数 学 年 刊 A 辑
2022, 43(2):201–212
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2022.0013

θ 型 Calderón–Zygmund 算子交换子在加权 Morrey 空间上的有界性 *

吴翠兰 [1]　束立生 [2]

提要 设 T 是一个 θ 型 Calderón–Zygmund 算子. 本文利用 Sharp 极大函数估计的方法，借助交换子 $[b,T]$ 在 L^p 空间上的有界性，证明当权函数 ω 满足一定条件时， $[b,T]$ 在加权 Morrey 空间上的有界性质，其中 b 属于 Lipschitz 空间和加权 Lipschitz 空间.

关键词 θ 型 Calderón–Zygmund 算子，交换子，加权 Morrey 空间， A_p 权
MR(2000) 主题分类号 42B20, 42B25, 42B35
中图法分类 O174.2
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2022)02-0201-12

§1 引　言

1985 年， Yabuta 在文 [1] 中引入了如下的 θ 型 Calderón–Zygmund 算子.

定义 1.1[1] 设 θ 是 $(0,+\infty)$ 上的非负非减函数且 $\int_0^1 \frac{\theta(t)}{t}\mathrm{d}t < \infty$. 称定义在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \backslash \{(x,x): x\in\mathbb{R}^n\}$ 上的可测函数 $K(x,y)$ 是 θ 型核，如果

(i) 当 $x\neq y$ 时， $|K(x,y)|\leqslant C|x-y|^{-n}$, 其中 C 为常数.

(ii) 当 $2|x-z|\leqslant|x-y|$ 时,

$$|K(x,y)-K(z,y)|+|K(y,x)-K(y,z)|\leqslant C|x-y|^{-n}\theta\Big(\frac{|x-z|}{|x-y|}\Big).$$

称线性算子 $T:\Psi(\mathbb{R}^n)\to\Psi'(\mathbb{R}^n)$ 是 θ 型 Calderón–Zygmund 算子，如果

(iii) T 能扩充成从 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 到其自身的有界线性算子.

(iv) 存在一个 θ 型核，使得对所有的 $f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, 成立

$$Tf(x)=\int_{\mathbb{R}^n}K(x,y)f(y)\mathrm{d}y,\quad \forall x\in\mathbb{R}^n\backslash \operatorname{supp} f,$$

其中 $\Psi(\mathbb{R}^n)$ 是 Schwartz 函数类， $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的无穷次可微函数空间.

假设 T 是一个 Calderón–Zygmund 算子， b 是 $\mathbb{R}^n$ 上局部可积函数， b 和 T 所生成的交换子定义如下：

$$[b,T]f(x)=b(x)Tf(x)-T(bf)(x).$$

本文 2020 年 8 月 31 日收到， 2021 年 6 月 27 日收到修改稿.
[1]江苏师范大学数学与统计学院，江苏　徐州 221116. E-mail: w-cuilan@126.com
[2]安徽师范大学数学与统计学院，安徽　芜湖 241003. E-mail: shulsh@mail.ahnu.edu.cn
*本文受到江苏省自然科学基金 (No. SBK20161158) 的资助.

王婧敏 [2] 研究了 θ 型 Calderón–Zygmund 算子多线性交换子的加权有界性问题，文 [3] 讨论了在非倍测度下 θ 型 Calderón–Zygmund 算子的相关结论． 2008 年，刘玉青等 [4] 讨论了满足一定条件的 θ 型 Calderón–Zygmund 算子交换子 $[b,T]$ 在加权 L^p 空间上的有界性，其中 $b\in \mathrm{Lip}_{\beta,\mu}(\mathbb{R}^n),\mu\in A_1(\mathbb{R}^n)$. 2012 年，王华 [5] 研究了 Calderón–Zygmund 算子在加权 Morrey 空间上的一些交换子估计． 2015 年，叶晓峰等 [6] 对几类交换子在加权 Morrey 空间上的端点情形进行了探讨， Komori 和 Shirai[7] 定义了加权 Morrey 空间 $L^{p,k}(\omega)$, 并且研究了调和分析中一些主要算子在这些加权空间上的有界性问题．为研究分数次积分的相应有界性，文 [7] 还介绍了加双权 Morrey 空间 $L^{p,k}(\omega_1,\omega_2)$. 吴翠兰等 [8] 利用 Marcinkiewicz 积分算子 μ_Ω 与 Lipschitz 函数 b 生成的交换子 $\mu_{\Omega,b}$ 在加权 L^p 空间上的有界性，得到了 $\mu_{\Omega,b}$ 在加权 Morrey 空间上的有界性．加权 Morrey 空间可视为加权 Lebesgue 空间的一种推广形式，受上述研究工作的启发，本文讨论了满足一定条件的 θ 型 Calderón–Zygmund 算子交换子在加权 Morrey 空间上的有界性．主要结果陈述如下．

定理 1.1 设 $b\in \mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n),\omega^q\in A_1(\mathbb{R}^n),0<\beta<1,1<p<\frac{n}{\beta},\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\beta}{n},0<k<\min\left\{\frac{p}{q},p\frac{\beta}{n}\right\}$. T 是 θ 型 Calderón–Zygmund 算子且

$$\int_0^1\frac{\theta(t)}{t}|\log t|\mathrm{d}t<\infty,$$

则交换子 $[b,T]$ 是从 $L^{p,k}(\omega^p,\omega^q)$ 到 $L^{q,\frac{kq}{p}}(\omega^q)$ 的有界算子．

