数 学 年 刊 A 辑
2020, 41(3):279–282
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2020.0019

关于干扰序列的完备性*

方金辉[1]

提要 设 $S=\{s_1,s_2,\cdots\}$ 是正整数序列, α 是正实数, 令 $S_\alpha=\{\lfloor\alpha s_1\rfloor,\lfloor\alpha s_2\rfloor,\cdots\}$, 其中 $\lfloor x\rfloor$ 指的是不超过 x 的最大整数. 此序列 S_α 可以看成是 S 的干扰序列. 定义 $U_S=\{\alpha\mid\alpha$ 是实数且所有充分大的整数均可以表示为 S_α 中有限个互异项的和 $\}$. 2013 年, 通过改进 Hegyvári 的结果, Chen 和 Fang 证明了: 若 $s_{n+1}<\gamma s_n$ 对所有充分大的整数 n 均成立, 其中 $1<\gamma<2$, 而且 $U_S\neq\emptyset$, 则 $\mu(U_S)>0$, 其中 $\mu(U_S)$ 是 U_S 的 Lebesgue 测度. 本文得到了一个更强的结果.

关键词 完备性, 干扰序列, Hegyvári 定理
MR (2000) 主题分类 11B13, 11B75
中图法分类 O156.1
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2020)03-0279-04

1 引 言

对于非负整数序列 A, 令 $P(A)$ 表示 A 中有限个互异项的和构成的集合. 特别地, 当 A 是空集时, 有 $P(A)=0$. 若 $P(A)$ 能包含所有充分大的整数, 则我们称 A 是完备的.

设 $S=\{s_1,s_2,\cdots\}$ 是正整数序列, α 是正实数, 令 $S_\alpha=\{\lfloor\alpha s_1\rfloor,\lfloor\alpha s_2\rfloor,\cdots\}$, 其中 $\lfloor x\rfloor$ 指的是不超过 x 的最大整数. 此序列 S_α 可以看成是 S 的干扰序列. 我们想确定所有使得 S_α 完备的实数 α. 定义 $U_S=\{\alpha\mid\alpha$ 是实数且 S_α 完备$\}$. 1995 年, Hegyvári 证明了下述定理.

Hegyvári 定理 (见 [1]) 设正整数序列 $S=\{s_1<s_2<\cdots\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(s_{n+1}-s_n)=+\infty$ 且 $s_{n+1}<\gamma s_n$ 对所有充分大的整数 n 成立, 其中 $1<\gamma<2$. 若 $U_S\neq\emptyset$, 则 $\mu(U_S)>0$, 其中 $\mu(U_S)$ 是 U_S 的 Lebesgue 测度.

2013 年, Chen 和 Fang 去除条件 $\lim\limits_{n\to\infty}(s_{n+1}-s_n)=+\infty$, 证明了下面的定理.

定理 A (见 [2]) 设正整数序列 $S=\{s_1,s_2,\cdots\}$ 满足 $s_{n+1}<\gamma s_n$ 对所有充分的大整数 n 成立, 其中 $1<\gamma<2$. 若 $U_S\neq\emptyset$, 则 $\mu(U_S)>0$.

本文中, 我们证明了下述更强的定理.

定理 1.1 设正整数序列 $S=\{s_1\leqslant s_2\leqslant\cdots\}$ 满足 $s_{n+1}<2s_n-f(s_n)$ 对所有充分大的整数 n 成立, 其中 $f(x)\geqslant 0$ 是任何给定的单调递增函数且 $f(x)\to+\infty$. 若 $U_S\neq\emptyset$, 则 $\mu(U_S)>0$.

本文 2019 年 2 月 4 日收到.
[1]南京信息工程大学数学与统计学院, 南京 210044. E-mail: fangjinhui1114@163.com
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11671211) 的资助.

自然地, 我们提出以下猜想.

猜想 1.1 设正整数序列 $S=\{s_1,s_2,\cdots\}$ 满足 $s_{n+1}<2s_n$ 对所有充分大的整数 n 成立. 若 $U_S\neq\emptyset$, 则 $\mu(U_S)>0$.

