数 学 年 刊A辑
2020, 41(3):299–308
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2020.0021

扭 Heisenberg-Virasoro 代数上 Hom-李代数结构*

乐露娜[1] 童文静[1] 刘 东[2]

提要 Hom-李代数是一类满足反对称和 Hom-Jacobi 等式的非结合代数. 扭 Heisenberg-Virasoro 代数是次数不超过 1 的微分算子代数的中心扩张, 它是一类重要的无限维李代数, 与一些曲线的模空间有关. 文章主要研究扭 Heisenberg-Virasoro 代数上 Hom-李代数结构, 确定了扭 Heisenberg-Virasoro 代数上存在非平凡的 Hom-李代数结构.

关键词 扭 Heisenberg-Virasoro 代数, Hom-李代数, 自同态
MR (2000) 主题分类 17B60, 17B63, 17B65
中图法分类 O152.5
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2020)03-0299-10

1 引 言

无限维李代数被广泛应用于物理及其他数学分支, 特别是 Heisenberg 代数、Virasoro 代数、扭 Heisenberg-Virasoro 代数等李代数被大量数学家及物理学家所关注. 扭 Heisenberg-Virasoro 代数是一类重要的无限维李代数, 是李代数 W 的普遍中心扩张, 与曲线的模空间有密切联系.

Hom-李代数是一类满足反对称和 Hom-Jacobi 等式的非结合代数, 起源于研究 Witt 代数和 Virasoro 代数形变理论 (参见文 [1] 等). 作为文 [1] 中首次引进的 q- 李代数概念的推广, Hartwig 和 Silvestrov 等在文 [2] 中正式提出 Hom-李代数的概念. 近来, Hom-李代数正在引起越来越大的关注 (参见文 [3–4] 等). 确定了一个李代数上的 Hom-李代数结构, 对于 Hom-李代数的分类是一件有意义的工作.

Virasoro 代数是一类重要的无限维李代数. 文 [5] 研究了 Virasoro 代数自同构与自同态, 文 [6] 在此基础上研究证明了 Virasoro 代数上的 Hom- 李代数结构是平凡的. 在 Virasoro 代数的基础上衍生出来的扭 Heisenberg-Virasoro 代数也是一类重要的无限维李代数, 它是次数不超过 1 的微分算子代数的中心扩张 (见 [7]). 近来, 许多文献对于扭 Heisenberg-Virasoro 代数的结构和表示理论进行了充分研究 (见 [8–13]). 到目前为止, 扭 Heisenberg-Virasoro 代数的 Hom-李代数结构仍未确定. 本文主要解决这个问题, 首先确定了扭 Heisenberg-Virasoro 代数的自同态环, 进而得到扭 Heisenberg-Virasoro 代数上的

本文 2018 年 9 月 25 日收到. 2020 年 5 月 11 日收到修改稿.
[1]湖州师范学院理学院, 浙江 湖州 313000. E-mail: 1628455751@qq.com; 1605368873@qq.com
[2]通信作者. 湖州师范学院理学院, 浙江 湖州 313000. E-mail: liudong@zjhu.edu.cn
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11971315, No. 11871249) 的资助.

所有 Hom-李代数结构. 本文研究可以帮助进一步确定其他相关李代数上的 Hom-李代数结构以及扭 Heisenberg-Virasoro 代数的其他结构. 在本文中, $\mathbb{C}$ 总表示复数域, $\mathbb{Z}$、$\mathbb{Z}^*$ 和 $\mathbb{N}$ 分别表示整数集、非零整数集和非负整数集, 所有的代数 (向量空间) 都定义在 $\mathbb{C}$ 上.

2 预备知识

本节主要介绍 Hom-李代数的基本概念以及扭 Heisenberg-Virasoro 代数的自同构群.