定理 1.2 设 $b\in \mathrm{Lip}_\beta(\omega),\omega\in A_1(\mathbb{R}^n),0<\beta<1,\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\beta}{n},1<p<q<\infty,0<k<\frac{p}{q}$. T 是 θ– 型 Calderón–Zygmund 算子且

$$\int_0^1\frac{\theta(t)}{t}|\log t|\mathrm{d}t<\infty,$$

则交换子 $[b,T]$ 是从 $L^{p,k}(\omega,\omega^{1-q})$ 到 $L^{q,\frac{kq}{p}}(\omega^{1-q})$ 的有界算子．

本文将用 C 来表示与主要参数无关的正常数，且其值在不同的位置可以不全相同．我们还用记号 $A\sim B$ 表示存在一个正常数 $C>1$, 使得

$$\frac{1}{C}\leqslant\frac{A}{B}\leqslant C.$$

§2 预备知识

为便于行文，首先介绍相关定义及记号．经典的 A_p 权理论最早是由 Muckenhoupt[9] 在研究 Hardy-Littlewood 极大函数的加权 L^p 有界时引进的．权 ω 是指定义在 $\mathbb{R}^n$ 上非负的局部可积函数， $B=B(x_0,r_B)$ 表示中心为点 x_0, 半径为 r_B 的球体．对任意的 $\lambda>0,\lambda B=B(x_0,\lambda r_B)$. 记 B 的 Lebesgue 测度为 $|B|$ 以及 B 的加权测度为 $\omega(B)$, 其中 $\omega(B)=\displaystyle\int_B\omega(x)\mathrm{d}x$.

A_p 及 $A(p,q)$ 为 Muckenhoupt 函数类，定义如下．

定义 2.1[9] (1) 称 $\omega\in A_p(1<p<\infty)$, 如果存在常数 $C>0$, 使得对任意的球体 B, 有

$$\Big(\frac{1}{|B|}\int_B\omega(x)\mathrm{d}x\Big)\Big(\frac{1}{|B|}\int_B\omega(x)^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}x\Big)^{p-1}\leqslant C.$$

(2) 称 $\omega\in A_1$, 如果

$$\frac{1}{|B|}\int_B\omega(x)\mathrm{d}x\leqslant C\operatorname*{essinf}_{x\in B}\omega(x).$$

$$A_\infty=\bigcup_{1<p<\infty}A_p.$$

(3) 称 $\omega\in A(p,q),1<p<q$, 若存在常数 $C>0$, 使得对任意的球体 B, 有

$$\Big(\frac{1}{|B|}\int_B\omega(x)^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\frac{1}{|B|}\int_B\omega(x)^{-p'}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p'}}\leqslant C.$$

一个权函数 ω 属于逆 Hölder 类 RH_r, 如果存在常数 $r>1$ 和 $C>0$, 使得

$$\Big(\frac{1}{|B|}\int_B\omega(x)^r\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{r}}\leqslant C\Big(\frac{1}{|B|}\int_B\omega(x)\mathrm{d}x\Big)$$

对 $\mathbb{R}^n$ 中每个球体 B 都成立，记 $\omega\in RH_r$.

定义 2.2 [10]　(1) 设 $1\leqslant p<\infty,0<\beta<1$, 一个局部可积函数 $b(x)$ 称为在空间 $\mathrm{Lip}^p_\beta(\mathbb{R}^n)$ 中，如果存在常数 $C>0$, 使得

$$\|b\|_{\mathrm{Lip}^p_\beta(\mathbb{R}^n)}=\sup_B\frac{1}{|B|^{\frac{\beta}{n}}}\Big(\frac{1}{|B|}\int_B|b(x)-b_B|^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}\leqslant C.$$

(2) 设 ω 是一个权函数， $1\leqslant p<\infty,0<\beta<1$, 一个局部可积函数 $b(x)$ 属于加权 Lipschitz 空间，记为 $b\in\mathrm{Lip}^p_\beta(\omega)$, 如果存在常数 $C>0$, 使得

$$\sup_B\frac{1}{\omega(B)^{\frac{\beta}{n}}}\Big(\frac{1}{\omega(B)}\int_B|b(x)-b_B|^p\omega(x)^{1-p}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}\leqslant C.$$

这里 $b_B=\frac{1}{|B|}\int_B b(x)\mathrm{d}x$, 上确界取遍所有的 $B\subset\mathbb{R}^n$, 上式中 C 的最小下界称为 b 的 $\mathrm{Lip}^p_\beta(\omega)$ 范数，记为 $\|b\|_{\mathrm{Lip}^p_\beta(\omega)}$.

由文 [10], 如果 $\omega\in A_1$, 则 $\|b\|_{\mathrm{Lip}^p_\beta(\omega)}(1<p<\infty)$ 与 $\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\omega)}$ 是等价的，为方便起见，记 $\mathrm{Lip}^p_\beta(\omega)$ 为 $\mathrm{Lip}_\beta(\omega)$, 其范数为 $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\omega)}$.

定义 2.3 [5]　设 f 是一个局部可积函数， Hardy–Littlewood 极大算子 M 和 Sharp 极大函数 $M^\sharp$ 定义如下：

$$M(f)(x)=\sup_{x\in B}\frac{1}{|B|}\int_B|f(y)|\mathrm{d}y,\quad M^\sharp(f)(x)=\sup_{x\in B}\frac{1}{|B|}\int_B|f(y)-f_B|\mathrm{d}y,$$

其中 $f_B=\frac{1}{|B|}\int_B|f(y)|\mathrm{d}y$.

对于 $0<\beta<n,r\geqslant1$, 定义分数次极大算子 $M_{\beta,r}$ 为

$$M_{\beta,r}(f)(x)=\sup_{x\in B}\Big(\frac{1}{|B|^{1-\frac{\beta r}{n}}}\int_B|f(y)|^r\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{r}}.$$

最后，定义加权 Morrey 空间，并且给出与本文相关的已知结果.

