数 学 年 刊 A 辑
2022, 43(2):191–200
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2022.0012

拟齐次核的 Hilbert 型重积分不等式最佳搭配参数的等价条件及应用*

洪 勇[1] 陈 强[2] 李 真[3]

提要 利用权函数方法, 讨论拟齐次核 Hilbert 型重积分不等式的最佳搭配参数, 得到最佳搭配参数的若干等价条件及不等式最佳常数因子的表达公式. 最后讨论其在奇异积分算子理论中的应用.

关键词 拟齐次核, Hilbert 型重积分不等式, 最佳常数因子, 最佳搭配参数, 等价条件, 有界算子, 算子范数

MR (2000) 主题分类 26D15

中图法分类 O178

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2022)02-0191-10

§1 引言与预备知识

设 $m \in \mathbb{N}$, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \in \mathbb{R}_+^m$, $\|x\|_{\rho,m} = \Big(\sum\limits_{i=1}^m x_i^\rho\Big)^{\frac{1}{\rho}}$ $(\rho > 0)$, $p > 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, 定义加权 Lebengue 空间:

$$L_p^\alpha(\mathbb{R}_+^m) = \Big\{f(x) : \|f\|_{p,\alpha} = \Big(\int_{\mathbb{R}_+^m} \|x\|_{\rho,m}^\alpha |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}} < +\infty\Big\}.$$

若 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,(p > 1)$, $m, n \in \mathbb{N}$, $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$, $x \in \mathbb{R}_+^m$, $y \in \mathbb{R}_+^n$, $K(u, v) \geqslant 0$. 引入两个参数 a, b, 利用权函数方法, 可以得到下列形式的 Hilbert 型重积分不等式:

$$\int_{\mathbb{R}_+^n}\int_{\mathbb{R}_+^m} K(\|x\|_{\rho_1,m}, \|y\|_{\rho_2,n}) f(x) g(y) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant M(a, b)\|f\|_{p,\alpha(a,b)}\|g\|_{q,\beta(a,b)}, \tag{1.1}$$

其中 $M(a, b), \alpha(a, b), \beta(a, b)$ 都是与搭配参数 a, b 有关的实数. 一般地, 对于任意选取的搭配参数 a, b, (1.1) 的常数因子 $M(a, b)$ 并不是最佳的, 只有取一些特定的 a, b, $M(a, b)$ 才会是最佳常数因子. 例如当 $m = n = 1$, $K(x, y) = \frac{1}{x+y}$ 时, 选取 $a = b = \frac{1}{pq}$, 就可得到 1934 年 Hardy 在文 [1] 中证明的著名 Hilbert 不等式:

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{f(x)g(y)}{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}\|f\|_p\|g\|_q,$$

其中的常数因子 $\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}$ 是最佳的. 在之后的许多文献中, 针对不同的核, 通过精心选取最佳搭配参数 a, b, 得到了若干具有最佳常数因子的 Hilbert 型不等式 (见 [2–17]). 近年来关

本文 2020 年 10 月 14 日收到, 2021 年 11 月 24 日收到修改稿.

[1]广州华商学院应用数学系, 广州 511300. E-mail: hongyonggdcc@yeah.net

[2]广东第二师范学院计算机科学学院, 广州 510303. E-mail: cq_c120m3@163.com

[3]广东财经大学统计与数学学院, 广州 510320. E-mail: zhenlee2011@gdufe.edu.cn

*本文受到国家自然科学基金 (No. 61772140) 的资助.

于最佳搭配参数特征的研究也取得了一定的成果 (见 [18–20]), 本文将在这些成果的基础上, 针对拟齐次核的 Hilbert 型重积分不等式, 讨论 a,b 为最佳搭配参数的等价条件, 得到 a,b 为最佳搭配参数的判别方法, 解决了最佳搭配参数的选取问题.

若 $G(u,v)$ 是 λ 阶齐次函数, $\lambda_1\lambda_2>0$, 则称 $K(\|x\|_{\rho_1,m},\|y\|_{\rho_2,n})=G(\|x\|_{\rho_1,m}^{\lambda_1},\|y\|_{\rho_2,n}^{\lambda_2})$ 为具有参数 $\{\lambda,\lambda_1,\lambda_2\}$ 的拟齐次函数, 显然拟齐次函数具有性质: 若 $t>0$, 则

$$K(t\|x\|_{\rho_1,m},\|y\|_{\rho_2,n})=t^{\lambda\lambda_1}K(\|x\|_{\rho_1,m},t^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}\|y\|_{\rho_2,n}),$$

$$K(\|x\|_{\rho_1,m},t\|y\|_{\rho_2,n})=t^{\lambda\lambda_2}K(t^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\|x\|_{\rho_1,m},\|y\|_{\rho_2,n}).$$

本文的讨论需要用到下面的若干引理.

引理 1.1[21] 设 $p_1>0$, $a_i>0$, $\alpha_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$, $\psi(u)$ 可测, 则有

$$\int\cdots\int_{\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{x_i}{a_i})^{\alpha_i}\leqslant 1;x_i>0}\psi\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{x_i}{a_i}\Big)^{\alpha_i}\Big)x_1^{p_1-1}\cdots x_n^{p_n-1}\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$
$$=\frac{a_1^{p_1}\cdots a_n^{p_n}\Gamma(\frac{p_1}{\alpha_1})\cdots\Gamma(\frac{p_n}{\alpha_n})}{\alpha_1\cdots\alpha_n\Gamma(\frac{p_1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{p_n}{\alpha_n})}\int_0^1\psi(u)u^{\frac{p_1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{p_n}{\alpha_n}-1}\,\mathrm{d}u,$$

其中 $\Gamma(t)$ 是 Gamma 函数.

利用引理 1.1, 不难得到下面的引理.