定义 2.1 [7] 作为复数域 $\mathbb{C}$ 上的向量空间, 扭 Heisenberg-Virasoro 代数 $\mathcal{L}$ 有一组基 $\{L_m, I_m, C, C', C'' \mid m \in \mathbb{Z}\}$, 且满足如下关系式:

$$[L_m, L_n] = (n-m)L_{m+n} + \delta_{m+n,0}\frac{(m^3-m)}{12}C, \tag{2.1}$$

$$[L_m, I_n] = nI_{m+n} + \delta_{m+n,0}(m^2-m)C', \tag{2.2}$$

$$[I_m, I_n] = \delta_{m+n,0}mC'', \tag{2.3}$$

$$[\mathcal{L}, C] = [\mathcal{L}, C'] = [\mathcal{L}, C''] = 0, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}. \tag{2.4}$$

显然, Virasoro 代数 Vir$=$ $\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{L_m, C \mid m \in \mathbb{Z}\}$ 是 $\mathcal{L}$ 的子代数. $\mathcal{L}$ 有 4 维的中心 $\mathcal{Z} = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{I_0, C, C', C''\}$. 同时, $\mathcal{L}$ 有一个自然的 $\mathbb{Z}$-分次, $\mathcal{L} = \bigoplus\limits_{m\in\mathbb{Z}} \mathcal{L}_m$, 其中 $\mathcal{L}_m = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{L_m, I_m\} \oplus \delta_{m,0}\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{C, C', C''\}$.

设 $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ 是 $\mathbb{C}$ 上的 Laurent 多项式代数, 记 $\mathcal{G}$ 为 $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ 上的微分算子李代数. 令 $D = t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 则 $\mathcal{G} = \mathbb{C}\{t^mD^n \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$, 满足

$$[t^mD^n, t^{m_1}D^{n_1}] = t^{m+m_1}\Big(\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}m_1^iD^{n+n_1-i} - \sum_{j=1}^{n_1}\binom{n_1}{j}m^jD^{n+n_1-j}\Big).$$

令 W 为李代数 $\mathcal{G}$ 的由 $\{t^m, t^mD \mid m \in \mathbb{Z}\}$ 生成的李子代数, 则 $\mathcal{L}$ 可以看作是 W 的泛中心扩张 $(t^m \to I_m, t^mD \to L_m)$.

许多论文研究了扭 Heisenberg-Virasoro 代数 $\mathcal{L}$ 的结构与表示理论 (见 [7–13] 等). 文 [10] 给出了扭 Heisenberg-Virasoro 代数的自同构群.

定理 2.1 [10] 扭 Heisenberg-Virasoro 代数 $\mathcal{L}$ 的任一自同构 $\tau: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ 都有如下形式:

$$\begin{aligned}
\tau(L_n) &= \varepsilon a^nL_{\varepsilon n} + a^n(cn+d)I_{\varepsilon n} + \delta_{n,0}(\varepsilon c+d)C' + \delta_{n,0}\frac{\varepsilon}{2}(c^2-d^2)C'',\\
\tau(I_n) &= a^nbI_{\varepsilon n} + \delta_{n,0}b[(1-\varepsilon)C' - (\varepsilon c+\varepsilon d)C''],\\
\tau(C) &= \varepsilon C - 24\varepsilon cC' - 12\varepsilon c^2C'',\\
\tau(C') &= \varepsilon bC' + \varepsilon bcC'',\\
\tau(C'') &= \varepsilon b^2C'', \quad \forall n \in \mathbb{Z},
\end{aligned}$$

其中 $a, b \in \mathbb{C}^*$, $c, d \in \mathbb{C}$, $\varepsilon \in \{\pm1\}$.

在文 [2] 中, Hartwig 等利用 σ-导子研究 Witt 代数和 Virasoro 代数的形变理论时, 介绍了一类满足反对称和 σ-扭 Jacobi 等式的非结合代数, 称之为 Hom-李代数.

定义 2.2 [2] 一个 Hom-李代数 (L,σ) 就是一个非结合代数 $(L,[,])$ 以及一个代数同态 $\sigma: L \to L$, 且满足如下关系式:

(1) $[x,y]=-[y,x]$;

(2) $[\sigma(x),[y,z]]+[\sigma(y),[z,x]]+[\sigma(z),[x,y]]=0$,

$\forall x,y,z \in L$.

