数 学 年 刊 A 辑
2020, 41(3):331–356
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2020.0024

带有终端限制的平均场正倒向随机时滞控制系统的最大值原理以及在平均场对策中的应用*

郝 涛[1]

提要 研究带有时滞和终端状态限制的平均场正倒向随机控制系统的一个最优控制问题. 驱动系统的系数依赖于解、解的时滞以及它们的分布. 利用 Lions 导数, 终端扰动方法以及 Ekeland 变分原则, 得到了两种随机最大值原理. 通过研究一个线性二次问题和一个生产 - 消费最优选取的平均场对策问题, 对这一理论结果进行了阐述说明.

关键词 平均场正倒向时滞控制系统, 随机最大值原理, 终端扰动方法, Ekeland 变分, 平均场对策
MR (2000) 主题分类 93E20, 60H10
中图法分类 O232
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2020)03-0331-26

1 引 言

当带有平均场相互作用的随机微粒系统的规模非常大时, 平均场模型就会出现. 人们通过研究这类模型的渐进行为来对它们进行分析. 这种经典的方法被广泛应用于各种领域, 像统计力学、物理学、量子力学和量子化学. 最近 Lasry 和 Lions[1] 介绍了一种新的一般的数学模型方法, 并应用这种方法解决了金融、经济和对策理论中的许多问题. 受他们工作所启发, Buckdahn, Djehiche, Li 和 Peng[2] 在研究一个特殊的平均场问题时得到了一种新的倒向随机微分方程 —— 平均场倒向随机微分方程. 他们的工作吸引了大量的学者从事平均场正倒向随机微分方程方面的研究. 例如, Buckdahn, Li 和 Peng[3] 在经典假设下证明了平均场倒向随机微分方程解的存在唯一性, 得到了平均场型的非线性 Feynman-Kac 公式. Li[4] 使用两种方法研究了反射平均场倒向随机微分方程解的存在性, 建立了反射平均场倒向随机微分方程和非线性抛物型非局部偏微分方程的一个障碍问题之间的关系. 许多平均场随机最大值原理方面的工作也得以发表, 参见文 [5–8]. Lions[9] 在法国法兰西学院的讲稿中, 介绍了一个函数关于具有有限二阶矩测度的一阶导数的定义. 读者也可以参考 Cardaliaguet[10] 编辑的笔记. 从那时起, 很多学者研究了这类系数依赖于解的分布的平均场正倒向随机微分方程及其应用, 像 Carmona 和 Delarue[11−12],

本文 2017 年 8 月 30 日收到, 2020 年 5 月 17 日收到修改稿.
[1]山东财经大学统计学院, 济南 250014. E-mail: taohao@sdufe.edu.cn
*本文受到国家自然科学基金 (No. 71671104, No. 11871309, No. 11801315, No. 11801317, No. 71803097), 教育部人文社会科学项目 (No. 16YJA910003), 山东省自然科学基金 (No. ZR2018QA001, No. ZR2019MA013), 山东省高等学校科技计划项目 (No. J17KA162, No. J17KA163), 山东财经大学金融统计和风险管理团队, 山东省高等学校青创科技计划 (No. 2019KJI011) 的资助.

Bensoussan, Frehse 和 Yam[13], Buckdahn, Li, Peng 和 Rainer[14], Cardaliaguet, Delarue, Lasry 和 Lions[15], Chassagneux, Crisan 和 Delarue[16].

另一方面， Ji 和 Zhou[17] 考虑了带状态限制的随机控制中的一个公开问题，即正向随机微分方程的终端状态受限于一个凸集．利用 El Karoui, Peng 和 Quenez[18] 介绍的终端扰动方法，和 Bielecki, Jin, Pliska 和 Zhou[19] 使用的对偶方法，原始的控制系统被重新写成一个纯粹的倒向系统．利用 Ekeland 变分原则 (见 [20]), 作者得到了带终端状态限制的最优控制的随机最大值原理． Wei[21] 在平均场框架下考虑了类似的控制问题．需要指出的是，在文 [21] 中驱动系统的系数依赖于解的期望，而不是解的分布．

众所周知，随机微分时滞方程在很多领域都会被频繁遇到，像在人口统计学中模型化人口的规模和在金融中模型化在 t 时刻的投资额．在这些情况中，当前值 $X(t)$, 时滞值 $X(t-\delta)$ 和 $X(t)$ 在某个时间段上的平均值都会影响到 t 时刻的增长量．随机微分时滞方程的最优控制问题已经被很多学者所研究，参见文 [22–27]. 最近 Wen 和 Shi[28] 得到了由带有终端状态限制的随机微分时滞方程驱动的随机控制问题的一个最大值原理．受 Wen 和 Shi[28] 以及 Lions[9] 工作所启发，本文研究由带有终端状态限制的一般型平均场正倒向随机微分时滞方程所驱动的一个最优控制问题．具体来说，我们考虑下面的平均场正倒向随机时滞系统．对于给定的 $u\in\mathcal{U}_{ad}[0,T]$,

$$\begin{cases}\mathrm{d}X_t=\overline{b}(t,\Pi_t,u_t,P_{\Pi_t})\mathrm{d}t+\overline{\sigma}(t,\Pi_t,u_t,P_{\Pi_t})\mathrm{d}W_t, & t\in[0,T],\\ X_t=\varphi_t, & t\in[-\delta,0],\end{cases}\tag{1.1}$$

$$\begin{cases}-\mathrm{d}Y_t=\overline{f}(t,\Lambda_t,u_t,P_{\Lambda_t})\mathrm{d}t-Z_t\mathrm{d}W_t, \quad t\in[0,T],\\ Y_T=\Phi(X_T,P_{X_T}),\end{cases}\tag{1.2}$$

这里 φ_t 是定义在 $[-\delta,0]$ 上的一个给定的连续函数; $\Pi_t=(X_t,A_t,B_t)$, $\Lambda_t=(X_t,A_t,B_t,Y_t,Z_t)$; P_ξ 表示随机变量 ξ 的分布． $\mathcal{U}_{ad}[0,T]$ 的定义和 $\overline{b}$, $\overline{\sigma}$, $\overline{f}$ 的具体假设参考第三节．注意 A_t 是带有给定时滞 $\delta>0$ 的 X 的泛函， B_t 是带有给定平均参数 ρ 的 X 的轨道部分 $\{X(t+s)\mid s\in[-\delta,0]\}$. 最优问题是

$$\text{最小化 }\overline{J}(u(\cdot))\text{ 受制于 }u(\cdot)\in\mathcal{U}_{ad};\ X_T\in K,\ \text{a.s.},\tag{1.3}$$

这里 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸子集．价值泛函为

$$\overline{J}(u(\cdot)):=E\Big[\int_0^T\overline{h}(t,\Lambda_t,u_t,P_{\Lambda_t})\mathrm{d}t+\psi(X_T,P_{X_T})+\ell(Y_0)\Big].\tag{1.4}$$

我们将会在 $(\overline{\sigma},\overline{h})$ 依赖于 $(A,B,P_{(A,B)})$ 以及独立于它们这两种情况下研究上述最优控制问题的最大值原理．两种类型的随机最大值原理 (见定理 4.3, 定理 4.4) 被证明，并利用这一理论结果解决了一个线性二次问题和一个生产 – 消费最优选取的平均场对策问题．

本文有三点区别于现存的工作．首先，与文 [17, 28] 相比较，平均场正向随机微分方程的扩散系数不仅依赖于解、解的时滞，而且还依赖于他们的分布．其次，不像文 [21], 控制系统 (1.1)–(1.2) 和价值泛函 (1.4) 的系数依赖于解的分布，而不是期望值．从这一点来看，定理 4.3 和定理 4.4 覆盖了文 [21] 中的主要结果．最后，考虑了一个生产 – 消费最优选取的平均场对策问题，得到了这一平均场对策的渐进纳什均衡存在的必要条件．

本文组织如下．第二节介绍了 Lions 导数，一些符号和基本假设．在第三节中，带状态限制的原始控制问题被重新写成一个辅助的优化问题．变分方程、相应的变分不等式和两个最大值原理在第四节中被介绍．第五节用来研究一个线性二次问题．第六节介绍了一个生产 – 消费最优选取平均场对策问题，并给出了这一平均场对策渐进纳什均衡的必要条件．最后一节给出几个结论性注释．

2 预备知识

2.1 Lions 导数

令 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上的波莱尔 σ- 代数．令 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ 表示 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上具有有限二阶矩 $\int_{\mathbb{R}^d}|x|^2\nu(\mathrm{d}x) < \infty$ 的所有概率测度组成的空间．假设空间 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ 被赋予下面的 2-Wasserstein 度量：

$$\begin{aligned} W_2(\nu_1,\nu_2) = \inf\Big\{\Big(\int_{\mathbb{R}^{2d}}|x-y|^2\pi(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)\Big)^{\frac{1}{2}},\ \pi\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^{2d})\ \text{且} \\ \pi(A\times\mathbb{R}^d)=\nu_1(A),\ \pi(\mathbb{R}^d\times B)=\nu_2(B),\ \forall A,B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\Big\}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

现在介绍一个定义在 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ 上的函数 h 的导数概念．这里我们采用 Lions[9] 给出的定义 (或者参考 Cardaliaguet[10] 编辑的笔记). 读者也可以参考文 [11]．一个函数 $h:\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)\to\mathbb{R}$ 被称为在 $\nu_0\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ 处可导，如果存在一个 $\xi_0\in L^2(\mathcal{F};\mathbb{R}^d)$, 满足 $\nu_0=P_{\xi_0}$, 使得函数 $\widetilde{h}(\xi):=h(P_\xi)$, $\xi\in L^2(\mathcal{F};\mathbb{R}^d)$ 在点 ξ_0 处是 Fréchet 可导的，即存在一个连续线性映射 $D\widetilde{h}(\xi_0):L^2(\mathcal{F};\mathbb{R}^d)\to\mathbb{R}$ $(D\widetilde{h}(\xi_0)\in L(L^2(\mathcal{F};\mathbb{R}^d);\mathbb{R}))$, 使得对于 $\eta\in L^2(\mathcal{F};\mathbb{R}^d)$, 当 $|\eta|_{L^2}\to 0$ 时，

$$\widetilde{h}(\xi_0+\eta)-\widetilde{h}(\xi_0)=D\widetilde{h}(\xi_0)(\eta)+o(|\eta|_{L^2}). \tag{2.2}$$

因为 $D\widetilde{h}(\xi_0)\in L(L^2(\mathcal{F};\mathbb{R}^d);\mathbb{R})$, 由 Riesz 表示定理可知, 存在一个随机变量 $\eta_0\in L^2(\mathcal{F};\mathbb{R}^d)$, 使得 $D\widetilde{h}(\xi_0)(\eta)=E[\eta_0\cdot\eta]$, $\forall\eta\in L^2(\mathcal{F};\mathbb{R}^d)$. Cardaliaguet [10] 证明了存在一个波莱尔函数 $g_0:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$, 满足 $g_0(\xi_0)=\eta_0$, 并且证明了这个函数 g_0 仅仅依赖于 ξ_0 的分布，而不是 ξ_0 本身．根据 $\widetilde{h}$ 定义和上面论述， (2.2) 可以重新写成

$$h(P_{\xi_0+\eta})-h(P_\eta)=E[g_0(\xi_0)\cdot\eta]+o(|\eta|_{L^2}),\quad \forall\eta\in L^2(\mathcal{F};\mathbb{R}^d).$$

Lions[9](或见 [10]) 称这一函数 $g_0(y)$, $y\in\mathbb{R}^d$ 是 $f:\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)\to\mathbb{R}$ 在 ν_0 处的导数，记为 $\partial_\nu h(P_{\xi_0},y)$, 即 $\partial_\nu h(P_{\xi_0},y)=g_0(y)$, $y\in\mathbb{R}^d$.

在本文的框架中，我们需要函数 $h:\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)\to\mathbb{R}$ 关于 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ 中的所有元素都可导．为了简化陈述，假设 $\widetilde{h}:L^2(\mathcal{F};\mathbb{R}^d)\to\mathbb{R}$ 在 $L^2(\mathcal{F};\mathbb{R}^d)$ 上是 Fréchet 可导的．

2.2 符号和假设

令 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 是一个完备的概率空间．一个 d- 维的布朗运动 $W(=(W^1,\cdots,W^d))=(W_t)_{t\in[0,T]}$ 定义在这一空间上，其中 T 是一个任意给定的常数．假定 $\mathcal{F}^*$ 是 $\mathcal{F}$ 中一个足够丰富的子 σ- 代数，并满足：

(i) 布朗运动 W 独立于 $\mathcal{F}^*$;

(ii) $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)=\{P_\xi,\ \xi\in L^2(\mathcal{F}^*;\mathbb{R}^d)\}$;

(iii) $\mathcal{F}^*\supset\mathcal{N}$, 这里 $\mathcal{N}$ 是所有 P- 零子集构成的集合.

$\mathbb{F}=\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ 表示由 W 生成的信息流，并被 $\mathcal{F}^*$ 所完备化，即 $\mathcal{F}_t=\sigma\{B_s,\ 0\leqslant s\leqslant t\}\vee\mathcal{F}^*,\ t\in[0,T]$.

下面两个空间被频繁用到.

$$\mathcal{M}^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}^d):=\Big\{\psi:[0,T]\times\Omega\to\mathbb{R}^d\,\Big|\,(\psi_t)_{0\leqslant t\leqslant T}\text{是一个 }\mathbb{F}\text{- 适应过程，满足}\\ \|\psi\|^2=E\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\psi_t|^2\Big]<+\infty\Big\}.$$

$$\mathcal{H}^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}^d):=\Big\{\psi:[0,T]\times\Omega\to\mathbb{R}^d\,\Big|\,(\psi_t)_{0\leqslant t\leqslant T}\text{是一个 }\mathbb{F}\text{- 循序可测过程，满足}\\ \|\psi\|^2=E\int_0^T|\psi_t|^2\mathrm{d}t<\infty\Big\}.$$

现在介绍倒向随机微分时滞方程解的存在唯一性. 假设 $f:\Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n\times d}\times\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^{3n})\to\mathbb{R}^n$, 满足:

(H2.1) $E\int_0^T|f(t,0,0,0,0,\delta_{\mathbf{0}})|^2\mathrm{d}t<\infty$, 这里 $\delta_{\mathbf{0}}$ 是在 $3n$- 维零向量处的 Dirac 测度.

(H2.2)(李普希兹) f 是 $\mathbb{F}$- 适应的和对于 $y_i,a_i,b_i\in\mathbb{R}^n$, $z_i\in\mathbb{R}^{n\times d}$, $\nu_i\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^{3n})$, $i=1,2$,

$$\begin{aligned}&|f(t,y_1,a_1,b_1,z_1,\nu_1)-f(t,y_2,a_2,b_2,z_2,\nu_2)|\\ \leqslant{}& L(|y_1-y_2|+|a_1-a_2|+|b_1-b_2|+\|z_1-z_2\|+W_2(\nu_1,\nu_2)).\end{aligned}$$

注 2.1 (i) 因为平均场倒向随机微分方程的系数依赖于解的分布，所以在 (H2.2) 中假设 f 关于测度 ν 是李普希兹的. 类似于经典情况， (H2.2) 中的李普希兹假设保证了平均场倒向随机微分时滞方程解的存在唯一性. 如果假设 (H2.2) 不成立，下面的平均场倒向随机微分方程 (2.3) 也许不存在唯一解，见文 [29, p.67] 中经典随机微分方程的反例.

(ii) 假设 (H2.1) 和 (H2.2) 潜在地暗示着映射 f 关于 (x,a,b,z,ν) 是线性增长的. 因此， (H2.1) 和 (H2.2) 的作用在于确保平均场倒向随机微分时滞方程的解不会爆炸. 如果线性增长条件不成立，下面方程 (2.3) 的解也许会在 $[0,T]$ 上发生爆炸，参考文 [29, p.66] 中经典随机微分方程的反例.

引理 2.1 令 $\xi\in L^2(\mathcal{F}_T;\mathbb{R}^n)$ 和令 $\varphi.,\phi.$ 是两个给定的连续函数. 在假设 (H2.1) 和 (H2.2) 下，对足够小的 $\delta>0$, 下面的平均场倒向随机微分时滞方程

$$\begin{cases}-\mathrm{d}Y_t=f\Big(t,Y_t,Y_{t-\delta},\displaystyle\int_{t-\delta}^t\mathrm{e}^{-\rho(t-s)}Y_s\mathrm{d}s,Z_s,P_{\Pi_t}\Big)\mathrm{d}t-Z_t\mathrm{d}W_t,\quad t\in[0,T],\\ Y_T=\xi,\ Y_t=\varphi_t,\ Z_t=\phi_t,\quad t\in[-\delta,0),\end{cases}\tag{2.3}$$

其中 $\Pi_t=(Y_t,Y_{t-\delta},\int_{t-\delta}^t\mathrm{e}^{-\rho(t-s)}Y_s\mathrm{d}s)$, 存在唯一解 $(Y.,Z.)\in\mathcal{M}^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}^n)\times\mathcal{H}^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}^{n\times d})$.