引理 1.2 设 $\rho>0$, $r>0$, $\varphi(u)$ 可测, $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}_+^n$, 则

$$\int_{\|x\|_{\rho,n}\leqslant r}\varphi(\|x\|_{\rho,n})\mathrm{d}u=\frac{\Gamma^n(\frac{1}{\rho})}{\rho^{n-1}\Gamma(\frac{n}{\rho})}\int_0^r\varphi(u)u^{n-1}\,\mathrm{d}u,$$

$$\int_{\|x\|_{\rho,n}\geqslant r}\varphi(\|x\|_{\rho,n})\mathrm{d}u=\frac{\Gamma^n(\frac{1}{\rho})}{\rho^{n-1}\Gamma(\frac{n}{\rho})}\int_r^{+\infty}\varphi(u)u^{n-1}\,\mathrm{d}u,$$

$$\int_{\mathbb{R}_+^n}\varphi(\|x\|_{\rho,n})\mathrm{d}u=\frac{\Gamma^n(\frac{1}{\rho})}{\rho^{n-1}\Gamma(\frac{n}{\rho})}\int_0^{+\infty}\varphi(u)u^{n-1}\,\mathrm{d}u.$$

引理 1.3 设 $m,n\in\mathbb{N}$, $\rho_1>0$, $\rho_2>0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\,(p>1)$, $G(u,v)$ 是 λ 阶齐次非负可测函数, $a,b\in\mathbb{R}$, $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in\mathbb{R}_+^m$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}_+^n$, $\lambda_1\lambda_2>0$, $K(\|x\|_{\rho_1,m},\|y\|_{\rho_2,n})=G(\|x\|_{\rho_1,m}^{\lambda_1},\|y\|_{\rho_2,n}^{\lambda_2})$, 那么

$$\begin{aligned}\omega_1(x)&=\int_{\mathbb{R}_+^n}K(\|x\|_{\rho_1,m},\|y\|_{\rho_2,n})\|y\|_{\rho_2,n}^{-bp}\,\mathrm{d}y\\&=\frac{\Gamma^n(\frac{1}{\rho_2})}{\rho_2^{n-1}\Gamma(\frac{n}{\rho_2})}\|x\|_{\rho_1,m}^{\lambda\lambda_1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}(bp-n)}\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-bp+n-1}\,\mathrm{d}t,\\\omega_2(y)&=\int_{\mathbb{R}_+^m}K(\|x\|_{\rho_1,m},\|y\|_{\rho_2,n})\|x\|_{\rho_1,m}^{-aq}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{\Gamma^m(\frac{1}{\rho_1})}{\rho_1^{m-1}\Gamma(\frac{m}{\rho_1})}\|y\|_{\rho_2,n}^{\lambda\lambda_2-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(aq-m)}\int_0^{+\infty}K(t,1)t^{-aq+m-1}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

证 根据引理 1.2, 有

$$\omega_1(x)=\frac{\Gamma^n(\frac{1}{\rho_2})}{\rho_2^{n-1}\Gamma(\frac{n}{\rho_2})}\int_0^{+\infty}K(\|x\|_{\rho_1,m},u)u^{-bp+n-1}\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{\Gamma^n(\frac{1}{\rho_2})}{\rho_2^{n-1}\Gamma(\frac{n}{\rho_2})}\|x\|_{\rho_1,m}^{\lambda\lambda_1}\int_0^{+\infty} K(1, u\|x\|_{\rho_1,m}^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}})u^{-bp+n-1}\,\mathrm{d}u$$
$$= \frac{\Gamma^n(\frac{1}{\rho_2})}{\rho_2^{n-1}\Gamma(\frac{n}{\rho_2})}\|x\|_{\rho_1,m}^{\lambda\lambda_1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}(bp-n)}\int_0^{+\infty} K(1,t)t^{-bp+n-1}\,\mathrm{d}t.$$

同理可证 $\omega_2(y)$ 的情形.

§2　最佳搭配参数的等价条件

定理 2.1　设 $m,n\in\mathbb{N}$, $\rho_1>0$, $\rho_2>0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\,(p>1)$, $a,b\in\mathbb{R}$, $\lambda_1\lambda_2>0$, $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in\mathbb{R}_+^m$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}_+^n$, $G(u,v)$ 是 λ 阶齐次非负可测函数, $K(\|x\|_{\rho_1,m},\|y\|_{\rho_2,n})=G(\|x\|_{\rho_1,m}^{\lambda_1},\|y\|_{\rho_2,n}^{\lambda_2})$, 在 $(0,+\infty)$ 上几乎处处有 $K(1,t)>0$, 且

$$W_1(b,p,n)=\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-bp+n-1}\,\mathrm{d}t,$$
$$W_2(a,q,m)=\int_0^{+\infty}K(t,1)t^{-aq+m-1}\,\mathrm{d}t$$

收敛, 那么

(i) 记 $\alpha=\lambda_1\big[\lambda+\frac{n}{\lambda_2}+p\big(\frac{a}{\lambda_1}-\frac{b}{\lambda_2}\big)\big]$, $\beta=\lambda_2\big[\lambda+\frac{m}{\lambda_1}+q\big(\frac{b}{\lambda_2}-\frac{a}{\lambda_1}\big)\big]$, 则

$$\int_{\mathbb{R}_+^n}\int_{\mathbb{R}_+^m}K(\|x\|_{\rho_1,m},\|y\|_{\rho_2,n})f(x)g(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\leqslant\Big(\frac{\Gamma^m(\frac{1}{\rho_1})}{\rho_1^{m-1}\Gamma(\frac{m}{\rho_1})}\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\frac{\Gamma^n(\frac{1}{\rho_2})}{\rho_2^{n-1}\Gamma(\frac{n}{\rho_2})}\Big)^{\frac{1}{p}}W_1^{\frac{1}{p}}(b,p,n)W_2^{\frac{1}{q}}(a,q,m)\|f\|_{p,\alpha}\|g\|_{q,\beta},\tag{2.1}$$

其中 $f\in L_p^{\alpha}(\mathbb{R}_+^m)$, $g\in L_q^{\beta}(\mathbb{R}_+^n)$.

