数 学 年 刊 A 辑
2024, 45(1):1–14
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2024.0001

有亏格为 1 的 Heegaard 分解的三维流形中的环面纽结*

徐　妍[1]　雷逢春[1]　李风玲[2]　梁　良[3]

提要 将存在亏格为 1 的 Heegaard 分解 $T_1' \cup_F T_2'$ 的三维流形记为 $M = \mathcal{L}(p,q)$, 其中 p 和 q 是互素整数, q/p 为 T_2' 的纬线在 T_1' 上的斜率. 若环面 F 上的简单闭曲线 γ 在 M 中非平凡, 则称 γ 是 M 中的环面纽结. 本文对在 M 中沿环面纽结作 m/n-Dehn 手术所得流形进行了分类, 并给出了两个实心环体沿边界上平环作融合所得流形是 $\mathcal{L}(p,q)$ 中环面纽结补的特征描述.

关键词 H'- 分解, 透镜空间, 环面纽结, Seifert 流形
MR (2000) 主题分类 57N10
中图法分类 O189.21
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2024)01-0001-14

§1 引 言

设 K 为 S^3 中一个纽结, $\eta(K)$ 是 K 在 S^3 中的正则邻域, $\overline{S^3\backslash\eta(K)}$ 是 K 在 S^3 中的纽结补. Gordon 和 Luecke[1] 证明了一个纽结由其在 S^3 中的纽结补决定. 称位于 S^3 中不打结的环面上的纽结为 S^3 中的环面纽结, 每个环面纽结由一对互素整数 r 和 s 确定. 此外, 环面纽结都是素纽结 [2].

透镜空间是一类已经被完全分类了的三维流形 [3]. Bonahon[4] 证明了透镜空间的亏格为 1 的 Heegaard 曲面在合痕意义下是唯一的. Jankins 和 Neumann[5] 证明了可以用 Seifert 系数确定透镜空间的类型; 反之, 当给定一个透镜空间 $L(p,q)$, Geiges 和 Lange[6−7] 证明了可以对其 Seifert 纤维结构进行分类. Moser[8] 证明了纽结 K 在 S^3 中的补空间是带有奇异纤维的 Seifert 流形当且仅当 K 是一个环面纽结, 还证明了对 S^3 中环面纽结作 Dehn 手术可以得到透镜空间. Gabai[9] 证明了如果对 S^3 沿某个纽结作 Dehn 手术所得流形为 $S^2\times S^1$, 那么该纽结一定为平凡结. 此外, 对 S^3 沿卫星结做 Dehn 手术也能得到透镜空间 [10−12].

将存在亏格为 1 的 Heegaard 分解 $T_1' \cup_F T_2'$ 的三维流形记为 $M = \mathcal{L}(p,q)$, 其中 p 和 q 是互素整数, T_2' 的纬线在 T_1' 上的斜率为 q/p. 显然, M 只能是 S^3 (斜率为 $q/1$), $S^2\times S^1$

本文 2023 年 7 月 6 日收到, 2023 年 12 月 21 日收到修改稿.
[1]大连理工大学数学科学学院, 辽宁 大连 116024. E-mail: xuyannn@yeah.net; fclei@dlut.edu.cn
[2]通信作者. 大连理工大学数学科学学院, 辽宁 大连 116024. E-mail: fenglingli@dlut.edu.cn
[3]辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连 116029. E-mail: liang_liang@aliyun.com
*本文受到国家自然科学基金 (No.12071051) 的资助.

(斜率为 1/0) 或透镜空间 $L(p,q)$ ($|p|>1$). 若环面 F 上的简单闭曲线 γ 在 M 中非平凡, 则称 γ 是 M 中的环面纽结. 本文通过环面纽结补 M_γ 的典型的 H'- 分解 (具体定义参见第 2 节) 来研究其结构, 其中 A 是真嵌入于 M_γ 中的平环且分离 M_γ 为两个实心环体 T_1 和 T_2. 一般地, 也将上述流形记为 $\mathcal{T}(r_1,s_1;r_2,s_2)$, 其中 s_i/r_i 是平环 A 的核曲线在 T_i 上的斜率, $i=1,2$. 本文的主要结果如下: 定理 3.3 对在 M 中沿环面纽结作 m/n-Dehn 手术所得流形进行了分类; 定理 3.4 给出了流形 $\mathcal{T}(r_1,s_1;r_2,s_2)$ 是 $\mathcal{L}(p,q)$ 中环面纽结补的充要条件.

