数 学 年 刊 A 辑
2022, 43(4):415–430
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2022.0027

带有随机初值的复值 Ginzburg-Landau 方程的弱平均动力学*

陈 章 [1] 李玲玉 [2]

提要 本文研究了无界域上的带有随机初值的复值 Ginzburg-Landau 方程. 首先, 基于解过程的全局适定性, 建立了带有随机初值的 Ginzburg-Landau 方程的平均随机动力系统. 然后, 证明了弱拉回平均随机吸引子的存在唯一性以及随机吸引子的周期性, 并将其进一步推广到加权空间 $L^2(\Omega, L^2_\sigma(\mathbb{R}))$.

关键词 复值 Ginzburg-Landau 方程, 随机初值, 平均随机动力系统, 弱拉回平均吸引子, 加权空间
MR (2000) 主题分类 35Q56, 35B40, 37H05
中图法分类 O175.29
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2022)04-0415-16

§1 引 言

在这篇文章中, 我们考虑 $\mathbb{R}$ 上的复值 Ginzburg-Landau 方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - (\lambda + \mathrm{i}\alpha)\Delta u + \gamma u = f(u) + g(t,x), \quad t > \tau,\, x \in \mathbb{R}, \\ u(\tau, x) = u_\tau(x), \quad x \in \mathbb{R},\, \tau \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 i 是虚数单位, $u(t,x)$ 是未知的复值函数, 非线性项 $f(u) = -(k+\mathrm{i}\beta)|u|^2u$ 是一个复值函数, $g \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}))$, $u_\tau \in L^2(\Omega; L^2(\mathbb{R}))$, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是完备的概率空间, λ, α, γ, k, β 是实常数并且满足 λ, γ, $k > 0$.

Ginzburg-Landau 方程是物理学中一个重要的非线性模型, 它可以描述非线性波、相变、超导性、玻色 - 爱因斯坦凝聚等现象. 关于解的适定性有许多重要的工作, 例如, 见文 [1–4]. 为了刻画解的长期行为, 吸引子已被广泛研究, 有关确定性的 Ginzburg-Landau 方程, 可参见文 [5–6] 等. 文 [7–11] 利用路径随机动力系统理论, 进行适当的 O-U 变换, 研究了带有加性或线性乘性白噪声的随机 Ginzburg-Landau 方程的随机吸引子. 关于随机动力系统的理论和随机偏微分方程的应用, 我们也可以参见文 [12–16]. 然而, 到目前为止, 对于由非线性白噪声驱动的随机 Ginzburg-Landau 方程还没有可用的变换, 因此带有非线性色噪声的随机 Ginzburg-Landau 方程被考虑, 可以参见文 [17–18] 及其参考文献.

值得注意的是, 上述文献中的初值是确定的. 然而, 路径随机吸引子理论和路径随机动力系统理论并不适用于带有随机初值的非线性系统. 带有随机初值的确定性方程受到

本文 2021 年 3 月 27 日收到, 2022 年 10 月 22 日收到修改稿.
[1] 山东大学数学学院, 济南 250100. E-mail: zchen@sdu.edu.cn
[2] 通信作者. 山东大学数学学院, 济南 250100. E-mail: lyli@mail.sdu.edu.cn
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11471190, No. 11971260) 的资助.

了很多的关注, 例如, 见文 [19–21]. 在上述工作的驱动下, 我们利用文 [21] 中的基于弱拓扑的弱平均随机吸引子理论, 研究带有随机初值的方程 (1.1) 在无界域上的解的适定性以及随机吸引子的存在性和周期性. 对于平均随机动力系统的理论, 我们可以参见文 [22]. 值得提到的是, (1.1) 是一个定义在 $\mathbb{R}$ 上的复值方程, 这不同于文 [20–23] 中的有界域的情况.

本文的另一个目标是进一步研究问题 (1.1) 在加权空间 $L^2(\Omega, L^2_\sigma(\mathbb{R}))$ 上的弱平均随机吸引子的存在性、唯一性和周期性, 这个加权空间包含 $L^2(\Omega, L^2(\mathbb{R}))$. 与 $L^2(\Omega, L^2(\mathbb{R}))$ 相比, 加权空间 $L^2(\Omega, L^2_\sigma(\mathbb{R}))(\sigma > \frac{1}{2})$ 包含了 $\mathbb{R}$ 上所有的有界可测函数. 加权空间 $L^2_\sigma(\mathbb{R})$ 上的拉回路径随机吸引子中可能包含行波解, 我们可参见文 [24–28] 了解更多细节. 据我们所知, 问题 (1.1) 在加权空间上尚未有弱平均随机吸引子的研究结果. 因此, 在本文中, 我们考虑了问题 (1.1) 在加权空间 $L^2(\Omega, L^2_\sigma(\mathbb{R}))$ 上的弱平均随机吸引子的存在性和唯一性, 并且证明了当 g 为周期函数时这些吸引子的周期性 (见定理 5.2). 值得提到的是, 在加权空间 $L^2(\Omega, L^2_\sigma(\mathbb{R}))$ 中对 g 的限制弱于在 $L^2(\Omega, L^2(\mathbb{R}))$ 中的限制.

本文的结构如下: 第 2 节介绍了关于弱拉回平均随机吸引子的一些基本结果. 第 3 节建立了由问题 (1.1) 生成的平均随机动力系统. 第 4 节证明了问题 (1.1) 的弱平均随机吸引子的存在性和唯一性, 并给出了弱拉回平均随机吸引子的周期性, 在第 5 节将其推广到加权空间 $L^2(\Omega, L^2_\sigma(\mathbb{R}))$ 上.

§2 预备知识

在本节中, 我们回顾在给定概率空间上, 平均随机动力系统的弱拉回平均随机吸引子的存在性的一些基本结果. 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一个完备的概率空间, X 是一个带有范数 $\|\cdot\|_X$ 的巴拿赫空间. 一个强可测函数 $\psi : \Omega \to X$ 称为 Bochner 可积的, 如果存在一列简单函数 $\psi_n : \Omega \to X$, 使得

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \|\psi_n - \psi\|_X \mathrm{d}P = 0.$$

ψ 在 Ω 上的 Bochner 积分被定义为

$$\int_\Omega \psi \mathrm{d}P = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \psi_n \mathrm{d}P.$$

对每一个 $p \in (1, +\infty)$, 定义 $L^p(\Omega, \mathcal{F}, X)$ 为包含所有 (等价类)Bochner 可积函数 $\psi : \Omega \to X$ 的巴拿赫空间, 使得

$$\|\psi\|_{L^p(\Omega,\mathcal{F},X)} = \Big(\int_\Omega \|\psi\|_X^p \mathrm{d}P\Big)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

下面列出了一些 $L^p(\Omega, X)$ 上的平均随机动力系统的有关基本概念, 更多细节可以参见文 [21].

定义 2.1 $\Phi = \{\Phi(t, \tau) : t \in \mathbb{R}^+, \tau \in \mathbb{R}\}$ 被称为 $L^p(\Omega, X)$ 上的平均随机动力系统, 如果对所有的 $\tau \in \mathbb{R}$ 和 $t, s \in \mathbb{R}^+$,

(1) $\Phi(t, \tau) :\ L^p(\Omega, X) \to L^p(\Omega, X)$;

(2) $\Phi(0,\tau)$ 是 $L^p(\Omega,X)$ 上的恒等算子;

(3) $\Phi(t+s,\tau)=\Phi(t,\tau+s)\circ\Phi(s,\tau)$.

设 $\mathcal{D}$ 是由 $\tau\in\mathbb{R}$ 参数化的 $L^p(\Omega,X)$ 上的一些非空有界子集族的集合, 即

$$\mathcal{D}=\Big\{D=\{D(\tau)\subseteq L^p(\Omega,X):D(\tau)\neq\emptyset \text{ bounded}, \tau\in\mathbb{R}\}:\lim_{\tau\to-\infty}\mathrm{e}^{\gamma\tau}\|D(\tau)\|^2_{L^p(\Omega,X)}=0\Big\}.$$

定义 2.2　$B=\{B(\tau):\tau\in\mathbb{R}\}\in\mathcal{D}$ 被称为 Φ 的 $L^p(\Omega,X)$ 上的 $\mathcal{D}$ 拉回吸收集, 如果对所有的 $\tau\in\mathbb{R}$ 和 $D\in\mathcal{D}$, 存在 $T=T(\tau,D)>0$, 使得对所有的 $t\geqslant T$,

$$\Phi(t,\tau-t)(D(\tau-t))\subseteq B(\tau)$$

成立.