证 介绍 Banach 空间中的范数:

$$\|\psi.\|^2_\gamma=E\Big[\int_{-\delta}^T\mathrm{e}^{\gamma r}|\psi_r|^2\mathrm{d}r\Big],\quad\gamma>0.$$

对于给定的 $(y,z)\in\mathcal{H}_{\mathbb{F}}^2(-\delta,T;\mathbb{R}^{n+n\times d})$, 考虑

$$\begin{cases}Y_t=\xi+\displaystyle\int_t^T f(\pi_s,z_s,P_{\pi_s})\mathrm{d}s-\int_t^T Z_s\mathrm{d}W_s,\quad t\in[0,T],\\ Y_t=\varphi_t,\ Z_t=\phi_t,\quad t\in[-\delta,0),\end{cases}\tag{2.4}$$

这里 $\pi_s=(y_s,y_{s-\delta},\int_{s-\delta}^s \mathrm{e}^{-\rho(s-r)}y_r\mathrm{d}r)$. 方程 (2.4) 是一个经典的倒向随机微分方程. 它存在唯一解 (Y,Z). 由此，可以定义一个映射 $\Gamma:\mathcal{H}_{\mathbb{F}}^2(-\delta,T:\mathbb{R}^{n+n\times d})\to\mathcal{H}_{\mathbb{F}}^2(-\delta,T:\mathbb{R}^{n+n\times d})$ 满足 $\Gamma(y.,z.)=(Y.,Z.)$. 接下来证明映射 Γ 在范数 $\|\cdot\|_\gamma$ 下是一个压缩映射. 假设 $(y^i,z^i)\in\mathcal{H}_{\mathbb{F}}^2(-\delta,T;\mathbb{R}^{n+n\times d})$, $i=1,2$, 和定义 $(Y^i,Z^i)=\Gamma(y^i,z^i)$, $i=1,2$. 将它们的差记为

$$(\Delta Y,\Delta Z)=(Y^1-Y^2,Z^1-Z^2),\quad(\Delta y,\Delta z)=(y^1-y^2,z^1-z^2).$$

对 $\mathrm{e}^{\gamma s}|\Delta Y_s|^2$ 应用伊藤公式，可以得到

$$\begin{aligned}&E\Big[\int_0^T \mathrm{e}^{\gamma s}\Big(\frac{\gamma}{2}|\Delta Y_s|^2+|\Delta Z_s|^2\Big)\mathrm{d}s\Big]\\&\leqslant\frac{2}{\gamma}E\Big[\int_0^T \mathrm{e}^{\gamma s}|f(s,\pi_s^1,z_s^1,P_{\pi_s^1})-f(s,\pi_s^2,z_s^2,P_{\pi_s^2})|^2\mathrm{d}s\Big],\end{aligned}\tag{2.5}$$

这里 $\pi_s^i=(y_s^i,y_{s-\delta}^i,\int_{s-\delta}^s \mathrm{e}^{-\rho(s-r)}y_r^i\mathrm{d}r)$, $i=1,2$.

由 f 关于 (y,a,b,z,ν) 是李普希兹连续的，可知

$$\begin{aligned}&E\Big[\int_0^T \mathrm{e}^{\gamma s}\Big(\frac{\gamma}{2}|\Delta Y_s|^2+|\Delta Z_s|^2\Big)\mathrm{d}s\Big]\\&\leqslant\frac{10L^2}{\gamma}E\Big[\int_0^T \mathrm{e}^{\gamma s}\Big(|\Delta y_s|^2+|\Delta y_{s-\delta}|^2+\Big|\int_{s-\delta}^s \mathrm{e}^{-\rho(s-r)}\Delta y_r\mathrm{d}r\Big|^2\\&\quad+|\Delta z_s|^2+W_2(P_{\pi_s^1},P_{\pi_s^1})^2\Big)\mathrm{d}s\Big].\end{aligned}\tag{2.6}$$

回忆 $W_2(P_\xi,P_\eta)^2\leqslant E|\xi-\eta|^2$, $\xi,\eta\in L^2(\Omega,\mathcal{F},P;\mathbb{R}^n)$, 可得

$$\begin{aligned}&E\Big[\int_0^T \mathrm{e}^{\gamma s}\Big(\frac{\gamma}{2}|\Delta Y_s|^2+|\Delta Z_s|^2\Big)\mathrm{d}s\Big]\\&\leqslant\frac{20L^2}{\gamma}E\Big[\int_0^T \mathrm{e}^{\gamma s}\Big(|\Delta y_s|^2+|\Delta y_{s-\delta}|^2+\Big|\int_{s-\delta}^s \mathrm{e}^{-\rho(s-r)}\Delta y_r\mathrm{d}r\Big|^2+|\Delta z_s|^2\Big)\mathrm{d}s\Big].\end{aligned}\tag{2.7}$$

进一步，注意到

$$E\Big[\int_0^T \mathrm{e}^{\gamma s}|\Delta y_{s-\delta}|^2\Big]\leqslant\mathrm{e}^{\gamma\delta}E\Big[\int_{-\delta}^T \mathrm{e}^{\gamma s}|\Delta y_s|^2\mathrm{d}s\Big]\tag{2.8}$$

和

$$E\Big[\int_0^T \mathrm{e}^{\gamma s}\Big|\int_{s-\delta}^s \mathrm{e}^{-\rho(s-r)}\Delta y_r\mathrm{d}r\Big|^2\Big]\leqslant\frac{1-\mathrm{e}^{-2\rho\delta}}{2\rho}\mathrm{e}^{\gamma\delta}TE\Big[\int_{-\delta}^T \mathrm{e}^{\gamma s}|\Delta y_s|^2\mathrm{d}s\Big],\tag{2.9}$$

可知

$$\begin{aligned}&E\Big[\int_0^T \mathrm{e}^{\gamma s}\Big(\frac{\gamma}{2}|\Delta Y_s|^2+|\Delta Z_s|^2\Big)\mathrm{d}s\Big]\\&\leqslant\frac{20L^2}{\gamma}\Big(1+\mathrm{e}^{\gamma\delta}+\frac{1-\mathrm{e}^{-2\rho\delta}}{2\rho}\mathrm{e}^{\gamma\delta}T\Big)E\Big[\int_{-\delta}^T \mathrm{e}^{\gamma s}(|\Delta y_s|^2+|\Delta z_s|^2)\mathrm{d}s\Big].\end{aligned}\tag{2.10}$$

取 $\gamma=\frac{1}{\delta}$, 如果 δ 足够小，则有

$$\frac{20L^2}{\gamma}\Big(1+\mathrm{e}^{\gamma\delta}+\frac{1-\mathrm{e}^{-2\rho\delta}}{2\rho}\mathrm{e}^{\gamma\delta}T\Big)=20L^2\delta\Big(1+\mathrm{e}+\frac{1-\mathrm{e}^{-2\rho\delta}}{2\rho}\mathrm{e}T\Big)<1,$$

这意味着 Γ 是一个压缩映射．根据不动点定理，可知 $(Y,Z)\in\mathcal{H}_{\mathbb{F}}^2(-\delta,T:\mathbb{R}^{n+n\times d})$. 最后，根据 Burkholder-Davis-Gundy 不等式和假设 (H2.1), 可以证明 $Y\in\mathcal{M}_{\mathbb{F}}^2(-\delta,T;\mathbb{R}^n)$.

3 问题公式化

3.1 原始的控制问题

本小节首先证明了系统 (1.1)–(1.2) 是适定的，然后公式化带有时滞和终端状态限制的原始控制问题．通过将平均场正倒向随机微分时滞方程重新写成两个纯粹的平均场倒向随机微分时滞方程，我们将原始的状态受限问题转换成控制受限问题．这样就可以借助经典方法处理这一问题．

定义在 $[0,T]$ 上的一个过程被称为可容许控制，如果 $u(\cdot)$ 是一个 $\mathcal{F}_t$- 适应的 $\mathbb{R}^{n\times d}$-值过程，且满足 $u(\cdot)\in\mathcal{M}_{\mathbb{F}}^2(0,T;\mathbb{R}^{n\times d})$. 用 $\mathcal{U}_{ad}[0,T]$ 表示所有可容许控制．

假设

$(\overline{b},\overline{\sigma}):[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n\times d}\times\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^{3n})\to(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n\times d})$,

$(\overline{f},\overline{h}):[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times d}\times\mathbb{R}^{n\times d}\times\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^{3n+m+m\times d})\to(\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$,

$\Phi:\mathbb{R}^n\times\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^m,\quad \psi:\mathbb{R}^n\times\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R},\quad \ell:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$

满足：

(H3.1) $\overline{b}$, $\overline{\sigma}$, $\overline{f}$, $\overline{h}$, Φ, ψ, ℓ 关于各自的变量是连续的, 并且关于 (x,a,b,y,z,u,μ) 是连续可微的；对于 $t\in[0,T]$, $u_t\in\mathcal{U}_{ad}[0,T]$, $E[|\overline{b}(t,0,0,0,u_t,\delta_{\mathbf{0}})|^2+|\overline{\sigma}(t,0,0,0,u_t,\delta_{\mathbf{0}})|^2]<\infty$, 这里 $\delta_{\mathbf{0}}$ 表示在 $\mathbb{R}^{3n}$- 维零向量处的 Dirac 测度．

(H3.2) $\overline{b}$, $\overline{\sigma}$, $\overline{f}$, Φ, $\overline{h}$, ψ, ℓ 关于 (x,a,b,y,z,u,μ) 的导数是有界的，其界记为 $L>0$; $(\overline{b}_k,\overline{\sigma}_k,\overline{f}_k,\overline{h}_k,\psi_k)(t,x,a,b,y,z,u,\mu)$, $k=x,a,b,y,z,u$ 关于 (x,a,b,y,z,μ) 是李普希兹连续的，$(\overline{b}_\mu,\overline{\sigma}_\mu)(t,x,a,b,u,\mu,y')$,$(\overline{f}_\mu,\overline{h}_\mu)(t,x,a,b,y,z,u,\mu,y')$, $\psi_\mu(x,\mu,y')$ 关于 (x,a,b,y,z,μ,y') 是李普希兹连续的．

注 3.1 (i) (H3.2) 中 $\overline{b}$, $\overline{\sigma}$, $\overline{f}$, Φ, $\overline{h}$, ψ, ℓ 关于 (x,a,b,y,z,u,μ) 的导数是有界的，意味着映射 $\overline{b}$, $\overline{\sigma}$, $\overline{f}$, Φ, $\overline{h}$, ψ, ℓ 关于它们各自的变量是李普希兹连续的．利用这一结论，可以证明方程 (1.1)–(1.2) 解的存在唯一性．正如在注 2.1(i) 所陈述的，如果没有这一假设，方程 (1.1)–(1.2) 解的存在唯一性也许不成立，见文 [29] 中的反例．

(ii) 下面第四节中的变分方程 (4.1) 是一个解耦的线性平均场正倒向随机微分方程．它的系数是 g,f,Φ (或者 $\overline{b},\overline{f},\Phi$) 关于其变量的导数．为了得到方程 (4.1) 解的适定性，我们需要假设 $\overline{b}$, $\overline{\sigma}$, $\overline{f}$, Φ, $\overline{h}$, ψ, ℓ 关于 (x,a,b,y,z,u,μ) 的导数是有界的．类似于上面的 (i), 如果没有这一假设，方程 (4.1) 解的适定性也许无法建立，见文 [29].

(iii) 在我们的分析中, 估计 (4.2) 起着非常重要的作用. 它的证明主要基于系数 g,f,Φ (或者 $\overline{b},\overline{f},\Phi$) 的一阶泰勒展开式和 g,f,Φ 关于其变量导数的连续性．因此，假设 (H3.2)

能保证过程 $\frac{1}{\lambda}[X_t^{\xi^\lambda}-X_t^{\xi^0}]$ 和变分方程 (4.1) 的解 ΔX_t 之间的距离足够小，这里 $X_\cdot^{\xi^\lambda}$ (相应地，$X_\cdot^{\xi^0}$) 是带有 ξ^λ(相应地，ξ^λ) 的 (3.2) 的解 (见下面的引理 3.1).

引理 3.1　在假设 (H3.1), (H3.2) 下，令 φ 在 $[-\delta,0]$ 是 $\mathcal{F}_0$- 可测的，并且满足

$$E\Big[\sup_{t\in[-\delta,0]}|\varphi_t|^2\Big]<\infty,$$

则对于任何的 $u\in\mathcal{U}_{ad}[0,T]$, 方程 (1.1)–(1.2) 存在唯一解

$$(X_\cdot,Y_\cdot,Z_\cdot)\in\mathcal{M}_{\mathbb{F}}^2(-\delta,T;\mathbb{R}^n)\times\mathcal{M}_{\mathbb{F}}^2(-\delta,T;\mathbb{R}^m)\times\mathcal{H}_{\mathbb{F}}^2(-\delta,T;\mathbb{R}^{m\times d}).$$

证　考虑空间 $\mathcal{H}_{\mathbb{F}}^2(-\delta,T;\mathbb{R}^n)$ 上 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{F}}^2}$ 的等价范数

$$\|h(\cdot)\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{F}}^2,\gamma}=E\Big[\int_{-\delta}^T\mathrm{e}^{-\gamma\tau}|h(\tau)|^2\mathrm{d}\tau\Big]^{\frac{1}{2}},\quad \gamma>0.$$

在此范数下可以更加方便地应用压缩映像原理.

对任何给定的 $x_\cdot\in\mathcal{H}_{\mathbb{F}}^2(-\delta,T;\mathbb{R}^n)$, $X_\cdot$ 表示下面经典随机微分方程的唯一解：

$$\begin{cases}\mathrm{d}X_t=\overline{b}(t,\pi_t,u_t,P_{\pi_t})\mathrm{d}t+\overline{\sigma}(t,\pi_t,u_t,P_{\pi_t})\mathrm{d}W_t, & t\in[0,T],\\ X_t=\varphi_t, & t\in[-\delta,0],\end{cases}\tag{3.1}$$

这里 $\pi_t=(x_t,x_{t-\delta},\int_{t-\delta}^t\mathrm{e}^{-\rho(t-s)}x_s\mathrm{d}s)$. 由此可以定义一个映射 $\Psi:\mathcal{H}_{\mathbb{F}}^2(-\delta,T;\mathbb{R}^n)\to\mathcal{H}_{\mathbb{F}}^2(-\delta,T;\mathbb{R}^n)$. 我们将会证明这个映射 Ψ 是压缩的. 为此，令 $X^i:=\Psi(x^i),i=1,2$, 记 $\Delta X=X^1-X^2,\Delta x=x^1-x^2$. 对 $\mathrm{e}^{-\gamma s}|\Delta X_s|^2,\gamma>0$ 在 $[0,T]$ 上应用伊藤公式，根据 $\overline{b},\overline{\sigma}$ 的假设和事实 $W_2(P_{\eta^1},P_{\eta^2})^2\leqslant E|\eta^1-\eta^2|^2$, 可知

$$(\gamma-1)E\int_0^T\mathrm{e}^{-\gamma t}|\Delta X_t|^2\mathrm{d}t\leqslant 16L^2E\int_0^T\mathrm{e}^{-\gamma t}\Big(|\Delta x_t|^2+|\Delta x_{t-\delta}|^2+\Big|\int_{t-\delta}^t\mathrm{e}^{-\rho(t-s)}\Delta x_s\mathrm{d}s\Big|^2\Big)\mathrm{d}t.$$

注意到

$$E\int_0^T\mathrm{e}^{-\gamma t}|\Delta x_{t-\delta}|^2\mathrm{d}t\leqslant E\int_{-\delta}^T\mathrm{e}^{-\gamma t}|\Delta x_t|^2\mathrm{d}t$$

和

$$\begin{aligned}&E\Big[\int_0^T\mathrm{e}^{-\gamma t}\Big|\int_{t-\delta}^t\mathrm{e}^{-\rho(t-s)}\Delta x_s\mathrm{d}s\Big|^2\mathrm{d}t\Big]\\ \leqslant{}&E\Big[\int_0^T\mathrm{e}^{-\gamma t}\int_{t-\delta}^t\mathrm{e}^{-2\rho(t-s)}\mathrm{d}s\cdot\int_{t-\delta}^t|\Delta x_s|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t\Big]\\ \leqslant{}&\frac{1-\mathrm{e}^{-2\rho\delta}}{2\rho}E\Big[\int_0^T\mathrm{e}^{-\gamma t}\int_{t-\delta}^t|\Delta x_s|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t\Big]\\ \leqslant{}&\frac{1-\mathrm{e}^{-2\rho\delta}}{2\rho}E\Big[\int_0^T\int_{t-\delta}^t\mathrm{e}^{-\gamma s}|\Delta x_s|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t\Big]\\ \leqslant{}&\frac{1-\mathrm{e}^{-2\rho\delta}}{2\rho}TE\Big[\int_{-\delta}^T\mathrm{e}^{-\gamma s}|\Delta x_s|^2\mathrm{d}s\Big],\end{aligned}$$

可得

$$(\gamma-1)E\int_{-\delta}^T\mathrm{e}^{-\gamma t}|\Delta X_t|^2\mathrm{d}t\leqslant 16L^2\Big(2+\frac{1-\mathrm{e}^{-2\rho\delta}}{2\rho}T\Big)E\int_{-\delta}^T\mathrm{e}^{-\gamma t}|\Delta x_t|^2\mathrm{d}t.$$

这足以说明对于适当的 γ, Ψ 是一个严格压缩映射．进一步，根据假设 (H3.1), (H3.2) 和 $E\big[\sup\limits_{t\in[-\delta,0]}|\varphi_t|^2\big]<\infty$, 可以得到 $X\in\mathcal{M}_{\mathbb{F}}^2(-\delta,T;\mathbb{R}^n)$. 至于方程 (1.2) 解的存在唯一性同样可以证明．证毕．

注 3.2 在下文中, 我们总是使用符号 $A_t=X_{t-\delta}$, $B_t=\int_{t-\delta}^t \mathrm{e}^{-\rho(t-r)}X_r\mathrm{d}r$, $\delta>0$, $\rho>0$; $\Pi_t=(X_t,A_t,B_t)$, $\Lambda_t=(X_t,A_t,B_t,Y_t,Z_t)$.