对于相关结果, 可参考文 [3–10].

2 定理 1.1 的证明

引理 2.1 (见 [2, 引理 2.1]) 若某一个整数在序列 S 中重复了无穷多次, 则 $\mu(U_S)>0$.

定理 1.1 的证明 令 $f_1(x)=\min\left\{f(x),\frac{1}{2}x\right\}$, 则

$$s_{n+1}<2s_n-f(s_n)\leqslant 2s_n-f_1(s_n).$$

不失一般性, 可设 $f(x)\leqslant\frac{1}{2}x$.

由引理 2.1, 可以进一步假设 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=+\infty$. 若 $\limsup\limits_{n\to\infty}(s_{n+1}-s_n)<+\infty$, 可以参考文 [2] 中的证明. 因此, 现在只需考虑 $\limsup\limits_{n\to\infty}(s_{n+1}-s_n)=+\infty$.

令 $\alpha\in U_S$. 通过 U_S 的定义可知, 存在整数 $k>2$, 使得 $n\in P(S_\alpha)$ 对所有整数 $n\geqslant k$ 均成立. 注意到 $\limsup\limits_{n\to\infty}(s_{n+1}-s_n)=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, 且 $s_{n+1}<2s_n-f(s_n)$ 对所有充分大的整数 n 成立, 因此存在一个正整数 n_0, 使得

$$\min\{\alpha(s_{n_0+1}-s_{n_0})-1,\alpha f(s_{n_0}),\alpha s_{n_0}\}>k+2 \tag{2.1}$$

且

$$s_{n+1}<2s_n-f(s_n)\ \text{对所有}\ n\geqslant n_0\ \text{均成立.}$$

定义

$$\delta=\frac{\min\limits_{1\leqslant m\leqslant n_0}\{\lfloor\alpha s_m\rfloor+1-\alpha s_m\}}{s_{n_0}},$$

则 $\delta>0$. 同时, 注意到

$$\lfloor\alpha s_m\rfloor\leqslant\alpha s_m\leqslant\beta s_m<\alpha s_m+\delta s_m\leqslant\alpha s_m+\delta s_{n_0}\leqslant\lfloor\alpha s_m\rfloor+1,$$

可知: 对所有 $\beta\in[\alpha,\alpha+\delta)$, 有 $\lfloor\alpha s_m\rfloor=\lfloor\beta s_m\rfloor$ 对每个 $1\leqslant m\leqslant n_0$ 均成立.

接下来, 证明 $[\alpha,\alpha+\delta)\subseteq U_S$. 令 $\beta\in[\alpha,\alpha+\delta)$. 以下只需证明: 对所有 $n\geqslant k$ 均有 $n\in P(S_\beta)$. 假设不成立, 令 N 是使得上述命题不成立的最小整数.

若 $N-k\leqslant\lfloor\beta s_{n_0}\rfloor$, 则由 (2.1) 可得

$$N\leqslant k+\lfloor\beta s_{n_0}\rfloor=k+\lfloor\alpha s_{n_0}\rfloor\leqslant k+\alpha s_{n_0}<\alpha s_{n_0+1}-1<\lfloor\alpha s_{n_0+1}\rfloor.$$

因此, N 在 $P(S_\alpha)$ 分解中的每一项均不超过 $\lfloor\alpha s_{n_0}\rfloor$, 从而 $N\in P(S_\beta)$, 得出矛盾. 因此, $N-k>\lfloor\beta s_{n_0}\rfloor$. 令 m 是使得

$$\lfloor\beta s_m\rfloor<N-k\leqslant\lfloor\beta s_{m+1}\rfloor \tag{2.2}$$

成立的整数, 则 $m\geqslant n_0$.

下面证明是定理 1.1 的关键部分. 注意到 $s_{m+1} < 2s_m - f(s_m)$, 有

$$\begin{aligned}\lfloor \beta s_{m+1} \rfloor + k &\leqslant \beta s_{m+1} + k < 2\beta s_m - \beta f(s_m) + k \\ &< 2\lfloor \beta s_m \rfloor - (\beta f(s_m) - k - 2) \\ &< 2\lfloor \beta s_m \rfloor,\end{aligned}$$

其中最后一个不等式可由 (2.1) 和事实 $\beta f(s_m) \geqslant \alpha f(s_{n_0}) > k+2$ 得出.