(ii) 下列三个条件等价:

(a) $\frac{1}{\lambda_1}aq+\frac{1}{\lambda_2}bp=\lambda+\frac{m}{\lambda_1}+\frac{n}{\lambda_2}$;

(b) $\frac{1}{\lambda_1}W_1(b,p,n)=\frac{1}{\lambda_2}W_2(a,q,m)$;

(c) a,b 是 (2.1) 的最佳搭配参数, 即 (2.1) 的常数因子最佳.

证　(i) 根据 Hölder 不等式及引理 1.3, 有

$$\int_{\mathbb{R}_+^n}\int_{\mathbb{R}_+^m}K(\|x\|_{\rho_1,m},\|y\|_{\rho_2,n})f(x)g(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\leqslant\int_{\mathbb{R}_+^n}\int_{\mathbb{R}_+^m}\Big(\frac{\|x\|_{\rho_1,m}^a}{\|y\|_{\rho_2,n}^b}|f(x)|\Big)\Big(\frac{\|y\|_{\rho_2,n}^b}{\|x\|_{\rho_1,m}^a}|g(y)|\Big)K(\|x\|_{\rho_1,m},\|y\|_{\rho_2,n})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\leqslant\Big(\int_{\mathbb{R}_+^m}\|x\|_{\rho_1,m}^{ap}|f(x)|^p\omega_1(x)\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_{\mathbb{R}_+^n}\|y\|_{\rho_2,n}^{bq}|g(y)|^q\omega_2(y)\,\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{q}}$$
$$=\Big(\frac{\Gamma^n(\frac{1}{\rho_2})}{\rho_2^{n-1}\Gamma(\frac{n}{\rho_2})}\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\frac{\Gamma^m(\frac{1}{\rho_1})}{\rho_1^{m-1}\Gamma(\frac{m}{\rho_1})}\Big)^{\frac{1}{q}}W_1^{\frac{1}{p}}(b,p,n)W_2^{\frac{1}{q}}(a,q,m)$$
$$\times\Big(\int_{\mathbb{R}_+^m}\|x\|_{\rho_1,m}^{ap+\lambda\lambda_1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}(bp-n)}|f(x)|^p\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_{\mathbb{R}_+^n}\|y\|_{\rho_2,n}^{bq+\lambda\lambda_2-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(aq-m)}|g(y)|^q\,\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{q}}$$
$$=\Big(\frac{\Gamma^m(\frac{1}{\rho_1})}{\rho_1^{m-1}\Gamma(\frac{m}{\rho_1})}\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\frac{\Gamma^n(\frac{1}{\rho_2})}{\rho_2^{n-1}\Gamma(\frac{n}{\rho_2})}\Big)^{\frac{1}{p}}W_1^{\frac{1}{p}}(b,p,n)W_2^{\frac{1}{q}}(a,q,m)\|f\|_{p,\alpha}\|g\|_{q,\beta}.$$

故 (2.1) 成立.

(ii) (a)⇒(b): 设 $\frac{1}{\lambda_1}aq+\frac{1}{\lambda_2}bp=\lambda+\frac{m}{\lambda_1}+\frac{n}{\lambda_2}$, 则

$$\begin{aligned}W_1(b,p,n)&=\int_0^{+\infty}K(t^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}},1)t^{\lambda\lambda_2-bp+n-1}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\int_0^{+\infty}K(u,1)u^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}(\lambda\lambda_2-bp+n-1)-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-1}\,\mathrm{d}u\\&=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\int_0^{+\infty}K(u,1)u^{-aq+m-1}\,\mathrm{d}u=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}W_2(a,q,m).\end{aligned}$$

故 $\frac{1}{\lambda_1}W_1(b,p,n)=\frac{1}{\lambda_2}W_2(a,q,m)$.

(a)⇒(c): 设 $\frac{1}{\lambda_1}aq+\frac{1}{\lambda_2}bp=\lambda+\frac{m}{\lambda_1}+\frac{n}{\lambda_2}$, 则由 (a)⇒(b) 可知, $\frac{1}{\lambda_1}W_1(b,p,n)=\frac{1}{\lambda_2}W_2(a,q,m)$, 且 $\alpha=apq-m$, $\beta=bpq-n$, 于是 (2.1) 可化为

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}_+^n}\int_{\mathbb{R}_+^m}K(\|x\|_{\rho_1,m},\|y\|_{\rho_2,n})f(x)g(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\leqslant\Big(\frac{\Gamma^m(\frac{1}{\rho_1})}{\rho_1^{m-1}\Gamma(\frac{m}{\rho_1})}\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\frac{\Gamma^n(\frac{1}{\rho_2})}{\rho_2^{n-1}\Gamma(\frac{n}{\rho_2})}\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\Big)^{\frac{1}{q}}W_1(b,p,n)\|f\|_{p,apq-m}\|g\|_{q,bpq-n},\end{aligned}\tag{2.2}$$

若 (2.2) 的常数因子不是最佳的, 则存在常数 $M_0>0$, 使

$$M_0<\Big(\frac{\Gamma^m(\frac{1}{\rho_1})}{\rho_1^{m-1}\Gamma(\frac{m}{\rho_1})}\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\frac{\Gamma^n(\frac{1}{\rho_2})}{\rho_2^{n-1}\Gamma(\frac{n}{\rho_2})}\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\Big)^{\frac{1}{q}}W_1(b,p,n),\tag{2.3}$$

且用 M_0 取代 (2.2) 的常数因子后, (2.2) 仍成立.