3.2 辅助的优化问题

为了处理最优控制问题 (1.1)–(1.4), 我们考虑一个辅助优化问题．这一辅助问题的驱动系统由两个纯粹的倒向随机微分时滞方程构成．

假设

(H3.3) 存在一个 $\beta>0$, 使得对于所有的 $x,a,b\in\mathbb{R}^n$, $u_1,u_2\in\mathbb{R}^{n\times d}$, $\mu\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^{3n})$,

$$|\overline{\sigma}(t,x,a,b,u_1,\mu)-\overline{\sigma}(t,x,a,b,u_2,\mu)|\geqslant\beta|u_1-u_2|.$$

在假设 (H3.1), (H3.2) 和 (H3.3) 下，对任何的 $(t,x,a,b,\mu)\in[0,T]\times\mathbb{R}^{3n}\times\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^{3n})$, 映射 $u\to\overline{\sigma}(t,x,a,b,u,\mu)$ 是从 $\mathbb{R}^{n\times d}$ 到本身的一一映射．事实上，

(i) 映射 $u\to\overline{\sigma}(t,x,a,b,u,\mu)$ 是一个单射．对于任意的 $u,\widetilde{u}\in\mathbb{R}^{n\times d}$, 根据 (H3.3), 可得

$$|\overline{\sigma}(t,x,a,b,u,\mu)-\overline{\sigma}(t,x,a,b,\widetilde{u},\mu)|\geqslant\beta|u-\overline{u}|>0.$$

这意味着 $u\to\overline{\sigma}(t,x,a,b,u,\mu)$ 是一个单射．

(ii) 映射 $u\to\overline{\sigma}(t,x,a,b,u,\mu)$ 是一个双射．如果 $\overline{\sigma}_u(t,x,a,b,u,\mu)\equiv0$, 显然结果成立．如果 $\overline{\sigma}_u(t,x,a,b,u,\mu)$ 并不总是零，不失一般性，我们可以假设 $\overline{\sigma}_u(t,x,a,b,0,\mu)\neq0,(t,x,a,b,\mu)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathcal{P}(\mathbb{R}^{3n})$. 现在假设上面的结论不正确，换句话说，$\mathrm{Rang}(\overline{\sigma}(t,x,a,b,u,\mu))\neq\mathbb{R}^{n\times d}$. 这意味着对于任意的 $\theta\in\mathrm{Rang}(\overline{\sigma}(t,x,a,b,u,\mu))^{\perp}$ 和 $\varepsilon>0$, 有

$$0=\langle\theta,\overline{\sigma}(t,x,a,b,\varepsilon u,\mu)\rangle=\langle\theta,\overline{\sigma}_u(t,x,a,b,0,\mu)\varepsilon u+o(\varepsilon)\rangle.$$

令 $\varepsilon\to0$, 可知 $\langle\theta,\overline{\sigma}_u(t,x,a,b,0,\mu)u\rangle=0$. 然而这与假设 $\overline{\sigma}_u(t,x,a,b,0,\mu)\neq0$ 矛盾．因而得到期望的结果．

令 $\theta\equiv\overline{\sigma}(t,x,a,b,u,\mu)$. 记 $u=\widehat{\sigma}(t,x,a,b,\theta,\mu)$ 为 $\overline{\sigma}$ 关于 u 的逆函数． (1.1) 和 (1.2) 可以重写为

$$\begin{cases}-\mathrm{d}X_t=g(t,\Pi_t,\theta_t,P_{\Pi_t})\mathrm{d}t-\theta_t\mathrm{d}W_t, & t\in[0,T],\\ X_t=\varphi_t, & t\in[-\delta,0],\end{cases}\tag{3.2}$$

$$\begin{cases}-\mathrm{d}Y_t=f(t,\Lambda_t,\theta_t,P_{\Lambda_t})\mathrm{d}t-Z_t\mathrm{d}W_t, & t\in[0,T],\\ Y_T=\Phi(X_T,P_{X_T}),\end{cases}\tag{3.3}$$

其中 $g(t,\pi,\theta,\mu)=-\overline{b}(t,\pi,\widehat{\sigma}(t,\pi,\theta,\mu),\mu)$, $f(t,\lambda,\theta,\mu)=\overline{f}(t,\lambda,\widehat{\sigma}(t,\pi,\theta,\mu),\mu),\pi=(x,a,b)$, $\lambda=(x,a,b,y,z)$.

在 (3.2)–(3.3) 中， θ 可以被看成控制．另一方面，根据平均场正倒向随机微分方程的理论 (见 [16]), 寻找 θ 等价于寻找终端状态 X_T. 这激发我们考虑下面的纯倒向时滞系

统:

$$\begin{cases}-\mathrm{d}X_t^\xi = g(t,\Pi_t^\xi,\theta_t^\xi,P_{\Pi_t^\xi})\mathrm{d}t-\theta_t^\xi\mathrm{d}W_t, & t\in[0,T],\\ X_T^\xi=\xi,\quad X_t^\xi=f_t^1,\quad \theta_t^\xi=f_t^2, & t\in[-\delta,0),\\ -\mathrm{d}Y_t^\xi = f(t,\Lambda_t^\xi,\theta_t^\xi,P_{\Lambda_t^\xi})\mathrm{d}t-Z_t^\xi\mathrm{d}W_t, & t\in[0,T],\\ Y_T^\xi=\Phi(\xi,P_\xi), \end{cases} \tag{3.4}$$

这里 $f_\cdot^1, f_\cdot^2$ 是两个给定的连续函数.

注 3.3　在 (3.4) 中, 控制是一个随机变量. 它取值于下面的空间

$$\Theta=\{\xi\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_T,P;\mathbb{R}^n)\mid \xi\in K,\ \text{a.s.}\}.$$

根据引理 2.1, 方程 (3.4) 存在唯一解 $((X^\xi,\theta^\xi),(Y^\xi,Z^\xi))$, 且满足 $(X^\xi,\theta^\xi)\in\mathcal{M}_{\mathbb{F}}^2(0,T;\mathbb{R}^n)\times\mathcal{H}_{\mathbb{F}}^2(0,T;\mathbb{R}^{n\times d})$ 和 $(Y^\xi,Z^\xi)\in\mathcal{M}_{\mathbb{F}}^2(0,T;\mathbb{R}^m)\times\mathcal{H}_{\mathbb{F}}^2(0,T;\mathbb{R}^{m\times d})$.

注 3.4　尽管 (3.4) 中第一个方程的解 (X,θ) 是由两个过程构成的, 但是需要注意的是 (3.4) 系数中的测度流仅仅依赖于 $P_{(X,A,B)}$, 而不是 P_θ.

现在考虑一个新的涉及到 ξ 和 $\Lambda_\cdot^\xi$ 分布的价值泛函

$$J(\xi)=E\Big[\int_0^T h(t,\Lambda_t^\xi,\theta_t^\xi,P_{\Lambda_t^\xi})\mathrm{d}t+\psi(\xi,P_\xi)+\ell(Y_0^\xi)\Big]. \tag{3.5}$$

在上述泛函中随机变量 ξ 是一个控制. 这里 $h(t,\lambda,\theta,\mu)=\overline{h}(t,\lambda,\widehat{\sigma}(t,\pi,\theta,\mu),\mu)$ 和 $\pi=(x,a,b)$, $\lambda=(x,a,b,y,z)$.

根据价值泛函 (3.5) 和系统 (3.4), 辅助的优化问题可以表述如下

$$\text{最小化 } J(\xi) \text{ 受制于}\quad \xi\in\Theta,\ X_0^\xi=a:=\varphi_0. \tag{3.6}$$

注 3.5　辅助的优化问题 (3.6) 是一个控制受限问题. 这个问题处理起来比状态受限问题 (1.1)–(1.4) 更加简单. 下文中, 我们着重处理辅助问题 (3.6). 显然, 从原始问题 (1.3) 转换成辅助问题 (3.6) 会导致一个损失, 即初始条件 $X_0^\xi=a$ 会变成一个限制.

注 3.6　g, f 和 h 满足假设 (H3.1)–(H3.2) 中的相似条件.

4　随机最大值原理

4.1　变分方程

为了研究变分方程, 先介绍 Θ 中的一个度量: 对于 $\xi,\ \widetilde{\xi}\in\Theta$, $d(\xi,\widetilde{\xi})=(E|\xi-\widetilde{\xi}|^2)^{\frac12}$. 显然, (Θ,d) 是一个完备的度量空间. 令 ξ^0 是问题 (3.6) 的最优控制. 由于 K 是一个凸集, 对于任何的 $\xi\in\Theta$, 记 $\xi^\lambda=\xi^0+\lambda(\xi-\xi^0)$, $0\leqslant\lambda\leqslant1$, 则 $\xi^\lambda\in\Theta$. 记 (3.4) 带有 $\xi=\xi^\lambda$ (相应地, $\xi=\xi^0$) 的解为 $(X^{\xi^\lambda},\theta^{\xi^\lambda},Y^{\xi^\lambda},Z^{\xi^\lambda})$ (相应地, $(X^{\xi^0},\theta^{\xi^0},Y^{\xi^0},Z^{\xi^0})$).

令 $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathcal{F}},\widetilde{P})$ 是概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 的一个复制, 并令定义在空间 $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathcal{F}},\widetilde{P})$ 上的随机变量 $\widetilde{\xi}$ 是定义在空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上随机变量 ξ 的一个复制, 即 $\widetilde{P}_{\widetilde{\xi}}=P_\xi$. 期望 $\widetilde{E}[\cdot]$ 仅仅对

带有 “ $\sim$” 的变量起作用. 利用这些符号，考虑一阶变分方程

$$\begin{cases}-\mathrm{d}\Delta X_t=(g_x^{\xi^0}(t)\Delta X_t+g_a^{\xi^0}(t)\Delta A_t+g_b^{\xi^0}(t)\Delta B_t+g_\theta^{\xi^0}(t)\Delta\theta_t\\ \qquad\qquad +\widetilde{E}[(g_\mu)_1(t,\widetilde{\Pi}_t^{\xi^0})\widetilde{\Delta X}_t+(g_\mu)_2(t,\widetilde{\Pi}_t^{\xi^0})\widetilde{\Delta A}_t+(g_\mu)_3(t,\widetilde{\Pi}_t^{\xi^0})\widetilde{\Delta B}_t])\mathrm{d}t\\ \qquad\qquad -\Delta\theta_t\mathrm{d}W_t,\quad t\in[0,T],\\ \Delta X_T=\xi-\xi^0,\quad \Delta X_t=0,\quad \Delta\theta_t=0,\quad t\in[-\delta,0);\\ -\mathrm{d}\Delta Y_t=(f_x^{\xi^0}(t)\Delta X_t+f_a^{\xi^0}(t)\Delta A_t+f_b^{\xi^0}(t)\Delta B_t+f_y^{\xi^0}(t)\Delta Y_t+f_z^{\xi^0}(t)\Delta Z_t\\ \qquad\qquad +f_\theta^{\xi^0}(t)\Delta\theta_t+\widetilde{E}[(f_\mu)_1(t,\widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0})\widetilde{\Delta X}_t+(f_\mu)_2(t,\widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0})\widetilde{\Delta A}_t\\ \qquad\qquad +(f_\mu)_3(t,\widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0})\widetilde{\Delta B}_t+(f_\mu)_4(t,\widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0})\widetilde{\Delta Y}_t\\ \qquad\qquad +(f_\mu)_5(t,\widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0})\widetilde{\Delta Z}_t])\mathrm{d}t-\Delta Z_t\mathrm{d}W_t,\quad t\in[0,T],\\ \Delta Y_T=\Phi_x(\xi^0,P_{\xi^0})(\xi-\xi^0)+\widetilde{E}[\Phi_\mu(\xi^0,P_{\xi^0},\widetilde{\xi}^0)(\widetilde{\xi}-\widetilde{\xi}^0)],\\ \Delta Y_t=0,\ \Delta Z_t=0,\quad t\in[-\delta,0),\end{cases}\tag{4.1}$$

其中

$$\begin{aligned}g_l^{\xi^0}(t)&=\frac{\partial g}{\partial l}(t,\Pi_t^{\xi^0},\theta_t^{\xi^0},P_{\Pi_t^{\xi^0}}),\quad l=x,a,b,\theta;\\ g_\mu(t,\widetilde{\Pi}_t^{\xi^0})&=\frac{\partial g}{\partial\mu}(t,\widetilde{\Pi}_t^{\xi^0},P_{\Pi_t^{\xi^0}},\Pi_t^{\xi^0},\theta_t^{\xi^0});\\ f_k^{\xi^0}(t)&=\frac{\partial f}{\partial k}(t,\Lambda_t^{\xi^0},\theta_t^{\xi^0},P_{\Lambda_t^{\xi^0}}),\quad k=x,a,b,y,z,\theta;\\ \partial_\mu f(t,\widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0})&=\frac{\partial f}{\partial\mu}(t,\Lambda_t^{\xi^0},\theta_t^{\xi^0},P_{\Lambda_t^{\xi^0}},\widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0}),\\ (\phi_\mu)_l&=\Big(\Big(\frac{\partial\phi}{\partial\mu}\Big)_{(l-1)\times n+1},\Big(\frac{\partial\phi}{\partial\mu}\Big)_{(l-1)\times n+2},\cdots,\Big(\frac{\partial\phi}{\partial\mu}\Big)_{(l-1)\times n+n}\Big),\quad l=1,2,3,\ \phi=g,f,h;\\ (\phi_\mu)_4&=\Big(\Big(\frac{\partial\phi}{\partial\mu}\Big)_{3n+1},\Big(\frac{\partial\phi}{\partial\mu}\Big)_{3n+2},\cdots,\Big(\frac{\partial\phi}{\partial\mu}\Big)_{3n+m}\Big),\quad \phi=f,h;\\ (\phi_\mu)_5&=\Big(\Big(\frac{\partial\phi}{\partial\mu}\Big)_{3n+m+1},\Big(\frac{\partial\phi}{\partial\mu}\Big)_{3n+m+2},\cdots,\Big(\frac{\partial\phi}{\partial\mu}\Big)_{3n+m+m}\Big),\quad \phi=f,h;\end{aligned}$$

$\big(\frac{\partial\phi}{\partial\mu}\big)_{3n+m+k}$, $k=1,2,\cdots,m$ 是 d- 维向量.

注 4.1 定义乘积空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)\bigotimes(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathcal{F}},\widetilde{P})=(\Omega,\mathcal{F},P)\bigotimes(\Omega,\mathcal{F},P)$. 对于空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的随机变量 ξ, 定义 $\widetilde{\xi}(\widetilde{\omega},\omega):=\xi(\widetilde{\omega})$, $(\widetilde{\omega},\omega)\in\widetilde{\Omega}\times\Omega=\Omega\times\Omega$, 这样可以将定义在空间 Ω 上的随机变量延拓到空间 $\widetilde{\Omega}\times\Omega$ 上. 因此，对于任何的 $\eta\in L^2(\Omega\times\widetilde{\Omega},\mathcal{F}\bigotimes\widetilde{\mathcal{F}},P\times\widetilde{P})$, 变量 $\eta(\cdot,\omega):\Omega\to\mathbb{R}$ 属于 $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$, 它的期望可以按照下面方式计算

$$\widetilde{E}[\eta(\cdot,\omega)]=\int_\Omega\eta(\widetilde{\omega},\omega)P(\mathrm{d}\widetilde{\omega}).$$

从而可得

$$E[\widetilde{E}[\eta]]=E[\widetilde{E}[\eta(\cdot,\omega)]]=\int_\Omega\widetilde{E}[\eta(\cdot,\omega)]P(d\omega).$$

现在令 $\Gamma\Upsilon_t^\lambda=\frac{1}{\lambda}[\Upsilon_t^{\xi^\lambda}-\Upsilon_t^{\xi^0}]-\Delta\Upsilon_t$, $\Upsilon=X,A,B,Y,Z,\theta$. 下面的引理给出了 $\frac{1}{\lambda}[\Upsilon_t^{\xi^\lambda}-\Upsilon_t^{\xi^0}]$ 和 $\Delta\Upsilon$ 之间的关系.