此外, 如果对每一个 $\tau\in\mathbb{R}$, $B(\tau)$ 是 $L^p(\Omega,X)$ 上的一个弱紧非空子集, 那么 $B=\{B(\tau):\tau\in\mathbb{R}\}$ 被称为 Φ 的弱紧 $\mathcal{D}$ 拉回吸收集.

定义 2.3　$K=\{K(\tau):\tau\in\mathbb{R}\}\in\mathcal{D}$ 被称为 Φ 的 $L^p(\Omega,X)$ 上的 $\mathcal{D}$ 拉回弱吸引集, 如果对所有的 $\tau\in\mathbb{R}$, $D\in\mathcal{D}$, 以及每一个 $B(\tau)$ 在 $L^p(\Omega,X)$ 上的弱邻域 $\mathcal{N}^w(B(\tau))$, 存在 $T=T(\tau,D,\mathcal{N}^w(B(\tau)))>0$, 使得对所有的 $t\geqslant T$,

$$\Phi(t,\tau-t)(D(\tau-t))\subseteq\mathcal{N}^w(B(\tau)).$$

此外, 如果对每一个 $\tau\in\mathbb{R}$, $B(\tau)$ 是 $L^p(\Omega,X)$ 的一个弱紧子集, 那么 $B=\{B(\tau):\tau\in\mathbb{R}\}$ 被称为 Φ 的 $\mathcal{D}$ 拉回弱紧的弱吸引集.

定义 2.4　$\mathcal{A}=\{\mathcal{A}(\tau):\tau\in\mathbb{R}\}\in\mathcal{D}$ 被称为 Φ 的 $L^p(\Omega,X)$ 上的弱 $\mathcal{D}$ 拉回平均随机吸引子, 如果满足下列三个条件:

(1) 对每一个 $\tau\in\mathbb{R}$, $\mathcal{A}(\tau)$ 是 $L^p(\Omega,X)$ 的一个弱紧子集;

(2) $\mathcal{A}$ 是 Φ 的 $\mathcal{D}$ 拉回弱吸引集;

(3) $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{D}$ 的满足条件 (1) 和 (2) 的极小元, 即, 如果 $B=\{B(\tau):\tau\in\mathbb{R}\}\in\mathcal{D}$ 是 Φ 的 $\mathcal{D}$ 拉回弱紧的弱吸引集, 则对所有的 $\tau\in\mathbb{R}$, $\mathcal{A}(\tau)\subseteq B(\tau)$ 成立.

下面给出 Φ 在 $L^p(\Omega,X)$ 上的弱 $\mathcal{D}$ 拉回平均随机吸引子的存在性, 唯一性和周期性定理, 这个结果证明见文 [21].

定理 2.1　设 X 是一个自反的巴拿赫空间, $p\in(1,+\infty)$. 令 $\mathcal{D}$ 是 $L^p(\Omega,X)$ 的一些非空有界子集族的一个内闭集合, Φ 是 $L^p(\Omega,X)$ 上的平均随机动力系统. 如果 Φ 有一个弱紧 $\mathcal{D}$ 拉回吸收集 $B\in\mathcal{D}$, 那么 Φ 存在唯一的弱 $\mathcal{D}$ 拉回平均随机吸引子 $\mathcal{A}\in\mathcal{D}$, 形式如下: 对每一个 $\tau\in\mathbb{R}$,

$$\mathcal{A}(\tau)=\Omega^w(B,\tau)=\bigcap_{r\geqslant0}\overline{\lim_{t\geqslant r}}\,\Phi(t,\tau-t)(B(\tau-t)),$$

其中闭包是对于 $L^p(\Omega,X)$ 的弱拓扑而言. 此外, 如果存在一个正数 T, 使得 Φ 和 B 都是 T 周期的, 那么 $\mathcal{A}$ 也是 T 周期的.

§3 带有随机初值的问题 (1.1) 的解生成的平均随机动力系统

在本节中, 我们将证明问题 (1.1) 的解可以生成一个平均随机动力系统. 为此, 我们需要证明 (1.1) 的解的存在性和唯一性. 由文 [4] 可知, 带有确定初值 u_τ 的问题 (1.1) 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中是适定的. 为了方便, 我们给出下面的结果.

命题 3.1 设 $g\in L^2_{\rm loc}(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}))$, 则对任意的 $\tau\in\mathbb{R}$ 以及每一个确定的初值 $u_\tau\in L^2(\mathbb{R})$, 问题 (1.1) 有一个唯一的解

$$u\in C([\tau,+\infty);L^2(\mathbb{R}))\cap L^2_{\rm loc}([\tau,+\infty);H^1(\mathbb{R}))\cap L^4_{\rm loc}([\tau,+\infty);L^4(\mathbb{R})).$$

接下来, 我们给出带有随机初值 u_τ 的问题 (1.1) 的解的定义.

定义 3.1 令 $\tau\in\mathbb{R}$, $u_\tau\in L^2(\Omega,L^2(\mathbb{R}))$. 一个连续映射 $u(\cdot,\tau,u_\tau)$: $[\tau,+\infty)\to L^2(\Omega,L^2(\mathbb{R}))$ 被称为问题 (1.1) 的解, 如果

$$\begin{aligned}&u(\cdot,\tau,u_\tau)\in C([\tau,+\infty);L^2(\Omega,L^2(\mathbb{R})))\cap L^2_{loc}((\tau,+\infty);L^2(\Omega,H^1(\mathbb{R})))\\&\cap L^p_{loc}((\tau,+\infty);L^4(\Omega,L^4(\mathbb{R}))),\end{aligned}$$

并且对每一个 $t>\tau$ 以及 $\eta\in H^1(\mathbb{R})\cap L^4(\mathbb{R})$, u 几乎必然满足

$$(u(t),\eta)+(\lambda+{\rm i}\alpha)\int_\tau^t(\nabla u,\nabla\xi){\rm d}s+\gamma\int_\tau^t(u,\eta){\rm d}s=(u_\tau,\eta)+\int_\tau^t(f(u),\eta){\rm d}s+\int_\tau^t(g(x,s),\eta){\rm d}s.$$

接下来, 我们给出问题 (1.1) 在定义 3.1 意义下的解的存在唯一性定理.

定理 3.1 对任意的 $\tau\in\mathbb{R}$ 以及 $u_\tau\in L^2(\Omega,L^2(\mathbb{R}))$, 问题 (1.1) 有一个唯一的解 $u(\cdot,\tau,u_\tau)$. 这个解关于 $\omega\in\Omega$ 是可测的, 并且对几乎所有的 $t\geqslant\tau$, 解 u 满足能量方程:

$$\begin{aligned}&\frac{\rm d}{{\rm d}t}E(\|u(t,\tau,u_\tau)\|^2)+2\lambda E(\|\nabla u(t,\tau,u_\tau)\|^2)\\&+2kE(\|u(t,\tau,u_\tau)\|^4_{L^4(\mathbb{R})})+2\gamma E(\|u(t,\tau,u_\tau)\|^2)\\=&\,2E((g(t),u)).\end{aligned}\tag{3.1}$$

证 证明将分为三个步骤. 我们首先构造一列近似解并进行一致估计, 然后对这些近似解取极限, 最后证明解的唯一性.

第一步 解的逼近.