结合 (2.2), 有 $\lfloor \beta s_m \rfloor + k < N < 2\lfloor \beta s_m \rfloor$, 即

$$k < N - \lfloor \beta s_m \rfloor < \lfloor \beta s_m \rfloor.$$

从而可由 N 的定义以及 $\beta s_m \geqslant \alpha s_{n_0} > 1$ 得出

$$N - \lfloor \beta s_m \rfloor \in P(S_\beta).$$

注意到 $N - \lfloor \beta s_m \rfloor < \lfloor \beta s_m \rfloor$, 有 $N - \lfloor \beta s_m \rfloor$ 在 $P(S_\beta)$ 分解中的每一项均不超过 $\lfloor \beta s_m \rfloor$, 从而

$$N = (N - \lfloor \beta s_m \rfloor) + \lfloor \beta s_m \rfloor \in P(S_\beta),$$

与 N 的定义矛盾. 因此 $[\alpha, \alpha+\delta) \subseteq U_S$, 从而 $\mu(U_S) \geqslant \delta > 0$. 定理 1.1 得证.

参　考　文　献

[1] Hegyvári N. Additive properties of sequences of multiplicatively perturbed square values [J]. *J Number Theory*, 1995, 54:248–260.

[2] Chen Y G, Fang J H. Hegyvári's theorem on complete sequences [J]. *J Number Theory*, 2013, 133:2857–2862.

[3] Birch B J. Note on a problem of Erdős [J]. *Proc Cambridge Philos Soc*, 1959, 55:370–373.

[4] Brown J L Jr. Note on complete sequences of integers [J]. *Amer Math Monthly*, 1961, 68:557–560.

[5] Burr S A, Erdős P, Graham R L, Li Wen-Ching. Complete sequences of sets of integer powers [J]. *Acta Arith*, 1996, 77:133–138.

[6] Chen Y G, Fang J H, Remark on the completeness of an exponential type sequence [J]. *Acta Math Hungar*, 2012, 136:189–195.

[7] Fang J H, Liu X Y. On complete sequences [J]. *Acta Math Hungar*, 2016, 148:211–221.

[8] Graham R L. Complete sequences of polynomial values [J]. *Duke Math J*, 1964, 31:275–285.

[9] Hegyvári N. Complete sequences in $\mathbf{N}^2$ [J]. *European J Combin*, 1996, 17:741–749.

[10] Hegyvári N. On the completeness of an exponential type sequence [J]. *Acta Math Hungar*, 2000, 86:127–135.

Note on the Completeness of Perturbed Sequences

FANG Jinhui[1]

[1]School of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, China. E-mail: fangjinhui1114@163.com

Abstract Let $S = \{s_1, s_2, \cdots\}$ be a sequence of positive integers and α be a positive real number. Denote S_α by the sequence $\{\lfloor \alpha s_1 \rfloor, \lfloor \alpha s_2 \rfloor, \cdots\}$, where $\lfloor x \rfloor$ denotes the greatest integer not greater than x. This sequence S_α can be viewed as a perturbed sequence of S. Let U_S be the set of all positive real numbers α such that all sufficiently large integers can be representable as the finite sum of distinct terms of S_α. In 2013, by improving a result of Hegyvári, Chen and Fang proved that: if $s_{n+1} < \gamma s_n$ for all sufficiently large integers n, where $1 < \gamma < 2$, and $U_S \neq \emptyset$, then $\mu(U_S) > 0$, where $\mu(U_S)$ is the Lebesgue measure of U_S. This paper obtains a stronger result.

Keywords Complete, Perturbed sequence, Hegyvári's theorem

2000 MR Subject Classification 11B13, 11B75

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 41 No. 3, 2020

by ALLERTON PRESS, INC., USA