本文的结构如下: 第 2 节介绍了必要的预备知识和若干引理, 第 3 节给出了主要定理和证明.

§2 预备知识

本节将回顾三维流形的一些概念和基本事实. 本文中涉及到的三维流形都默认为是紧致可定向的, 未详细定义的概念都是标准的 (见 [3, 13]).

§2.1 三维流形的 Heegaard 分解和 H'- 分解

设 M 是一个连通的三维流形, F 是真嵌入于 M 中的紧致连通可定向曲面. 若曲面 F 把 M 切成两个压缩体 C_1 和 C_2, $\partial_+C_1=F=\partial_+C_2$, 则称 $M=C_1\cup_F C_2$ 为 M 的 Heegaard 分解, 称曲面 F 的亏格 $g(F)$ 为 Heegaard 分解的亏格. M 的 Heegaard 亏格定义为 $\min\{g: M$ 上存在亏格为 g 的 Heegaard 分解 $\}$. 众所周知, 任意紧致连通可定向的三维流形上都存在 Heegaard 分解 [14].

设 M 是一个连通三维流形, F 是真嵌入于 M 中的紧致连通曲面. 若 F 将 M 切成两个柄体 H_1 和 H_2, $H_1\cup_F H_2=M$, $H_1\cap H_2=F$, 则称 $H_1\cup_F H_2$ 是 M 的 H'- 分解.

显然, 当 M 是闭三维流形时, Heegaard 分解和 H'- 分解是一致的; 当 $\partial M\neq\emptyset$ 时, Heegaard 分解和 H'- 分解是 M 的不同的分解.

文 [15] 证明了 H'- 分解是紧致连通可定向三维流形的普遍结构.

定理 2.1[15] 任意紧致连通可定向的三维流形上都存在 H'- 分解.

设 H 是一个柄体, J 是 ∂H 上一条简单闭曲线. 若 J 与 H 中一个本质圆片的边界横截相交于一点, 则称 J 是柄体 H 的经线. 由 Jaco 加柄定理 [16] 可以得到下面的命题.

命题 2.1[17] 设 $H_1\cup_A H_2$ 是三维流形 M 的 H'- 分解, 其中 A 是平环, J 是 A 的核曲线. M 是柄体当且仅当 J 是 H_1 或 H_2 的经线.

§2.2　$\mathcal{L}(p,q)$ 中的环面纽结

设 T 为实心环体, D 是 T 中一个本质圆片, 称 $m=\partial D$ 是 T 的纬线. 显然, T 的任意两条纬线都在 $F=\partial T$ 上合痕. 设 l 是 F 上与 m 横截相交于一点的简单闭曲线, 即 l 是 T 的经线, 则 $\{l,m\}$ 构成了 $H_1(F)$ 的一对标准的生成元曲线, 称为实心环体 T 的一对典范曲线. $H_1(F)$ 中的元素 $p[l]+q[m]$ 可以看作是一条定向的简单闭曲线 γ 当且仅当 p 和 q 是互素的整数, 称 q/p 是 γ 的斜率, 并通常将 γ 表示为 $\gamma_{(p,q)}$. 显然, γ 是 F 上的纬线 (或经线) 当且仅当 $\gamma=\gamma_{(0,\pm1)}$, 斜率为 ∞(或 $\gamma=\gamma_{(\pm1,q)}$, 斜率为一个整数). 当 $p<0$ 时, $\gamma_{(-p,-q)}$ 与 $\gamma_{(p,q)}$ 是相同的曲线, 只是方向相反. 在下文中, 称 $\gamma_{(p,q)}$ 是关于 T 的 (p,q)- 曲线. 当 $p\neq0$ 时, $\gamma_{(p,q)}$ 通常表示满足 $p>0$ 的简单闭曲线.

为简单起见, 下文中通常用曲面 F 上的简单闭曲线 γ 表示它在 $H_1(F)$ 中的同调类.

命题 2.2 [18, 练习9.4]　设 T 为实心环体, p 与 q, p' 与 q' 为互素的整数, 且 $p,p'\neq0$. 则有下列结论成立:

(1) 存在同胚 $h_1:T\to T$, 使得 $h_1(\gamma_{(p,q)})=\gamma_{(p,-q)}$.