对每一个 $n\in\mathbb{N}$, 令 $O_n=\{x\in\mathbb{R},|x|<n\}$, 我们考虑下列定义在有界域 O_n 上的初边值条件方程:

$$\begin{cases}\dfrac{{\rm d}u}{{\rm d}t}+(\lambda+{\rm i}\alpha)Au+\gamma u=f(u)+g(t,x),\quad t>\tau,\ x\in O_n,\\ u(t,x)=0,\quad t>\tau,\ |x|=n,\\ u(\tau,x)=u_\tau(x),\quad x\in O_n.\end{cases}\tag{3.2}$$

通过标准的 Galerkin 逼近方法, 我们可以看到, 对于每一个固定的 $\omega \in \Omega$ 和 $\tau \in \mathbb{R}$, (3.2) 的有限维投影问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t} + (\lambda + \mathrm{i}\alpha)P_nAu_n + \gamma u_n = P_nf(u_n) + P_ng(t,x), \quad t > \tau,\ x \in O_n, \\ u_n(t,x) = 0, \quad t > \tau,\ x \in \partial O_n, \\ u_n(\tau,x) = P_nu_\tau(x), \quad x \in O_n \end{cases} \tag{3.3}$$

的解 $u_n(\cdot,\tau,u_\tau(\omega))$ 满足

$$\|u_n(t,\tau,u_\tau(\omega))\|^2 \leqslant \|u_\tau(\omega)\|^2 + \frac{1}{\gamma}\int_\tau^{\tau+T}\|g(s,x)\|^2\mathrm{d}s, \quad \forall\, t \in [\tau,\tau+T], \tag{3.4}$$

$$2\lambda\int_\tau^t \|\nabla u_n(s,\tau,u_\tau(\omega))\|^2\mathrm{d}s \leqslant \mathrm{e}^{\gamma T}\Big(\|u_\tau(\omega)\|^2 + \frac{1}{\gamma}\int_\tau^{\tau+T}\|g(s,x)\|^2\mathrm{d}s\Big) \tag{3.5}$$

和

$$2k\int_\tau^t \|u_n(s,\tau,u_\tau(\omega))\|^4_{L^4(O_n)}\mathrm{d}s \leqslant \mathrm{e}^{\gamma T}\Big(\|u_\tau(\omega)\|^2 + \frac{1}{\gamma}\int_\tau^{\tau+T}\|g(s,x)\|^2\mathrm{d}s\Big). \tag{3.6}$$

由 (3.4)–(3.6) 可得, 对每一个固定的 $\omega \in \Omega$, $\tau \in \mathbb{R}$ 和 $T > 0$,

$$\begin{aligned} &\{u_n(\cdot,\tau,u_\tau(\omega))\}_{n=1}^{+\infty} \text{ 在 } L^\infty([\tau,\tau+T];L^2(O_n)) \cap L^2([\tau,\tau+T];H_0^1(O_n)) \\ &\cap L^4([\tau,\tau+T];L^4(O_n)) \text{ 中有界.} \end{aligned} \tag{3.7}$$

再结合 (3.6), 可得

$$\{P_nf(u_n(s,\tau,u_\tau(\omega)))\}_{n=1}^{+\infty} \text{ 在 } L^{\frac{4}{3}}([\tau,\tau+T];L^{\frac{4}{3}}(O_n)) \text{ 中有界.} \tag{3.8}$$

由 (3.3) 和 (3.5), 我们发现

$$\Big\{\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}\Big\}_{n=1}^{+\infty} \text{ 在 } L^{\frac{4}{3}}([\tau,\tau+T];L^{\frac{4}{3}}(O_n)) + L^2([\tau,\tau+T];H^{-1}(O_n)) \text{ 中有界.} \tag{3.9}$$

由文 [29, 定理 5.1], 可得

$$\{u_n(\cdot,\tau,u_\tau(\omega))\}_{n=1}^{+\infty} \text{ 在 } L^2([\tau,\tau+T];L^2(O_n)) \text{ 中是紧的.} \tag{3.10}$$

第二步 解的存在性.

在 $\mathbb{R}\backslash O_n$ 上设 $u_n = 0$, 可将 u_n 延拓到全空间 $\mathbb{R}$, 仍然记作 u_n. 固定 $t_0 \in (\tau,\tau+T]$, 由上述有界性结论可得, 存在 $u \in L^\infty([\tau,\tau+T];L^2(\mathbb{R})) \cap L^2([\tau,\tau+T];H^1(\mathbb{R})) \cap L^4([\tau,\tau+T];L^4(\mathbb{R}))$, $v \in L^2(\mathbb{R})$ 以及一个子列 $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$, 使得

$$u_{n_k}(\cdot,\tau,u_\tau(\omega)) \text{ 在 } L^\infty([\tau,\tau+T];L^2(\mathbb{R})) \text{ 中弱 } * \text{ 收敛于 } u(\cdot,\tau,u_\tau(\omega)), \tag{3.11}$$

$$u_{n_k}(\cdot,\tau,u_\tau(\omega)) \text{ 在 } L^2([\tau,\tau+T];H^1(\mathbb{R}) \text{ 中弱收敛于 } u(\cdot,\tau,u_\tau(\omega)), \tag{3.12}$$

$$u_{n_k}(\cdot,\tau,u_\tau(\omega)) \text{ 在 } L^4([\tau,\tau+T];L^4(\mathbb{R})) \text{ 中弱收敛于 } u(\cdot,\tau,u_\tau(\omega)), \tag{3.13}$$

因此,

$$u_{n_k}(t_0,\tau,u_\tau(\omega)) \text{ 在 } L^2(\mathbb{R}) \text{ 中弱收敛于 } v. \tag{3.14}$$

对 $\|u_n(\cdot,\tau,u_\tau(\omega)) - u(\cdot,\tau,u_\tau(\omega))\|^3_{L^3([\tau,\tau+T]\times\mathbb{R})}$ 应用插值公式, 结合 $\{u_n(\cdot,\tau,u_\tau(\omega)) - u(\cdot,\tau,u_\tau(\omega))\}_{n=1}^{+\infty}$ 在 $L^4([\tau,\tau+T]\times\mathbb{R})$ 中的有界性, $\varepsilon > 0$ 的任意性, $\{u_n(\cdot,\tau,u_\tau(\omega))\}_{n=1}^{+\infty}$

在 $L^2([\tau,\tau+T];L^2(O_n))$ 中的紧性以及在 $\mathbb{R}\backslash O_n$ 上 $u_n=0$, 我们可以得到 $u_n(\cdot,\tau,u_\tau(\omega))$ 在 $L^3([\tau,\tau+T]\times\mathbb{R})$ 中强收敛于 $u(\cdot,\tau,u_\tau(\omega))$. 那么, 可以找到 $\{u_{n_k}\}_{n=1}^{+\infty}$ 的一个子列 (仍记作 $\{u_{n_k}\}_{n=1}^{+\infty}$), 使得对几乎处处的 $(t,x)\in[\tau,\tau+T]\times\mathbb{R}$, 有

$$f(u_{n_k}(t,\tau,u_\tau(\omega))(x))\to f(u(t,\tau,u_\tau(\omega))(x)). \tag{3.15}$$

由 f 的有界性, (3.15) 以及文 [29, 引理 1.3], 我们得到

$$f(u_{n_k}(\cdot,\tau,u_\tau(\omega)))\text{ 在 }L^{\frac{4}{3}}([\tau,\tau+T];L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}))\text{ 中弱收敛于 }f(u(\cdot,\tau,u_\tau(\omega))). \tag{3.16}$$

利用 (3.11)–(3.13) 和 (3.16), 对 (3.3) 两端当 $n\to+\infty$ 时取极限, 我们可以验证, 对所有的 $\eta\in H^1(\mathbb{R})\cap L^4(\mathbb{R})$, 在分布意义下成立

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u,\eta)+(\lambda+\mathrm{i}\alpha)(\nabla u,\nabla\eta)+\gamma(u,\eta)=(f(u),\eta)_{(L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}),L^4(\mathbb{R}))}+(g,\eta), \tag{3.17}$$

以及 $u(\cdot,\tau,u_\tau(\omega))\in C([\tau,\tau+T];L^2(\mathbb{R}))$,

$$u(\tau,\tau,u_\tau(\omega))=u_\tau(\omega),\quad u(t_0,\tau,u_\tau(\omega))=v, \tag{3.18}$$

则对固定的 ω, $u(\cdot,\tau,u_\tau(\omega))$ 是带有初值 $u_\tau(\omega)$ 的问题 (1.1) 的一个解.

另一方面, (3.14) 和 (3.18) 蕴含了 $u_{n_k}(t_0,\tau,u_\tau(\omega))$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中弱收敛于 $u(t_0,\tau,u_\tau(\omega))$, 结合由命题 3.1 给出的解的唯一性, 得 $u_n(t_0,\tau,u_\tau(\omega))$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中弱收敛于 $u(t_0,\tau,u_\tau(\omega))$. 因为 t_0 是任意的, 所以对任意的 $t\geqslant\tau$ 和 $\omega\in\Omega$, 有 $u_n(t,\tau,u_\tau(\omega))$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中弱收敛于 $u(t,\tau,u_\tau(\omega))$. 而且 $u_n(t,\tau,u_\tau(\omega))$ 关于 $\omega\in\Omega$ 是可测的, 所以其弱极限 $u(t,\tau,u_\tau(\omega))$ 也是可测的.