注 2.1 当我们讨论 Hom-李代数 (L,σ) 时, 总假设 $\sigma \neq 0$. 当 $\sigma = id$ 时, Hom-李代数就是通常的李代数, 这时也称 Hom-李代数 (L,id) 为平凡的.

定理 2.2 [5] Virasoro 代数 Vir 上的任一非零自同态 $\sigma: \mathrm{Vir} \to \mathrm{Vir}$ 都有如下形式:

$$\begin{aligned}\sigma(L_n) &= \frac{1}{k}a^n L_{kn} + \delta_{n,0}\frac{1-k^2}{24k}C,\\ \sigma(C) &= kC, \quad \forall n \in \mathbb{Z},\end{aligned}$$

其中 $k \in \mathbb{Z}^*$, $a \in \mathbb{C}^*$.

定理 2.3 [6] Virasoro 代数 Vir 上的任一 Hom-李代数结构 (Vir,σ) 都是平凡的, 即 $\sigma = id$.

本文通过确定扭 Heisenberg-Virasoro 代数的自同态环, 进而给出扭 Heisenberg-Virasoro 代数上所有的 Hom-李代数结构.

3 扭 Heisenberg-Virasoro 代数 $\mathcal{L}$ 的自同态

本节首先确定了李代数 W(无中心扭 Heisenberg-Virasoro 代数) 的自同态环, 从而进一步得到扭 Heisenberg-Virasoro 代数 $\mathcal{L}$ 的自同态环.

引理 3.1 李代数 W 任一非零自同态 $\varphi: W \to W$ 都有如下形式:

$$\varphi(L_n) = \frac{1}{k}a^n L_{kn} + a^n(cn+d)I_{kn}, \tag{3.1}$$

$$\varphi(I_n) = a^n b I_{kn}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{3.2}$$

其中 $k \in \mathbb{Z}^*$, $a,b,c,d \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

证 显然, φ 是一个李代数同态.

反之, 设 σ 是李代数 W 的任一自同态, 根据定理 2.2 及简单运算, 可设

$$\varphi(L_n) = \frac{1}{k}a^n L_{kn} + f_n I_{kn}, \tag{3.3}$$

$$\varphi(I_n) = g_n I_{kn}, \tag{3.4}$$

其中 $k \in \mathbb{Z}^*$, $a \in \mathbb{C}^*$, $f_n, g_n \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

(i) 计算 f_n. 注意到

$$\varphi([L_m,L_n]) = [\varphi(L_m),\varphi(L_n)], \tag{3.5}$$

由于

$$\begin{aligned}\varphi([L_m,L_n]) &= (n-m)\varphi(L_{m+n})\\ &= (n-m)\Big(\frac{1}{k}a^{m+n}L_{km+kn}+f_{m+n}I_{km+kn}\Big)\\ &= \frac{1}{k}(n-m)a^{m+n}L_{km+kn}+(n-m)f_{m+n}I_{km+kn},\\ [\varphi(L_m),\varphi(L_n)] &= \Big[\frac{1}{k}a^mL_{km}+f_mI_{km},\frac{1}{k}a^nL_{kn}+f_nI_{kn}\Big]\\ &= \frac{1}{k^2}a^{m+n}[L_{km},L_{kn}]+\frac{1}{k}a^mf_n[L_{km},I_{kn}]+\frac{1}{k}a^nf_m[I_{km},L_{kn}]\\ &= \frac{1}{k}a^{m+n}(n-m)L_{km+kn}+a^mnf_nI_{km+kn}-a^nmf_mI_{km+kn}\\ &= \frac{1}{k}(n-m)a^{m+n}L_{km+kn}+(a^mnf_n-a^nmf_m)I_{km+kn},\end{aligned}$$

根据 (3.5) 式得到

$$(n-m)f_{m+n}=a^mnf_n-a^nmf_m. \tag{3.6}$$

在 (3.6) 式中取 $m=1$, 得到

$$(n-1)f_{n+1}=naf_n-a^nf_1. \tag{3.7}$$

(3.7) 式左右两边同除以 $(n-1)na^{n+1}$, 得到

$$\frac{f_{n+1}}{na^{n+1}}=\frac{f_n}{(n-1)a^n}-\frac{f_1}{n(n-1)a},$$

从而

$$f_n=a^n(cn+d), \tag{3.8}$$

其中 $c,d\in\mathbb{C}$.