引理 4.1　假设 (H3.1)–(H3.3) 成立，那么

$$\begin{aligned}&\lim_{\lambda\to 0}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}E[|\Gamma\Upsilon_t^\lambda|^2]=0,\quad \Upsilon=X,Y,\\&\lim_{\lambda\to 0}E\Big[\int_0^T|\Gamma G_t^\lambda|^2\mathrm{d}t\Big]=0,\quad G=\theta,Z.\end{aligned}\tag{4.2}$$

证　根据 (3.4) 和 (4.1), 可知

$$\begin{cases}-\mathrm{d}\Gamma X_t^\lambda=\dfrac{1}{\lambda}[g(t,\Pi_t^{\xi^\lambda},\theta_t^{\xi^\lambda},P_{\Pi_t^{\xi^\lambda}})-g(t,\Pi_t^{\xi^0},\theta_t^{\xi^0},P_{\Pi_t^{\xi^0}})-\lambda(g_x^{\xi^0}(t)\Delta X_t\\ \qquad\qquad +g_a^{\xi^0}(t)\Delta A_t+g_b^{\xi^0}(t)\Delta B_t+g_\theta^{\xi^0}(t)\Delta\theta_t+\widetilde{E}[(g_\mu)_1(t,\widetilde{\Pi}_t^{\xi^0})\widetilde{\Delta X}_t\\ \qquad\qquad +(g_\mu)_2(t,\widetilde{\Pi}_t^{\xi^0})\widetilde{\Delta A}_t+(g_\mu)_3(t,\widetilde{\Pi}_t^{\xi^0})\widetilde{\Delta B}_t])]\mathrm{d}t-\Gamma\theta_t^\lambda\mathrm{d}W_t,\quad t\in[0,T],\\ \Gamma X_T^\lambda=0,\quad \Gamma X_t^\lambda=0,\quad \Gamma\theta_t^\lambda=0,\quad t\in[-\delta,0).\end{cases}\tag{4.3}$$

注意到 $\Upsilon_t^{\xi^\lambda}-\Upsilon_t^{\xi^0}=\lambda(\Gamma\Upsilon_t^\lambda+\Delta\Upsilon_t)$, $\Upsilon=X,A,B,\theta$, 和回忆 $f:\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)\to\mathbb{R}$ 关于测度导数的定义，有

$$\begin{aligned}&g(t,\Pi_t^{\xi^\lambda},\theta_t^{\xi^\lambda},P_{\Pi_t^{\xi^\lambda}})-g(t,\Pi_t^{\xi^0},\theta_t^{\xi^0},P_{\Pi_t^{\xi^0}})\\&=\lambda\int_0^1 g_x^{\rho,\lambda}(t)(\Gamma X_t^\lambda+\Delta X_t)+g_a^{\rho,\lambda}(t)(\Gamma A_t^\lambda+\Delta A_t)+g_b^{\rho,\lambda}(t)(\Gamma B_t^\lambda+\Delta B_t)\\&\quad+g_\theta^{\rho,\lambda}(t)(\Gamma\theta_t^\lambda+\Delta\theta_t)\mathrm{d}\rho+\lambda\int_0^1\widetilde{E}[(g_\mu^{\rho,\lambda})_1(t,\widetilde{\Pi}_t^{\rho,\lambda})(\widetilde{\Gamma X}_t^\lambda+\widetilde{\Delta X}_t)\\&\quad+(g_\mu^{\rho,\lambda})_2(t,\widetilde{\Pi}_t^{\rho,\lambda})(\widetilde{\Gamma A}_t^\lambda+\widetilde{\Delta A}_t)+(g_\mu^{\rho,\lambda})_3(t,\widetilde{\Pi}_t^{\rho,\lambda})(\widetilde{\Gamma B}_t^\lambda+\widetilde{\Delta B}_t)]\mathrm{d}\rho,\end{aligned}$$

其中 $g_k^{\rho,\lambda}(t)=\frac{\partial g}{\partial k}(t,\Pi_t^{\rho,\lambda},\theta_t^{\rho,\lambda},P_{\Pi_t^{\rho,\lambda}})$, $k=x,a,b,\theta$; $g_\mu^{\rho,\lambda}(t,\widetilde{\Pi}_t^{\rho,\lambda})=\frac{\partial g}{\partial\mu}(t,\widetilde{\Pi}_t^{\rho,\lambda},P_{\Pi_t^{\rho,\lambda}},\Pi_t^{\rho,\lambda},\theta_t^{\rho,\lambda})$; $F_t^{\rho,\lambda}=F_t^{\xi^0}+\rho(F_t^{\xi^\lambda}-F_t^{\xi^0}),F=X,A,B,\theta$; $\Pi_t^{\rho,\lambda}=(X_t^{\rho,\lambda},A_t^{\rho,\lambda},B_t^{\rho,\lambda})$; $(g_\mu^{\rho,\lambda})_k,k=1,2,3$ 类似于 (4.1) 给出.

因而

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\lambda}[g(t,\Pi_t^{\xi^\lambda},\theta_t^{\xi^\lambda},P_{\Pi_t^{\xi^\lambda}})-g(t,\Pi_t^{\xi^0},\theta_t^{\xi^0},P_{\Pi_t^{\xi^0}})-\lambda(g_x^{\xi^0}(t)\Delta X_t+g_a^{\xi^0}(t)\Delta A_t+g_b^{\xi^0}(t)\Delta B_t\\&+g_\theta^{\xi^0}(t)\Delta\theta_t+\widetilde{E}[(g_\mu)_1(t,\widetilde{\Pi}_t^{\xi^0})\widetilde{\Delta X}_t+(g_\mu)_2(t,\widetilde{\Pi}_t^{\xi^0})\widetilde{\Delta A}_t+(g_\mu)_3(t,\widetilde{\Pi}_t^{\xi^0})\widetilde{\Delta B}_t])]\\=&\,\Theta_x^\lambda(t)\Gamma X_t^\lambda+\Theta_a^\lambda(t)\Gamma A_t^\lambda+\Theta_b^\lambda(t)\Gamma B_t^\lambda+\Theta_\theta^\lambda(t)\Gamma\theta_t^\lambda+\Xi^\lambda(t)\\&+\int_0^1\widetilde{E}[(g_\mu^{\rho,\lambda})_1(t,\widetilde{\Pi}_t^{\rho,\lambda})\widetilde{\Gamma X}_t^\lambda+(g_\mu^{\rho,\lambda})_2(t,\widetilde{\Pi}_t^{\rho,\lambda})\widetilde{\Gamma A}_t^\lambda+(g_\mu^{\rho,\lambda})_3(t,\widetilde{\Pi}_t^{\rho,\lambda})\widetilde{\Gamma B}_t^\lambda]\mathrm{d}\rho.\end{aligned}$$

其中 $\Theta_k^\lambda(t)=\int_0^1 g_k^{\rho,\lambda}(t)\mathrm{d}\rho$, $k=x,a,b,\theta$, 和

$$\begin{aligned}\Xi^\lambda(t)=&\,(\Theta_x^\lambda(t)-g_x^{\xi^0}(t))\Delta X_t+(\Theta_a^\lambda(t)-g_a^{\xi^0}(t))\Delta A_t+(\Theta_b^\lambda(t)-g_b^{\xi^0}(t))\Delta B_t\\&+(\Theta_\theta^\lambda(t)-g_\theta^{\xi^0}(t))\Delta\theta_t+\int_0^1\widetilde{E}[((g_\mu^{\rho,\lambda})_1(t,\widetilde{\Pi}_t^{\rho,\lambda})-(g_\mu)_1(t,\widetilde{\Pi}_t^{\xi^0}))\widetilde{\Delta X}_t\\&+((g_\mu^{\rho,\lambda})_2(t,\widetilde{\Pi}_t^{\rho,\lambda})-(g_\mu)_2(t,\widetilde{\Pi}_t^{\xi^0}))\widetilde{\Delta A}_t+((g_\mu^{\rho,\lambda})_3(t,\widetilde{\Pi}_t^{\rho,\lambda})-(g_\mu)_3(t,\widetilde{\Pi}_t^{\xi^0}))\widetilde{\Delta B}_t].\end{aligned}$$

这意味着 (4.3) 可被重写为

$$\begin{cases}-\mathrm{d}\Gamma X_t^\lambda=\Big(\Theta_x^\lambda(t)\Gamma X_t^\lambda+\Theta_a^\lambda(t)\Gamma A_t^\lambda+\Theta_b^\lambda(t)\Gamma B_t^\lambda+\Theta_\theta^\lambda(t)\Gamma\theta_t^\lambda+\Xi^\lambda(t)\\ \qquad\qquad+\displaystyle\int_0^1\widetilde{E}[(g_\mu^{\rho,\lambda})_1(t,\widetilde{\Pi}_t^{\rho,\lambda})\widetilde{\Gamma X}_t^\lambda+(g_\mu^{\rho,\lambda})_2(t,\widetilde{\Pi}_t^{\rho,\lambda})\widetilde{\Gamma A}_t^\lambda\\ \qquad\qquad+(g_\mu^{\rho,\lambda})_3(t,\widetilde{\Pi}_t^{\rho,\lambda})\widetilde{\Gamma B}_t^\lambda]\mathrm{d}\rho\Big)\mathrm{d}t-\Gamma\theta_t^\lambda\mathrm{d}W_t,\quad t\in[0,T],\\ \Gamma X_T^\lambda=0,\quad \Gamma X_t^\lambda=0,\quad \Gamma\theta_t^\lambda=0,\quad t\in[-\delta,0).\end{cases}\tag{4.4}$$

对 $\mathrm{e}^{\beta s}|\Gamma X_s^\lambda|^2$, $\beta>0$ 应用伊藤公式，从 0 到 T 积分，然后取期望. 由 g_x，g_a，g_b，g_θ，g_μ 的有界性，易知

$$\begin{aligned}&E\Big[\int_0^T\mathrm{e}^{\beta s}(\beta|\Gamma X_s^\lambda|^2+|\Gamma\theta_s^\lambda|^2)\mathrm{d}s\Big]\\ =&E\Big[\int_0^T2\mathrm{e}^{\beta s}\Big\langle\Gamma X_s^\lambda,\Theta_x^\lambda(s)\Gamma X_s^\lambda+\Theta_a^\lambda(s)\Gamma A_s^\lambda+\Theta_b^\lambda(s)\Gamma B_s^\lambda+\Theta_\theta^\lambda(s)\Gamma\theta_t^\lambda+\Xi^\lambda(s)\\ &+\int_0^1\widetilde{E}[(g_\mu^{\rho,\lambda})_1(s,\widetilde{\Pi}_s^{\rho,\lambda})\widetilde{\Gamma X}_s^\lambda+(g_\mu^{\rho,\lambda})_2(s,\widetilde{\Pi}_s^{\rho,\lambda})\widetilde{\Gamma A}_s^\lambda+(g_\mu^{\rho,\lambda})_3(s,\widetilde{\Pi}_s^{\rho,\lambda})\widetilde{\Gamma B}_s^\lambda]\mathrm{d}\rho\Big\rangle\mathrm{d}s\Big]\\ \leqslant&(1+4L+10L^2)E\int_0^T\mathrm{e}^{\beta s}|\Gamma X_s^\lambda|^2\mathrm{d}s+\frac12E\int_0^T\mathrm{e}^{\beta s}|\Gamma\theta_s^\lambda|^2\mathrm{d}s+E\int_0^T\mathrm{e}^{\beta s}|\Xi^\lambda(s)|^2\mathrm{d}s\\ &+E\int_0^T\mathrm{e}^{\beta s}|\Gamma A_s^\lambda|^2\mathrm{d}s+E\int_0^T\mathrm{e}^{\beta s}|\Gamma B_s^\lambda|^2\mathrm{d}s\\ \leqslant&\Big(2+4L+10L^2+\frac{1-\mathrm{e}^{-2\rho\delta}}{2\rho}T\Big)E\int_0^T\mathrm{e}^{\beta s}|\Gamma X_s^\lambda|^2\mathrm{d}s+\frac12E\int_0^T\mathrm{e}^{\beta s}|\Gamma\theta_s^\lambda|^2\mathrm{d}s\\ &+E\int_0^T\mathrm{e}^{\beta s}|\Xi^\lambda(s)|^2\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

取 $\beta=2+4L+10L^2+\frac{1-\mathrm{e}^{-2\rho\delta}}{2\rho}T+\frac12$, 则有

$$E\Big[\int_0^T\mathrm{e}^{\beta s}(|\Gamma X_s^\lambda|^2+|\Gamma\theta_s^\lambda|^2)\mathrm{d}s\Big]\leqslant CE\int_0^T\mathrm{e}^{\beta s}|\Xi^\lambda(s)|^2\mathrm{d}s,$$

其中 C 依赖于 L,T,β,δ,ρ. 再次对 $\mathrm{e}^{\beta s}|\Gamma X_s^\lambda|^2$ 应用伊藤公式，由 Burkholder-Davis-Gundy 不等式，可知

$$E\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\Gamma X_s^\lambda|^2+\int_0^T|\Gamma\theta_s^\lambda|^2)\mathrm{d}s\Big]\leqslant CE\int_0^T|\Xi^\lambda(s)|^2\mathrm{d}s.$$

注意到 g_x，g_a，g_b，g_θ 和 g_μ 是有界的，并且关于 (x,a,b,θ,μ,y') 连续，由勒贝格控制收敛定理，可以得到

$$\lim_{\lambda\to0}E\int_0^T|\Xi^\lambda(t)|^2\mathrm{d}t=0.$$

这就证明了 (4.2) 中的前两个结果. (4.2) 中的剩余结果可以类似证明.

4.2 变分不等式

本小节用来研究相应的变分不等式，它是研究随机最大值原理的一个重要工具.

给定最优控制 ξ^0 和初始的状态限制 a (见问题 (3.6)). 令 ε 是一个任意的正常数. 介绍一个映射

$$Q_\varepsilon(\xi)=\{|X_0^\xi-a|^2+(\max(0,\ell(Y_0^\xi)-\ell(Y_0^{\xi^0})+E[\psi(\xi,P_\xi)-\psi(\xi^0,P_{\xi^0})]+\varepsilon))^2\}^{\frac{1}{2}},$$

其中 (X_0^ξ,Y_0^ξ)(相应地， $(X_0^{\xi^0},Y_0^{\xi^0})$) 是方程 (3.4) 带有终端值 ξ(相应地， ξ^0) 在 0 时刻的解. 这一映射能帮助我们应用 Ekeland 变分原则得到变分不等式.

注 4.2　应用文 [14] 中引理 3.1 介绍的方式可知，对于 ξ_1, $\xi_2\in L^2(\mathcal{F}_T;\mathbb{R}^n)$,

$$E\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|X_t^{\xi_1}-X_t^{\xi_2}|^2+\int_0^T|\theta_t^{\xi_1}-\theta_t^{\xi_2}|^2\mathrm{d}t\Big]\leqslant CE|\xi_1-\xi_2|^2$$

和

$$E\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|Y_t^{\xi_1}-Y_t^{\xi_2}|^2+\int_0^T|Z_t^{\xi_1}-Z_t^{\xi_2}|^2\mathrm{d}t\Big]\leqslant CE|\xi_1-\xi_2|^2.$$

上面的估计和假设 (H3.1) 暗示着 $|X_0^\xi-a|^2$, $\ell(Y_0^\xi)$ 和 $\psi(\xi,P_\xi)$ 作为 ξ 的泛函是连续的.

定理 4.1　在假设 (H3.1)–(H3.3) 下，令 ξ^0 是问题 (3.6) 的最优解，则存在 $L_1\in\mathbb{R}^n$ 和非负实数 L_0, 满足 $L_0+|L_1|\neq 0$, 使得对于任意的 $\xi\in K$, 下面的变分不等式成立：

$$\begin{aligned}&\langle L_1,\Delta X_0\rangle+L_0\langle\ell_y(Y_0^{\xi^0}),\Delta Y_0\rangle+L_0E[\langle\psi_x(\xi^0,P_{\xi^0}),\xi-\xi^0\rangle\\&+\widetilde{E}[\langle\psi_\mu(\xi_0,P_{\xi_0},\widetilde{\xi}_0),\widetilde{\xi}-\widetilde{\xi}^0\rangle]]\geqslant 0.\end{aligned}\tag{4.5}$$

证　显然， $Q_\varepsilon(\cdot)$ 关于 Θ 连续，并满足

$$Q_\varepsilon(\xi^0)=\varepsilon,\quad Q_\varepsilon(\xi)>0,\quad\forall\xi\in\Theta\quad 和\quad Q_\varepsilon(\xi^0)\leqslant\inf_{\xi\in\Theta}Q_\varepsilon(\xi)+\varepsilon.$$

由 Ekeland 变分原则可知，存在 $\xi^\varepsilon\in\Theta$, 满足：

$$\begin{aligned}&\text{(i) } Q_\varepsilon(\xi^\varepsilon)\leqslant Q_\varepsilon(\xi^0);\\&\text{(ii) } d(\xi^\varepsilon,\xi^0)\leqslant\sqrt{\varepsilon};\\&\text{(iii) } Q_\varepsilon(\xi)+\sqrt{\varepsilon}d(\xi,\xi^\varepsilon)\geqslant Q_\varepsilon(\xi^\varepsilon),\ \xi\in\Theta.\end{aligned}\tag{4.6}$$

用 $(X^{\xi^{\lambda,\varepsilon}},Y^{\xi^{\lambda,\varepsilon}},Z^{\xi^{\lambda,\varepsilon}},\theta^{\xi^{\lambda,\varepsilon}})$ (相应地， $(X^{\xi^\varepsilon},Y^{\xi^\varepsilon},Z^{\xi^\varepsilon},\theta^{\xi^\varepsilon})$) 表示 (3.4) 带有 $\xi^{\lambda,\varepsilon}:=\xi^\varepsilon+\lambda(\xi-\xi^\varepsilon)$, $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ (相应地， ξ^ε) 的解. 令 $(\Delta X^\varepsilon,\Delta Y^\varepsilon,\Delta Z^\varepsilon,\Delta\theta^\varepsilon)$ 是 (4.1) 带有参数 $\xi^0=\xi^\varepsilon$ 的解.