定义 2.4 [7]　设 $1\leqslant p<\infty,0<k<1$ 以及 ω 是一个权函数. 加权 Morrey 空间 $L^{p,k}(\omega)$ 定义如下：

$$L^{p,k}(\omega)=\{f\in L^p_{\mathrm{loc}}(\omega):\|f\|_{L^{p,k}(\omega)}<\infty\},$$

其中

$$\|f\|_{L^{p,k}(\omega)}=\sup_B\Big(\frac{1}{\omega(B)^k}\int_B|f(x)|^p\omega(x)\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}},$$

并且上确界是关于 $\mathbb{R}^n$ 中所有的球体 B 来取的.

定义 2.5 [7] 设 $1 \leqslant p < \infty, 0 < k < 1$ 且 ω_1 和 ω_2 是权函数, 加双权 Morrey 空间 $L^{p,k}(\omega_1,\omega_2)$ 定义如下:

$$L^{p,k}(\omega_1,\omega_2) = \{f \in L^p_{\rm loc}(\omega_1) : \|f\|_{L^{p,k}(\omega_1,\omega_2)} < \infty\},$$

其中

$$\|f\|_{L^{p,k}(\omega_1,\omega_2)} = \sup_B \Big(\frac{1}{\omega_2(B)^k}\int_B |f(x)|^p \omega_1(x)\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

若 $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, 则 $L^{p,k}(\omega_1,\omega_2) = L^{p,k}(\omega)$.

我们来陈述下面一些引理, 这在后文的证明中将会被用到.

引理 2.1 [8] 设 $\omega \in A_p, p \geqslant 1$, 则下面结论成立:

(1) ω 满足双倍测度条件, 即存在常数 $C > 0$, 使得

$$\omega(2B) \leqslant C\omega(B).$$

一般地, 对任意的 $\lambda > 1$, 有

$$\omega(\lambda B) \leqslant C\lambda^{np}\omega(B).$$

(2) ω 满足逆双倍测度条件, 即存在常数 $C > 1$, 使得

$$\omega(2B) \geqslant C\omega(B).$$

(3) ω 满足逆 Hölder 不等式, 即存在常数 $r > 1$, 使得 $\omega \in RH_r$.

引理 2.2 [11] 设 $\omega \in RH_r$ 且 $r > 1$, 那么存在常数 $C > 0$, 使得对任意可测集 $E \subset B$, 有

$$\frac{\omega(E)}{\omega(B)} \leqslant C\Big(\frac{|E|}{|B|}\Big)^{\frac{r-1}{r}}.$$

引理 2.3 [10] 设 $\omega \in A_1, b \in \mathrm{Lip}_\beta(\omega), 0 < \beta < 1, x \in B$, 则

(1) $|b_{2^jB} - b_B| \leqslant Cj\omega(x)\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\omega)}\omega(2^jB)^{\frac{\beta}{n}}$.

(2) $\sup\limits_B |b(x) - b_B| \leqslant C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\omega)}\omega(B)^{1+\frac{\beta}{n}}|B|^{-1}$.

引理 2.4 [8] 若 $\omega \in A_1$, 则对 $r > 1$ 及任何球体 B, 有

$$\Big(\int_B \omega(x)^{-\frac{r'}{r}}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{r'}} \leqslant C\frac{|B|}{\omega(B)^{\frac{1}{r}}}.$$

特别地, 若 $\omega^p \in A_1$, 则对 $p > 1$, 有

$$\Big(\int_{2^{j+1}B} \omega^p(x)^{-\frac{p'}{p}}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p'}} \leqslant C\frac{|2^{j+1}B|}{\omega^p(2^{j+1}B)^{\frac{1}{p}}},$$

即

$$\Big(\int_{2^{j+1}B} \omega(x)^{-p'}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p'}} \leqslant C|2^{j+1}B|\omega^p(2^{j+1}B)^{-\frac{1}{p}}.$$

引理 2.5 [5, 12] 设 $s > 1, 1 \leqslant p < \infty$ 及 $A_p^s = \{\omega : \omega^s \in A_p\}$, 则

$$A_p^s = A_{1+\frac{p-1}{s}} \cap RHs.$$

特别地,

$$A_1^s = A_1 \cap RHs.$$

引理 2.6 [5, 13–14]　(1) 设 $0<\beta<1$, 则对任意的 $1\leqslant p<\infty$, 存在一个绝对常数 $C>0$, 使得

$$\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta^p}\leqslant C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta}.$$

(2) 设 $0<\beta<1, \omega\in A_1$, 则对任意的 $1\leqslant p<\infty$, 存在一个绝对常数 $C>0$, 使得

$$\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta^p(\omega)}\leqslant C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\omega)}.$$

§3　定理 1.1 的证明

我们用 Sharp 极大函数估计的方法来证明．按照文 [16] 中的思想，对于 $0<\delta<1$, 定义 δ-Sharp 极大算子为 $M_\delta^\sharp(f)=M^\sharp(|f|^\delta)^{\frac{1}{\delta}}$, 这是 Stein[17] 给出的 Sharp 极大算子 $M^\sharp$ 的变形，还记 $M_\delta(f)=M(|f|^\delta)^{\frac{1}{\delta}}$. 为证明定理 1.1, 要用到下面一些引理.