(2) 对于 $m\in\mathbb{Z}$, 存在同胚 $h_2:T\to T$, 使得 $h_2(\gamma_{(p,q)})=\gamma_{(p,q+mp)}$.

(3) 存在同胚 $h_3:T\to T$, 使得 $h(\gamma_{(p,q)})=\gamma_{(p',q')}$ 当且仅当 $p=p'\neq0, q\equiv\pm q'(\mathrm{mod}\ p)$, 或 $p=p'=0$, $q,q'=\pm1$.

(4) 对于互素整数 r 和 s, $\gamma_{(p,q)}$ 与 $\gamma_{(r,s)}$ 在 ∂T 上横截相交于一点当且仅当 $\left|\begin{smallmatrix}p&q\\r&s\end{smallmatrix}\right|=\pm1$.

设 $T_1\cup_F T_2$ 为三维流形 M 的一个亏格为 1 的 Heegaard 分解, 其中 T_1 和 T_2 为实心环体, $T_1\cap T_2=F$ 为环面. 设 $h:F\to F$ 为粘合映射, 使得 T_2 的纬线同胚于 T_1 上的 (p,q)- 曲线 $\gamma_{(p,q)}$, 则 M 可以看作是沿 γ 往 T_1 上添加一个 2- 把柄后, 再沿所得 2- 球面边界分支填充一个实心球所得流形. M 由 $\gamma_{(p,q)}$ 完全决定, 记流形 M 为 $\mathcal{L}(p,q)$.

显然, $\mathcal{L}(0,1)\cong S^2\times S^1$; $\mathcal{L}(1,q)\cong S^3$; 当 $p>1$ 时, $\mathcal{L}(p,q)$ 为透镜空间 $L(p,q)$.

透镜空间已经被完全分类 [3]: $L(p,q)\cong L(p,q')$ 当且仅当 $q\equiv\pm q'\ (\mathrm{mod}\ p)$ 或 $qq'\equiv\pm1$ $(\mathrm{mod}\ p)$; $L(p,q)$ 与 $L(p,q')$ 是同伦等价的当且仅当存在 $n\in\mathbb{Z}$, 使得 $\pm qq'\equiv n^2(\mathrm{mod}\ p)$.

注意到 S^3 是唯一的 Heegaard 亏格为 0 的三维流形, 且只有 $S^2\times S^1$ 和透镜空间的 Heegaard 亏格为 1. 此外, 有下面的 Heegaard 分解唯一性定理成立.

定理 2.2[14]　$\mathcal{L}(p,q)$ 上任意两个同亏格的 Heegaard 曲面是合痕的.

注 2.1　1968 年, Waldhausen[19] 证明了 S^3 和 $S^2\times S^1$ 的 Heegaard 分解唯一性定理; 1983 年, Bonahon[4] 证明了透镜空间的 Heegaard 分解的唯一性定理.

由定理 2.2, $\mathcal{L}(p,q)$ 的亏格为 1 的 Heegaard 曲面在合痕意义下是唯一的.

定义 2.1 设 $T_1 \cup_F T_2$ 为三维流形 $\mathcal{L}(p,q)$ 的一个亏格为 1 的 Heegaard 分解, $\gamma = \gamma_{(r,s)}$ 为 F 上一条关于 T_1 的 (r,s)- 曲线. 若 γ 不是 T_1 和 T_2 的纬线, 则称 γ 是 $\mathcal{L}(p,q)$ 中关于 T_1 的 (r,s)- 环面纽结.

显然, $\mathcal{L}(p,q)$ 中的环面纽结是非平凡结.

§2.3 Seifert 流形: 概述

设 D 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的单位圆盘, D 上的点 x 用极坐标 (θ,r) 表示, 其中 r 为点 x 到原点 O 的距离, θ 为点 x 的幅角.