(ii) 计算 g_n. 注意到

$$\varphi([L_m,I_n])=[\varphi(L_m),\varphi(I_n)], \tag{3.9}$$

由于

$$\begin{aligned}\varphi([L_m,I_n]) &= n\varphi(I_{m+n})=ng_{m+n}I_{km+kn},\\ [\varphi(L_m),\varphi(I_n)] &= \Big[\frac{1}{k}a^mL_{km}+a^m(cm+d)I_{kn},g_nI_{kn}\Big]\\ &= \frac{1}{k}a^mg_n[L_{km},I_{kn}]=a^mng_nI_{km+kn}.\end{aligned}$$

根据 (3.9) 式得到

$$g_{m+n}=a^mg_n, \tag{3.10}$$

从而

$$g_n=a^nb. \tag{3.11}$$

将 (3.8) 式、(3.11) 式分别代入 (3.3) 式、(3.4) 式, 即可得到 (3.1) 式和 (3.2) 式. 结论得证.

定理 3.1 扭 Heisenberg-Virasoro 代数 $\mathcal{L}$ 的任一非零自同态 φ 都有如下形式:

$$\begin{aligned}\varphi(L_n) &= \frac{1}{k}a^n L_{kn} + a^n(cn+d)I_{kn} + \delta_{n,0}\frac{1-k^2}{24k}C \\ &\quad + \delta_{n,0}(ck+d)C' + \delta_{n,0}\frac{k}{2}(c^2-d^2)C'', \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\varphi(I_n) = a^n b I_{kn} + \delta_{n,0} b((1-k)C' - (kc+kd)C''), \tag{3.13}$$

$$\varphi(C) = kC - 24kcC' - 12kc^2C'', \tag{3.14}$$

$$\varphi(C') = kbC' + kbcC'', \tag{3.15}$$

$$\varphi(C'') = kb^2C'', \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{3.16}$$

其中 $k \in \mathbb{Z}^*$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

证 设 φ 是扭 Heisenberg-Virasoro 代数 $\mathcal{L}$ 的任一自同态, 由引理 3.1 知, 当 $n \neq 0$ 时,

$$\varphi(L_n) = \frac{1}{k}a^n L_{kn} + a^n(cn+d)I_{kn}, \tag{3.17}$$

$$\varphi(I_n) = a^n b I_{kn}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{3.18}$$

其中 $k \in \mathbb{Z}^*$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

下面主要计算 φ 在 $\mathcal{L}_0$ 上的像.

(i) 计算 $\varphi(L_0)$, $\varphi(C)$. 注意到

$$\varphi([L_{-m}, L_m]) = [\varphi(L_{-m}), \varphi(L_m)], \tag{3.19}$$

由于

$$\begin{aligned}[\varphi(L_{-m}), \varphi(L_m)] &= \Big[\frac{1}{k}a^{-m}L_{-km} + a^{-m}(cm+d)I_{-km}, \frac{1}{k}a^{-m}L_{-km} + a^{-m}(cm+d)I_{-km}\Big] \\ &= \frac{1}{k^2}[L_{-km}, L_{km}] + \frac{1}{k}(cm+d)[L_{-km}, I_{km}] + \frac{1}{k}(cm+d)[I_{-km}, L_{km}] \\ &\quad + (-cm+d)(cm+d)[I_{-km}, I_{km}] \\ &= \frac{1}{k^2}\Big(2kmL_0 + \frac{km-k^3m^3}{12}C'\Big) + \frac{1}{k}(cm+d)(kmI_0 + (k^2m^2+km)C') \\ &\quad - \frac{1}{k}(-cm+d)(-kmI_0 + (k^2m^2-km)C') \\ &\quad + (-cm+d)(cm+d)(-kmC'') \\ &= \frac{2m}{k}L_0 + 2dmI_0 + \frac{m-k^2m^3}{12k}C + 2(ckm^3+dm)C' + (c^2km^3 - d^2km)C'', \end{aligned}$$