另外, 由 (3.4)–(3.6) 及 (3.11)–(3.13) 可得, 对任意的 $\tau\in\mathbb{R}$, $\omega\in\Omega$ 和 $T>0$, 有

$$\|u(t,\tau,u_\tau(\omega))\|^2\leqslant\|u_\tau(\omega)\|^2+\frac{1}{\gamma}\int_\tau^{\tau+T}\|g(s,x)\|^2\mathrm{d}s,\quad\forall\,t\in[\tau,\tau+T], \tag{3.19}$$

$$2\lambda\int_\tau^t\|\nabla u(s,\tau,u_\tau(\omega))\|^2\mathrm{d}s\leqslant\mathrm{e}^{\gamma T}\Big(\|u_\tau(\omega)\|^2+\frac{1}{\gamma}\int_\tau^{\tau+T}\|g(s,x)\|^2\mathrm{d}s\Big) \tag{3.20}$$

和

$$2k\int_\tau^t\|u(s,\tau,u_\tau(\omega))\|_{L^4(\mathbb{R})}^4\mathrm{d}s\leqslant\mathrm{e}^{\gamma T}\Big(\|u_\tau(\omega)\|^2+\frac{1}{\gamma}\int_\tau^{\tau+T}\|g(s,x)\|^2\mathrm{d}s\Big). \tag{3.21}$$

因为 $u_\tau\in L^2(\Omega,L^2(\mathbb{R}))$, 则由 (3.19)–(3.21), 可得

$$\begin{aligned}u\in{}&L^\infty_{\mathrm{loc}}([\tau,+\infty);L^2(\Omega,L^2(\mathbb{R})))\cap L^2_{\mathrm{loc}}([\tau,+\infty);L^2(\Omega,H^1(\mathbb{R})))\\&\cap L^4_{\mathrm{loc}}([\tau,+\infty);L^4(\Omega,L^4(\mathbb{R}))).\end{aligned} \tag{3.22}$$

由于对每一个固定的 ω, $u(\cdot,\tau,u_\tau(\omega))\in C([\tau,+\infty);L^2(\mathbb{R}))$, 所以由勒贝格控制收敛定理可得

$$u\in C([\tau,+\infty);L^2(\Omega,L^2(\mathbb{R}))). \tag{3.23}$$

由 (3.17)–(3.18) 和 (3.22)–(3.23) 可知 u 是问题 (1.1) 在定义 3.1 意义下的一个解.

第三步 解的唯一性.

设 u_1, u_2 是 (1.1) 带有相同初值条件的两个解, 令 $\widetilde{u}=u_1-u_2$, 则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\widetilde{u}\|^2+2\lambda\|\nabla\widetilde{u}\|^2+2\gamma\|\widetilde{u}\|^2=-2\mathrm{Re}(k+\mathrm{i}\beta)\int_{\mathbb{R}}(|u_1|^2u_1-|u_2|^2u_2)\overline{\widetilde{u}}\mathrm{d}x. \tag{3.24}$$

由 Young 不等式, Hölder 不等式和 Gagliardo-Nirenberg 不等式 [8,引理 2.10] 可得

$$\begin{aligned}
&-2\mathrm{Re}(k+\mathrm{i}\beta)\int_{\mathbb{R}}(|u_1|^2u_1-|u_2|^2u_2)\overline{\widetilde{u}}\mathrm{d}x\\
&\leqslant 3\sqrt{k^2+\beta^2}\int_{\mathbb{R}}(|u_1|^2+|u_2|^2)|\widetilde{u}|^2\mathrm{d}x\\
&\leqslant 3\sqrt{k^2+\beta^2}\Big(\int_{\mathbb{R}}(|u_1|^2+|u_2|^2)^2\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{\mathbb{R}}|\widetilde{u}|^4\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant 3\sqrt{2}\sqrt{k^2+\beta^2}[\|u_1\|^2_{L^4(\mathbb{R})}+\|u_2\|^2_{L^4(\mathbb{R})}]\|\widetilde{u}\|^2_{L^4(\mathbb{R})}\\
&\leqslant 3\sqrt{2}\sqrt{k^2+\beta^2}c[\|u_1\|^2_{L^4(\mathbb{R})}+\|u_2\|^2_{L^4(\mathbb{R})}]\|\nabla\widetilde{u}\|^{\frac{1}{2}}\|\widetilde{u}\|^{\frac{3}{2}}\\
&\leqslant 3\sqrt{2}\sqrt{k^2+\beta^2}c\Big[\varepsilon\|\nabla\widetilde{u}\|^2+\frac{3}{4}(4\varepsilon)^{-\frac{1}{3}}[\|u_1\|^2_{L^4(\mathbb{R})}+\|u_2\|^2_{L^4(\mathbb{R})}]^{\frac{4}{3}}\|\widetilde{u}\|^2\Big]\\
&\leqslant 3\sqrt{2}\sqrt{k^2+\beta^2}c\Big[\varepsilon\|\nabla\widetilde{u}\|^2+\frac{3}{4}(4\varepsilon)^{-\frac{1}{3}}2^{\frac{1}{3}}[\|u_1\|^{\frac{8}{3}}_{L^4(\mathbb{R})}+\|u_2\|^{\frac{8}{3}}_{L^4(\mathbb{R})}]\|\widetilde{u}\|^2\Big].
\end{aligned} \tag{3.25}$$

令 $\varepsilon=\frac{\sqrt{2}\lambda}{3\sqrt{k^2+\beta^2}c}$, 则由 (3.24)–(3.25) 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\widetilde{u}\|^2\leqslant\Big[-2\gamma+\frac{3}{4}\Big(\frac{4\sqrt{2}\lambda}{3\sqrt{k^2+\beta^2}c}\Big)^{-\frac{1}{3}}2^{\frac{1}{3}}(\|u_1\|^{\frac{8}{3}}_{L^4(\mathbb{R})}+\|u_2\|^{\frac{8}{3}}_{L^4(\mathbb{R})})\Big]\|\widetilde{u}\|^2.$$

为了书写方便, 记 $a=\frac{3}{4}\big(\frac{4\sqrt{2}\lambda}{3\sqrt{k^2+\beta^2}c}\big)^{-\frac{1}{3}}2^{\frac{1}{3}}$, 则由 Hölder 不等式以及 Gronwall 不等式得

$$\begin{aligned}
\|u_1(t,\tau,u_\tau)-u_2(t,\tau,u_\tau)\|^2\leqslant{}&\mathrm{e}^{-2\gamma(t-\tau)+a\big[\big(\int_\tau^t\|u_1\|^4_{L^4(\mathbb{R})}\mathrm{d}s\big)^{\frac{2}{3}}+\big(\int_\tau^t\|u_2\|^4_{L^4(\mathbb{R})}\mathrm{d}s\big)^{\frac{2}{3}}\big](t-\tau)^{\frac{1}{3}}}\\
&\cdot\|u_1(\tau,\tau,u_\tau)-u_2(\tau,\tau,u_\tau)\|^2.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

注意到,

$$E(\|u_1(\tau,\tau,\cdot)-u_2(\tau,\tau,\cdot)\|^2)=0,$$

所以 $\|u_1(\tau,\tau,\cdot)-u_2(\tau,\tau,\cdot)\|^2=0$ 几乎必然成立, 结合 (3.26) 可得 $\|u_1(t,\tau,\cdot)-u_2(t,\tau,\cdot)\|^2=0$ 几乎必然成立, 则有

$$E(\|u_1(t,\tau,\cdot)-u_2(t,\tau,\cdot)\|^2)=0.$$

因此, 我们证明了解的唯一性, 从而定理 3.1 得证.

定义一个映射 $\Phi:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\times L^2(\Omega,L^2(\mathbb{R}))\to L^2(\Omega,L^2(\mathbb{R}))$, 它由

$$\Phi(t,\tau,u_\tau)=u(t+\tau,\tau,u_\tau)$$

给出, 其中 $u_\tau\in L^2(\Omega,L^2(\mathbb{R}))$, u 是带有随机初值 u_τ 的 (1.1) 的解. 我们可以得到

$$\Phi(0,\tau)=u_\tau$$

以及

$$\Phi(t+s,\tau)=\Phi(t,\tau+s)\circ\Phi(s,\tau),$$

从而 Φ 是一个平均随机动力系统.

