\}$, 与条件矛盾, 则 $|\alpha| \leq (1-\delta)c$. 从而

$$|\alpha + \varepsilon_1 c| \geq c - |\alpha| \geq c - (1-\delta)c = \delta c.$$

故

$$|\alpha|^{n-1} = \frac{d}{|\alpha + \varepsilon_1 c|} \leq \frac{d}{\delta c}, \quad (2.1)$$

于是由 (2.1) 可得 $|\alpha| \leq (\frac{d}{\delta c})^{\frac{1}{n-1}}$.

因此, 引理 2.2 得证.

引理 2.3 (见 [4]) 设 p 为素数, 且 $f(x) = g(x)h(x)$, 其中 $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$, 则 $f(x)$ 的牛顿多边形关于 p 的线段向量系统, 即为 $g(x)$ 和 $h(x)$ 的牛顿多边形关于 p 的线段向量系统的并集.

证 可见文 [4] 中的结论, 也可见文 [11] 中的 Dumas 定理.

引理 2.4 (见 [13]) 设 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$ 是平面上的两个整点, 则线段 AB 上的整点个数为 $d+1$, 其中 $d = \gcd(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$. 特别地, 如果 $d = 1$, 那么除了点 A 和 B 之外, 线段 AB 上没有其他整点.

证 可见文 [13] 中的引理 4.1.

引理 2.5 (见 [11]) 设多项式 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{Z}[x]$ ($a_n \neq 0, n \geq 2$). 若存在素数 p , 满足 $p \nmid a_{n-1}, p \mid a_0, a_1, \cdots, a_{n-2}, p^2 \nmid a_0, p \nmid (a_{n-1} - b)$, 其中 $b \mid \frac{a_0 a_n}{p}$, 则 $f(x)$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

3 主要结果及其证明

定理 3.1 设 n, r 为正整数, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{1, -1\}$, 当 $r \geq 3$ 时, 三项整系数多项式

$$f(x) = x^n + \varepsilon_1 2^{r-1} x^{n-1} + \varepsilon_2 2^r \quad (3.1)$$

除

$$x^2 \pm 8x + 16 = (x \pm 4)^2, \quad x^3 \pm 4x^2 \mp 8 = (x \pm 2)(x^2 \pm 2x - 4)$$

之外, $f(x)$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

证 当 $n = 2$ 时, 多项式 (3.1) 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上可约的充要条件是 $(2^{r-1})^2 \pm 4 \cdot 2^{r-1}$ 为完全平方数. 令 $(2^{r-1})^2 \pm 4 \cdot 2^{r-1} = t^2, t \in \mathbb{Z}$, 则

$$(2^{r-1} \pm 4 + t)(2^{r-1} \pm 4 - t) = 16,$$

解得唯一正整数解 $r = 4$, 于是 $f(x) = x^2 \pm 8x + 16 = (x \pm 4)^2$. 因此, 除此之外, 多项式 $f(x)$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

当 $n = 3, 4$ 时, 设多项式 (3.1) 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上可约, 且含有因子 $x \pm a$, 其中 $a \in \mathbb{Z}$, 则满足

$$a^n + \varepsilon_1 2^{r-1} a^{n-1} + \varepsilon_2 2^r = 0,$$

于是 $a^{n-1} \mid 2^r$. 令 $a = 2^s$, $s \leq r$, 可得方程

$$2^{sn} + \varepsilon_1 2^{r-1+s(n-1)} + \varepsilon_2 2^r = 0. \quad (3.2)$$

下面分 3 种情形讨论. 当 $sn < r$ 时, 方程 (3.2) 化简为

$$1 + \varepsilon_1 2^{r-1-s} + \varepsilon_2 2^{r-sn} = 0,$$

则 $r - sn = 1$, $r - 1 - s = 0$, 于是 $n = 1$, 矛盾. 当 $sn = r$ 时, 方程 (3.2) 化简为

$$1 + \varepsilon_1 2^{s(n-1)-1} + \varepsilon_2 = 0,$$

则此时有 $s(n-1) - 1 = 1$, 所以 $n = 3$, $s = 1$, 从而 $r = 3$, 且

$$f(x) = x^3 \pm 4x^2 \mp 8 = (x \pm 2)(x^2 \pm 2x - 4).$$

当 $sn > r$ 时, 方程 (3.2) 化简为

$$2^{sn-r} + \varepsilon_1 2^{s(n-1)-1} + \varepsilon_2 = 0,$$

则 $sn - s = 1$, $s(n-1) - 1 = 0$, 于是 $n = 2$, $s = 1$, 同样出现矛盾. 因此, 除 $f(x) = x^3 \pm 4x^2 \mp 8$ 之外, 多项式 (3.1) 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