$$\varphi([L_{-m}, L_m]) = 2m\varphi(L_0) + \frac{m-m^3}{12}\varphi(C),$$

根据 (3.19) 式, 得到

$$\begin{aligned}&\frac{2m}{k}L_0 + 2dmI_0 + \frac{m-k^2m^3}{12k}C + 2(ckm^3+dm)C' + (c^2km^3 - d^2km)C'' \\ &= 2m\varphi(L_0) + \frac{m-m^3}{12}\varphi(C). \end{aligned} \tag{3.20}$$

令 (3.20) 式中 $m=1$, 得到

$$\varphi(L_0)=\frac{1}{k}L_0+dI_0+\frac{1-k^2}{24k}C+(ck+d)C'+\frac{1}{2}(c^2k-d^2k)C''. \tag{3.21}$$

将 (3.21) 式回代到 (3.20) 式中, 化简得到

$$\varphi(C)=kC-24ckC'-12c^2kC''. \tag{3.22}$$

(ii) 计算 $\varphi(I_0),\varphi(C')$. 注意到

$$\varphi([L_{-m},I_m])=[\varphi(L_{-m}),\varphi(I_m)], \tag{3.23}$$

由于

$$\begin{aligned}[\varphi(L_{-m}),\varphi(I_m)]&=\Big[\frac{1}{k}a^{-m}L_{-km}+a^{-m}(-cm+d)I_{-km},a^mbI_{km}\Big]\\&=\frac{1}{k}b[L_{-km},I_{km}]+(-cm+d)b[I_{-km},I_{km}]\\&=\frac{1}{k}b(kmI_0+(k^2m^2+km)C')+(-cm+d)b(-km)C''\\&=bmI_0+(kbm^2+bm)C'+(kbcm^2-kbdm)C'',\\ \varphi([L_{-m},I_m])&=m\varphi(I_0)+(m^2+m)\varphi(C'),\end{aligned}$$

根据 (3.23) 式, 于是得到

$$bmI_0+(kbm^2+bm)C'+(kbcm^2-kbdm)C''=m\varphi(I_0)+(m^2+m)\varphi(C'). \tag{3.24}$$

令 (3.24) 式中 $m=-1$, 得到

$$\varphi(I_0)=bI_0+(-kb+b)C'+(-kbc-kbd)C''. \tag{3.25}$$

将 (3.25) 式回代到 (3.24) 式, 化简得到

$$\varphi(C')=kbC'+kbcC''. \tag{3.26}$$

(iii) 计算 $\varphi(C'')$. 注意到

$$\varphi([I_m,I_{-m}])=[\varphi(I_m),\varphi(I_{-m})], \tag{3.27}$$

即

$$m\varphi(C'')=[\varphi(I_m),\varphi(I_{-m})]. \tag{3.28}$$

令 (3.28) 式中 $m=1$, 于是得到

$$\varphi(C'')=[\varphi(I_1),\varphi(I_{-1})]=\varphi([I_1,I_{-1}])=\Big[abI_k,\frac{b}{a}I_{-k}\Big]=b^2[I_k,I_{-k}]=kb^2C''. \tag{3.29}$$

结论得证.

4 扭 Heisenberg-Virasoro 代数 $\mathcal{L}$ 上 Hom-李代数结构

本节主要给出扭 Heisenberg-Virasoro 代数 $\mathcal{L}$ 上 Hom-李代数结构, 首先讨论无中心的扭 Heisenberg-Virasoro 代数 W 上 Hom-李代数结构.