引理 3.1 [5]　设 $0<\delta<1, 1<p<\infty$ 及 $0<k<1$. 如果 $u,v\in A_\infty$, 则

$$\|M_\delta(f)\|_{L^{p,k}(u,v)}\leqslant C\|M_\delta^\sharp(f)\|_{L^{p,k}(u,v)}.$$

对于所有使得左边式子为有限值的函数 f 来说都成立．特别地，当 $u=v=\omega$ 和 $\omega\in A_\infty$ 时，有

$$\|M_\delta(f)\|_{L^{p,k}(\omega)}\leqslant C\|M_\delta^\sharp(f)\|_{L^{p,k}(\omega)}.$$

引理 3.2 [5]　设 $0<\beta<n, 1<p<\frac{n}{\beta}, \frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\beta}{n}$ 及 $\omega^q\in A_1$, 则对于每一个 $0<k<\frac{p}{q}$ 和 $1<r<p$, 有

$$\|M_{\beta,r}(f)\|_{L^{q,\frac{kq}{p}}(\omega^q)}\leqslant C\|f\|_{L^{p,k}(\omega^p,\omega^q)}.$$

引理 3.3 [5, 7]　设 $0<\beta<n, 1<p<\frac{n}{\beta}, \frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\beta}{n}, 0<k<\frac{p}{q}$ 以及 $\omega\in A(p,q)$, 那么 $M_{\beta,1}$ 是从 $L^{p,k}(\omega^p,\omega^q)$ 到 $L^{q,\frac{kq}{p}}(\omega^q)$ 有界的.

引理 3.4 [15]　(1) 设 T 是 θ 型 Calderón–Zygmund 算子.

(1) 如果 $1<p<\infty$ 且 $\omega\in A_p$, 则存在常数 $C>0$, 使得

$$\|Tf\|_{L^p(\omega)}\leqslant C\|f\|_{L^p(\omega)}.$$

(2) 对 $\omega\in A_1$, 存在常数 $C>0$, 使得对任意 $\lambda>0$, 有

$$\omega(\{x\in\mathbb{R}^n:|Tf(x)|>\lambda\})\leqslant\frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^1(\omega)}.$$

引理 3.5　设 $0<\beta<n, 1<p<\frac{n}{\beta}, \frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\beta}{n}$ 及 $\omega^q\in A_1$, 则对于每一个 $0<k<\frac{\beta p}{n}$, 有

$$\|T(f)\|_{L^{p,k}(\omega^p,\omega^q)}\leqslant C\|f\|_{L^{p,k}(\omega^p,\omega^q)}.$$

证　固定一个球体 $B=B(x_0,r_B)\subset\mathbb{R}^n$, 对 f 做分解 $f=f\chi_{2B}+f\chi_{(2B)^C}:=f_1+f_2$.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\omega^q(B)^{\frac{k}{p}}}\Big(\int_B|Tf(x)|^p\omega(x)^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}\\ \leqslant{}&\frac{1}{\omega^q(B)^{\frac{k}{p}}}\Big(\int_B|Tf_1(x)|^p\omega(x)^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}+\frac{1}{\omega^q(B)^{\frac{k}{p}}}\Big(\int_B|Tf_2(x)|^p\omega(x)^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

$= \mathrm{J}_1 + \mathrm{J}_2.$

因 $\omega^q \in A_1, 1 < p < q$, 则有 $\omega^p \in A_1$, 于是 $\omega^p \in A_p$. 因此根据引理 3.4 和引理 2.1 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_1 &\leqslant C\frac{1}{\omega^q(B)^{\frac{k}{p}}}\Big(\int_{2B}|f(x)|^p\omega(x)^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}\\ &\leqslant C\|f\|_{L^{p,k}(\omega^p,\omega^q)}\frac{\omega^q(2B)^{\frac{k}{p}}}{\omega^q(B)^{\frac{k}{p}}}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

下面估计 J_2. 注意到当 $x\in B$ 及 $y\in(2B)^c$ 时，有 $|y-x|\sim|y-x_0|$. 由 Hölder 不等式和引理 2.4 可得

$$\begin{aligned}|Tf_2(x)| &\leqslant C\int_{(2B)^c}\frac{|f(y)|}{|x-y|^n}\mathrm{d}y.\\ &\leqslant C\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}|f(y)|\omega(y)\omega^{-1}(y)\mathrm{d}y.\\ &\leqslant C\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|2^{j+1}B|}\Big(\int_{2^{j+1}B}\omega(y)^{-p'}\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{p'}}\Big(\int_{2^{j+1}B}|f(y)|^p\omega(y)^p\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{p}}\\ &\leqslant C\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|2^{j+1}B|}|2^{j+1}B|\omega^p(2^{j+1}B)^{-\frac{1}{p}}\Big(\int_{2^{j+1}B}|f(y)|^p\omega(y)^p\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{p}}\\ &\leqslant C\|f\|_{L^{p,k}(\omega^p,\omega^q)}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\omega^q(2^{j+1}B)^{\frac{k}{p}}}{\omega^p(2^{j+1}B)^{\frac{1}{p}}}.\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_2 &= \frac{1}{\omega^q(B)^{\frac{k}{p}}}\Big(\int_B|Tf_2(x)|^p\omega(x)^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}\\ &\leqslant C\|f\|_{L^{p,k}(\omega^p,\omega^q)}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\omega^p(B)^{\frac{1}{p}}}{\omega^p(2^{j+1}B)^{\frac{1}{p}}}\frac{\omega^q(2^{j+1}B)^{\frac{k}{p}}}{\omega^q(B)^{\frac{k}{p}}}.\end{aligned}$$