当 $n = 4$ 时, 设多项式 (3.1) 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上可约, 且含有二次整系数因子, 则 $f(x)$ 存在分解

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 + \varepsilon_1 2^{r-1} x^3 + \varepsilon_2 2^r \\ &= (x^2 + bx + c)(x^2 + dx + e) \\ &= x^4 + (d+b)x^3 + (e+c+bd)x^2 + (be+cd)x + ce, \end{aligned}$$

其中 $b, c, d, e \in \mathbb{Z}$, 则可得方程组

$$\begin{cases} d+b = \varepsilon_1 2^{r-1}, \\ e+c+bd = 0, \\ be+cd = 0, \\ ce = \varepsilon_2 2^r. \end{cases} \quad (3.3)$$

由 (3.3) 的最后一式可令 $c = \varepsilon_1 2^\lambda$, $e = \varepsilon_2 2^\mu$, 其中 λ, μ 为非负整数, 满足 $\lambda + \mu = r$, 且不妨设 $\lambda \geq \mu$. 代入 (3.3) 的第 3 式, 可得 $\varepsilon_2 2^\mu b + \varepsilon_1 2^\lambda d = 0$, 则 $b = \varepsilon_1 2^{\lambda-\mu} d$. 于是, 由 (3.3) 的第 2 式, 可得

$$\varepsilon_2 2^\mu + \varepsilon_1 2^\lambda + \varepsilon_2 2^{\lambda-\mu} d^2 = 0. \quad (3.4)$$

若 $\lambda > 2\mu$, 则由 (3.4), 可得

$$\varepsilon_2 + \varepsilon_1 2^{\lambda-\mu} + \varepsilon_2 2^{\lambda-2\mu} d^2 = 0,$$

则 $\lambda - \mu = 0$, $\lambda - 2\mu = 1$, 矛盾.

若 $\lambda \leq 2\mu$, 则由 (3.4), 可得 $\varepsilon_2 2^{2\mu-\lambda} + \varepsilon_1 2^\mu + \varepsilon_2 d^2 = 0$. 由 $\lambda \geq \mu$, 可得 $2\mu - \lambda \leq \mu$, 则

$$d^2 = \varepsilon_1 2^{2\mu-\lambda} + \varepsilon_2 2^\mu = 2^{2\mu-\lambda}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 2^{\lambda-\mu}). \quad (3.5)$$

下面分 2 种情况讨论方程 (3.5).

若 $2\mu - \lambda$ 为偶数, 则由 (3.5), 可得

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 2^{\lambda-\mu} = d_1^2,$$

其中 $d_1 = \frac{d}{2^{(2\mu-\lambda)/2}}$. 当 $\lambda - \mu = 0$ 时, 有 $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = d_1^2$, $d_1 = 0$, 则 $d = b = 0$, 由 (3.3) 的第一式可得矛盾. 当 $\lambda - \mu = 1$ 时, $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = 1$, $d_1 = \pm 1$, 则 $d = \varepsilon_1 2^{(2\mu-\lambda)/2} = \varepsilon_1 2^{(\mu-1)/2}$, $b = \varepsilon_1 2^{\lambda-\mu} d = \varepsilon_2 2^{(\mu+1)/2}$, 代入 (3.3) 的第一式, 可得

$$\varepsilon_1 2^{(\mu-1)/2} + \varepsilon_2 2^{(\mu+1)/2} = \varepsilon_1 2^{r-1} = \varepsilon_1 2^{2\mu},$$