此外, 我们假设对任意的 $\tau\in\mathbb{R}$, 有

$$\mathrm{e}^{-\gamma\tau}\int_{-\infty}^{\tau}\mathrm{e}^{\gamma s}\|g(s)\|^2\mathrm{d}s<+\infty. \tag{3.27}$$

§4 带有随机初值的问题 (1.1) 的弱平均随机吸引子

本节致力于研究 (1.1) 的弱 $\mathcal{D}$ 拉回平均随机吸引子的存在性和唯一性. 下面, 首先给出解的一致估计, 这对于构造 Φ 的 $\mathcal{D}$ 拉回吸收集是非常有用的.

引理 4.1 假设 (3.27) 成立, 则对每一个 $\tau\in\mathbb{R}$ 和 $D=\{D(t)\}_{t\in\mathbb{R}}\in\mathcal{D}$, 存在 $T=T(\tau,D)>0$ 使得对所有的 $t\geqslant T$, 问题 (1.1) 的解满足

$$E(\|u(\tau,\tau-t,u_\tau)\|^2)\leqslant M+M\mathrm{e}^{-\gamma\tau}\int_{-\infty}^{\tau}\mathrm{e}^{\gamma s}\|g(s)\|^2\mathrm{d}s,$$

其中 $u_\tau\in D(\tau-t)$, M 是一个不依赖于 τ 和 D 的正常数.

证 由 Young 不等式可得

$$2E((g(t),u))\leqslant\gamma E(\|u(t,\tau-t,u_\tau)\|^2)+\frac{1}{\gamma}\|g(t)\|^2. \tag{4.1}$$

由 (3.1) 和 (4.1), 可以得出

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(\|u(t,\tau-t,u_\tau)\|^2)+2\lambda E(\|\nabla u(t,\tau-t,u_\tau)\|^2)\\&+2kE(\|u(t,\tau-t,u_\tau)\|^4_{L^4(\mathbb{R})})+\gamma E(\|u(t,\tau-t,u_\tau)\|^2)\\\leqslant&\frac{1}{\gamma}\|g(t)\|^2.\end{aligned} \tag{4.2}$$

用 $\mathrm{e}^{\gamma t}$ 乘 (4.2), 然后在 $(\tau-t,\tau)$ 上积分, 其中 $t\geqslant 0$, 则

$$\begin{aligned}&E(\|u(\tau,\tau-t,u_\tau)\|^2)+2\lambda\mathrm{e}^{-\gamma\tau}\int_{\tau-t}^{\tau}\mathrm{e}^{\gamma s}E(\|\nabla u(s,\tau-t,u_\tau)\|^2)\mathrm{d}s\\&+2k\mathrm{e}^{-\gamma\tau}\int_{\tau-t}^{\tau}\mathrm{e}^{\gamma s}E(\|u(s,\tau-t,u_\tau)\|^4_{L^4(\mathbb{R})})\mathrm{d}s\\\leqslant&\mathrm{e}^{-\gamma t}E(\|u_\tau\|^2)+\frac{1}{\gamma}\mathrm{e}^{-\gamma\tau}\int_{\tau-t}^{\tau}\mathrm{e}^{\gamma s}\|g(s)\|^2\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{4.3}$$

因为 $u_\tau\in D(\tau-t)$ 和 $D\in\mathcal{D}$, 所以当 $t\to+\infty$ 时, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\gamma t}E(\|u_\tau\|^2)&=\mathrm{e}^{-\gamma\tau}\mathrm{e}^{\gamma(\tau-t)}E(\|u_\tau\|^2)\\&\leqslant\mathrm{e}^{-\gamma\tau}\mathrm{e}^{\gamma(\tau-t)}\|D(\tau-t)\|^2_{L^2(\Omega,L^2(\mathbb{R}))}\to 0,\end{aligned}$$

这意味着存在 $T_1=T_1(\tau,D)>0$, 使得对所有的 $t\geqslant T_1$,

$$\mathrm{e}^{-\gamma t}E(\|u_\tau\|^2)\leqslant 1. \tag{4.4}$$

由 (4.3)–(4.4) 以及 (3.27) 可得, 对所有的 $t\geqslant T_1$,

$$E(\|u(\tau,\tau-t,u_\tau)\|^2)+2\lambda\mathrm{e}^{-\gamma\tau}\int_{\tau-t}^{\tau}\mathrm{e}^{\gamma s}E(\|\nabla u(s,\tau-t,u_\tau)\|^2)\mathrm{d}s$$

$$
\begin{aligned}
&+2k\mathrm{e}^{-\gamma\tau}\int_{\tau-t}^{\tau}\mathrm{e}^{\gamma s}E(\|u(t,\tau-t,u_\tau)\|_{L^4(\mathbb{R})}^4)\mathrm{d}s\\
&\leqslant 1+\frac{1}{\gamma}\mathrm{e}^{-\gamma\tau}\int_{-\infty}^{\tau}\mathrm{e}^{\gamma s}\|g(s)\|^2\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

接下来, 我们给出 (1.1) 的弱紧 $\mathcal{D}$ 拉回吸收集的存在性.

引理 4.2　假设 (3.27) 成立, 则平均随机动力系统 Φ 有一个弱紧 $\mathcal{D}$ 拉回吸收集 $B=\{B(\tau):\tau\in\mathbb{R}\}\in\mathcal{D}$, 即对每一个 $\tau\in\mathbb{R}$,

$$
B(\tau)=\{u\in L^2(\Omega,L^2(\mathbb{R})):E(\|u(\tau,\tau-t,u_\tau)\|^2)\leqslant R(\tau)\},
$$

其中 $R(\tau)$ 满足

$$
R(\tau)=M+M\mathrm{e}^{-\gamma\tau}\int_{-\infty}^{\tau}\mathrm{e}^{\gamma s}\|g(s)\|^2\mathrm{d}s.
$$

证　对每个 $\tau\in\mathbb{R}$, $B(\tau)$ 是 $L^2(\Omega,L^2(\mathbb{R}))$ 的一个有界闭凸子集, 因此它在 $L^2(\Omega,L^2(\mathbb{R}))$ 中是弱紧的. 另外, 由引理 4.1, 我们发现对任意的 $\tau\in\mathbb{R}$ 和 $D=\{D(t)\}_{t\in\mathbb{R}}\in\mathcal{D}$, 都存在 $T=T(\tau,D)>0$, 使得对所有的 $t\geqslant T$,

$$
\Phi(t,\tau-t,D(\tau-t))\subseteq B(\tau).
$$

另一方面, 可以很容易证明 $B\in\mathcal{D}$. 因此, B 是 Φ 的一个弱紧 $\mathcal{D}$ 拉回吸收集.

下面, 给出了 Φ 的弱 $\mathcal{D}$ 拉回平均随机吸引子的存在唯一性.

定理 4.1　假设 (3.27) 成立, 则平均随机动力系统 Φ 在 $L^2(\Omega,L^2(\mathbb{R}))$ 上存在唯一的弱 $\mathcal{D}$ 拉回平均随机吸引子 $\mathcal{A}=\{\mathcal{A}(\tau):\tau\in\mathbb{R}\}\in\mathcal{D}$.

证　注意到引理 4.2 意味着 Φ 有一个弱紧 $\mathcal{D}$ 拉回吸收集 $B=\{B(\tau):\tau\in\mathbb{R}\}$, 则由文 [21, 定理 2.7] 可以立即得出 Φ 的弱 $\mathcal{D}$ 拉回平均随机吸引子 $\mathcal{A}\in\mathcal{D}$ 的存在唯一性.

定理 4.2　假设 (3.27) 成立, 如果存在一个正数 T, 使得 $g:\mathbb{R}\to L^2(\mathbb{R})$ 是 T 周期的, 则 $\mathcal{A}$ 也是 T 周期的.

证　因为 $g:\mathbb{R}\to L^2(\mathbb{R})$ 是 T 周期的, 对任意的 $t\geqslant 0$ 和 $\tau\in\mathbb{R}$, 我们有

$$
\Phi(t,\tau+T)=u(t+\tau+T,\tau+T)=u(t+\tau,\tau)=\Phi(t,\tau)
$$

以及

$$
\lim_{\tau\to-\infty}\mathrm{e}^{\gamma\tau}\|B(\tau)\|^2=\lim_{\tau\to-\infty}\mathrm{e}^{\gamma\tau+T}\|B(\tau+T)\|^2=0.
$$

所以平均随机动力系统 Φ 以及吸收集 B 都是 T 周期的. 因此, 由文 [21, 定理 2.7] 可以得到 $\mathcal{A}$ 的 T 周期性.