由于 $\omega^q\in A_1$, 则根据引理 2.2, 可得

$$C\frac{|B|}{|2^{j+1}B|}\leqslant\frac{\omega^q(B)}{\omega^q(2^{j+1}B)}.$$

因为 $\frac{q}{p}>1$ 及 $(\omega^p)^{\frac{q}{p}}=\omega^q\in A_1$, 由引理 2.5 可知 $\omega^p\in RH_{\frac{q}{p}}$. 再根据引理 2.2, 得

$$\frac{\omega^p(B)}{\omega^p(2^{j+1}B)}\leqslant C\Big(\frac{|B|}{|2^{j+1}B|}\Big)^{1-\frac{q}{p}}.$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_2 &\leqslant C\|f\|_{L^{p,k}(\omega^p,\omega^q)}\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\frac{|B|}{|2^{j+1}B|}\Big)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\Big(\frac{2^{j+1}|B|}{|B|}\Big)^{\frac{k}{p}}\\ &\leqslant C\|f\|_{L^{p,k}(\omega^p,\omega^q)}\sum_{j=1}^{\infty}(2^{jn})^{\frac{k}{p}-\frac{\beta}{n}}\\ &\leqslant C\|f\|_{L^{p,k}(\omega^p,\omega^q)}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

在最后一个不等式中我们用到了 $k<\frac{\beta p}{n}$, 将估计式 (3.1) 和 (3.2) 结合，然后再关于所有的球体 $B\subset\mathbb{R}^n$ 取上确界，我们就完成了引理 3.5 的证明.

引理 3.6 设 $0<\delta<1, 0<\beta<1$ 及 $b\in \mathrm{Lip}_\beta(R^n)$. T 是 θ 型 Calderón–Zygmund 算子且 $\int_0^1\frac{\theta(t)}{t}|\log t|\mathrm{d}t<\infty$, 则对于所有 $r>1$ 和所有的 $x\in R^n$, 有

$$M_\delta^\sharp([b,T]f)(x)\leqslant C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta}(M_{\beta,r}(Tf)(x)+M_{\beta,r}(f)(x)+M_{\beta,1}(f)(x)).$$

证 对任意给定的 $x\in\mathbb{R}^n$, 固定一个包含点 x 的球体 $B=B(x_0,r_B)$, 其中 $B=B(x_0,r_B)$ 表示中心为点 x_0, 半径为 r_B 的球体. 将 f 分解成 $f=f_1+f_2$, 其中 $f_1=f\chi_{2B}$, 其中 χ_{2B} 表示 $2B$ 的特征函数， $f_2=f\chi_{(2B)^c}$. 于是有

$$[b,T]f(x)=(b(x)-b_{2B})Tf(x)-T((b-b_{2B})f)(x).$$

因为 $0<\delta<1$, 故对任意常数 c, 有

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{1}{|B|}\int_B\Big||[b,T]f(y)|^\delta-|c|^\delta\Big|\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{\delta}}\\
\leqslant&\Big(\frac{1}{|B|}\int_B|[b,T]f(y)-c|^\delta\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{\delta}}\\
\leqslant&C\Big(\frac{1}{|B|}\int_B|(b(y)-b_{2B})Tf(y)|^\delta\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{\delta}}+C\Big(\frac{1}{|B|}\int_B|T(b-b_{2B})f_1(y)|^\delta\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{\delta}}\\
&+C\Big(\frac{1}{|B|}\int_B|T(b-b_{2B})f_2(y)+c|^\delta\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{\delta}}\\
=&\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}.
\end{aligned}$$

下面将分别估计每一项. 首先，由 Hölder 不等式和引理 2.6, 可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}&\leqslant C\frac{1}{|B|}\int_B|(b(y)-b_{2B})Tf(y)|\mathrm{d}y\\
&\leqslant C\frac{1}{|2B|}\int_{2B}|(b(y)-b_{2B})Tf(y)|\mathrm{d}y\\
&\leqslant C\frac{1}{|B|}\Big(\int_B|b(y)-b_{2B}|^{r'}\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{r'}}\Big(\int_B|Tf(y)|^r\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{r}}\\
&\leqslant C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta}\Big(\frac{1}{|B|^{1-\frac{\beta r}{n}}}\int_B|Tf(y)|^r\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{r}}\\
&\leqslant C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta}M_{\beta,r}(Tf)(x).
\end{aligned}\tag{3.3}$$

利用 Kolmogorov 不等式， Hölder 不等式和引理 2.6, 得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{II}&\leqslant C\frac{1}{|B|}\int_{2B}|(b(y)-b_{2B})f(y)|\mathrm{d}y\\
&\leqslant C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta}M_{\beta,r}(f)(x).
\end{aligned}\tag{3.4}$$

现估计最后一项，取 $c=-T((b-b_{2B})f_2)(x_0)$, 当 $y\in B, z\in(2B)^c$ 时，有 $2|y-x_0|\leqslant|y-z|\sim|x_0-z|$. 于是得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{III}&\leqslant C\frac{1}{|B|}\int_B|T((b-b_{2B})f_2)(y)-T((b-b_{2B})f_2)(x_0)|\mathrm{d}y\\
&\leqslant C\frac{1}{|B|}\int_B\Big(\int_{(2B)^c}|K(y,z)-K(x_0,z)||b(z)-b_{2B}||f(z)|\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant C\frac{1}{|B|}\int_B\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\int_{2^{j+1}B\setminus 2^jB}\theta\Big(\frac{|y-x_0|}{|z-y|}\Big)|z-y|^{-n}|b(z)-b_{2B}||f(z)|\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}y\\
&\leqslant C\frac{1}{|B|}\int_B\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\int_{2^{j+1}B\setminus 2^jB}\theta(2^{-j})\frac{1}{|2^{j+1}B|}|b(z)-b_{2B}||f(z)|\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}y\\
&\leqslant C\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\theta(2^{-j})}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}|b(z)-b_{2^{j+1}B}||f(z)|\mathrm{d}z\\
&\quad+C\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\theta(2^{-j})}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}|b_{2^{j+1}B}-b_{2B}||f(z)|\mathrm{d}z\\
&=\mathrm{IV}+\mathrm{V}.
\end{aligned}
$$