由 (4.6)(iii) 可得

$$Q_\varepsilon(\xi^{\lambda,\varepsilon})-Q_\varepsilon(\xi^\varepsilon)+\sqrt{\varepsilon}d(\xi^{\lambda,\varepsilon},\xi^\varepsilon)\geqslant 0.\tag{4.7}$$

根据引理 4.1 中的类似论述，可知

$$\begin{aligned}&\lim_{\lambda\to 0}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}E\Big[\frac{1}{\lambda}(X_t^{\xi^{\lambda,\varepsilon}}-X_t^{\xi^\varepsilon})-\Delta X_t^\varepsilon\Big]=0,\\&\lim_{\lambda\to 0}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}E\Big[\frac{1}{\lambda}(Y_t^{\xi^{\lambda,\varepsilon}}-Y_t^{\xi^\varepsilon})-\Delta Y_t^\varepsilon\Big]=0.\end{aligned}\tag{4.8}$$

因此，根据 (4.8), 有 P-a.s.

$$X_0^{\xi^{\lambda,\varepsilon}}-X_0^{\xi^\varepsilon}=\lambda\Delta X_0^\varepsilon+o(\lambda),\quad Y_0^{\xi^{\lambda,\varepsilon}}-Y_0^{\xi^\varepsilon}=\lambda\Delta Y_0^\varepsilon+o(\lambda).\tag{4.9}$$

根据 (4.9) 的第一个等式，易知

$$|X_0^{\xi^{\lambda,\varepsilon}}-a|^2-|X_0^{\xi^\varepsilon}-a|^2=2\lambda\langle X_0^{\xi^\varepsilon}-a,\Delta X_0^\varepsilon\rangle+o(\lambda).\tag{4.10}$$

根据 (4.9) 的第二个等式和 ψ_μ 的李普希兹连续性，得到

$$\begin{aligned}&|\ell(Y_0^{\xi^{\lambda,\varepsilon}})-\ell(Y_0^{\xi^0})+E[\psi(\xi^{\lambda,\varepsilon},P_{\xi^{\lambda,\varepsilon}})-\psi(\xi^0,P_{\xi^0})]+\varepsilon|^2\\&-|\ell(Y_0^{\xi^\varepsilon})-\ell(Y_0^{\xi^0})+E[\psi(\xi^\varepsilon,P_{\xi^\varepsilon})-\psi(\xi^0,P_{\xi^0})]+\varepsilon|^2\\=&\,2\lambda(\ell(Y_0^{\xi^\varepsilon})-\ell(Y_0^{\xi^0})+E[\psi(\xi^\varepsilon,P_{\xi^\varepsilon})-\psi(\xi^0,P_{\xi^0})]+\varepsilon)\cdot\\&(\langle\ell_y(Y_0^{\xi^\varepsilon}),\Delta Y_0^{\xi^\varepsilon}\rangle+E[\psi_x(\xi^\varepsilon,P_{\xi^\varepsilon})(\xi-\xi^\varepsilon)\\&+\widetilde{E}[\psi_\mu(\xi^\varepsilon,P_{\xi^\varepsilon},\widetilde{\xi}^\varepsilon)(\widetilde{\xi}-\widetilde{\xi}^\varepsilon)]]])+o(\lambda).\end{aligned}\tag{4.11}$$

下面考虑两种情况.

情况 1 存在某个 $\lambda_0>0$, 使得对于 $\lambda\in(0,\lambda_0)$,

$$\ell(Y_0^{\xi^{\lambda,\varepsilon}})-\ell(Y_0^{\xi^0})+E[\psi(\xi^{\lambda,\varepsilon},P_{\xi^{\lambda,\varepsilon}})-\psi(\xi^0,P_{\xi^0})]+\varepsilon>0.$$

由 $\ell(Y_0^\cdot)$ 和 $\psi(\cdot,P_\cdot)$ 作为 ξ 泛函的连续性，可知

$$\ell(Y_0^{\xi^\varepsilon})-\ell(Y_0^{\xi^0})+E[\psi(\xi^\varepsilon,P_{\xi^\varepsilon})-\psi(\xi^0,P_{\xi^0})]\geqslant 0.$$

因而，在这种情况下，

$$\begin{aligned}&\lim_{\lambda\to0}\frac{1}{\lambda}\Big(Q_\varepsilon(\xi^{\lambda,\varepsilon})-Q_\varepsilon(\xi^\varepsilon)\Big)\\=&\lim_{\lambda\to0}\frac{1}{Q_\varepsilon(\xi^{\lambda,\varepsilon})+Q_\varepsilon(\xi^\varepsilon)}\cdot\frac{Q_\varepsilon^2(\xi^{\lambda,\varepsilon})-Q_\varepsilon^2(\xi^\varepsilon)}{\lambda}\\=&\frac{1}{Q_\varepsilon(\xi^\varepsilon)}\{\langle X_0^{\xi^\varepsilon}-a,\Delta X_0^\varepsilon\rangle+\big(\langle\ell_y(Y_0^{\xi^\varepsilon}),\Delta Y_0^\varepsilon\rangle+E[\langle\psi_x(\xi^\varepsilon,P_{\xi^\varepsilon}),\xi-\xi^\varepsilon\rangle\\&+\widetilde{E}[\langle\psi_\mu(\xi^\varepsilon,P_{\xi^\varepsilon},\widetilde{\xi}^\varepsilon),\widetilde{\xi}-\widetilde{\xi}^\varepsilon\rangle]]\big)\cdot(\ell(Y_0^{\xi^\varepsilon})-\ell(Y_0^{\xi^0})+E[\psi(\xi^\varepsilon,P_{\xi^\varepsilon})-\psi(\xi^0,P_{\xi^0})]+\varepsilon)\}\\=&\langle L_1^\varepsilon,\Delta X_0^\varepsilon\rangle+L_0^\varepsilon\langle\ell_y(Y_0^{\xi^\varepsilon}),\Delta Y_0^\varepsilon\rangle+L_0^\varepsilon E[\langle\psi_x(\xi^\varepsilon,P_{\xi^\varepsilon}),\xi-\xi^\varepsilon\rangle\\&+\widetilde{E}[\langle\psi_\mu(\xi^\varepsilon,P_{\xi^\varepsilon},\widetilde{\xi}^\varepsilon),\widetilde{\xi}-\widetilde{\xi}^\varepsilon\rangle]],\end{aligned}$$

其中

$$L_1^\varepsilon=\frac{X_0^{\xi^\varepsilon}-a}{Q_\varepsilon(\xi^\varepsilon)},\quad L_0^\varepsilon=\frac{1}{Q_\varepsilon(\xi^\varepsilon)}\big(\ell(Y_0^{\xi^\varepsilon})-\ell(Y_0^{\xi^0})+E[\psi(\xi^\varepsilon,P_{\xi^\varepsilon})-\psi(\xi^0,P_{\xi^0})]+\varepsilon\big)\geqslant0.$$

从而，根据 (4.7) 可得

$$\begin{aligned}&\langle L_1^\varepsilon,\Delta X_0^\varepsilon\rangle+L_0^\varepsilon\langle\ell_y(Y_0^{\xi^\varepsilon}),\Delta Y_0^\varepsilon\rangle+L_0^\varepsilon E[\langle\psi_x(\xi^\varepsilon,P_{\xi^\varepsilon}),\xi-\xi^\varepsilon\rangle\\&+\widetilde{E}[\langle\psi_\mu(\xi^\varepsilon,P_{\xi^\varepsilon},\widetilde{\xi}^\varepsilon),\widetilde{\xi}-\widetilde{\xi}^\varepsilon\rangle]]\geqslant-\sqrt{\varepsilon}\big(E[|\xi-\xi^\varepsilon|^2]\big)^{\frac12}.\end{aligned}\tag{4.12}$$

情况 2 存在一个正的序列 λ_n 满足 $\lambda_n\to0$, 使得

$$\ell(Y_0^{\xi^{\lambda_n,\varepsilon}})-\ell(Y_0^{\xi^0})+E[\psi(\xi^{\lambda_n,\varepsilon},P_{\xi^{\lambda_n,\varepsilon}})-\psi(\xi^0,P_{\xi^0})]+\varepsilon\leqslant0.$$

选取 n 足够大，那么通过 $Q_\varepsilon(\cdot)$ 的定义，我们知道 $Q_\varepsilon(\xi^{\lambda_n,\varepsilon})=|X_0^{\xi^{\lambda_n,\varepsilon}}-a|$. 注意到 $Q_\varepsilon(\cdot)$ 是连续的，因此， $Q_\varepsilon(\xi^\varepsilon)=|X_0^{\xi^\varepsilon}-a|$. 在这种情况下，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Q_\varepsilon(\xi^{\lambda_n,\varepsilon})-Q_\varepsilon(\xi^\varepsilon)}{\lambda_n}=\frac{\langle X_0^{\xi^\varepsilon}-a,\Delta X_0^\varepsilon\rangle}{Q_\varepsilon(\xi^\varepsilon)}.\tag{4.13}$$

类似于情况 1, 根据 (4.13) 和 (4.7), 可得

$$\langle L_1^\varepsilon, \Delta X_0^\varepsilon\rangle \geqslant -\sqrt{\varepsilon}\big(E|\xi-\xi^\varepsilon|^2\big)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.14}$$

其中

$$L_0^\varepsilon = 0, \quad L_1^\varepsilon = \frac{X_0^{\xi^\varepsilon}-a}{Q_\varepsilon(\xi^\varepsilon)}. \tag{4.15}$$

无论上述哪种情况，都存在 $L_0^\varepsilon \geqslant 0$ 和 $L_1^\varepsilon \in \mathbb{R}^d$ 满足 $|L_0^\varepsilon|^2+|L_1^\varepsilon|^2=1$, 使得 (4.12) 成立. 根据上述分析，同样可以得到一个收敛子序列 $(L_0^\varepsilon, L_1^\varepsilon)$. 记它的极限为 (L_0, L_1). 另一个方面，类似于注 4.2, 可知当 $\varepsilon \to 0$ 时， $\Delta X_0^\varepsilon \to \Delta X_0$, $\Delta Y_0^\varepsilon \to \Delta Y_0$. 进一步，根据事实 $d(\xi^\varepsilon, \xi^0) \leqslant \sqrt{\varepsilon}$ 可以推导出当 $\varepsilon \to 0$ 时， $Y_0^{\xi^\varepsilon} \to Y_0^{\xi^0}$. 在 (4.12) 和 (4.14) 中，令 $\varepsilon \to 0$, 可得到预期的变分不等式.

如果 $h(t,x,a,b,y,z,\theta,\mu) \neq 0$, 下面的变分不等式仍然有效.

定理 4.2 在假设 (H3.1)–(H3.3) 下，令 ξ^0 是问题 (3.6) 的最优解，则存在 $L_1 \in \mathbb{R}^n$ 和非负实数 $L_0 \in \mathbb{R}$, 满足 $L_0 + |L_1| \neq 0$, 使得对于任意的 $\xi \in K$,

$$\begin{aligned}
&\langle L_1, \Delta X_0\rangle + L_0\langle \ell_y(Y_0^{\xi^0}), \Delta Y_0\rangle + L_0 E[\langle \psi_x(\xi^0, P_{\xi^0}), \xi-\xi^0\rangle \\
&+ \widetilde{E}[\langle \psi_\mu(\xi_0, P_{\xi_0}, \widetilde{\xi}_0), \widetilde{\xi}-\widetilde{\xi}^0\rangle]] \\
&+ L_0 E\int_0^T (\langle h_x^{\xi^0}(t), \Delta X_t\rangle + \langle h_a^{\xi^0}(t), \Delta A_t\rangle + \langle h_b^{\xi^0}(t), \Delta B_t\rangle + \langle h_\theta^{\xi^0}(t), \Delta\theta_t\rangle \\
&+ \langle h_y^{\xi^0}(t), \Delta Y_t\rangle + \langle h_z^{\xi^0}(t), \Delta Z_t\rangle)\mathrm{d}t \\
&+ L_0 E\widetilde{E}\int_0^T (\langle (h_\mu)_1(t, \widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0}), \widetilde{\Delta X}_t\rangle + \langle (h_\mu)_2(t, \widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0}), \widetilde{\Delta A}_t\rangle + \langle (h_\mu)_3(t, \widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0}), \widetilde{\Delta B}_t\rangle \\
&+ \langle (h_\mu)_4(t, \widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0}), \widetilde{\Delta Y}_t\rangle + \langle (h_\mu)_5(t, \widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0}), \widetilde{\Delta Z}_t\rangle)\mathrm{d}t \geqslant 0,
\end{aligned} \tag{4.16}$$

其中 $h_k^{\xi_0}(t) = \frac{\partial h}{\partial k}(t, \Lambda_t^{\xi^0}, \theta_t^{\xi^0}, P_{\Lambda_t^{\xi^0}})$, $k = x,a,b,\theta,y,z$; $(h_\mu)_k$, $k=1,2,3,4,5$ 在 (4.1) 中给出.

4.3 最大值原理 I

本节研究随机最大值原理. 首先定义哈密顿函数. 令 $p=(p_1,p_2,p_3)$, $p_i \in \mathbb{R}^n$, $i=1,2,3$, 和对于 $t\in[0,T]$, $x,a,b\in\mathbb{R}^n$, $\theta\in\mathbb{R}^{n\times d}$, $y\in\mathbb{R}^n$, $z\in\mathbb{R}^{n\times d}$, $p\in\mathbb{R}^{3n}$, $q\in\mathbb{R}^n$, $\mu\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^{3n})$, $\nu\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^{n+n\times d})$, 定义

$$\begin{aligned}
&H(t,x,a,b,\theta,y,z,p,q,\mu,\nu) \\
&= \langle p_1, g(t,x,a,b,\theta,\mu)\rangle - \langle p_3, x - \mathrm{e}^{-\rho\delta}a - \rho b\rangle \\
&\quad + \langle q, f(t,x,a,b,y,z,\theta,\mu,\nu)\rangle + L_0 h(t,x,a,b,\theta,y,z,\mu,\nu).
\end{aligned} \tag{4.17}$$

考虑伴随方程

$$\begin{cases}
\mathrm{d}p_t^1 = (H_x^{\xi_0}(t) + \widetilde{E}[(\widetilde{H}_\mu^{\xi_0})_1(t)])\mathrm{d}t + H_\theta^{\xi_0}(t)\mathrm{d}W_t, \quad t\in[0,T], \\
p_0^1 = L_1,
\end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\mathrm{d}p_t^2 = (H_a^{\xi_0}(t) + \widetilde{E}[(\widetilde{H}_\mu^{\xi_0})_2(t)])\mathrm{d}t, \quad t \in [0,T], \\
p_0^2 = 0,
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\mathrm{d}p_t^3 = (H_b^{\xi_0}(t) + \widetilde{E}[(\widetilde{H}_\mu^{\xi_0})_3(t)])\mathrm{d}t, \quad t \in [0,T], \\
p_0^3 = 0,
\end{cases}
\tag{4.18}
$$

$$
\begin{cases}
\mathrm{d}q_t = (H_y^{\xi^0}(t) + \widetilde{E}[(\widetilde{H}_\nu^{\xi^0})_1(t)])\mathrm{d}t + (H_z^{\xi^0}(t) + \widetilde{E}[(\widetilde{H}_\nu^{\xi^0})_2(t)])\mathrm{d}W_t, \quad t \in [0,T], \\
q_0 = L_0 \ell_y(Y_0^{\xi^0}),
\end{cases}
$$

其中 $H_l^{\xi^0}(t)$ 是 $H(t, \Lambda_t^{\xi^0}, \theta_t^{\xi^0}, p_t, q_t, P_{\Pi_t^{\xi^0}}, P_{(Y_t^{\xi^0}, Z_t^{\xi^0})})$ 关于 l, $l = x, a, b, \theta, y, z$ 的偏导数; $(\widetilde{H}_\mu^{\xi^0})_k, k = 1,2,3$ 分别表示关于 μ 的前 n 个变量, 中间 n 个变量和最后 n 个变量的偏导数, 即 $(\widetilde{H}_\mu^{\xi^0})_k(t) := (g_\mu)_k(t, \Pi_t^{\xi^0}, P_{\Pi_t^{\xi^0}}, \widetilde{\Pi}_t^{\xi^0}, \widetilde{\theta}_t^{\xi^0})^\top \widetilde{p}_t^1 + (f_\mu)_k(t, \Lambda_t^{\xi^0}, P_{\Lambda_t^{\xi^0}}, \widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0}, \widetilde{\theta}_t^{\xi^0})^\top \widetilde{q}_t + L_0 (h_\mu)_k(t, \Lambda_t^{\xi^0}, P_{\Lambda_t^{\xi^0}}, \widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0}, \widetilde{\theta}_t^{\xi^0})$.