§5 问题 (1.1) 在 $L^2(\Omega, L^2_\sigma(\mathbb{R}))$ 上的弱平均随机吸引子

本节将在加权空间 $L^2(\Omega, L^2_\sigma(\mathbb{R}))$ 上证明 Φ 的弱 $\mathcal{D}$ 拉回平均随机吸引子 $\mathcal{A}\in\mathcal{D}$ 的存在唯一性, 其中 $L^2_\sigma(\mathbb{R})$ 是一个加权空间, 其定义为

$$L^2_\sigma(\mathbb{R})=\Big\{u:\mathbb{R}\to\mathbb{C}\ \text{是可测的},\ \int_{\mathbb{R}}\phi(x)|u(x)|^2\mathrm{d}x<+\infty\Big\},$$

其中 $\sigma>\frac{1}{2}$, $\phi(x)=(1+x^2)^{-\sigma}$, 并且范数为

$$\|u\|_{L^2_\sigma(\mathbb{R})}=\Big(\int_{\mathbb{R}}\phi(x)|u(x)|^2\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

为了方便, 我们将范数 $\|\cdot\|_{L^2_\sigma(\mathbb{R})}$ 记作 $\|\cdot\|_\sigma$.

注意到, 如果想要研究系统 (1.1) 在加权空间 $L^2(\Omega, L^2_\sigma(\mathbb{R}))$ 上的动力学, 必须将 Φ 从 $L^2(\Omega, L^2(\mathbb{R}))$ 延拓到 $L^2(\Omega, L^2_\sigma(\mathbb{R}))$. 为此, 下面将研究解在 $L^2(\Omega, L^2_\sigma(\mathbb{R}))$ 上的 Lipschitz 连续性. 我们首先介绍文 [24] 中的一个引理.

引理 5.1 对任何 $-1<\mu<+\infty$ 以及 $x,y\in\mathbb{C}$, 下列不等式

$$|\operatorname{Im}(\overline{x}-\overline{y})(|x|^\mu x-|y|^\mu y)|\leqslant\frac{\mu}{2\sqrt{\mu+1}}\operatorname{Re}(\overline{x}-\overline{y})(|x|^\mu x-|y|^\mu y)$$

成立.

在下文中, 我们假设

$$k\geqslant\frac{\sqrt{3}}{3}|\beta|. \tag{5.1}$$

引理 5.2 设 $g_1,g_2\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}))$, $u_{1,\tau},u_{2,\tau}\in L^2(\Omega,L^2(\mathbb{R}))$ 以及 (5.1) 成立. 令 u_1 和 u_2 分别是 (1.1) 的解, 相应地 g 被换成 g_1 和 g_2, 则对任意的 $\tau\in\mathbb{R}$ 和 $T>0$, 都存在一个正常数 $M_1=M_1(\tau,T)$, 使得对所有的 $t\in[\tau,\tau+T]$, 有

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}(\|u_1(t)-u_2(t)\|_\sigma^2)\\&\leqslant M_1\mathbb{E}(\|u_{1,\tau}-u_{2,\tau}\|_\sigma^2)+M_1\int_\tau^t\|g_1(s)-g_2(s)\|_\sigma^2\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

证 由 (1.1) 可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_1-u_2\|_\sigma^2+2\gamma\|u_1-u_2\|_\sigma^2\\&=2\operatorname{Re}(\lambda+\mathrm{i}\alpha)(\triangle(u_1-u_2),u_1-u_2)_\sigma\\&\quad-2\operatorname{Re}(k+\mathrm{i}\beta)(|u_1|^2u_1-|u_2|^2u_2,u_1-u_2)_\sigma\\&\quad+2\operatorname{Re}(g_1(t,x)-g_2(t,x),u_1-u_2)_\sigma.\end{aligned}\tag{5.2}$$

(5.2) 等式右边的第一项可估计如下:

$$\begin{aligned}&2\operatorname{Re}(\lambda+\mathrm{i}\alpha)(\triangle(u_1-u_2),u_1-u_2)_\sigma\\&=-2\lambda\|\nabla(u_1-u_2)\|_\sigma^2-2\operatorname{Re}(\lambda+\mathrm{i}\alpha)(\nabla(u_1-u_2),\nabla\phi(x)(u_1-u_2))\\&\leqslant-2\lambda\|\nabla(u_1-u_2)\|_\sigma^2+2\sigma\sqrt{\lambda^2+\alpha^2}(\nabla(u_1-u_2),\phi(x)(u_1-u_2))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant -2\lambda\|\nabla(u_1-u_2)\|_\sigma^2+\lambda\|\nabla(u_1-u_2)\|_\sigma^2+\frac{\sigma^2(\lambda^2+\alpha^2)}{\lambda}\|u_1-u_2\|_\sigma^2\\
&\leqslant -\lambda\|\nabla(u_1-u_2)\|_\sigma^2+\frac{\sigma^2(\lambda^2+\alpha^2)}{\lambda}\|u_1-u_2\|_\sigma^2.
\end{aligned}\tag{5.3}
$$

对于 (5.2) 等式右边的第二项, 由引理 5.1 和 (5.1) 可得

$$
\begin{aligned}
&-2\operatorname{Re}(k+\mathrm{i}\beta)(|u_1|^2u_1-|u_2|^2u_2,u_1-u_2)_\sigma\\
&=-2\operatorname{Re}(k+\mathrm{i}\beta)\int_{\mathbb{R}}\phi(x)(|u_1|^2u_1-|u_2|^2u_2)(\overline{u}_1-\overline{u}_2)\mathrm{d}x\\
&=-2k\int_{\mathbb{R}}\phi(x)\operatorname{Re}I\mathrm{d}x+2\beta\int_{\mathbb{R}}\phi(x)\operatorname{Im}I\mathrm{d}x\\
&\leqslant 2\Big(-k+\frac{\sqrt{3}}{3}|\beta|\Big)\int_{\mathbb{R}}\phi(x)|\operatorname{Re}I|\mathrm{d}x\\
&<0,
\end{aligned}\tag{5.4}
$$

其中 $I=(|u_1|^2u_1-|u_2|^2u_2)(\overline{u}_1-\overline{u}_2)$.

由 Young 不等式, (5.2) 等式右边的第三项可估计如下:

$$
2\operatorname{Re}(g_1(t)-g_2(t),u_1-u_2)_\sigma\leqslant\gamma\|u_1-u_2\|_\sigma^2+\frac{1}{\gamma}\|g_1(t)-g_2(t)\|_\sigma^2.\tag{5.5}
$$

由 (5.2)–(5.5) 可得

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_1-u_2\|_\sigma^2\leqslant\Big(\frac{\sigma^2(\lambda^2+\alpha^2)}{\lambda}-\gamma\Big)\|u_1-u_2\|_\sigma^2+\frac{1}{\gamma}\|g_1(t)-g_2(t)\|_\sigma^2,
$$

利用 Gronwall 不等式, 对任意的 $\tau\in\mathbb{R}$, $T>0$ 和 $t\in[\tau,\tau+T]$,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\|u_1(t)-u_2(t)\|_\sigma^2)\leqslant{}&\mathrm{e}^{\left(\frac{\sigma^2(\lambda^2+\alpha^2)}{\lambda}-\gamma\right)(t-\tau)}\mathbb{E}(\|u_{1,\tau}-u_{2,\tau}\|_\sigma^2)\\
&+\frac{1}{\gamma}\int_\tau^t\mathrm{e}^{\left(\frac{\sigma^2(\lambda^2+\alpha^2)}{\lambda}-\gamma\right)(t-s)}\|g_1(s)-g_2(s)\|_\sigma^2\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

因此, 引理 5.2 得证.

接下来, 我们将平均随机动力系统 Φ 从 $L^2(\Omega,L^2(\mathbb{R}))$ 延拓到加权空间 $L^2(\Omega,L^2_\sigma(\mathbb{R}))$, 再研究 (1.1) 在 $L^2(\Omega,L^2_\sigma(\mathbb{R}))$ 中的动力学行为.