同 II 的估计，我们也能推出

$$
\begin{aligned}
\mathrm{IV}&\leqslant C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta}M_{\beta,r}(f)(x)\sum_{j=1}^{\infty}\theta(2^{-j})\\
&\leqslant C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta}M_{\beta,r}(f)(x).
\end{aligned}\tag{3.5}
$$

此处用到了

$$
\sum_{j=1}^{\infty}\theta(2^{-j})\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}j\theta(2^{-j})\leqslant\int_0^1\frac{\theta(t)}{t}|\log t|\mathrm{d}t<\infty.
$$

根据引理 2.6, 容易验证

$$
|b_{2^{j+1}B}-b_{2B}|\leqslant C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta}j|2^{j+1}B|^{\frac{\beta}{n}}.
$$

故

$$
\begin{aligned}
V&\leqslant C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta}\sum_{j=1}^{\infty}j\theta(2^{-j})|2^{j+1}B|^{\frac{\beta}{n}}\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}|f(z)|\mathrm{d}z\\
&\leqslant C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta}M_{\beta,1}(f)(x)\sum_{j=1}^{\infty}j\theta(2^{-j})\\
&\leqslant C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta}M_{\beta,1}(f)(x).
\end{aligned}\tag{3.6}
$$

定理 1.1 的证明 对于 $0<\beta<1$ 及 $1<p<\frac{n}{\beta}$, 我们可找到一个实数 r, 使得 $1<r<p$. 利用引理 3.1 和引理 3.6, 可得

$$
\begin{aligned}
\|[b,T]f\|_{L^{q,\frac{kq}{p}}(\omega^q)}&\leqslant C\|M_\delta^\sharp([b,T]f)\|_{L^{q,\frac{kq}{p}}(\omega^q)}\\
&\leqslant C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta}(\|M_{\beta,r}(Tf)\|_{L^{q,\frac{kq}{p}}(\omega^q)}+\|M_{\beta,r}(f)\|_{L^{q,\frac{kq}{p}}(\omega^q)}\\
&\quad+\|M_{\beta,1}(f)\|_{L^{q,\frac{kq}{p}}(\omega^q)}).
\end{aligned}
$$

由于 $\omega^q\in A_1$, 则 $\omega\in A(p,q)$. 由已知条件 $0<k<\min\{\frac{p}{q},p\frac{\beta}{n}\}$, 则根据引理 3.2, 引理 3.5 和引理 3.3, 我们得到

$$
\|[b,T]f\|_{L^{q,\frac{kq}{p}}(\omega^q)}\leqslant C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta}(\|Tf\|_{L^{p,k}(\omega^p,\omega^q)}+\|f\|_{L^{p,k}(\omega^p,\omega^q)})
$$

$$\leqslant C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta}\|f\|_{L^{p,k}(\omega^p,\omega^q)}.$$

这样就完成了定理 1.1 的证明.

§4　定理 1.2 的证明

为证明定理 1.2, 需要如下引理.

引理 4.1[4]　设 $b\in \mathrm{Lip}_\beta(\omega),\omega\in A_1,0<\beta<1,\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\beta}{n},1<p<q<\infty$, T 是 θ 型 Calderón–Zygmund 算子且

$$\int_0^1\frac{\theta(t)}{t}|\log t|\mathrm{d}t<\infty,$$

则交换子 $[b,T]$ 是从 $L^p(\omega)$ 到 $L^q(\omega^{1-q})$ 的有界算子.

定理 1.2 的证明　固定一个球体 $B=B(x_0,r_B)\subset\mathbb{R}^n$, 对 f 做分解 $f=f_1+f_2$, 其中 $f_1=f\chi_{2B}$ 且 χ_{2B} 表示 $2B$ 的特征函数，$f_2=f\chi_{(2B)^c}$. 于是有

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{1}{\omega^{1-q}(B)^{\frac{kq}{p}}}\int_B|[b,T]f(x)|^q\omega(x)^{1-q}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}\\
&=\frac{1}{\omega^{1-q}(B)^{\frac{k}{p}}}\Big(\int_B|[b,T]f(x)|^q\omega(x)^{1-q}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}\\
&\leqslant\frac{1}{\omega^{1-q}(B)^{\frac{k}{p}}}\Big(\int_B|[b,T]f_1(x)|^q\omega(x)^{1-q}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}+\frac{1}{\omega^{1-q}(B)^{\frac{k}{p}}}\Big(\int_B|[b,T]f_2(x)|^q\omega(x)^{1-q}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}\\
&=\mathrm{K}_1+\mathrm{K}_2.
\end{aligned}$$

由 $\omega\in A_1$ 可知 $\omega^{1-q}\in A_q$, 从而利用引理 4.1 和引理 2.1, 可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}_1&\leqslant C\frac{1}{\omega^{1-q}(B)^{\frac{k}{p}}}\Big(\int_{2B}|f(x)|^p\omega(x)\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}\\
&\leqslant C\frac{1}{\omega^{1-q}(B)^{\frac{k}{p}}}\Big(\frac{\omega^{1-q}(2B)^k}{\omega^{1-q}(2B)^k}\int_{2B}|f(x)|^p\omega(x)\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}\\
&\leqslant C\frac{\omega^{1-q}(2B)^{\frac{k}{p}}}{\omega^{1-q}(B)^{\frac{k}{p}}}\|f\|_{L^{p,k}(\omega,\omega^{1-q})}\\
&\leqslant C\|f\|_{L^{p,k}(\omega,\omega^{1-q})}.
\end{aligned}$$