设 $\varepsilon>0$ 及 $\delta>0$ 充分小, 取

$$f(x)=\begin{cases}\|x\|_{\rho_1,m}^{\frac{-apq-|\lambda_1|\varepsilon}{p}}, & \|x\|_{\rho_1,m}\geqslant 1,\\0, & 0<\|x\|_{\rho_1,m}<1,\end{cases}$$

$$g(y)=\begin{cases}\|y\|_{\rho_2,n}^{\frac{-bpq-|\lambda_2|\varepsilon}{q}}, & \|x\|_{\rho_2,n}\geqslant \delta,\\0, & 0<\|x\|_{\rho_2,n}<\delta,\end{cases}$$

则由引理 1.2, 可得

$$\begin{aligned}&\|f\|_{p,apq-m}\|g\|_{q,bpq-n}\\&=\Big(\int_{\|x\|_{\rho_1,m}\geqslant 1}\|x\|_{\rho_1,m}^{-m-|\lambda_1|\varepsilon}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_{\|y\|_{\rho_2,n}\geqslant\delta}\|x\|_{\rho_2,n}^{-n-|\lambda_2|\varepsilon}\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{q}}\\&=\Big(\frac{\Gamma^m(\frac{1}{\rho_1})}{\rho_1^{m-1}\Gamma(\frac{m}{\rho_1})}\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\frac{\Gamma^n(\frac{1}{\rho_2})}{\rho_2^{n-1}\Gamma(\frac{n}{\rho_2})}\Big)^{\frac{1}{q}}\frac{1}{\varepsilon|\lambda_1|^{\frac{1}{p}}\lambda_2|^{\frac{1}{q}}}\delta^{-\frac{\lambda_2\varepsilon}{q}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}_+^n}\int_{\mathbb{R}_+^m}K(\|x\|_{\rho_1,m},\|y\|_{\rho_2,n})f(x)g(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{\|x\|_{\rho_1,m}\geqslant 1}\|x\|_{\rho_1,m}^{-aq-\frac{|\lambda_1|\varepsilon}{p}}\Big(\int_{\|y\|_{\rho_2,n}\geqslant\delta}K(\|x\|_{\rho_1,m},\|y\|_{\rho_2,n})\|y\|_{\rho_2,n}^{-bp-\frac{|\lambda_2|\varepsilon}{q}}\Big)\mathrm{d}x\\&=\frac{\Gamma^n(\frac{1}{\rho_2})}{\rho_2^{n-1}\Gamma(\frac{n}{\rho_2})}\int_{\|x\|_{\rho_1,m}\geqslant 1}\|x\|_{\rho_1,m}^{-aq-\frac{|\lambda_1|\varepsilon}{p}}\Big(\int_\delta^{+\infty}K(\|x\|_{\rho_1,m},u)u^{-bp+n-1-\frac{|\lambda_2|\varepsilon}{q}}\mathrm{d}u\Big)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= \frac{\Gamma^n(\frac{1}{\rho_2})}{\rho_2^{n-1}\Gamma(\frac{n}{\rho_2})} \int_{\|x\|_{\rho_1,m}\geqslant 1} \|x\|_{\rho_1,m}^{\lambda\lambda_1 - aq - \frac{|\lambda_1|\varepsilon}{p}} \Big(\int_\delta^{+\infty} K(1, u\|x\|_{\rho_1,m}^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}) u^{-bp+n-1-\frac{|\lambda_2|\varepsilon}{q}} \mathrm{d}u \Big) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{\Gamma^n(\frac{1}{\rho_2})}{\rho_2^{n-1}\Gamma(\frac{n}{\rho_2})} \int_{\|x\|_{\rho_1,m}\geqslant 1} \|x\|_{\rho_1,m}^{-m-|\lambda_1|\varepsilon} \Big(\int_{\delta\|x\|_{\rho_1,m}^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}}^{+\infty} K(1,t) t^{-bp+n-1-\frac{|\lambda_2|\varepsilon}{q}} \mathrm{d}t \Big) \mathrm{d}x$$

$$\geqslant \frac{\Gamma^n(\frac{1}{\rho_2})}{\rho_2^{n-1}\Gamma(\frac{n}{\rho_2})} \int_{\|x\|_{\rho_1,m}\geqslant 1} \|x\|_{\rho_1,m}^{-m-|\lambda_1|\varepsilon} \mathrm{d}x \int_\delta^{+\infty} K(1,t) t^{-bp+n-1-\frac{|\lambda_2|\varepsilon}{q}} \mathrm{d}t$$

$$= \frac{\Gamma^n(\frac{1}{\rho_2})}{\rho_2^{n-1}\Gamma(\frac{n}{\rho_2})} \cdot \frac{\Gamma^m(\frac{1}{\rho_1})}{\rho_1^{m-1}\Gamma(\frac{m}{\rho_1})} \cdot \frac{1}{|\lambda_1|\varepsilon} \int_\delta^{+\infty} K(1,t) t^{-bp+n-1-\frac{|\lambda_2|\varepsilon}{q}} \mathrm{d}t.$$

于是可得

$$\frac{\Gamma^m(\frac{1}{\rho_1})}{\rho_1^{m-1}\Gamma(\frac{m}{\rho_1})} \cdot \frac{\Gamma^n(\frac{1}{\rho_2})}{\rho_2^{n-1}\Gamma(\frac{n}{\rho_2})} \cdot \frac{1}{|\lambda_1|} \int_\delta^{+\infty} K(1,t) t^{-bp+n-1-\frac{|\lambda_2|\varepsilon}{q}} \mathrm{d}t$$

$$\leqslant M_0 \Big(\frac{\Gamma^m(\frac{1}{\rho_1})}{\rho_1^{m-1}\Gamma(\frac{m}{\rho_1})} \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\frac{\Gamma^n(\frac{1}{\rho_2})}{\rho_2^{n-1}\Gamma(\frac{n}{\rho_2})} \Big)^{\frac{1}{q}} \frac{1}{|\lambda_1|^{\frac{1}{p}} |\lambda_2|^{\frac{1}{q}}} \delta^{-\frac{\lambda_2\varepsilon}{q}}.$$

先令 $\varepsilon \to 0^+$, 再令 $\delta \to 0^+$, 求二次极限, 有

$$\Big(\frac{\Gamma^m(\frac{1}{\rho_1})}{\rho_1^{m-1}\Gamma(\frac{m}{\rho_1})} \Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\frac{\Gamma^n(\frac{1}{\rho_2})}{\rho_2^{n-1}\Gamma(\frac{n}{\rho_2})} \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \Big)^{\frac{1}{q}} W_1(b,p,n) \leqslant M_0.$$

这与 (2.3) 矛盾, 故 (2.1) 的常数因子是最佳的, 即 a, b 是最佳搭配参数.