$(\widetilde{H}_\nu^{\xi^0})_j(t)$, $j = 1, 2$ 可以类似理解.

定理 4.3 假设 (H3.1)–(H3.3) 成立. 如果 $p_t^2 = 0$, $t \in [0,T]$, $p_T^3 = 0$, 则存在某个 $L_1 \in \mathbb{R}^n$ 和 $L_0 \geqslant 0$, 满足 $|L_1| + |L_0| \neq 0$, 使得对于任意的 $\xi \in K$,

$$
\begin{aligned}
&E[\langle p_T^1 + \Phi_x(\xi^0, P_{\xi^0}) q_T + L_0 \psi_x(\xi^0, P_{\xi^0}) + \widetilde{E}[\Phi_\mu(\xi^0, P_{\xi^0}, \widetilde{\xi}_0)\widetilde{q}_T \\
&\quad + L_0 \psi_\mu(\xi^0, P_{\xi^0}, \widetilde{\xi}_0)], \xi - \xi^0 \rangle] \geqslant 0.
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

证 对

$$
\langle \Delta X_t, p_t^1 \rangle + \langle \Delta A_t, p_t^2 \rangle + \langle \Delta B_t, p_t^3 \rangle + \langle \Delta Y_t, q_t \rangle,
$$

应用伊藤公式, 并注意到 $\mathrm{d}B_t = (X_t - \rho B_t - \mathrm{e}^{-\rho\delta} A_t)\mathrm{d}t$ (见 [22, 引理 2.1]), 可得

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}(\langle \Delta X_t, p_t^1 \rangle + \langle \Delta A_t, p_t^2 \rangle + \langle \Delta B_t, p_t^3 \rangle + \langle \Delta Y_t, q_t \rangle) \\
&= L_0(\langle h_x^{\xi^0}(t), \Delta X_t \rangle + \langle h_a^{\xi^0}(t), \Delta A_t \rangle + \langle h_b^{\xi^0}(t), \Delta B_t \rangle + \langle h_\theta^{\xi^0}(t), \Delta\theta_t \rangle \\
&\quad + \langle h_y^{\xi^0}(t), \Delta Y_t \rangle + \langle h_z^{\xi^0}(t), \Delta Z_t \rangle) + L_0 \widetilde{E}[\langle (h_\mu)_1(t, \widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0}), \widetilde{\Delta X}_t \rangle \\
&\quad + \langle (h_\mu)_2(t, \widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0}), \widetilde{\Delta A}_t \rangle + \langle (h_\mu)_3(t, \widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0}), \widetilde{\Delta B}_t \rangle + \langle (h_\nu)_1(t, \widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0}), \widetilde{\Delta Y}_t \rangle \\
&\quad + \langle (h_\nu)_2(t, \widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0}), \widetilde{\Delta Z}_t \rangle] + p_t^2 \mathrm{d}\Delta A_t + G_1(t)\mathrm{d}t + \{\cdots\}\mathrm{d}W_t,
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
G_1(t) &= \Delta X_t \widetilde{E}[(g_\mu)_1(t, \Pi_t^{\xi^0}, P_{\Pi_t^{\xi^0}}, \widetilde{\Pi}_t^{\xi^0}, \widetilde{\theta}_t^{\xi^0})\widetilde{p}_t^1 + (f_\mu)_1(t, \Lambda_t^{\xi^0}, P_{\Lambda_t^{\xi^0}}, \widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0}, \widetilde{\theta}_t^{\xi^0})\widetilde{q}_t] \\
&\quad + \Delta A_t \widetilde{E}[(g_\mu)_2(t, \Pi_t^{\xi^0}, P_{\Pi_t^{\xi^0}}, \widetilde{\Pi}_t^{\xi^0}, \widetilde{\theta}_t^{\xi^0})\widetilde{p}_t^1 + (f_\mu)_2(t, \Lambda_t^{\xi^0}, P_{\Lambda_t^{\xi^0}}, \widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0}, \widetilde{\theta}_t^{\xi^0})\widetilde{q}_t] \\
&\quad + \Delta B_t \widetilde{E}[(g_\mu)_3(t, \Pi_t^{\xi^0}, P_{\Pi_t^{\xi^0}}, \widetilde{\Pi}_t^{\xi^0}, \widetilde{\theta}_t^{\xi^0})\widetilde{p}_t^1 + (f_\mu)_3(t, \Lambda_t^{\xi^0}, P_{\Lambda_t^{\xi^0}}, \widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0}, \widetilde{\theta}_t^{\xi^0})\widetilde{q}_t] \\
&\quad - p_t^1 \widetilde{E}[(g_\mu)_1(t, \widetilde{\Pi}_t^{\xi^0})\widetilde{\Delta X}_t + (g_\mu)_2(t, \widetilde{\Pi}_t^{\xi^0})\widetilde{\Delta A}_t + (g_\mu)_3(t, \widetilde{\Pi}_t^{\xi^0})\widetilde{\Delta B}_t] \\
&\quad + \Delta Y_t \widetilde{E}[(f_\nu)_1(t, \Lambda_t^{\xi^0}, P_{\Lambda_t^{\xi^0}}, \widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0}, \widetilde{\theta}_t^{\xi^0})\widetilde{q}_t] + \Delta Z_t \widetilde{E}[(f_\nu)_2(t, \Lambda_t^{\xi^0}, P_{\Lambda_t^{\xi^0}}, \widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0}, \widetilde{\theta}_t^{\xi^0})\widetilde{q}_t] \\
&\quad - q_t \widetilde{E}[(f_\mu)_1(t, \widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0})\widetilde{\Delta X}_t + (f_\mu)_2(t, \widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0})\widetilde{\Delta A}_t + (f_\mu)_3(t, \widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0})\widetilde{\Delta B}_t
\end{aligned}
$$

$$+(f_\nu)_1(t,\widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0})\widetilde{\Delta Y}_t+(f_\nu)_2(t,\widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0})\widetilde{\Delta Z}_t]. \tag{4.21}$$

注 4.1 和事实 $\widetilde{P}_{\widetilde{X}_t^{\xi^0}}=P_{X_t^{\xi^0}}$ 暗示着

$$E[\Delta X_t\widetilde{E}[(g_\mu)_1(t,\widetilde{\Pi}_t^{\xi^0})\widetilde{p}_t]]=E[p_t\widetilde{E}[(g_\mu)_1(t,\widetilde{\Pi}_t^{\xi^0})\widetilde{\Delta X}_t]].$$

这种方法同样适用于计算 (4.21) 的剩余项. 因此

$$E\int_0^T G_1(t)\mathrm{d}t=0. \tag{4.22}$$

由 (4.20), (4.16) 和假设 $p_t^2=0,t\in[0,T]$, P-a.s. 和 $p_T^3=0$, P-a.s., 可得

$$\begin{aligned}&E[\langle p_T^1+\Phi_x(\xi^0,P_{\xi^0})q_T+L_0\psi_x(\xi^0,P_{\xi^0}),\xi-\xi^0\rangle\\&+\widetilde{E}[\langle\Phi_\mu(\xi^0,P_{\xi^0},\widetilde{\xi}_0)q_T+L_0\psi_\mu(\xi^0,P_{\xi^0},\widetilde{\xi}_0),\widetilde{\xi}-\widetilde{\xi}^0\rangle]]\geqslant 0.\end{aligned} \tag{4.23}$$

从而, (4.19) 得证.

4.4 随机最大值原理 II

在本小节, 我们考虑最优控制问题 (3.4)–(3.6) 的一种特殊情况, 即 (3.5) 中的函数 h 独立于 $(A.,B.)$ 和它们的分布. 在这种情况下, (4.16) 变为对于任意的 $\xi\in K$,

$$\begin{aligned}&\langle L_1,\Delta X_0\rangle+L_0\langle\ell_y(Y_0^{\xi^0}),\Delta Y_0\rangle+L_0E[\langle\psi_x(\xi^0,P_{\xi^0}),\xi-\xi^0\rangle+\widetilde{E}[\langle\psi_\mu(\xi_0,P_{\xi_0},\widetilde{\xi}_0),\widetilde{\xi}-\widetilde{\xi}^0\rangle]]\\&+L_0E\int_0^T(\langle h_x^{\xi^0}(t),\Delta X_t\rangle+\langle h_\theta^{\xi^0}(t),\Delta\theta_t\rangle+\langle h_y^{\xi^0}(t),\Delta Y_t\rangle+\langle h_z^{\xi^0}(t),\Delta Z_t\rangle)\mathrm{d}t\\&+L_0E\widetilde{E}\int_0^T(\langle(h_\mu)_1(t,\widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0}),\widetilde{\Delta X}_t\rangle+\langle(h_\mu)_4(t,\widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0}),\widetilde{\Delta Y}_t\rangle\\&+\langle(h_\mu)_5(t,\widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0}),\widetilde{\Delta Z}_t\rangle)\mathrm{d}t\geqslant 0.\end{aligned} \tag{4.24}$$

定义哈密顿函数: 对于 $t\in[0,T]$, $x,a,b\in\mathbb{R}^n$, $\theta\in\mathbb{R}^{n\times d}$, $y\in\mathbb{R}^m$, $z\in\mathbb{R}^{m\times d}$, $p\in\mathbb{R}^n$, $q\in\mathbb{R}^m$, $\mu_1,\mu_2,\mu_3\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$, $\nu_1\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^m)$, $\nu_2\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^{m\times d})$,

$$\begin{aligned}&H(t,x,a,b,\theta,y,z,p,q,\mu_1,\mu_2,\mu_3,\nu_1,\nu_2)\\&=\langle p,g(t,x,a,b,\theta,\mu_1,\mu_2,\mu_3)\rangle+\langle q,f(t,x,a,b,y,z,\theta,\mu_1,\mu_2,\mu_3,\nu_1,\nu_2)\rangle\\&\quad+L_0h(t,x,y,z,\theta,\mu_1,\nu_1,\nu_2).\end{aligned}$$

为了研究问题 (3.4)–(3.6) 的最大值原理, 首先介绍下面的伴随方程, 它是由一个超前的平均场随机微分方程和一个平均场随机微分方程构成:

$$\begin{cases}\mathrm{d}p_t=\Big\{H_x^{\xi^0}(t)+E^{\mathcal{F}_t}[H_a^{\xi^0}(t+\delta)]+E^{\mathcal{F}_t}\Big[\mathrm{e}^{\rho t}\displaystyle\int_t^{t+\delta}\mathrm{e}^{-\rho s}H_b^{\xi^0}(s)\mathrm{d}s\Big]+\widetilde{E}\Big[(\widetilde{H}_\mu^{\xi^0})_1(t)\\\qquad\quad+E^{\mathcal{F}_t}[(\widetilde{H}_\mu^{\xi^0})_2(t+\delta)]+E^{\mathcal{F}_t}\Big[\mathrm{e}^{\rho t}\displaystyle\int_t^{t+\delta}\mathrm{e}^{-\rho s}(\widetilde{H}_\mu^{\xi^0})_3(s)\mathrm{d}s\Big]\Big]\Big\}\mathrm{d}t\\\qquad\quad+H_\theta^{\xi^0}(t)\mathrm{d}W_t,\quad t\in[0,T],\\p_0=L_1,\quad p_t=0,\quad t\in(T,T+\delta];\\\mathrm{d}q_t=\{H_y^{\xi^0}(t)+\widetilde{E}[(\widetilde{H}_\nu^{\xi^0})_1(t)]\}\mathrm{d}t+\{H_z^{\xi^0}(t)+\widetilde{E}[(\widetilde{H}_\nu^{\xi^0})_2(t)]\}\mathrm{d}W_t,\quad t\in[0,T],\\q_0=L_0\ell_y(Y_0^{\xi^0}),\quad q_t=0,\quad t\in(T,T+\delta].\end{cases} \tag{4.25}$$

上述方程中超前平均场随机微分方程解的存在唯一性的证明类似于经典情况下超前随机微分方程的证明，见文 [30].

我们有如下结果.

定理 4.4 假设 (H3.1)–(H3.3) 成立. 令 ξ^0 是问题 (3.4)–(3.6) 的最优解. 用 $(X^{\xi^0},\theta^{\xi^0},Y^{\xi^0},Z^{\xi^0})$ 表示 (3.4) 带有 $\xi=\xi^0$ 的解, 则存在某个 $L_1\in\mathbb{R}^n$ 和 $L_0\geqslant 0$, 满足 $|L_1|+|L_0|\neq 0$, 使得对于任意的 $\xi\in K$,

$$\begin{aligned}&E[\langle p_{_T}+\Phi_x(\xi^0,P_{\xi^0})q_{_T}+L_0\psi_x(\xi^0,P_{\xi^0})+\widetilde{E}[\Phi_\mu(\xi^0,P_{\xi^0},\widetilde{\xi}_0)\widetilde{q}_{_T}\\&+L_0\psi_\mu(\xi^0,P_{\xi^0},\widetilde{\xi}_0)],\xi-\xi^0\rangle]\geqslant 0.\end{aligned}\tag{4.26}$$

证 对 $\langle\Delta X_t,p_t\rangle+\langle\Delta Y_t,q_t\rangle$ 应用伊藤公式，可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}(\langle\Delta X_t,p_t\rangle+\langle\Delta Y_t,q_t\rangle)\\&=L_0(\langle h_x^{\xi^0}(t),\Delta X_t\rangle+\langle h_\theta^{\xi^0}(t),\Delta\theta_t\rangle+\langle h_y^{\xi^0}(t),\Delta Y_t\rangle+\langle h_z^{\xi^0}(t),\Delta Z_t\rangle)\\&\quad+L_0\widetilde{E}[\langle(h_\mu)_1(t,\widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0}),\widetilde{\Delta X}_t\rangle+\langle(h_\nu)_1(t,\widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0}),\widetilde{\Delta Y}_t\rangle+\langle(h_\nu)_2(t,\widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0}),\widetilde{\Delta Z}_t\rangle]\\&\quad+G_2(t)\mathrm{d}t+\{\cdots\}\mathrm{d}W_t,\end{aligned}\tag{4.27}$$

其中

$$\begin{aligned}G_2(t)&=\Delta X_t\widetilde{E}[(g_\mu)_1(t,\Pi_t^{\xi^0},P_{\Pi_t^{\xi^0}},\widetilde{\Pi}_t^{\xi^0},\widetilde{\theta}_t^{\xi^0})\widetilde{p}_t+(f_\mu)_1(t,\Lambda_t^{\xi^0},P_{\Lambda_t^{\xi^0}},\widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0},\widetilde{\theta}_t^{\xi^0})\widetilde{q}_t]\\&\quad+\Delta X_t\widetilde{E}[E^{\mathcal{F}_t}[(g_\mu)_2(t+\delta,\Pi_{t+\delta}^{\xi^0},P_{\Pi_{t+\delta}^{\xi^0}},\widetilde{\Pi}_{t+\delta}^{\xi^0},\widetilde{\theta}_{t+\delta}^{\xi^0})\widetilde{p}_{t+\delta}\\&\quad+(f_\mu)_2(t+\delta,\Lambda_{t+\delta}^{\xi^0},P_{\Lambda_{t+\delta}^{\xi^0}},\widetilde{\Lambda}_{t+\delta}^{\xi^0},\widetilde{\theta}_{t+\delta}^{\xi^0})\widetilde{q}_{t+\delta}]]\\&\quad+\Delta X_t\widetilde{E}\Big[E^{\mathcal{F}_t}\Big[\mathrm{e}^{\rho t}\int_t^{t+\delta}\mathrm{e}^{-\rho s}((g_\mu)_3(s,\Pi_s^{\xi^0},P_{\Pi_s^{\xi^0}},\widetilde{\Pi}_s^{\xi^0},\widetilde{\theta}_s^{\xi^0})\widetilde{p}_s\\&\quad+(f_\mu)_3(s,\Lambda_s^{\xi^0},P_{\Lambda_s^{\xi^0}},\widetilde{\Lambda}_s^{\xi^0},\widetilde{\theta}_s^{\xi^0})\widetilde{q}_s)\mathrm{d}s\Big]\Big]\\&\quad-p_t\widetilde{E}[(g_\mu)_1(t,\widetilde{\Pi}_t^{\xi^0})\widetilde{\Delta X}_t+(g_\mu)_2(t,\widetilde{\Pi}_t^{\xi^0})\widetilde{\Delta A}_t+(g_\mu)_3(t,\widetilde{\Pi}_t^{\xi^0})\widetilde{\Delta B}_t]\\&\quad+\Delta Y_t\widetilde{E}[(f_\nu)_1(t,\Lambda_t^{\xi^0},P_{\Lambda_t^{\xi^0}},\widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0},\widetilde{\theta}_t^{\xi^0})\widetilde{q}_t]+\Delta Z_t\widetilde{E}[(f_\nu)_2(t,\Lambda_t^{\xi^0},P_{\Lambda_t^{\xi^0}},\widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0},\widetilde{\theta}_t^{\xi^0})\widetilde{q}_t]\\&\quad-q_t\widetilde{E}[(f_\mu)_1(t,\widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0})\widetilde{\Delta X}_t+(f_\mu)_2(t,\widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0})\widetilde{\Delta A}_t+(f_\mu)_3(t,\widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0})\widetilde{\Delta B}_t+(f_\nu)_1(t,\widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0})\widetilde{\Delta Y}_t\\&\quad+(f_\nu)_2(t,\widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0})\widetilde{\Delta Z}_t],\end{aligned}\tag{4.28}$$

和 $(g_\mu)_k(t,\widetilde{\Pi}_t^{\xi^0}),(l_\mu)_k(t,\widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0}),(l_\nu)_j(t,\widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0}),\ l=f,h,\ k=1,2,3,\ j=1,2$ 在 (4.1) 中给出.