设 p 和 q 为一对互素的整数, $p>0$. 显然, 商空间 $D\times I/(\theta,r,0)\sim(\theta+2\pi q/p,r,1)$ 为一个实心环 ($\cong D\times S^1$), 记作 $T_{(p,q)}$. 记商映射为 $h: D\times I\to T_{(p,q)}$. 对于圆心 $O\in D$, $e=h(\{O\}\times I)$ 是 $T_{(p,q)}$ 中的一条简单闭曲线; 对于 $x=(\theta,r)\in D\setminus\{O\}$, $h((\theta,r,0)\times I)\cup h((\theta+2\pi q/p,r,0)\times I)\cup\cdots\cup h((\theta+2\pi q(p-1)/p,r,0)\times I)$ 是 $T_{(p,q)}$ 中的由 p 条简单弧依次首尾相连构成的一条简单闭曲线, 这些简单闭曲线均称为是 $T_{(p,q)}$ 的纤维. 称 $T_{(p,q)}$ 为一个标准的 (p,q)- 型纤维化实心环. 若 $p>1$, 称 e 为 $T_{(p,q)}$ 的奇异纤维, 称 $T_{(p,q)}$ 的非 e 纤维为正则纤维. 当 $p=1$ 时, $T_{(1,q)}$ 的每个纤维均为正则纤维, 称 $T_{(1,q)}$ 为正常的纤维化实心环.

容易看到, $T_{(p,q)}$ 是它的所有纤维的无交并.

设 M 是一个紧致三维流形. 若 M 可以分解成一族互不相交的简单闭曲线 (称每个这样的简单闭曲线为一个纤维) 的无交并, 使得每个纤维在 M 中有一个管状邻域保纤同胚于一个标准的纤维化实心环, 则称 M 为一个 Seifert 流形. 称这一纤维结构为 M 的 Seifert 纤维化. 设 M_1 和 M_2 均为 Seifert 流形, 若存在 M_1 到 M_2 的微分同胚将 M_1 的每个纤维都映到 M_2 的纤维, 则称 M_1 和 M_2 是同构的.

下面描述一种构造 Seifert 流形的方法. 设 B 为一个紧致连通的曲面 (未必可定向), $\mathcal{D}=\{D_1,\cdots,D_k\}$ 是 B 的内部的一个两两不交的圆片组, 记 $B'=B\backslash\mathcal{D}$. 令 $\rho: M'\to B'$ 为 B' 上的一个 S^1- 丛, 并且 M' 是可定向的. 若 B' 是可定向的, 则 $M'=B'\times S^1$; 若 B' 是不可定向的, 则 $M'=B'\widetilde{\times}S^1$ 是 B' 上一个扭的 S^1- 丛. 显然, B' 还可以通过粘合圆片 D^2 边界上一些不交弧对 a_j 和 b_j 得到, 并且这些粘合同胚可以保证得到的 S^1- 丛 M' 是可定向的: 从 $D^2\times S^1$ 出发, 当 a_j 和 b_j 是一对反向边时, 用一个保持 S^1- 因子的保向同胚 $h: a_j\times S^1\to b_j\times S^1$ 来粘合平环 $a_j\times S^1$ 和 $b_j\times S^1$; 当 a_j 和 b_j 是一对同向边时, 用一个保持 S^1- 因子的反向同胚 $h: a_j\times S^1\to b_j\times S^1$ 来粘合平环 $a_j\times S^1$ 和 $b_j\times S^1$. 选取 M' 的一个定向, 设 $s: B'\to M'$ 为截面映射 (满足 $\rho\circ s=id$ 的连续映射), 将 B' 的对应于 D_i 的边界分支记为 d_i, $\partial M'$ 的包含 $\beta_i=s(d_i)$ 的环面边界分支记为 F_i, 记 α_i 为 F_i 上的纤维, $1\leqslant i\leqslant k$. $\{\alpha_i,\beta_i\}$ 构成了 $H_1(F_i)$ 的一对标准的生成元曲线, $i=1,\cdots,k$. 令

T_i 为标准实心环, c_i 是其纬线, 对于互素整数 p_i 和 q_i, 选取一个同胚 $h_i:\partial T_i \to F_i$, 使得 $h_i(c_i)=q_i\alpha_i+p_i\beta_i \in H_1(F_i)$ $(p_i \neq 0)$, $1 \leqslant i \leqslant k$. 将这些同胚 h_i 作为粘合映射, 通过这些粘合映射把 $T_1,\cdots,T_k$ 粘到 M' 上, 就得到一个定向的三维流形 M, 并且 M' 的纤维结构可以自然地延拓至 M, 使得 M 是一个 Seifert 流形. 称 B 为 M 的底空间, 将 Seifert 流形 M 记为 $M(\pm g,b;(p_1,q_1),\cdots,(p_k,q_k))$, 其中 $(+g,b)$ (或 $(-g,b)$) 表示 B 是亏格为 g 有 b 个边界分支的可定向曲面 (或不可定向曲面).