(c)⇒(a): 设 (2.1) 的常数因子是最佳的. 记 $c = \frac{1}{\lambda_1}aq + \frac{1}{\lambda_2}bp - \big(\lambda + \frac{m}{\lambda_1} + \frac{n}{\lambda_2}\big)$, $a_1 = a - \frac{\lambda_1 c}{pq}$, $b_1 = b - \frac{\lambda_2 c}{pq}$, 则 $\frac{1}{\lambda_1}a_1 q + \frac{1}{\lambda_2}b_1 p = \lambda + \frac{m}{\lambda_1} + \frac{n}{\lambda_2}$, 且

$$\alpha = \lambda_1 \Big[\lambda + \frac{n}{\lambda_2} + p\Big(\frac{a}{\lambda_1} - \frac{b}{\lambda_2} \Big) \Big] = \lambda_1 \Big[\lambda + \frac{n}{\lambda_2} + p(\frac{a_1}{\lambda_1} - \frac{b_1}{\lambda_2}) \Big] = \alpha_1,$$

$$\beta = \lambda_2 \Big[\lambda + \frac{m}{\lambda_1} + q\Big(\frac{b}{\lambda_2} - \frac{a}{\lambda_1} \Big) \Big] = \lambda_2 \Big[\lambda + \frac{m}{\lambda_1} + q\Big(\frac{b_1}{\lambda_2} - \frac{a_1}{\lambda_1} \Big) \Big] = \beta_1.$$

又记

$$A = \Big(\frac{\Gamma^m(\frac{1}{\rho_1})}{\rho_1^{m-1}\Gamma(\frac{m}{\rho_1})} \Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\frac{\Gamma^n(\frac{1}{\rho_2})}{\rho_2^{n-1}\Gamma(\frac{n}{\rho_2})} \Big)^{\frac{1}{p}},$$

则 (2.1) 可等价地写为

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \int_{\mathbb{R}_+^m} K(\|x\|_{\rho_1,m}, \|y\|_{\rho_2,n}) f(x) g(y) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\leqslant A W_1^{\frac{1}{p}}(b,p,n) W_2^{\frac{1}{q}}(a,q,m) \|f\|_{p,\alpha_1} \|g\|_{q,\beta_1}.$$

又因为经计算可得

$$W_2(a,q,m) = \int_0^{+\infty} K(t,1) t^{-aq+m-1} \, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} K(1, t^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}) t^{\lambda\lambda_1 - aq + m - 1} \, \mathrm{d}t$$

$$= \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \int_0^{+\infty} K(1,u) u^{-bn+n-1+\lambda_2 c} \, \mathrm{d}u = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \int_0^{+\infty} K(1,t) t^{-bn+n-1+\lambda_2 c} \, \mathrm{d}t,$$

故 (2.1) 进一步等价于

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \int_{\mathbb{R}_+^m} K(\|x\|_{\rho_1,m}, \|y\|_{\rho_2,n}) f(x) g(y) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\leqslant AW_1^{\frac{1}{p}}(b,p,n)\Big(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-bn+n-1+\lambda_2 c}\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{q}}\|f\|_{p,\alpha_1}\|g\|_{q,\beta_1}. \tag{2.4}$$

根据假设可知, (2.4) 的最佳常数因子是

$$\begin{aligned}&A\Big(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\Big)^{\frac{1}{q}}W_1^{\frac{1}{p}}(b,p,n)\Big(\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-bn+n-1+\lambda_2 c}\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{q}}\\&=A\Big(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-bp+n-1}\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-bn+n-1+\lambda_2 c}\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

再根据 $\frac{1}{\lambda_1}a_1q+\frac{1}{\lambda_2}b_1p=\lambda+\frac{m}{\lambda_1}+\frac{n}{\lambda_2}$ 及 (a)⇒(c) 的证明, 可知 (2.4) 的最佳常数因子是

$$\begin{aligned}&AW_1^{\frac{1}{p}}(b_1,p,n)W_2^{\frac{1}{q}}(a_1,q,m)\\&=A\Big(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\Big)^{\frac{1}{q}}W_1(b_1,p,n)\\&=A\Big(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\Big)^{\frac{1}{q}}\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-b_1p+n-1}\,\mathrm{d}t\\&=A\Big(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\Big)^{\frac{1}{q}}\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-bp+n-1+\frac{\lambda_2 c}{q}}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-bp+n-1+\frac{\lambda_2 c}{q}}\,\mathrm{d}t\\&=\Big(\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-bp+n-1}\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-bn+n-1+\lambda_2 c}\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}\tag{2.5}$$

针对函数 1 和 $t^{\frac{\lambda_2 c}{q}}$, 利用 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-bp+n-1+\frac{\lambda_2 c}{q}}\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}1\cdot t^{\frac{\lambda_2 c}{q}}K(1,t)t^{-bp+n-1}\,\mathrm{d}t\\&\leqslant\Big(\int_0^{+\infty}1^pK(1,t)t^{-bp+n-1}\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_0^{+\infty}t^{\lambda_2 c}K(1,t)t^{-bn+n-1}\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{q}}\\&=\Big(\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-bp+n-1}\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-bn+n-1+\lambda_2 c}\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}\tag{2.6}$$

由 (2.5) 知 (2.6) 取等号, 根据 Hölder 不等式取等号的条件, 得 $t^{\lambda_2 c}=$ 常数, 故 $c=0$, 即 $\frac{1}{\lambda_1}aq+\frac{1}{\lambda_2}bp=\lambda+\frac{m}{\lambda_1}+\frac{n}{\lambda_2}$.