现在来估计 K_2.

$$\begin{aligned}
|[b,T]f_2(x)|&=\Big|\int_{\mathbb{R}^n}K(x,y)(b(x)-b(y))f_2(y)\mathrm{d}y\Big|\\
&\leqslant\int_{(2B)^c}|K(x,y)(b(x)-b(y))f(y)|\mathrm{d}y\\
&\leqslant C\sum_{j=1}^{\infty}\int_{2^{j+1}B\setminus 2^jB}\frac{1}{|x-y|^n}|b(x)-b(y)||f(y)|\mathrm{d}y\\
&\leqslant C\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}|b(x)-b(y)||f(y)|\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant C\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}|b(y)-b_{2^{j+1}B}||f(y)|\mathrm{d}y\\
&\quad+C\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}|b(x)-b_{2^{j+1}B}||f(y)|\mathrm{d}y\\
&=\mathrm{K}_{21}+\mathrm{K}_{22}.
\end{aligned}\tag{4.1}
$$

首先估计 K_{21}, 当 $y\in 2^{j+1}B$ 时，由引理 2.3 知

$$
|b(y)-b_{2^{j+1}B}|\leqslant C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\omega)}\omega(2^{j+1}B)^{1+\frac{\beta}{n}}\frac{1}{|2^{j+1}B|}.
$$

再利用引理 2.4 可推出

$$
\begin{aligned}
\mathrm{K}_{21}&\leqslant C\|b\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\omega)}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|2^{j+1}B|}\omega(2^{j+1}B)^{1+\frac{\beta}{n}}\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}|f(y)|\omega(y)^{\frac{1}{p}}\omega(y)^{-\frac{1}{p}}\mathrm{d}y\\
&\leqslant C\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|2^{j+1}B|}\omega(2^{j+1}B)^{1+\frac{\beta}{n}}\frac{1}{|2^{j+1}B|}\Big(\int_{2^{j+1}B}|f(y)|^p\omega(y)\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_{2^{j+1}B}\omega(y)^{-\frac{p'}{p}}\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{p'}}\\
&\leqslant C\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|2^{j+1}B|^2}\omega(2^{j+1}B)^{1+\frac{\beta}{n}}\omega^{1-q}(2^{j+1}B)^{\frac{k}{p}}\|f\|_{L^{p,k}(\omega,\omega^{1-q})}\frac{|2^{j+1}B|}{\omega(2^{j+1}B)^{\frac{1}{p}}}\\
&=C\|f\|_{L^{p,k}(\omega,\omega^{1-q})}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|2^{j+1}B|}\frac{\omega^{1-q}(2^{j+1}B)^{\frac{k}{p}}}{\omega(2^{j+1}B)^{\frac{1}{q}-1}}.
\end{aligned}\tag{4.2}
$$

类似于 K_{21} 的估计，有

$$
\mathrm{K}_{22}\leqslant C\|f\|_{L^{p,k}(\omega,\omega^{1-q})}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|2^{j+1}B|}\frac{\omega^{1-q}(2^{j+1}B)^{\frac{k}{p}}}{\omega(2^{j+1}B)^{\frac{1}{q}-1}}.\tag{4.3}
$$

由 $\omega\in A_1$, 得

$$
\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}\omega(x)\mathrm{d}x\leqslant C\omega(x),\quad \text{a.e.}
$$

故

$$
\begin{aligned}
\omega^{1-q}(2^{j+1}B)&=\int_{2^{j+1}B}\omega(x)^{1-q}\mathrm{d}x=\int_{2^{j+1}B}\omega(x)\frac{1}{\omega(x)^q}\mathrm{d}x\\
&\leqslant C\Big(\frac{|2^{j+1}B|}{\omega(2^{j+1}B)}\Big)^q\omega(2^{j+1}B)=C\frac{|2^{j+1}B|^q}{\omega(2^{j+1}B)^{q-1}}.
\end{aligned}
$$

所以

$$
\frac{1}{|2^{j+1}B|\omega(2^{j+1}B)^{\frac{1}{q}-1}}\leqslant C\frac{1}{\omega^{1-q}(2^{j+1}B)^{\frac{1}{q}}}.\tag{4.4}
$$

因此由 (4.1)–(4.4), 可得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{K}_2&=\frac{1}{\omega^{1-q}(B)^{\frac{k}{p}}}\Big(\int_B|[b,T]f_2(x)|^q\omega(x)^{1-q}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}\\
&\leqslant C\|f\|_{L^{p,k}(\omega,\omega^{1-q})}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\omega^{1-q}(B)^{\frac{k}{p}}}\frac{1}{|2^{j+1}B|}\frac{\omega^{1-q}(2^{j+1}B)^{\frac{k}{p}}}{\omega(2^{j+1}B)^{\frac{1}{q}-1}}\Big(\int_B\omega(x)^{1-q}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= C\|f\|_{L^{p,k}(\omega,\omega^{1-q})}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\omega^{1-q}(2^{j+1}B)^{\frac{k}{p}}}{\omega^{1-q}(B)^{\frac{k}{p}}}\frac{1}{|2^{j+1}B|}\frac{\omega^{1-q}(B)^{\frac{1}{q}}}{\omega(2^{j+1}B)^{\frac{1}{q}-1}}\\
&\leqslant C\|f\|_{L^{p,k}(\omega,\omega^{1-q})}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\omega^{1-q}(2^{j+1}B)^{\frac{k}{p}}}{\omega^{1-q}(B)^{\frac{k}{p}}}\frac{\omega^{1-q}(B)^{\frac{1}{q}}}{\omega^{1-q}(2^{j+1}B)^{\frac{1}{q}}}\\
&\leqslant C\|f\|_{L^{p,k}(\omega,\omega^{1-q})}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\omega^{1-q}(B)^{\frac{1}{q}-\frac{k}{p}}}{\omega^{1-q}(2^{j+1}B)^{\frac{1}{q}-\frac{k}{p}}}.
\end{aligned}
$$