在上式中首先在 $[0,T]$ 上积分，然后取期望，可知

$$\begin{aligned}&E[\langle p_{_T}+\Phi_x(\xi^0,P_{\xi^0})q_{_T}+L_0\psi_x(\xi^0,P_{\xi^0}),\xi-\xi^0\rangle+\widetilde{E}[\langle\Phi_\mu(\xi^0,P_{\xi^0},\widetilde{\xi}_0)q_{_T}\\&+L_0\psi_\mu(\xi^0,P_{\xi^0},\widetilde{\xi}_0),\widetilde{\xi}-\widetilde{\xi}^0\rangle]]\\&=\langle L_1,\Delta X_0\rangle+L_0\langle\ell_y(Y_0^{\xi^0}),\Delta Y_0\rangle+L_0E[\langle\psi_x(\xi^0,P_{\xi^0}),\xi-\xi^0\rangle\\&\quad+\widetilde{E}[\langle\psi_\mu(\xi_0,P_{\xi_0},\widetilde{\xi}_0),\widetilde{\xi}-\widetilde{\xi}^0\rangle]]+L_0E\int_0^T(\langle h_x^{\xi^0}(t),\Delta X_t\rangle+\langle h_y^{\xi^0}(t),\Delta Y_t\rangle\\&\quad+\langle h_z^{\xi^0}(t),\Delta Z_t\rangle)\mathrm{d}t+L_0E\widetilde{E}\Big[\int_0^T(\langle(h_\mu)_1(t,\widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0}),\widetilde{\Delta X}_t\rangle+\langle(h_\nu)_1(t,\widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0}),\widetilde{\Delta Y}_t\rangle\end{aligned}$$

$$+\langle (h_\nu)_2(t,\widetilde{\Lambda}_t^{\xi^0}),\widetilde{\Delta Z_t}\rangle)\mathrm{d}t\Big]+E\int_0^T G_2(t)\mathrm{d}t.$$

因为 $E\int_0^T G_2(t)\mathrm{d}t=0$, 由 (4.24) 可得预期结果 (4.26).

注 4.3　(4.26) 一般化了文 [21] 的结果. 事实上, 如果所有的系数独立于时滞项 (a,b), 并且所有的系数通过积分的形式依赖于一个测度，那么我们的结果就会退化成文 [21] 的结论. 具体来说，假设 $\overline{b}(t,x,u,\mu)=\widehat{b}(t,x,u,\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\mu(\mathrm{d}x))$, 这里 $\varphi:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ 是一个可测函数. $\overline{\sigma},\overline{f},\Phi,\overline{h}$ 可以类似定义. 在这种情况下 (4.26) 就会变成系数依赖于期望的版本.

注 4.4　事实上，(4.26) 暗示出对于所有的 $\xi\in K$,

$$\begin{aligned}&\langle p_T+\Phi_x(\xi^0,P_{\xi^0})q_T+L_0\psi_x(\xi^0,P_{\xi^0})+\widetilde{E}[\Phi_\mu(\xi^0,P_{\xi^0},\widetilde{\xi}_0)\widetilde{q}_T\\&+L_0\psi_\mu(\xi^0,P_{\xi^0},\widetilde{\xi}_0)],\xi-\xi^0\rangle\geqslant 0,\ \text{a.s.}\end{aligned}$$

下面的推论可以以一种更加直观的方式解释 (4.26). 用 ∂K 表示 K 的边界. 定义 $\Omega_*:=\{\omega\in\Omega\mid\xi^0(\omega)\in\partial K\}$.

推论 4.1　假设 (H3.1)–(H3.3) 成立，则对于每一个 $\xi\in K$,

$$\begin{aligned}&\langle p_T+\Phi_x(\xi^0,P_{\xi^0})q_T+L_0\psi_x(\xi^0,P_{\xi^0})+\widetilde{E}[\Phi_\mu(\xi^0,P_{\xi^0},\widetilde{\xi}_0)\widetilde{q}_T\\&+L_0\psi_\mu(\xi^0,P_{\xi^0},\widetilde{\xi}_0)],\xi-\xi^0\rangle\ \geqslant 0,\quad \text{a.s. 在 } \Omega_* \text{ 上}\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}&p_T+\Phi_x(\xi^0,P_{\xi^0})q_T+L_0\psi_x(\xi^0,P_{\xi^0})+\widetilde{E}[\Phi_\mu(\xi^0,P_{\xi^0},\widetilde{\xi}_0)\widetilde{q}_T\\&+L_0\psi_\mu(\xi^0,P_{\xi^0},\widetilde{\xi}_0)]=0,\quad \text{a.s. 在 } \Omega_*^c \text{ 上.}\end{aligned}$$

5 线性二次问题

本节应用线性二次问题来阐述前面的最大值原理. 为了简便，令 $m=n=d=1$, 定义 $\overline{X}_t:=\int_{t-\delta}^t \mathrm{e}^{-\rho(t-s)}X_s\mathrm{d}s,\rho>0$. 考虑下面带时滞项的平均场正倒向随机微分方程:

$$\begin{cases}\mathrm{d}X_t=(A_1\overline{X}_t+A_2u_t+A_3h(E[g(\overline{X}_t)]))\mathrm{d}t+(B_1X_{t-\delta}+B_2u_t\\ \qquad\quad +B_3h(E[g(X_{t-\delta})]))\mathrm{d}W_t,\quad t\in[0,T],\\ X_t=\varphi_t,\quad t\in[-\delta,0];\\ -\mathrm{d}Y_t=(C_1\overline{X}_t+C_2Y_t+C_3Z_t+C_4u_t+C_5h(E[g(\overline{X}_t)])+C_6h(E[g(Y_t)])\\ \qquad\quad +C_7h(E[g(Z_t)]))\mathrm{d}t-Z_t\mathrm{d}W_t,\quad t\in[0,T],\\ Y_T=D_1X_T+D_2h(E[g(X_T)]),\end{cases}\tag{5.1}$$

这里 $\varphi.$ 是一个连续可测函数满足 $E\big[\sup\limits_{t\in[-\delta,0]}|\varphi_t|^2\big]<\infty$; A_i, B_i, C_i, D_i 是给定的实数且 $B_2\neq 0$; $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是所有导数都有界的二次连续可微函数.

带终端状态限制的控制问题是

$$\begin{aligned}&\text{最小化 } J(u(\cdot)):=\frac{1}{2}E[K_1X_T^2+K_2h(E[g(X_T)])+K_3Y_0^2]\\&\text{受制于 } u(\cdot)\in\mathcal{U}_{ad},\ X_T\in\mathbb{R}^+,\ \text{a.s.,}\end{aligned}\tag{5.2}$$

其中 $K_i>0,\ i=1,2,3.$

令 $\theta_t=B_1X_{t-\delta}+B_2u_t+B_3h(E[g(X_{t-\delta})])$, 等价的倒向公式可以写成

$$\begin{cases}-\mathrm{d}X_t=\Big(\dfrac{A_2B_1}{B_2}X_{t-\delta}-A_1\overline{X}_t-\dfrac{A_2}{B_2}\theta_t+\dfrac{A_2B_3}{B_2}h(E[g(X_{t-\delta})])\\ \qquad\qquad -A_3h(E[g(\overline{X}_t)])\Big)\mathrm{d}t-\theta_t\mathrm{d}W_t,\quad t\in[0,T],\\ X_T=\xi,\quad X_t=\varphi_t,\quad t\in[-\delta,0);\\ -\mathrm{d}Y_t=\Big(-\dfrac{B_1C_4}{B_2}X_{t-\delta}+C_1\overline{X}_t+\dfrac{C_4}{B_2}\theta_t+C_2Y_t+C_3Z_t-\dfrac{C_4B_3}{B_2}h(E[g(X_{t-\delta})])\\ \qquad\qquad +C_5h(E[g(\overline{X}_t)])+C_6h(E[g(Y_t)])+C_7h(E[g(Z_t)])\Big)\mathrm{d}t\\ \qquad\qquad -Z_t\mathrm{d}W_t,\quad t\in[0,T],\\ Y_T=D_1\xi+D_2h(E[g(\xi)]).\end{cases}\tag{5.3}$$

根据上面的方程，原始的控制问题可以写成下面的辅助优化问题

$$\begin{aligned}&\text{最小化}\quad J(\xi):=\frac{1}{2}E[K_1\xi^2+K_2h(E[g(\xi)])+K_3Y_0^2]\\ &\text{受制于}\quad \xi\in\mathbb{R}^+,\ X_0^{\xi}=a:=\varphi_0.\end{aligned}\tag{5.4}$$

令 $\mu=(\mu_1,\mu_2,\mu_3),\nu=(\nu_1,\nu_2),\mu_i\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R}),i=1,2,3,\ \nu_j\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R}),j=1,2$, 定义

$$\begin{aligned}H(t,x,a,b,\theta,y,z,p,q,\mu,\nu)&=p\Big(\frac{A_2B_1}{B_2}a-A_1b-\frac{A_2}{B_2}\theta+\frac{A_2B_3}{B_2}\mu_2-A_3\mu_3\Big)\\ &+q\Big(-\frac{B_1C_4}{B_2}a+C_1b+\frac{C_4}{B_2}\theta+C_2y+C_3z-\frac{C_4B_3}{B_2}\mu_2+C_5\mu_3+C_6\nu_1+C_7\nu_2\Big).\end{aligned}$$

令 ξ^0 是 (5.4) 的最优解. 由定理 4.1 可知，存在 $L_0\geqslant 0$ 和 $L_1\in\mathbb{R}$ 满足 $|L_0|+|L_1|\neq 0$, 使得变分不等式 (4.5) 成立.

考虑伴随方程

$$\begin{cases}\mathrm{d}p_t=\Big\{E^{\mathcal{F}_t}\Big[\dfrac{A_2B_1}{B_2}p_{t+\delta}-\dfrac{B_1C_4}{B_2}q_{t+\delta}\Big]\\ \qquad\qquad +E^{\mathcal{F}_t}\Big[\mathrm{e}^{\rho t}\displaystyle\int_t^{t+\delta}\mathrm{e}^{-\rho s}(-A_1p(s)+C_1q(s))\mathrm{d}s\Big]\\ \qquad\qquad +\widetilde{E}E^{\mathcal{F}_t}\Big[\Big(\dfrac{A_2B_3}{B_2}\widetilde{p}(t+\delta)-\dfrac{C_4B_3}{B_2}\widetilde{q}(t+\delta)\Big)h'(E[g(X_{t+\delta})])g'(\widetilde{X}_{t+\delta})\Big]\\ \qquad\qquad +\widetilde{E}E^{\mathcal{F}_t}\Big[\mathrm{e}^{\rho t}\displaystyle\int_t^{t+\delta}\mathrm{e}^{-\rho s}(-A_3\widetilde{p}(s)+C_5\widetilde{q}(s))h'(E[g(X_s)])g'(\widetilde{X}_s)\mathrm{d}s\Big]\Big\}\mathrm{d}t\\ \qquad\qquad +\Big(-\dfrac{A_2}{B_2}p_t+\dfrac{C_4}{B_2}q_t\Big)\mathrm{d}W_t,\quad t\in[0,T],\\ p_0=L_1,\quad p_t=0,\quad t\in(T,T+\delta];\\ \mathrm{d}q_t=(C_2q_t+\widetilde{E}[C_6\widetilde{q}_th'(E[g(Y_t)]g'(\widetilde{Y}_t)])\mathrm{d}t\\ \qquad\qquad +(C_3q_t+\widetilde{E}[C_7\widetilde{q}_th'(E[g(Z_t])g'(\widetilde{Z}_t)])\mathrm{d}W_t,\quad t\in[0,T],\\ q_0=K_3L_0Y_0,\end{cases}\tag{5.5}$$

这里 (Y^{ξ^0},Z^{ξ^0}) 是 (5.3) 带有 $\xi=\xi^0$ 的解.

根据定理 4.4 可知，对于任意 $\xi \geqslant 0$,

$$\Big(p_{_T} + D_1 q_{_T} + L_0 K_1 \xi^0 + \widetilde{E}\Big[\Big(D_2 \widetilde{q}_{_T} + \frac{1}{2} L_0 K_2\Big) h'(E[g(\xi^0)]) g'(\widetilde{\xi}^0)\Big]\Big)(\xi - \xi^0) \geqslant 0, \text{ a.s.}, \tag{5.6}$$

其中 (p, q) 是 (5.5) 的解.

进一步，令 $\Omega_* := \{\omega \in \Omega |\ \xi^0(\omega) = 0\}$, 则

$$p_{_T} + D_1 q_{_T} + L_0 K_1 \xi^0 + \widetilde{E}\Big[\Big(D_2 \widetilde{q}_{_T} + \frac{1}{2} L_0 K_2\Big) h'(E[g(\xi^0)]) g'(\widetilde{\xi}^0)\Big] = 0, \text{ a.s. 在 } \Omega_*^c \text{ 上}$$

和

$$p_{_T} + D_1 q_{_T} + \widetilde{E}\Big[\Big(D_2 \widetilde{q}_{_T} + \frac{1}{2} L_0 K_2\Big) h'(E[g(\xi^0)]) g'(\widetilde{\xi}^0)\Big] \geqslant 0, \text{ a.s. 在 } \Omega_* \text{ 上.}$$

6 平均场对策的应用

本节研究带有时滞和终端状态限制的生产 - 消费最优选取的平均场对策问题，得到了这一平均场对策的渐进纳什均衡存在的必要条件.

假设一个生产商投资生产某种产品，并能从中获得回报. 令 $X_t, k_t, c_t \geqslant 0$ 分别表示生产商 t 时刻的资本，t 时刻的劳动力和 t 时刻的消费率. 在 1928 年，Ramsey [31] 介绍了下面的模型来描述这一系统

$$\frac{\mathrm{d}X_t}{\mathrm{d}t} = f(X_t, k_t) - c_t. \tag{6.1}$$

然而在现实情况中，投资肯定会有风险和时滞. 因此，Chen 和 Wu [23] 将上述模型延拓成下面的形式：

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = [f(X_{t-\delta}, k_t) - c_t]\mathrm{d}t + \sigma(X_{t-\delta})\mathrm{d}W_t, & t \in [0, T], \\ X_t = \varphi_t, & t \in [-\delta, 0], \end{cases} \tag{6.2}$$

这里 $\delta > 0$ 是时滞时间；$\varphi_\cdot \in C[-\delta, 0]$ 是给定的初始资产；W 是一个 1- 维的标准布朗运动.

在本节中, 我们将上面模型推广到相应的平均场对策. 假设映射 f^i, σ^i, h^i 满足 (H3.1) 和 (H3.2). 考虑 N 个生厂商，假定第 i 个生产商私人状态动力系统如下：

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t^i = (f^i(A_t^i, B_t^i, k_t^i, \nu_t^N) - c_t^i)\mathrm{d}t + \sigma^i(A_t^i, B_t^i, c_t^i)\mathrm{d}W_t^i, & t \in [0, T], \\ X_t^i = \varphi_t^i, & t \in [-\delta, 0], \end{cases} \tag{6.3}$$

这里 $A^i(t) = X_{t-\delta}^i, \delta > 0$; $B_t^i = \int_{t-\delta}^t \mathrm{e}^{-\rho(t-s)} X^i(s)\mathrm{d}s$, $\rho > 0$; $\nu_t^N = \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^N \delta_{X_t^i}$, δ_x 表示在 x 处的 Dirac 测度；W^i, $i = 1, 2, \cdots, N$ 是独立的布朗运动. 我们限定 X_T^i 属于 $\mathbb{R}$ 中的子凸集 K^i.