则有 $\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 = \varepsilon_1 2^{(3\mu+1)/2}$, 矛盾. 当 $\lambda - \mu \geq 2$ 时, 由 Catalan 方程 $x^p - y^q = 1$ 的正整数解的结论, 可得 $\lambda - \mu = 3$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, $d_1 = \pm 3$. 于是 $d = 3\varepsilon_1 2^{(2\mu-\lambda)/2} = 3\varepsilon_1 2^{(\mu-3)/2}$, $b = \varepsilon_1 2^{\lambda-\mu} d = 3\varepsilon_2 2^{(\mu+3)/2}$, 代入 (3.3) 的第一式, 可得

$$3\varepsilon_1 2^{(\mu-3)/2} + 3\varepsilon_2 2^{(\mu+3)/2} = \varepsilon_1 2^{r-1} = \varepsilon_1 2^{2\mu+2},$$

也可推出矛盾.

若 $2\mu - \lambda$ 为奇数, 则由 (3.5), 可得

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 2^{\lambda-\mu} = 2d_1^2,$$

其中 $d_1 = \frac{d}{2^{(2\mu-\lambda-1)/2}}$. 由于 $d_1 = 0$ 将推出矛盾, 则 $|d_1| \geq 1$, 于是 $\lambda - \mu = 0$, 且 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, 则 $d_1 = \pm 1$, 于是 $d = \varepsilon_1 2^{(2\mu-\lambda-1)/2} = \varepsilon_1 2^{(\mu-1)/2}$, $b = \varepsilon_2 2^{\lambda-\mu} d = \varepsilon_2 2^{(\mu-1)/2}$, 代入 (3.3) 的第一式, 可得

$$\varepsilon_1 2^{(\mu-1)/2} + \varepsilon_2 2^{(\mu-1)/2} = \varepsilon_1 2^{r-1} = \varepsilon_1 2^{2\mu-1},$$

则 $\mu = 1$, $\lambda = 1$, 所以 $r = 2$, 矛盾.

以下设 $n \geq 5$. 因为多项式 (3.1) 对应的 2-牛顿多边形为由点 $A(0, r)$ 和 $B(n, 0)$ 构成的线段, 线段 AB 的直线方程为 $y = -\frac{r}{n}x + r$, 此线段除端点 A, B 外, 由引理 2.4 可得, 恰有 $d-1$ 个整数点将 AB 分成 d 条线段, 其中 $d = \gcd(r, n)$.

如果 $f(x) = f_1(x)f_2(x)$, 其中 $f_1(x), f_2(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 为首一多项式, $1 \leq \deg(f_1(x))$, $\deg(f_2(x)) < n$, 且 $d = \gcd(r, n)$, 则必有 $d \mid \gcd(\deg(f_1(x)), \deg(f_2(x)))$.

设

$$f_1(x) = b_0 + b_1x + \cdots + x^u, \quad f_2(x) = c_0 + c_1x + \cdots + x^v,$$

其中 $u = \deg(f_1(x))$, $v = \deg(f_2(x))$, 则常数项满足 $b_0c_0 = \pm 2^r$. 由引理 2.2, 令 $\delta = \frac{3}{4}$, 则 $f_1(x)$ 的所有根 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_u$ 均满足

$$|\alpha_i| \leq \left(\frac{8}{4 \times \frac{3}{4}} \right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\frac{8}{3} \right)^{\frac{1}{n-1}}, \quad 1 \leq i \leq u. \quad (3.6)$$

由 Vieta 定理及 (3.6), 可得

$$|b_0| = |\alpha_1| |\alpha_2| \cdots |\alpha_u| \leq \left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{u}{n-1}} < \frac{8}{3},$$

则 $|b_0| \leq 2$, 又由于 $b_0 \mid 2^r$, 从而 $|b_0| = 1, 2$.

当 $|b_0| = 1$ 时, 存在质数 2, 使得 $f_1(x)$ 的 2-牛顿多边形仅包含一条端点为 $(0, 0)$ 与 $(u, 0)$ 的线段, 其斜率为 0. 然而, 由引理 2.3-2.4 可得, $f(x)$ 的 2-牛顿多边形的所有线段都有斜率 $-\frac{v_2(2^{r-1})}{n} < 0$, 其中 $v_2(2^{r-1})$ 为 2^{r-1} 的 2 进赋值, 且 $2^{v_2(2^{r-1})} \mid 2^{r-1}$, $2^{v_2(2^{r-1})+1} \nmid 2^{r-1}$. 故由引理 2.4 可得矛盾.