(b)⇒(a): 设 $\frac{1}{\lambda_1}W_1(b,p,n)=\frac{1}{\lambda_2}W_2(a,q,m)$, 则

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-bp+n-1}\,\mathrm{d}t=W_1(b,p,n)=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}W_2(a,q,m)\\&=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\int_0^{+\infty}K(t,1)t^{-aq+m-1}\,\mathrm{d}t=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\int_0^{+\infty}K(1,t^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}})t^{\lambda\lambda_1-aq+m-1}\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}K(1,u)u^{\lambda_2(\frac{1}{\lambda_1}aq-\lambda-\frac{m}{\lambda_1})-1}\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

设 $\lambda_2\big(\frac{1}{\lambda_1}aq-\lambda-\frac{m}{\lambda_1}\big)-1-(-bp+n-1)=c_0$, $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1\,(0<r<1,s<0)$, 根据逆向

Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty} K(1,t)t^{-bp+n-1}\,\mathrm{d}t\\ =&\int_0^{+\infty} t^{c_0}K(1,t)t^{-bp+n-1}\,\mathrm{d}t\\ \geqslant&\Big(\int_0^{+\infty} 1^r K(1,t)t^{-bp+n-1}\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{r}}\Big(\int_0^{+\infty} t^{sc_0}K(1,t)t^{-bp+n-1}\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{s}}.\end{aligned}$$

由于在 $(0,+\infty)$ 上几乎处处有 $K(1,t)>0$, 可知 $\int_0^{+\infty} K(1,t)t^{-bp+n-1}\,\mathrm{d}t>0$, 故可得

$$\int_0^{+\infty} K(1,t)t^{-bp+n-1}\,\mathrm{d}t\geqslant\int_0^{+\infty} t^{sc_0}K(1,t)t^{-bp+n-1}\,\mathrm{d}t.$$

若 $c_0>0$, 则 $sc_0<0$, 此时有

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty} K(1,t)t^{-bp+n-1}\,\mathrm{d}t\\ \geqslant&\int_0^{\frac{1}{2}} t^{sc_0}K(1,t)t^{-bp+n-1}\,\mathrm{d}t\\ \geqslant&\Big(\frac{1}{2}\Big)^{sc_0}\int_0^{\frac{1}{2}} K(1,t)t^{-bp+n-1}\,\mathrm{d}t\to+\infty\quad(s\to-\infty),\end{aligned}$$

这与 $\int_0^{+\infty} K(1,t)t^{-bp+n-1}\,\mathrm{d}t$ 收敛相矛盾.

若 $c_0<0$, 则 $sc_0>0$, 故可得

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty} K(1,t)t^{-bp+n-1}\,\mathrm{d}t\\ \geqslant&\int_2^{+\infty} t^{sc_0}K(1,t)t^{-bp+n-1}\,\mathrm{d}t\\ \geqslant&\, 2^{sc_0}\int_2^{+\infty} K(1,t)t^{-bp+n-1}\,\mathrm{d}t\to+\infty\quad(s\to-\infty),\end{aligned}$$

这仍与 $\int_0^{+\infty} K(1,t)t^{-bp+n-1}\,\mathrm{d}t$ 收敛相矛盾.

综上得到 $c_0=0$, 即 $\lambda_2(\frac{1}{\lambda_1}aq-\lambda-\frac{m}{\lambda_1})-1=-bp+n-1$, 于是有 $\frac{1}{\lambda_1}aq+\frac{1}{\lambda_2}bp=\lambda+\frac{m}{\lambda_1}+\frac{n}{\lambda_2}$.

注 2.1 令 $\Delta=\frac{1}{\lambda_1}aq+\frac{1}{\lambda_2}bp-(\lambda+\frac{m}{\lambda_1}+\frac{n}{\lambda_2})$, 则由定理 1 知当且仅当 $\Delta=0$ 时, a,b 是 (2.1) 的最佳搭配参数. 今后称此 Δ 为 a,b 是 (2.1) 的最佳搭配参数判别式.

§3 在算子理论中的应用

定义重积分算子 T:

$$T(f)(y)=\int_{\mathbb{R}_+^m} K(\|x\|_{\rho_1,m},\|y\|_{\rho_2,n})f(x)\,\mathrm{d}x.\tag{3.1}$$

根据 Hilbert 型不等式的基本理论, (1.1) 等价于算子 T 的不等式: $\|T(f)\|_{p,\beta(a,b)(1-p)}\leqslant M(a,b)\|f\|_{p,\alpha(a,b)}$. 于是根据定理 2.1 可得下列定理.