对于第 i 个生产商, 问题是通过选取他 / 她的消费率 $c_t^i \geqslant 0$ 最大化下面的表现泛函：

$$J^i(c^i) = E\Big[\int_0^T h^i(t, A_t^i, B_t^i, c_t^i, \nu_t^N)\mathrm{d}t + X_T^i\Big], \quad 1 \leqslant i \leqslant N. \tag{6.4}$$

假设这个对策是对称的，即 $f^i = f$, $c^i = c$, $\sigma^i = \sigma, h^i = h, \varphi^i = \varphi$, $k^i = k$, $K^i = K$ 独立于 i. 令 $N \to +\infty$, 根据 Lasry 和 Lions [1] 的思想 (也可以参考文 [32]), 可以通过考

虑具有一致消费率的代表性生产商作为代表来分析这一平均场对策的渐进纳什均衡，其动力系统可以刻画为

$$\begin{cases}\mathrm{d}X_t=(f(A_t,B_t,k_t,P_{X_t})-c_t)\mathrm{d}t+\sigma(A_t,B_t,c_t)\mathrm{d}W_t, \quad t\in[0,T],\\ X_t=\varphi_t, \quad t\in[-\delta,0].\end{cases} \tag{6.5}$$

相应地，其价值函数为

$$J(c)=E\Big[\int_0^T h(t,A_t,B_t,c_t,P_{X_t})\mathrm{d}t+X_T\Big]. \tag{6.6}$$

为了得到最大值原理的精确形式，假设 $f(a,b,k,P_X)=Lk(a+b)+\psi(E[\varphi(X)])$, $h(t,a,b,c,P_X)=\mathrm{e}^{-rt}\frac{c^\gamma}{\gamma}+\psi(E[\varphi(X)])$, 其中随机变量 X 属于 $L^1(\Omega,\mathbb{F},P)$; $\psi,\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是具有有界导数的二次连续可微函数； L,k 是两个常数； r 是红利率； $\gamma\in(0,1)$, $1-\gamma$ 是生产商相对的风险厌恶. 读者可以参考文 [23, 33] 中系数 f,h 独立于分布的情况.

接下来在两种情况下介绍我们的最大值原理.

情况 1 σ 独立于 (a,b). 在这种情况下，上述的最优消费问题可以写成

$$\begin{cases}\mathrm{d}X_t=(Lk(A_t+B_t)-c_t+\psi(E[\varphi(X_t)]))\mathrm{d}t+\sigma(A_t,B_t,c_t)\mathrm{d}W_t, \quad t\in[0,T],\\ X_t=\varphi_t,\ t\in[-\delta,0],\end{cases} \tag{6.7}$$

其中 $X_T\in K$, 和价值函数

$$J(c_\cdot)=E\Big[\int_0^T\Big(\mathrm{e}^{-rt}\frac{c_t^\gamma}{\gamma}+\psi(E[\varphi(X_t)])\Big)\mathrm{d}t+X_T\Big]. \tag{6.8}$$

令 $\theta=\sigma(a,b,c)$ 和 $c=\widehat{\sigma}(a,b,\theta)$, 其中 $\widehat{\sigma}$ 是 σ 关于 c 逆函数，则问题 (6.7)–(6.8) 变成

$$\begin{cases}-\mathrm{d}X_t=-(Lk(A_t+B_t)-\widehat{\sigma}(A_t,B_t,\theta_t)+\psi(E[\varphi(X_t)]))\mathrm{d}t-\theta_t\mathrm{d}W_t, \quad t\in[0,T],\\ X_T=\xi, \quad X_t=\varphi_t, \quad t\in[-\delta,0)\end{cases} \tag{6.9}$$

和

$$J(\xi)=E\Big[\int_0^T\Big(\mathrm{e}^{-rt}\frac{1}{\gamma}\widehat{\sigma}(A_t,B_t,\theta_t)^\gamma+\psi(E[\varphi(X_t)])\Big)\mathrm{d}t+X_T\Big]. \tag{6.10}$$

假设 $(X^0_\cdot,c^0_\cdot)$ 是问题 (6.7)–(6.8) 最优对. 令 $\widehat{\sigma}^{\xi^0}(t)=\widehat{\sigma}(A_t^{\xi^0},B_t^{\xi^0},\theta_t^{\xi^0})$. 用 $\widehat{\sigma}_l^{\xi^0}(t)=\frac{\partial\widehat{\sigma}}{\partial l}(A_t^{\xi^0},\ B_t^{\xi^0},\theta_t^{\xi^0})$, $l=a,b,\theta$, 表示 $\widehat{\sigma}$ 关于 l 的偏导数. 令 $(p^1_\cdot,p^2_\cdot,p^3_\cdot)$ 是下面伴随方程的解：

$$\begin{cases}\mathrm{d}p_t^1=(-p_t^3-\psi'(E[\varphi(X_t^{\xi_0})])E[(L_0-p_t^1)\varphi'(X_t^{\xi_0})])\mathrm{d}t\\ \qquad\quad+(p_t^1\widehat{\sigma}_\theta^{\xi^0}(t)+L_0\mathrm{e}^{-rt}(\widehat{\sigma}^{\xi^0}(t))^{\gamma-1}\widehat{\sigma}_\theta^{\xi^0}(t))\mathrm{d}W_t, \quad t\in[0,T],\\ p_0^1=L_1,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathrm{d}p_t^2=(-Lkp_t^1+\mathrm{e}^{-\rho\delta}p_t^3+\widehat{\sigma}_a^{\xi^0}(t)p_t^1+L_0\mathrm{e}^{-rt}(\widehat{\sigma}^{\xi^0}(t))^{\gamma-1}\widehat{\sigma}_a^{\xi^0}(t))\mathrm{d}t, \quad t\in[0,T],\\ p_0^2=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathrm{d}p_t^3=(-Lkp_t^1+\rho p_t^3+\widehat{\sigma}_b^{\xi^0}(t)p_t^1+L_0\mathrm{e}^{-rt}(\widehat{\sigma}^{\xi^0}(t))^{\gamma-1}\widehat{\sigma}_b^{\xi^0}(t))\mathrm{d}t, \quad t\in[0,T],\\ p_0^3=0,\end{cases}$$

其中常数 L_0 和 L_1 在定理 4.1 中给出.

如果 $p_t^2=0,\ t\in[0,T]$ 和 $p_T^3=0$, 根据定理 4.3 可得, 对于 $\xi^0=X_T^0$ 和 $\Omega_*=\{\omega\in\Omega \mid \xi^0(\omega)\in\partial K\}$,

$$\begin{cases}(p_T^1+L_0+L_0E[h(\xi^0)])(\xi-\xi^0)\geqslant 0, & \text{在 } \Omega_* \text{ 上},\\ (p_T^1+L_0+L_0E[h(\xi^0)])(\xi-\xi^0)=0, & \text{在 } \Omega_*^c \text{ 上}.\end{cases} \tag{6.11}$$

情况 2 σ 独立于 (a,b). 在这种情况下, (6.9) 和 (6.10) 可以写成

$$\begin{cases}-\mathrm{d}X_t=-(Lk(A_t+B_t)-\widehat{\sigma}(\theta_t)++\psi(E[\varphi(X_t)]))\mathrm{d}t-\theta_t\mathrm{d}W_t, \quad t\in[0,T],\\ X_T=\xi, \quad X_t=\varphi_t,\ t\in[-\delta,0),\end{cases} \tag{6.12}$$

和

$$J(\xi)=E\Big[\int_0^T\Big(\mathrm{e}^{-rt}\frac{1}{\gamma}\widehat{\sigma}(\theta_t,P_{X_t})^\gamma+\psi(E[\varphi(X_t)])\Big)\mathrm{d}t+X_T\Big]. \tag{6.13}$$

考虑下面超前的随机微分方程

$$\begin{cases}\mathrm{d}p_t=\Big(-Lk\Big(E^{\mathcal{F}_t}[p(t+\delta)+\mathrm{e}^{\rho t}\displaystyle\int_t^{t+\delta}\mathrm{e}^{-\rho s}p(s)\mathrm{d}s]\Big)\\ \qquad -\psi'(E[\varphi(X_t^{\xi_0})])E[(L_0-p_t)\varphi'(X_t^{\xi_0})]\Big)\mathrm{d}t\\ \qquad +(p_t\widehat{\sigma}_\theta(\theta_t^{\xi^0})+L_0\mathrm{e}^{-rt}(\widehat{\sigma}(\theta_t^{\xi^0}))^{\gamma-1}\widehat{\sigma}_\theta(\theta_t^{\xi^0}))\mathrm{d}W_t, \quad t\in[0,T],\\ p_0=L_1, \quad p_t=0, \quad t\in(T,T+\delta].\end{cases} \tag{6.14}$$

由定理 4.4, 可知

$$\begin{cases}(p_T^1+L_0+L_0E[h(\xi^0)])(\xi-\xi^0)\geqslant 0, & \text{在 } \Omega_* \text{ 上},\\ (p_T^1+L_0+L_0E[h(\xi^0)])(\xi-\xi^0)=0, & \text{在 } \Omega_*^c \text{ 上},\end{cases} \tag{6.15}$$

其中 $p.$ 是 (6.15) 的解.

7 结论性注解

本文研究了带有时滞和终端限制的平均场正倒向控制系统的随机最大值原理. 有几个新的特征需要指出：首先，状态方程由一个带时滞的平均场正倒向随机微分方程所刻画，它的系数不但依赖于解、解的时滞，而且也依赖于它们的分布. 相关的伴随方程的构造并不是已有工作的平凡推广. 事实上，如果 σ 依赖于 $(A.,B.)$ 和它们分布，伴随方程是由两个平均场随机微分方程和两个常微分方程构成. 然而，如果 σ 独立于它们，伴随方程由一个超前的平均场随机微分方程和一个平均场随机微分方程构成. 但是无论哪种伴随方程都不同于现存的文献. 其次，与现有的工作相比，见文 [17, 21], 在我们的工作中扩散系数不仅依赖于解和控制，而且也依赖于解的时滞和时滞项的分布. 基于上述特征，我们的结论与 Wen 和 Shi [28], Elsanosi, Øksandal 和 Sulem [22], Chen 和 Wu [23] 有显著的不同. 从某种程度上来说，本文一般化了文 [17, 21, 28] 的结论. 最后，作为阐述性应用，我们研究了一个生产 - 消费最优选取的平均场对策问题. 通过已获得的理论结果，给出了这一平均场对策的渐进纳什均衡.

致谢 对审稿人及编辑部老师的付出，深表感谢.

参 考 文 献

[1] Lasry J M, Lions P L. Mean field games [J]. *Japanese J Math*, 2007, 2(1):229–260.

[2] Buckdahn R, Djehiche B, Li J, et al. Mean-field backward stochastic differential equations: a limit approach [J]. *Ann Probab*, 2009, 37(4):1524–1565.

[3] Buckdahn R, Li J, Peng S G. Mean-field backward stochastic differential equations and related partial differential equations [J]. *Stoch Proc Appl*, 2009, 119(10):3133–3154.

[4] Li J. Reflected mean-field backward stochastic differential equations. Approximation and associated nonlinear PDEs [J]. *J Math Analysis Appl*, 2014, 413(1):47–68.

[5] Andersson D, Djehiche B. A maximum principle for SDEs of mean-field type [J]. *Appl Math Optim*, 2011, 63(3):341–356.

[6] Buckdahn R, Djehiche B, Li J. A general stochastic maximum principle for SDEs of mean-field type [J]. *Appl Math Optim*, 2011, 64:197–216.

[7] Li J. Stochastic maximum principle in the mean-field controls [J]. *Automatica*, 2012, 48:366–373.

[8] Bensoussan A, Sung K C J, Yam S C P, et al. Linear-quadratic mean field games [J]. *J Optim Theory Appl*, 2016, 169(2):496–529.

[9] Lions P L. Cours au Collège de France: théorie des jeu à champs moyens [R/OL]. http://www.college-de-france.fr/default/EN/all/equ[1]der/audiovideo.jsp, 2013.

[10] Cardaliaguet P. Notes on Mean Field Games (from P.L. Lions' lectures at Collège de France) [R/OL]. https://www.ceremade.dauphine.fr/ cardalia/MFG100629.pdf, 2012.

[11] Carmona R, Delarue F. The master equation for large population equilibriums [J]. *Spr Proc Math Stat*, 2014, 100:77–128.

[12] Carmona R, Delarue F. Forward-backward stochastic differential equations and controlled McKean Vlasov dynamics [J]. *Ann Probab*, 2015, 43(5):2647–2700.

[13] Bensoussan A, Frehse J, Yam S. On the interpretation of the master equation [J]. *Stoch Proc Appl*, 2017, 127(7):2093–2137.

[14] Buckdahn R, Li J, Peng S G, et al. Mean-field stochastic differential equations and associated PDEs [J]. *Ann Probab*, 2017, 45(2):824–878.

[15] Cardaliaguet P, Delarue F, Lasry J, et al. The master equation and the convergence problem in mean field games [R/OL]. http://arxiv.org/abs/1509.02505, 2015.

[16] Chassagneux J F, Crisan D, Delarue F. A probabilistic approach to classical solutions of the master equation for large population equilibria [R/OL]. http://arxiv.org/abs/1411.3009v2, 2015.

[17] Ji S, Zhou X Y. A maximum principle for stochastic optimal conrol with terminal state constriants and its applications [J]. *Comm Inf Syst*, 2006, 6(4):321–338.

[18] El Karoui N, Peng S G, Quenez M C. A dynamic maximum principle for the optimization of recursive utilities under constraints [J]. *Ann Appl Probab*, 2001, 11:664–693.

[19] Bielecki T R, Jin H, Pliska S R, et al. Continuous time mean variance portfolio selection with bankruptcy prohibition [J]. *Math Finance*, 2005, 15:213–244.

[20] Ekeland I. On the variational principle [J]. *J Math Anal Appl*, 1974, 4:324–353.

[21] Wei Q M. Stochastic maximum principle for mean-field forward-backward stochastic control system with terminal state constraints [J]. *Sci China Math*, 2016, 59(4):809–822.

[22] Elsanosi I, Øksendal B, Sulem A. Some solvable stochastic control problems with delay [J]. *Stoch Stoch Rep*, 2000, 71:60–89.

[23] Chen L, Wu Z. Maximum principle for the stochastic optimal control problem with delay and application [J]. *Automatica*, 2010, 46:1074–1080.

[24] Shi J. Maximum principle of recursive optimal control problem for forward-backward stochastic delayed system with Poisson jumps [J]. *Sci Sin Math*, 2012, 42(3):251–270.

[25] Shen Y, Meng Q, Shi P. Maximum principle for mean-field jump-diffusion stochastic delay differential equations and its application to finance [J]. *Automatica*, 2014, 50(6):1565–1579.

[26] Agram N, Øksendal B. Infinite horizon optimal control of forward-backward stochastic differential equations with delay [J]. *J Comput Appl Math*, 2014, 259:336–349.

[27] Ma H, Liu B. Infinite horizon optimal control problem of mean-field backward stochastic delay differential equation under partial information [J]. *Eur J Control*, 2017, 36:43–50.

[28] Wen J, Shi Y. Maximum principle for a stochstic delayed system involving terminal state constraints [J]. *J Inequ Appl*, 2017, 103:1–16.

[29] Øksendal B. Stochastic differential equations: An introduction with applications [M]. New York: Springer-Verlag, 2003.

[30] Chen L, Huang J. Stochastic maximum principle for controlled backward delayed system via advanced stochastic differential equation [J]. *J Optim Theory Appl*, 2015, 167(3):1112–1135.

[31] Ramsey F P. A mathematical theory of savings [J]. *Econ J*, 1928, 38:543–559.

[32] Carmona R, Delarue F, Probability analysis of mean-filed games [J]. *SIAM J Control Optim*, 2013, 51(4):2705–2734.

[33] Gandolfo G. Economic dynamics [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1996.

Maximum Principle for Mean-Field Forward-Backward Stochastic Delay Control System with Terminal State Constraints and Application to Mean-Field Game

HAO Tao[1]

[1]School of Statistics, Shandong University of Finance and Economics, Jinan 250014, China. E-mail: taohao@sdufe.edu.cn

Abstract This paper concerns a stochastic optimal control problem of a mean-field forward-backward control system with delay and terminal state constraints. The coefficients of driving system depend on the solution, delay of the solution and all of their laws. Making use of the Lions' derivative, terminal perturbation approach and Ekeland's variational principle, two stochastic maximum principles involving law are obtained. As applications of the theoretical results, a linear-quadratic problem and a mean-field game of production-consumption choice optimization problem are investigated.

Keywords Mean-Field forward-backward delay control system, Stochastic maximum principle, Terminal perturbation approach, Ekeland's variational, Mean-Field game

2000 MR Subject Classification 93E20, 60H10

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 41 No. 3, 2020

by ALLERTON PRESS, INC., USA