定理 5.1　设 $g\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},L^2_\sigma(\mathbb{R}))$ 以及 (5.1) 成立, 则存在一个平均随机动力系统 $\Phi_\sigma:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\times L^2(\Omega,L^2_\sigma(\mathbb{R}))\to L^2(\Omega,L^2_\sigma(\mathbb{R}))$, 使得对任意的 $t\in\mathbb{R}^+$, $\tau\in\mathbb{R}$ 以及 $u_\tau\in L^2(\Omega,L^2(\mathbb{R}))$, $\Phi_\sigma(t,\tau,u_\tau)$ 是 (1.1) 的唯一解.

证　因为 $L^2(\Omega,L^2(\mathbb{R}))\times L^2(\Omega,L^2((\tau,\tau+T),L^2(\mathbb{R}))$ 在 $L^2(\Omega,L^2_\sigma(\mathbb{R}))\times L^2(\Omega,L^2((\tau,\tau+T),L^2_\sigma(\mathbb{R}))$ 中稠密, 则对任意的 $(u^*,g)\in L^2(\Omega,L^2_\sigma(\mathbb{R}))\times L^2(\Omega,L^2((\tau,\tau+T),L^2_\sigma(\mathbb{R}))$, 存在一列 $(u_n,g_n)\in L^2(\Omega,L^2(\mathbb{R}))\times L^2(\Omega,L^2((\tau,\tau+T),L^2(\mathbb{R}))$, 使得在 $L^2(\Omega,L^2_\sigma(\mathbb{R}))\times L^2(\Omega,L^2((\tau,\tau+T),L^2_\sigma(\mathbb{R}))$ 中成立 $(u_n,g_n)\to(u^*,g)$. 由引理 5.2 得 $\{u(\cdot,\tau,(u_n,g_n))\}_{n=1}^{+\infty}$ 是 $C([\tau,\tau+T],L^2(\Omega,L^2_\sigma(\mathbb{R})))$ 中的一个柯西列, 因此, $\lim\limits_{n\to+\infty}u(\cdot,\tau,(u_n,g_n))$ 存在, 且属于 $C([\tau,\tau+T],L^2(\Omega,L^2_\sigma(\mathbb{R})))$. 现在, 固定 $g\in L^2_{loc}(\mathbb{R},L^2_\sigma(\mathbb{R}))$, 定义一个映射 $\Phi_\sigma:\mathbb{R}^+\times$

$\mathbb{R}\times L^2(\Omega,L^2_\sigma(\mathbb{R}))\to L^2(\Omega,L^2_\sigma(\mathbb{R}))$ 为

$$\Phi_\sigma(t,\tau,u^*)=\lim_{n\to+\infty}u(t+\tau,\tau,u_n).$$

类似于第 3 节的讨论, 我们发现 Φ_σ 是 $L^2(\Omega,L^2_\sigma(\mathbb{R}))$ 上的一个平均随机动力系统. 实际上, Φ_σ 是 Φ 在加权空间 $L^2(\Omega,L^2_\sigma(\mathbb{R}))$ 上的延拓, 下文中不区分 Φ 和 Φ_σ.

为了研究 Φ 在 $L^2(\Omega,L^2_\sigma(\mathbb{R}))$ 上的拉回平均随机吸引子的存在性, 我们将用到等价范数 $\big(\int_{\mathbb{R}}\phi_\delta(x)|u(x)|^2\mathrm{d}x\big)^{\frac12}$ 满足 $\phi_\delta(x)=(1+|\delta x|^2)^{-\sigma}$, $\delta\in(0,1)$ 和 $x\in\mathbb{R}$, 且

$$\|u\|^2_\sigma\leqslant\int_{\mathbb{R}}\phi_\delta(x)|u(x)|^2\mathrm{d}x\leqslant\delta^{-2\sigma}\|u\|^2_\sigma. \tag{5.6}$$

在下文中, 我们选取

$$\delta<\frac{\sqrt{\lambda\gamma}}{\sigma\sqrt{2(\lambda^2+\alpha^2)}}, \tag{5.7}$$

这对解的一致估计是非常有用的.

此外, 假设对任意的 $\tau\in\mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{\tau}\mathrm{e}^{\gamma t}\|g(t)\|^2_\sigma\mathrm{d}t<+\infty, \tag{5.8}$$

这放松了 (3.27) 中 g 的限制条件.

引理 5.3 假设 (5.8) 成立, 则对任意的 $\tau\in\mathbb{R}$ 以及 $B=\{B(t)\}_{t\in\mathbb{R}}\in\mathcal{D}$, 存在 $T=T(\tau,B)>0$, 使得对所有的 $t\geqslant T$, (1.1) 的解 u 满足

$$E(\|u(\tau,\tau-t,u_{\tau-t})\|^2_\sigma)\leqslant M_2+M_2\mathrm{e}^{-\gamma\tau}\int_{-\infty}^{\tau}\mathrm{e}^{\gamma s}\|g(s)\|^2_\sigma\mathrm{d}s, \tag{5.9}$$

其中 $u_{\tau-t}\in B(\tau-t)$ 以及 M_2 是一个不依赖于 τ 和 B 的正常数.

证 $\phi_\delta u$ 与 u 作内积, 然后取实部, 可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}}\phi_\delta(x)|u|^2\mathrm{d}x+2\gamma\int_{\mathbb{R}}\phi_\delta(x)|u|^2\mathrm{d}x\\&=-2\lambda\int_{\mathbb{R}}\phi_\delta(x)|\nabla u|^2\mathrm{d}x-2\,\mathrm{Re}(\lambda+\mathrm{i}\alpha)\int_{\mathbb{R}}\nabla u\cdot\nabla\phi_\delta(x)\overline{u}\mathrm{d}x\\&\quad-2k\int_{\mathbb{R}}\phi_\delta(x)|u|^4\mathrm{d}x+2\,\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\phi_\delta(x)g(t,x)\overline{u}\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{5.10}$$

对于 (5.10) 等式右边的第二项, 有

$$\begin{aligned}&-2\,\mathrm{Re}(\lambda+\mathrm{i}\alpha)\int_{\mathbb{R}}\nabla u\cdot\nabla\phi_\delta(x)\overline{u}\mathrm{d}x\\&\leqslant2\sigma\delta\sqrt{\lambda^2+\alpha^2}\int_{\mathbb{R}}|\nabla u\cdot\phi_\delta(x)\overline{u}|\mathrm{d}x\\&\leqslant\lambda\int_{\mathbb{R}}\phi_\delta(x)|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{\sigma^2\delta^2(\lambda^2+\alpha^2)}{\lambda}\int_{\mathbb{R}}\phi_\delta(x)|u|^2\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{5.11}$$

由 Young 不等式, (5.10) 等式的最后一项可估计如下:

$$2\,\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\phi_\delta(x)g(t,x)\overline{u}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \frac{\gamma}{2}\int_{\mathbb{R}}\phi_\delta(x)|u|^2\mathrm{d}x+\frac{2}{\gamma}\int_{\mathbb{R}}\phi_\delta(x)|g(t,x)|^2\mathrm{d}x. \tag{5.12}$$

由 (5.10)–(5.12) 以及 (5.7) 可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}}\phi_\delta(x)|u|^2\mathrm{d}x+\frac{3\gamma}{2}\int_{\mathbb{R}}\phi_\delta(x)|u|^2\mathrm{d}x\\&\leqslant \frac{\sigma^2\delta^2(\lambda^2+\alpha^2)}{\lambda}\int_{\mathbb{R}}\phi_\delta(x)|u|^2\mathrm{d}x+\frac{2}{\gamma}\int_{\mathbb{R}}\phi_\delta(x)|g(t,x)|^2\mathrm{d}x\\&\leqslant \gamma\int_{\mathbb{R}}\phi_\delta(x)|u|^2\mathrm{d}x+\frac{2}{\gamma}\int_{\mathbb{R}}\phi_\delta(x)|g(t,x)|^2\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{5.13}$$

对 (5.13) 在 $(\tau-t,\tau)$ 上积分, 得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big(\int_{\mathbb{R}}\phi_\delta(x)|u(\tau,\tau-t,u_{\tau-t})|^2\mathrm{d}x\Big)\\&\leqslant \mathrm{e}^{-\gamma t}\mathbb{E}\Big(\int_{\mathbb{R}}\phi_\delta(x)|u_{\tau-t}|^2\mathrm{d}x\Big)+\frac{2}{\gamma}\mathrm{e}^{-\gamma\tau}\int_{\tau-t}^{\tau}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{\gamma s}\phi_\delta(x)|g(s,x)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

利用 (5.6) 可得

$$\mathbb{E}(\|u(\tau,\tau-t,u_{\tau-t})\|_\sigma^2)\leqslant \mathrm{e}^{-\gamma t}\delta^{-2\sigma}\mathbb{E}(\|u_{\tau-t}\|_\sigma^2)+\frac{2}{\gamma\delta^{2\sigma}}\mathrm{e}^{-\gamma\tau}\int_{-\infty}^{\tau}\mathrm{e}^{\gamma s}\|g(s)\|_\sigma^2\mathrm{d}s,$$

结合 (5.8) 和 $u_{\tau-t}\in B(\tau-t)\in\mathcal{D}$ 可知, 存在 $T=T(\tau,B)>0$ 使得对所有的 $t\geqslant T$,

$$\mathbb{E}(\|\Phi(\tau,\tau-t,u_{\tau-t})\|^2)\leqslant 1+\frac{2}{\gamma\delta^{2\sigma}}\mathrm{e}^{-\gamma\tau}\int_{-\infty}^{\tau}\mathrm{e}^{\gamma s}\|g(s)\|_\sigma^2\mathrm{d}s.$$

因此引理 5.3 得证.