定理 3.1 设 $m,n\in\mathbb{N}$, $\rho_1>0$, $\rho_2>0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\,(p>1)$, $\lambda_1\lambda_2>0$, $a,b\in\mathbb{R}$, $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in\mathbb{R}_+^m$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}_+^n$, $G(u,v)$ 是 λ 阶齐次非负可测函数,

$K(\|x\|_{\rho_1,m},\|y\|_{\rho_2,n})=G(\|x\|^{\lambda_1}_{\rho_1,m},\|y\|^{\lambda_2}_{\rho_2,n})$, 在 $(0,+\infty)$ 上几乎处处有 $K(1,t)>0$, 且

$$W_1(b,p,n)=\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-bp+n-1}\,\mathrm{d}t<+\infty,$$

$$W_2(a,q,m)=\int_0^{+\infty}K(t,1)t^{-aq+m-1}\,\mathrm{d}t<+\infty.$$

算子 T 如 (3.1) 所定义, 那么

(i) 记 $\alpha=\lambda_1\big[\lambda+\frac{n}{\lambda_2}+p\big(\frac{a}{\lambda_1}-\frac{b}{\lambda_2}\big)\big]$, $\beta=\lambda_2\big[\lambda+\frac{m}{\lambda_1}+q\big(\frac{b}{\lambda_2}-\frac{a}{\lambda_1}\big)\big]$, 则 T 是 $L_p^{\alpha}(\mathbb{R}_+^m)$ 到 $L_p^{\beta(1-p)}(\mathbb{R}_+^n)$ 的有界算子, 且 T 的算子范数

$$\|T\|\leqslant\Big(\frac{\Gamma^m(\frac{1}{\rho_1})}{\rho_1^{m-1}\Gamma(\frac{m}{\rho_1})}\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\frac{\Gamma^n(\frac{1}{\rho_2})}{\rho_2^{n-1}\Gamma(\frac{n}{\rho_2})}\Big)^{\frac{1}{p}}W_1^{\frac{1}{p}}(b,p,n)W_2^{\frac{1}{q}}(a,q,m).$$

(ii) 下列三个条件等价:

(a) $\frac{1}{\lambda_1}aq+\frac{1}{\lambda_2}bp=\lambda+\frac{m}{\lambda_1}+\frac{n}{\lambda_2}$;

(b) $\frac{1}{\lambda_1}W_1(b,p,n)=\frac{1}{\lambda_2}W_2(a,q,m)$;

(c) T: $L_p^{\alpha}(\mathbb{R}_+^m)\to L_p^{\beta(1-p)}(\mathbb{R}_+^n)$ 有界且算子范数

$$\|T\|=\Big(\frac{\Gamma^m(\frac{1}{\rho_1})}{\rho_1^{m-1}\Gamma(\frac{m}{\rho_1})}\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\frac{\Gamma^n(\frac{1}{\rho_2})}{\rho_2^{n-1}\Gamma(\frac{n}{\rho_2})}\Big)^{\frac{1}{p}}W_1^{\frac{1}{p}}(b,p,n)W_2^{\frac{1}{q}}(a,q,m).$$

例 3.1 设 $m,n\in\mathbb{N}$, $\rho_1>0$, $\rho_2>0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\,(p>1)$, $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$, $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in\mathbb{R}_+^m$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}_+^n$, 则当且仅当 $\frac{m}{\lambda_1 q}+\frac{n}{\lambda_2 p}=1$ 时, 积分算子 T:

$$T(f)(y)=\int_{\mathbb{R}_+^m}\frac{\ln\Big(\frac{\|x\|^{\lambda_1}_{\rho_1,m}}{\|y\|^{\lambda_2}_{\rho_2,n}}\Big)}{\|x\|^{\lambda_1}_{\rho_1,m}-\|y\|^{\lambda_2}_{\rho_2,n}}f(x)\,\mathrm{d}x$$

是 $L_p(\mathbb{R}_+^m)$ 到 $L_p(\mathbb{R}_+^n)$ 的有界算子, 且 T 的算子范数

$$\|T\|=\Big(\frac{\Gamma^m(\frac{1}{\rho_1})}{\rho_1^{m-1}\Gamma(\frac{m}{\rho_1})}\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\frac{\Gamma^n(\frac{1}{\rho_2})}{\rho_2^{n-1}\Gamma(\frac{n}{\rho_2})}\Big)^{\frac{1}{p}}\frac{1}{\lambda_1^{\frac{1}{q}}\lambda_2^{\frac{1}{p}}}B^2\Big(\frac{m}{\lambda_1 q},\frac{n}{\lambda_2 p}\Big).$$

证 记 $K(\|x\|_{\rho_1,m},\|y\|_{\rho_2,n})=G(\|x\|^{\lambda_1}_{\rho_1,m},\|y\|^{\lambda_2}_{\rho_2,n})$, 其中

$$G(u,v)=\frac{\ln(\frac{u}{v})}{u-v},\quad u>0,v>0,$$

则 $G(u,v)$ 是 $\lambda=-1$ 阶齐次非负函数.

取 $a=\frac{m}{pq}$, $b=\frac{n}{pq}$, 则 $\frac{1}{\lambda_1}aq+\frac{1}{\lambda_2}bp=\lambda+\frac{m}{\lambda_1}+\frac{n}{\lambda_2}$ 等价于 $\frac{m}{\lambda_1 q}+\frac{n}{\lambda_2 p}=1$, 故当且仅当 $\frac{m}{\lambda_1 q}+\frac{n}{\lambda_2 p}=1$ 时, a,b 是最佳搭配参数, 而当 $\frac{m}{\lambda_1 q}+\frac{n}{\lambda_2 p}=1$ 时, 有 $\alpha=\lambda_1\big[\lambda+\frac{n}{\lambda_2}+p\big(\frac{a}{\lambda_1}-\frac{b}{\lambda_2}\big)\big]=0$, $\beta=\lambda_2\big[\lambda+\frac{m}{\lambda_1}+q\big(\frac{b}{\lambda_2}-\frac{a}{\lambda_1}\big)\big]=0$,

$$\begin{aligned}W_1^{\frac{1}{p}}(b,p,n)W_2^{\frac{1}{q}}(a,q,m)&=\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\Big)^{\frac{1}{p}}W_2(a,q,m)\\&=\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\Big)^{\frac{1}{p}}\int_0^{+\infty}K(t,1)t^{-aq+m-1}\,\mathrm{d}t\\&=\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\Big)^{\frac{1}{p}}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(t^{\lambda_1})}{t^{\lambda_1}-1}t^{-\frac{m}{p}+m-1}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\lambda_1^{\frac{1}{q}}\lambda_2^{\frac{1}{p}}}\int_0^{+\infty}\frac{\ln u}{u-1}u^{\frac{m}{\lambda_1 q}-1}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\lambda_1^{\frac{1}{q}}\lambda_2^{\frac{1}{p}}}B^2\Big(\frac{m}{\lambda_1 q},1-\frac{m}{\lambda_1 q}\Big) \\
&= \frac{1}{\lambda_1^{\frac{1}{q}}\lambda_2^{\frac{1}{p}}}B^2\Big(\frac{m}{\lambda_1 q},\frac{n}{\lambda_2 p}\Big).
\end{aligned}
$$

根据定理 3.1, 知例 3.1 的结论成立.