由 $\omega^{1-q}\in A_q$ 及引理 2.1–2.2 知存在 $r>1$, 使得

$$
\frac{\omega^{1-q}(B)}{\omega^{1-q}(2^{j+1}B)}\leqslant C\Big(\frac{|B|}{|2^{j+1}B|}\Big)^{1-\frac{1}{r}}.
$$

从而

$$
\mathrm{K}_2\leqslant C\|b\|_{\mathrm{Lip}\beta(\omega)}\|f\|_{L^{p,k}(\omega,\omega^{1-q})}\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{2^{jn}}\Big)^{(1-\frac{1}{r})(\frac{1}{q}-\frac{k}{p})}\leqslant C\|f\|_{L_{p,k}(\omega,\omega^{1-q})}.
$$

我们就完成了定理 1.2 的证明.

致谢 感谢审稿专家的宝贵意见.

参　考　文　献

[1] Yabuta K. Generalizations of Calderón–Zygmund operators [J]. *Studia Mathematica*, 1985, 82(1):17–31.

[2] 王婧敏. θ 型 Calderón–Zygmund 算子多线性交换子的加权估计 [J]. 数学的实践与与认识, 2010, 40(23):216–225.

[3] Xie R L, Shu L S. θ-Type Calderón–Zygmund operators with non–doubling measures [J]. *Acta Mathematical Applicate Sinica English Sereies*, 2013, 29(2):263–280.

[4] 刘玉青, 陈冬香, 杨向征. 满足一定条件的 θ 型 Calderón–Zygmund 奇异积分算子交换子的有界性 [J]. 江西师范大学学报 (自然科学版), 2008, 32(5):582–584.

[5] 王华. 关于 Calderón–Zygmund 算子在加权 Morrey 空间上的一些交换子估计 [J]. 中国科学：数学 (中文版), 2012, 42(1):31–45.

[6] 叶晓峰, 王蒙. 几类交换子在加权 Morrey 空间上的一点注记 [J]. 数学的实践与认识, 2015, 45(7):261–266.

[7] Komori Y, Shirai S. Weighted morrey spaces and a singular integral operator [J]. *Math Machr*, 2009, 282:219–231.

[8] 吴翠兰, 王云杰, 束立生. Marcinkiewicz 积分交换子在加权 Morrey 空间上的有界性 [J]. 数学年刊, 2014, 35A(6):685–696.

[9] Muckenhoupt B. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function [J]. *Trans Amer Math Soc*, 1972, 165:207–226.

[10] Garcia-Cuerva J, Rubio de Francia J L. Weighted norm inequalities and relayed topics [M]//New York: North-Holland Math Studies, Vol 116, Amsterdam: North-Holland Publishing Co, 1985.

[11] Gundy R F, Wheeden R L. Weighted integral inequalities for nontangential maximal function, Lusin area integral, and Walsh-Paley series [J]. *Studia Math*, 1974, 49:101–124.

[12] Johnson R, Neugebauer C J. Change of variable results for A_p and reverse Holder RHr classes [J]. *Trans Amer Math Soc*, 1991, 328:639–661.

[13] Paluszynski M. Characterization of the Besov spaces via the commutator operator of Coifman, Rochberg and Weiss [J]. *Indiana Univ Math J*, 1995, 44:1–17.

[14] Garcia-Cuerva J, Weighted H^p spaces [J]. *Dissertations Math*, 1979, 162:1–63.

[15] 张璞，徐罕．C–Z 型算子交换子的加权尖锐估计 [J]. 数学学报, 2005, 48(4):625–636.

[16] Pérez C. Endpoint estimates for commutators of singular integral operators [J]. *Journal of Functional Analysis*, 1995, 128(1):163–185.

[17] Stein E M. Harmonic analysis: real–variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals [M]. Princeton: Princeton University Press, 1993.

Boundedness for Commutators of $\boldsymbol{\theta}$-Type Calderón–Zygmund Operators on Weighted Morrey Spaces

WU Cuilan[1] SHU Lisheng[2]

[1]School of Mathematics and Statistics, Jiangsu Normal University, Xuzhou 221116, Jiangsu, China. E-mail: w-cuilan@126.com

[2]School of Mathematics and Statistics, Anhui Normal University, Wuhu 241003, Anhui, China. E-mail: shulsh@mail.ahnu.edu.cn

Abstract Let T be a θ-type Calderón–Zygmund operator. In this paper, the authors will use sharp maximal function estimates to show some boundedness properties of commutators $[b, T]$ on weighted Morrey spaces under appropriate conditions on the weight ω, where b belong to Lipschitz spaces and weighted Lipschitz spaces.

Keywords θ-Type Calderón–Zygmund operator, Commutator, Weighted Morrey space, A_p weight

2000 MR Subject Classification 42B20, 42B25, 42B35

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 43 No. 2, 2022
by ALLERTON PRESS, INC., USA