由引理 5.3 和定理 4.1–4.2 可得如下的 Φ 在 $L^2(\Omega,L_\sigma^2(\mathbb{R}))$ 上的弱平均随机吸引子的存在性定理.

定理 5.2　假设 (5.8) 成立, 则问题 (1.1) 在 $L^2(\Omega,L_\sigma^2(\mathbb{R}))$ 上有一个唯一的弱 $\mathcal{D}$ 拉回平均随机吸引子

$$\mathcal{A}=\{\mathcal{A}(\tau):\tau\in\mathbb{R}\}\in\mathcal{D}.$$

进一步, 如果存在一个正数 T, 使得 $g:\mathbb{R}\to L^2(\mathbb{R})$ 是 T 周期的, 则 $\mathcal{A}$ 也是 T 周期的.

参　考　文　献

[1] Doering C R, Gibbon J D, Levermore C D. Weak and strong solutions of the complex Ginzburg-Landau equation [J]. *Phys D*, 1994, 71(3):285–318.

[2] Duan J, Holmes P, Titi E S. Global existence theory for a generalized Ginzburg-Landau equation [J]. *Nonlinearity*, 1992, 5(6):1303–1314.

[3] Gao H, Bu C. A Dirichlet boundary value problem for a generalized Ginzburg-Landau equation [J]. *Appl Math Lett*, 2003, 16(2):179–184.

[4] Ginibre J, Velo G. The Cauchy problem in local spaces for the complex Ginzburg-Landau equation, I: Compactness methods [J]. *Phys D*, 1996, 95(3–4):191–228.

[5] Guo B, Wang B. Finite dimensional behaviour for the derivative Ginzburg-Landau equation in two spatial dimensions [J]. *Phys D*, 1995, 89(1–2):83–99.

[6] Pu X, Guo B. Well-Posedness and dynamics for the fractional Ginzburg-Landau equation [J]. *Appl Anal*, 2011, 92:318–334.

[7] Guo Y, Li D. Random attractor of stochastic complex Ginzburg-Landau equation with multiplicative noise on unbounded domain [J]. *Stoch Anal Appl*, 2017, 35(3):409–422.

[8] Lu H, Bates P W, Lü S, et al. Dynamics of the 3D fractional Ginzburg-Landau equation with multiplicative noise on an unbounded domain [J]. *Commun Math Sci*, 2016, 14(1):273–295.

[9] Shu J, Huang X, Zhang J. Asymptotic behavior for non-autonomous fractional stochastic Ginzburg-Landau equations on unbounded domains [J]. *J Math Phys*, 2020, 61(7):072704.

[10] Wang G, Guo B, Li Y. The asymptotic behavior of the stochastic Ginzburg-Landau equation with additive noise [J]. *Appl Math Comput*, 2008, 198(2):849–857.

[11] Zhang J, Shu J. Existence and upper semicontinuity of random attractors for non-autonomous fractional stochastic Ginzburg-Landau equations [J]. *J Math Phys*, 2019, 60:042702.

[12] Arnold L. Random dynamical systems [M]. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1998.

[13] Crauel H, Flandoli F. Attractors for random dynamical systems [J]. *Probab Theory Related Fields*, 1994, 100:365–393.

[14] Bates P W, Lu K, Wang B. Random attractors for stochastic reaction-diffusion equations on unbounded domains [J]. *J Differential Equations*, 2009, 246:845–869.

[15] Caraballo T, Han X. Applied nonautonomous and random dynamical systems: applied dynamical systems [M]. Cham: Springer-Verlag, 2016.

[16] Caraballo T, Real J, Chueshov I D. Pullback attractors for stochastic heat equations in materials with memory [J]. *Discrete Contin Dyn Syst Ser B*, 2008, 9(3–4):525–539.

[17] Li L, Chen Z. Asymptotic behavior of non-autonomous random Ginzburg-Landau equation driven by colored noise [J]. *Discrete Contin Dyn Syst Ser B*, 2021, 26(6):3303–3333.

[18] Lu H, Zhang M. Dynamics of non-autonomous fractional Ginzburg-Landau equations driven by colored noise [J]. *Discrete Contin Dyn Syst Ser B*, 2020, 25(9):3553–3576.

[19] Burq N, Tzvetkov N. Random data cauchy theory for supercritical wave equations, I: local theory [J]. *Inven Math*, 2008, 173:449–475.

[20] Gu A. Weak pullback mean random attractors for non-autonomous p-laplacian equations [J]. *Discrete Cont Dyn Syst Ser B*, 2021, 26(7):3863–3878.

[21] Wang B. Weak pullback attractors for mean random dynamical systems in Bochner spaces [J]. *J Dynam Differential Equations*, 2019, 31:2177–2204.

[22] Kloeden P E, Lorenz T. Mean-Square random dynamical systems [J]. *J Differential Equations*, 2012, 253(5):1422–1438.

[23] Kinra K, Mohan M T. Weak pullback mean random attractors for the stochastic convective brinkman-forchheimer equations and locally monotone stochastic partial differential equations [J]. *Quantum Probability and Related Topics*, 2022, 25(01):2250005.

[24] Li D, Shi L, Wang X. Long term behavior of stochastic discrete complex Ginzburg-Landau equations with time delays in weighted spaces [J]. *Discrete Contin Dyn Syst Ser B*, 2019, 24:5121–5148.

[25] Bates P W, Lu K, Wang B. Attractors of non-autonomous stochastic lattice systems in weighted spaces [J]. *Phys D*, 2014, 289:32–50.

[26] Bates P W, Lu K, Wang B. Tempered random attractors for parabolic equations in weighted spaces [J]. *J Math Phys*, 2013, 54:081505.

[27] Han X, Shen W, Zhou S. Random attractors for stochastic lattice dynamical systems in weighted spaces [J]. *J Differential Equations*, 2011, 250:1235–1266.

[28] Han X. Random attractors for second order stochastic lattice dynamical systems with multiplicative noise in weighted spaces [J]. *Stoch Dynam*, 2012, 12:1150024.

[29] Lions J L. Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non linéaires [M]. Gauthier-Villars, Paris: Dunod, 1969.

Weak Mean Dynamics for Complex Ginzburg-Landau Equations with Random Initial Data

CHEN Zhang[1] LI Lingyu[2]

[1]School of Mathematics, Shandong University, Jinan 250100, China.
E-mail: zchen@sdu.edu.cn

[2]Corresponding author. School of Mathematics, Shandong University, Jinan 250100, China. E-mail: lyli@mail.sdu.edu.cn

Abstract In this paper, complex-valued Ginzburg-Landau equations with random initial data on unbounded domains are investigated. First, based on the global well-posedness of solution processes, the mean random dynamical system associated with such equation with random initial data is established. Then, the existence and uniqueness of weak pullback mean random attractors are proved, as well as the periodicity of random attractors, which are further extended to a weighted space $L^2(\Omega, L^2_\sigma(\mathbb{R}))$.

Keywords Complex Ginzburg-Landau equation, Random initial data, Mean random dynamical system, Weak pullback mean attractor, Weighted space

2000 MR Subject Classification 35Q56, 35B40, 37H05

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 43 No. 4, 2022
by ALLERTON PRESS, INC., USA