当 $|b_0| = 2$ 时, 则 $d = r$, 且 $d \mid n$. 设 $n = ds = rs$, 则 $u = s$, 且由 (3.6), 可得

$$\left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{s}{n-1}} = \left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{s}{rs-1}} \geq 2, \quad (3.7)$$

因此

$$2^{3s} \geq 3^s \cdot 2^{rs-1},$$

故 $r \leq 2$, 矛盾.

因此, 定理 3.1 得证.

定理 3.2 设 n 为正整数, 且 $n \geq 2$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$, 则

(1) 多项式 $g_1(x) = x^n + 4\varepsilon_1 x^{n-1} + 9\varepsilon_2$ 中, 除

$$x^3 \pm 4x^2 \mp 9 = (x \pm 3)(x^2 \pm x - 3)$$

之外, $g_1(x)$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

(2) 多项式 $g_2(x) = x^n + 2\varepsilon_1 x^{n-1} + 3\varepsilon_2$ 中, 除

$$x^n + 2x^{n-1} - 3, \quad x^n - 2x^{n-1} - 3 (2 \mid n), \quad x^n - 2x^{n-1} + 3 (2 \nmid n)$$

之外, $g_2(x)$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

证 (1) 当 $n = 3$ 时, 设多项式 $g_1(x) = x^3 + 4\varepsilon_1 x^2 + 9\varepsilon_2$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上可约, 且含有一次因子 $x \pm a$, 其中 $a \in \mathbb{Z}$, 则有

$$g_1(x) = (x \pm a)(x^2 + bx + c).$$

展开后比较系数, 可得 $b \pm a = 4\varepsilon_1$, $c \pm ab = 0$, $\pm ac = 9\varepsilon_2$, 解得 $a = 3$, $b = 1$, $c = 3$, 即 $g_1(x) = x^3 \pm 4x^2 \mp 9 = (x \pm 3)(x^2 \pm x - 3)$.

当 n 为偶数时, 由引理 2.5 可得, 多项式 $f(x) = x^n + 4\varepsilon_1 x^{n-1} + 9\varepsilon_2$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

当 n 为奇数且 $n > 3$ 时, 设多项式 $g(x) = x^n + 4\varepsilon_1 x^{n-1} + 9\varepsilon_2$ 的 3-牛顿多边形为折线段 ABC , 其中 $A(0, 2)$, $B(n-1, 0)$, $C(n, 0)$. 由于 $g(x)$ 没有单整数根, 且 $n-1$ 为偶数, 则可设 $f(x) = f_1(x)f_2(x)$, 其中

$$\deg(f_1(x)) = \frac{n-1}{2}, \quad \deg(f_2(x)) = \frac{n+1}{2},$$

设 $f_1(x), f_2(x) \in \mathbb{Z}[x]$, 且 $f_1(x), f_2(x)$ 为首一多项式, 常数项绝对值均为 3, 由引理 2.2, 令 $\delta = \frac{5}{8}$, 从而

$$3 \leq \left(\frac{9}{4 \times \frac{5}{8}} \right)^{\frac{n+1}{2(n-1)}} = \left(\frac{18}{5} \right)^{\frac{n+1}{2n-2}}, \quad (3.8)$$

则 $n \leq 4$. 因此, 当 $n \geq 5$ 时, 多项式 $g(x)$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

(2) 对于多项式 $g_2(x) = x^n + 2\varepsilon_1 x^{n-1} + 3\varepsilon_2$, $x^n + 2x^{n-1} - 3$ 含有因子 $x - 1$, 多项式 $x^n - 2x^{n-1} - 3$ ($2 \mid n$), $x^n - 2x^{n-1} + 3$ ($2 \nmid n$) 含有因子 $x + 1$, 因此它们在上有理数域 $\mathbb{Q}$ 上均可约.