定理 4.1　对于无中心的扭 Heisenberg-Virasoro 代数 W, 如果 (W,σ) 是一个 Hom-李代数, 则

$$\sigma(L_n)=L_n+dI_n,$$
$$\sigma(I_n)=I_n,\quad \forall n\in\mathbb{Z},$$

其中 $d\in\mathbb{C}$. 也就是说, 李代数 W 上存在非平凡的 Hom-李代数结构.

证　由引理 3.1 知, W 的非零自同态 σ 有以下形式:

$$\sigma(L_n)=\frac{1}{k}a^nL_{kn}+a^n(cn+d)I_{kn},$$
$$\sigma(I_n)=a^nbI_{kn},\quad \forall n\in\mathbb{Z},$$

其中 $k\in\mathbb{Z}^*,\ a,b,c,d\in\mathbb{C},\ a\neq 0$.

因为 W 是李代数, 所以对任意的 $r,s,t\in\mathbb{Z}$, σ-扭 Jacobi 等式变为

$$[\sigma(L_r),[L_s,L_t]]+[\sigma(L_s),[L_t,L_r]]+[\sigma(L_t),[L_r,L_s]]=0,\tag{4.1}$$
$$[\sigma(L_r),[L_s,I_t]]+[\sigma(L_s),[I_t,L_r]]+[\sigma(I_t),[L_r,L_s]]=0,\tag{4.2}$$
$$[\sigma(L_r),[I_s,I_t]]+[\sigma(I_s),[I_t,L_r]]+[\sigma(I_t),[L_r,I_s]]=0,\tag{4.3}$$
$$[\sigma(I_r),[I_s,I_t]]+[\sigma(I_s),[I_t,I_r]]+[\sigma(I_t),[I_r,I_s]]=0,\tag{4.4}$$

其中

$$\begin{aligned}[\sigma(L_r),[L_s,L_t]]&=\Big[\frac{1}{k}a^rL_{kr}+a^r(cr+d)I_{kr},(t-s)L_{s+t}\Big]\\&=\frac{1}{k}a^r(t-s)[L_{kr},L_{s+t}]+a^r(t-s)(cr+d)[I_{kr},I_{s+t}]\\&=\frac{1}{k}a^r(t-s)(s+t-kr)L_{kr+s+t}L_{kr+s+t}-a^rkr(t-s)(cr+d)I_{kr+s+t}\\&=\frac{1}{k}a^r(t^2-s^2-krt+krs)L_{kr+s+t}\\&\quad-a^rk(cr^2t+drt-cr^2s-drs)I_{kr+s+t},\end{aligned}\tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}[\sigma(L_s),[L_t,L_r]]&=\frac{1}{k}a^s(r^2-t^2-krs+kst)L_{ks+t+r}\\&\quad-a^sk(crs^2+drs-cs^2t-dst)I_{ks+t+r},\end{aligned}\tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}[\sigma(L_t),[L_r,L_s]]&=\frac{1}{k}a^t(s^2-r^2-kst+krt)L_{kt+r+s}\\&\quad-a^tk(cst^2+dst-crt^2-drt)I_{kt+r+s},\end{aligned}\tag{4.7}$$

$$[\sigma(L_r),[L_s,I_t]]=\Big[\frac{1}{k}a^rL_{kr}+a^r(cr+d)I_{kr},tI_{s+t}\Big]=\frac{1}{k}a^r(st+t^2)I_{kr+s+t},\tag{4.8}$$

$$[\sigma(L_s),[I_t,L_r]]=\Big[\frac{1}{k}a^sL_{ks}+a^s(cs+d)I_{ks},-tI_{r+t}\Big]=-\frac{1}{k}a^s(rt+t^2)I_{ks+t+r},\tag{4.9}$$

$$[\sigma(I_t),[L_r,L_s]]=[a^tbI_{kt},(s-r)L_{r+s}]=a^tbkt(r-s)I_{kt+r+s},\tag{4.10}$$