利用定理 3.1, 还可以解决许多拟齐次核重积分算子的有界性与算子范数问题.

参 考 文 献

[1] Hardy G H, Littlewood J E, Pálay G. Inequalities [J]. Cambridge: Cambridge University Press, 1934.

[2] 匡继昌. 常用不等式 [M]. 济南: 山东科学技术出版社, 2004.

[3] Yang B C. On a more accurate Hilbert's type inequality [J]. *International Mathematcal Forum*, 2007, 2(37):1831–1837.

[4] 洪勇. 带对称齐次核的级数算子的范数刻画及其应用 [J]. 数学学报 (中文版), 2008, 51(2):365–370.

[5] 洪勇. Hardy-Hilbert 积分不等式的全方位推广 [J]. 数学学报 (中文版), 2001, 44(4):619–626.

[6] Yang B C. A mixed Hilbert-type inequality with a best constant factor [J]. *International Journal of Pure and Applies Mathematics*, 2005, 20(3):319–328.

[7] Kuang J C, Debnath L. On Hilbert's type inequalities on the weighted Orlicz spaces [J]. *Pacific J Appl Math*, 2007, 1(1):95–103.

[8] 洪勇, 孔荫莹. 含变量可转移函数核的 Hilbert 级数不等式 [J]. 数学物理学报 (A 辑), 2014, 34(3):708–715.

[9] Rassias M Th, Yang B C. On a multidimensional half-discrete Hilbert-type inequality related to the hyperbolic cotangent function [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2014, 242:800–813.

[10] Rassias M Th, Yang B C. A multidimensional half-discrete Hilbert-type inequality and Riemann zeta function [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2013, 225:263–277.

[11] Krnić M, Pečarić J M, Vuković P. On some higher-dimensional Hilbert's and Hardy-Hilbert's type integral inequalities with parameters [J]. *Math Inequal Appl*, 2008, 11:701–716.

[12] Liu T, Yang B C, He L P. On a multidimensional Hilbert-type integral inequality with logarithm function [J]. *Mathematical Inequalities and Applications*, 2015, 18(4):1219–1234.

[13] Yang B C. A multidimensional discrete Hilbert-type inequality [J]. *Int J Nonlinear Anal Appl*, 2014, 5(1):80–88.

[14] Zhong W Y, Yang B C. On a Multiple Hilbert-type integral inequality with the symmetric kernel [J]. *Journal of Inequalities and Applications*, Vol. 2007, Art. ID 27962, 17 pages.

[15] Xu L Z, Gao Y K. Note on Hardy-Riesz's extension of Hilbert's inequality [J]. *Chinese Quarterly Journal Mathematics*, 1991, 6(1):75–77.

[16] 洪勇. 一类具有准齐次核的涉及多个函数的 Hilert 型积分不等式 [J]. 数学学报 (中文版), 2014, 57(5):833–840.

[17] 和炳, 曹俊飞, 杨必成. 一个全新的多重 Hilbert 型积分不等式 [J]. 数学学报 (中文版), 2015, 58(4):661–672.

[18] 洪勇, 温雅敏. 齐次核的 Hilbert 型级数不等式取最佳常数因子的充要条件 [J]. 数学年刊, Ser A, 2016, 37(3):329–336.

[19] Hong Y, He B, Yang B C. Necessary and sufficient conditions for the validity of Hilbert-type integral inequalitoies with a class of quasi-homogeneous kernels and its application in operator theory [J]. *Journal of Mathemacal Inequaities*, 2018, 12(3):777–788.

[20] Cao J F, He B, Hong Y. Equivalent conditions and applications of a class of Hilbert-type integral inequalities involving multiple functions with quasi-homogeneous kernel [J]. *Journal of Inequalities and Applications*, 2018, 2018:206.

[21] Γ M 菲赫金哥尔茨. 微积分学教程 [M]. 北京: 人民教育出版社, 1957:404–423.

Equivalence Conditions of the Optimal Matching Parameters for Hilbert-Type Multiple Integral Inequality with Quasi-homogeneous Kernel and Applications

HONY Yong[1] CHEN Qiang[2] LI Zhen[3]

[1]Department of Applied Mathematics, Guangzhou Huashang College, Guangzhou 511300, China. E-mail: hongyonggdcc@yeah.net

[2]College of Computer Science, Guangdong University of Education, Guangzhou 510303, China. E-mail: cq_c120m3@163.com

[3]College of Statistics and Mathematics, Guangdong University of Finance and Economics, Guangzhou 510320, China. E-mail: zhenlee2011@gdufe.edu.cn

Abstract By using the weight function method, the optimal matching parameter conditions for Hilbert-type multiple integral inequality with quasi-homogeneous kernel are discussed, several equivalence conditions for optimal matching are obtained, and the formula for the expression of the best constant factor of the inequality is obtained. Finally, their applications to the theory of singular integral operator are discussed.

Keywords Quasi-homogeneous kernel, Hilbert-type multiple integral inequality, The best constant factor, The optimal matching parameter, Equivalence condition, Bounded operator, Operator norm

2000 MR Subject Classification 26D15