设 p 为素数且 $p \nmid a$, 多项式 $f(x) = x^n + \varepsilon_1 a x^{n-1} + \varepsilon_2 p$ 的 p -牛顿多边形为折线段 ABC , 其中端点坐标为 $A(0, 1)$, $B(n-1, 0)$, $C(n, 0)$. 根据 Dumas 定理可知, 多项式 $f(x)$ 或不可约, 或为一个一次式与一个不可约多项式之积. 因此, 多项式 $x^n - 2x^{n-1} + 3$ ($2 \mid n$), $x^n - 2x^{n-1} - 3$ ($2 \nmid n$), $x^n + 2x^{n-1} + 3$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

因此, 定理 3.2 得证.

参 考 文 献

- [1] Barbeau E J. Polynomials [M]. Problem Books in Mathematics, New York: Springer-Verlag, 2003.
- [2] Bonciocat N C. Schönemann-Eisenstein-Dumas-type irreducibility conditions that use arbitrarily many prime numbers [J]. *Commun Algebra*, 2015, 43(8):3102–3122.
- [3] Conway J B. Functions of one complex variable [M]. New York: Springer-Verlag, 1978.
- [4] Dumas G. Sur quelques cas d'irréductibilité des polynômes à coefficients rationnels [J]. *J Journal de Math Pure et Appl*, 1906, 2:191–258.
- [5] Filaseta M, Williams Jr R L. On the irreducibility of a certain class of Laguerre polynomials [J]. *J Number Theory*, 2003, 100:229–250.
- [6] Filaseta M, Trifonov O. The irreducibility of the Bessel polynomials [J]. *J Reine Angew Math*, 2002, 550:125–140.
- [7] Harrington J. On the factorization of the trinomials $x^n + cx^{n-1} + d$ [J]. *Int J Number Theory*, 2012, 8(6):1513–1518.
- [8] Koley B, Reddy A S. An irreducible class of polynomials over integers [J]. *J Ramanujan Math Soc*, 2022, 37(4):319–330.
- [9] Singh J, Kumar S. A new class of irreducible polynomials [J]. *Commun Algebra*, 2021, 49(6):2722–2727.

- [10] Sawin W, Shusterman M, Stoll M. Irreducibility of polynomials with a large gap [J]. *Acta Arith*, 2020, 192(2):111–139.
- [11] Zhang W, Yuan P. On two conjectures of irreducible polynomials [J]. *Commun Algebra*, 2023, 51(11):4879–4884.
- [12] 郑惠, 杨仕椿, 廖群英. 三项多项式 $x^n \pm cx^{n-1} \pm d$ 的不可约性 [J]. *数学进展*, 2025, 54(3):539–544.
- [13] Gao S. Absolute irreducibility of polynomials via Newton polytopes [J]. *J Algebra*, 2002, 237(2):501–520.

On the Irreducibility for Polynomial $x^n \pm cx^{n-1} \pm d$

ZHENG Hui¹ YANG Shichun¹ YUAN Pingzhi²

¹School of Mathematics, Aba Teacher's College, Wenchan 623002, Sichuan, China. E-mail: zh_9203@qq.com; ysc1020@sina.com

²Corresponding author. School of Mathematics Science, South China Normal University, Guangzhou 510631, China. E-mail: yuanpz@scnu.edu.cn

Abstract Let n, c, d be positive integers, and $n \geq 2$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$. Using Rouché's theorem and the result on the segment vector system of the Newton polygon of an integral coefficient polynomial with respect to prime p , the authors study the irreducibility for the polynomial $x^n \pm cx^{n-1} \pm d \in \mathbb{Z}[x]$. First, the authors study the irreducibility for the polynomial $f(x) = x^n + \varepsilon_1 2^{r-1} x^{n-1} + \varepsilon_2 2^r$, $r \in \mathbb{N}^+$. Second, the irreducibility of $g(x) = x^n + 4\varepsilon_1 x^{n-1} + 9\varepsilon_2$, $x^n + 2\varepsilon_1 x^{n-1} + 3\varepsilon_2$ is studied.

Keywords Irreducibility, Field of rational numbers, Polynomial with integral coefficients, Trinomials

2020 MR Subject Classification 11C08, 12E05, 26C10