文 [3] 中的结论指出任意紧致连通可定向的 Seifert 流形都同构于某一个 $M(\pm g,b;(p_1,q_1),\cdots,(p_k,q_k))$, 并且 Seiefrt 流形已经被完全分类.

下面给出 Seifert 流形的一些已知结论, 将在第 3 节中用到.

定理 2.3 给出了可定向 Seifert 流形的完全分类, 除定理中所列出的 Seifert 流形之外, 其他所有 Seifert 流形都有唯一的纤维结构.

定理 2.3[3]　除下面列出的几种流形外, 可定向 Seifert 流形的纤维结构在保纤同构意义下是唯一的:

(1) $M(0,1;(p,q))$, $S^1\times D^2$ 的纤维结构有多样性, 其中 p 与 q 互素, $q/p\in\mathbb{Q}$;

(2) $M(0,1;(2,1),(2,1))=M(-1,1;)$, $S^1\widetilde{\times}S^1\widetilde{\times}I$ 有两种纤维结构;

(3) $M(0,0;(p_1,q_1),(p_2,q_2))$, $S^3,S^2\times S^1$ 和透镜空间的纤维结构有多样性;

(4) $M(0,0;(2,1),(2,-1),(p,q))=M(-1,0;(q,p))$, 其中 $p,q\neq 0$;

(5) $M(0,0;(2,1),(2,1),(2,-1),(2,-1))=M(-2,0;)$, $S^1\widetilde{\times}S^1\widetilde{\times}S^1$ 有两种纤维结构.

因此, $\mathcal{L}(p,q)$ 是 Seifert 流形: 当底空间是 S^2 时, 纤维结构中至多存在两个奇异纤维; 当底空间为 $\mathbb{R}P^2$ 时, 纤维结构中至多存在一个奇异纤维.

若一个三维流形是两个扭的 I- 丛沿边界上对应的 ∂I- 丛之并, 则称该流形为一个半丛. 在定理 2.4 中, $S^1\widetilde{\times}S^1\widetilde{\times}S^1$ 是两个 Möbius 上的扭 I- 丛的并, 其对应的 ∂I- 丛是一个平环.

透镜空间是一类至多有两个奇异纤维的 Seifert 流形, 定理 2.4 说明了在给定 Seifert 纤维结构的前提下, 如何确定透镜空间的类型, 即确定 p 和 q 的值.

定理 2.4[5]　若 Seifert 流形 $M(0,0;(p_1,q_1),(p_2,q_2))$ 同胚于透镜空间 $L(p,q)$, 则 $p=\left|\begin{smallmatrix} p_1 & p_2\\ -q_1 & q_2\end{smallmatrix}\right|$, $q=\left|\begin{smallmatrix} p_1 & p_2'\\ -q_1 & q_2'\end{smallmatrix}\right|$, 其中 (p_2',q_2') 是 $\left|\begin{smallmatrix} p_2 & p_2'\\ q_2 & q_2'\end{smallmatrix}\right|=1$ 的一组解.

定理 2.5[3]　设 M 为一个可定向的可约 Seifert 流形, 则 M 同构于 $S^2\times S^1$ 或 $\mathbb{R}P^3\#\mathbb{R}P^3$.

令 M 是一个 Seifert 流形, S 是 M 中的嵌入曲面. 若 S 为 M 中若干正则纤维之并, 则称 S 是一个竖直曲面; 若 S 与 M 的所有纤维均横截相交, 则称 S 是一个水平曲面. 定理 2.6 表明不可约 Seifert 流形中的本质曲面均合痕于一个水平的或竖直的曲面.

定理 2.6[13] 设 M 为紧致连通不可约的 Seifert 流形, 则 M 中任意一个本质曲面都合痕于一个水平曲面或一个竖直曲面.

特别地, 将底空间为 2- 球面且带有三个奇异纤维的 Seifert 流形称为棱镜流形.

§3 主要结果

设 $T_1 \cup_A T_2$ 为三维流形 M 的一个 H'- 分解, 其中 T_1 和 T_2 均为实心环体, A 是 M 中真嵌入的平环, 且 A 的核曲线 δ 是关于 T_i 的 (r_i, s_i)- 曲线, $r_i \geqslant 1$, $i = 1, 2$. 将上述流形记为 $\mathcal{T}(r_1, s_1; r_2, s_2)$, $r_1, r_2 \geqslant 1$.