$$[\sigma(L_r),[I_s,I_t]]=\Big[\frac{1}{k}a^rL_{kr}+a^r(cr+d)I_{kr},0\Big]=0,\tag{4.11}$$

$$[\sigma(I_s),[I_t,L_r]]=[a^sbI_{ks},-tI_{r+t}]=-a^sbt[I_{ks},I_{r+t}]=0,\tag{4.12}$$

$$[\sigma(I_t),[L_r,I_s]]=[a^tbI_{kt},sI_{r+s}]=a^tbs[I_{kt},I_{r+s}]=0,\tag{4.13}$$

$$[\sigma(I_r),[I_s,I_t]]=[\sigma(I_s),[I_t,I_r]]=[\sigma(I_t),[I_r,I_s]]=0.\tag{4.14}$$

将 (4.5)–(4.14) 式代入 (4.1)–(4.4) 式, 由于 r,s,t 是任意整数, 特别地取 $r=1,s=2,t=3$, 则 (4.1) 式和 (4.2) 式变为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{k}a(5-k)L_{k+5}+\frac{1}{k}a^2(4k-8)L_{2k+4}+\frac{1}{k}a^3(3-3k)L_{3k+3}\\&-a(c+d)kI_{k+5}+4a^2(2c+d)kI_{2k+4}-3a^3(3c+d)kI_{3k+3}=0,\\&\frac{15a}{k}I_{k+5}+\frac{12a^2}{k}I_{2k+4}+3a_3bkI_{3k+3}=0.\end{aligned}$$

由于 $k\in\mathbb{Z}^*$, $L_i,I_i(i\in\mathbb{Z})$ 是基元, 则必有 $k=1$. 同时得到

$$\begin{aligned}&(4a-4a^2)L_6+[-a(c+d)+4a^2(2c+d)-3a^3(3c+d)]I_6=0,\\&(15a-12a^2-3a^3b)I_6=0,\end{aligned}$$

也就是

$$\begin{cases}4a-4a^2=0,\\-a(c+d)+4a^2(2c+d)-3a^3(3c+d)=0,\\15a-12a^2-3a^3b=0.\end{cases}$$

由于 $a\neq 0$, 我们得到 $a=1,b=1,c=0$, 因此

$$\begin{aligned}\sigma(L_n)&=L_n+dI_n,\\\sigma(I_n)&=I_n,\quad\forall n\in\mathbb{Z},\end{aligned}$$

其中 $d\in\mathbb{C}$.

推论 4.1 对于扭 Heisenberg-Virasoro 代数 $\mathcal{L}$, 如果 $(\mathcal{L},\sigma)$ 是一个 Hom-李代数, 则

$$\begin{aligned}\sigma(L_n)&=L_n+dI_n+\delta_{n,0}dC'-\delta_{n,0}\frac{d^2}{2}C'',\\\sigma(I_n)&=I_n-\delta_{n,0}dC'',\\\sigma(C)&=C,\\\sigma(C')&=C',\\\sigma(C'')&=C'',\quad\forall n\in\mathbb{Z},\end{aligned}$$

其中 $d\in\mathbb{C}$. 也就是说, 扭 Heisenberg-Virasoro 代数上存在非平凡的 Hom-李代数结构.

证 由定理 3.1 知, $\mathcal{L}$ 的非零自同态 σ 只有如下形式:

$$\begin{aligned}\sigma(L_n)&=\frac{1}{k}a^nL_{kn}+a^n(cn+d)I_{kn}+\delta_{n,0}\frac{1-k^2}{24k}C\\&\quad+\delta_{n,0}(ck+d)C'+\delta_{n,0}\frac{k}{2}(c^2-d^2)C'',\\\sigma(I_n)&=a^nbI_{kn}+\delta_{n,0}b((1-k)C'-(kc+kd)C''),\\\sigma(C)&=kC-24kcC'-12kc^2C'',\end{aligned}$$

$$\sigma(C') = kbC' + kbcC'',$$

$$\sigma(C'') = kb^2C'', \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

其中 $k \in \mathbb{Z}^*$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

根据定理 4.1 得到 $k = 1, a = 1, b = 1, c = 0$, 从而得到扭 Heisenberg-Virasoro 代数上非平凡的 Hom-李代数结构.

参　考　文　献

[1] Hu N H. q-Witt algebras, q-Lie algebras, q-holomorph structure and representations [J]. *Algebra Colloq*, 1999, 6(1):51–70.

[2] Hartwig J T, Larsson D, Silvestrov S D. Deformations of Lie algebras using σ-derivations [J]. *Journal of Algebra*, 2006, 295(2):314–361.

[3] Jin Q Q, Li X C. Hom-structures on semi-simple Lie algebras [J]. *Journal of Algebra*, 2008, 319 (4):1398–1408.

[4] Makhlouf A, Zusmanovich P. Hom-Lie structures on Kac-Moody algebras [J]. *Journal of Algebra*, 2018, 515:278–297.

[5] 赵开明Virasoro 代数的自同构和自同态 [J]. 系统科学与数学, 1992, 1:1–4.

[6] 李小朝Virasoro 代数的 Hom- 李代数结构 [J]. 周口师范学院学报, 2009, 26(5):3–4.

[7] Arbarello E, Concini C, Kac V, et al. Moduli spaces of curves and representation theory [J]. *Commun Math Phys*, 1988, 117:1–36.

[8] Hu N H, Liu D. Decompositions of bosonic modules of Lie algebras $W_{1+\infty}$ and $W_{1+\infty}(gl_N)$ [J]. *Chin Ann Math Ser B*, 2005, 26(4):633–642.

[9] Liu D, Jiang C P. Harish-Chandra modules over the twisted Heisenberg-Virasoro algebra [J]. *J Math Phys*, 2008, 49, 012901, 13 pp.

[10] Shen R, Jiang C P. The derivation algebra and automorphism group of the twisted Heisenberg-Virasoro algebra [J]. *Communications in Algebra*, 2006, 34:2547–2558.

[11] Lv R C, Zhao K M. Classification of irreducible weight modules over the twisted Heisenberg-Virasoro algebra [J]. *Commun Contemp Math*, 2010, 12(2):183–205.

[12] 赵晓晓, 高寿兰, 刘东. 扭 Heisenberg-Virasoro 代数上的 Poisson 结构 [J]. 数学学报 (中文版), 2016, 59(6):775–782.

[13] Liu D, Pei Y F. Deformations on the twisted Heisenberg-Virasoro algebra [J]. *Chin Ann Math Ser B*, 2019, 40(1):1–6.

Hom-Lie Algebra Structures on the Twisted Heisenberg-Virasoro Algebra

LE Luna[1] TONG Wenjing[1] LIU Dong[2]

[1]School of Science, Huzhou University, Huzhou 313000, Zhejiang, China. E-mail: 1628455751@qq.com; 1605368873@qq.com

[2]Corresponding author. School of Science, Huzhou University, Huzhou 313000, Zhejiang, China. E-mail: liudong@zjhu.edu.cn

Abstract Hom-Lie algebra is an anticommutative algebra with a multiplication such that the Hom-Jacobi identity holds. The twisted Heisenberg-Virasoro algebra $\mathcal{L}$ is the universal central extension of the Lie algebra W of differential operators of order at most one, which is connected with certain moduli spaces of curves. This paper mainly determines all Hom-Lie algebra structures on the twisted Heisenberg-Virasoro algebra $\mathcal{L}$ and gets some nontrivial Hom-Lie algebra structures on $\mathcal{L}$.

Keywords Twisted Heisenberg-Virasoro algebra, Hom-Lie algebra, Endomorphism

2000 MR Subject Classification 17B60, 17B63, 17B65

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 41 No. 3, 2020

by ALLERTON PRESS, INC., USA