显然, ∂M 是环面, M 是以圆片为底空间且至多带有两个奇异纤维的 Seifert 流形.

由命题 2.1 可直接得到如下命题.

命题 3.1 $\mathcal{T}(r_1, s_1; r_2, s_2)$ 是实心环体当且仅当 $r_1 = 1$ 或 $r_2 = 1$.

命题 3.2 假设在三维流形 $M = \mathcal{T}(r_1, s_1; r_2, s_2) = T_1 \cup_A T_2$ 中, $r_1, r_2 \geqslant 2$, 则 M 不可约且边界不可约, 并且平环 A 在 M 中是本质的.

证 因 $r_1, r_2 \geqslant 2$, 由命题 3.1 可知 M 不是实心环体.

假设 M 是可约的, 则 M 中存在本质 2- 球面, 选取其中与 A 处于一般位置且相交数最少的 2- 球面, 记为 P. 因 T_1 和 T_2 都是不可约的, 故 P 与 A 一定相交非空, 且 $P \cap A$ 的每个分支都是 P 和 A 上的简单闭曲线. 令 J' 是 $P \cap A$ 在 P 上最内的分支. 因 $r_1, r_2 \geqslant 2$, 故 J' 一定在 A 上非本质. 否则, J' 在 2- 球面 P 上界定的圆片即为 A 在 M 中的压缩圆片, 从而 $r_1 = 1$ 或 $r_2 = 1$, 矛盾. 令 $J \in P \cap A$ 是在 A 上非本质且最内的分支, 即 J 界定 A 上一个圆片 Δ , 使得 $P \cap \mathrm{int}(\Delta) = \emptyset$. 沿 J 切开 P 可得到两个圆片 E_1 和 E_2, 令 $P_1 = E_1 \cup \Delta$, $P_2 = E_2 \cup \Delta$, 则 2- 球面 P_1 和 P_2 中至少有一个为 M 中的本质 2- 球面, 不妨设为 P_1. 在 Δ 附近合痕移动 P_1, 将 P_1 稍推离 A, 从而 $|P_1 \cap A| < |P \cap A|$, 与 P 的极小性假设矛盾. 因此, M 为不可约三维流形.

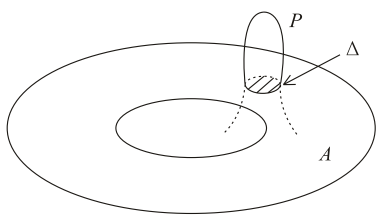

图 1 $P \cap A$

假设 M 是边界可约的, 设 D 为 ∂M 在 M 中的压缩圆片. 由 M 的不可约性, 将环面 ∂M 沿 D 做压缩所得 2- 球面一定在 M 中界定实心球, 从而 M 为实心环体, 与假设条件 $r_1, r_2 \geqslant 2$ 矛盾. 因此, M 边界不可约.

已知 $r_1, r_2 \geqslant 2$, 平环 A 的核曲线 δ 不是 T_i 的纬线, $i = 1, 2$. 所以 A 在 T_i 中不可压缩, 从而 A 在 M 中不可压缩.

假设 A 在 M 中是边界平行的, 则 M 为实心环体. 由命题 3.1, δ 是 T_1 或 T_2 的经线, 即 $r_1 = 1$ 或 $r_2 = 1$, 与假设矛盾.

命题得证.

定理 3.1 表明, 当 $r_1, r_2 \geqslant 2$ 时, $\mathcal{T}(r_1, s_1; r_2, s_2)$ 中的本质分离平环在合痕意义下是唯一的.

定理 3.1　假设在三维流形 $M = \mathcal{T}(r_1, s_1; r_2, s_2) = T_1 \cup_A T_2$ 中, $r_1, r_2 \geqslant 2$. 若 A' 是 M 中的本质分离平环, 则 A' 与 A 在 M 中是合痕的.

证　已知 $r_1, r_2 \geqslant 2$, 由命题 3.1, M 不是实心环体. 由命题 3.2, 平环 A 在 M 中是本质的. 事实上, M 是以圆片为底空间且带有两个奇异纤维的 Seifert 流形, 记 M 的 Seifert 纤维结构为 $\mathcal{M}$. 特别地, A 在纤维结构 $\mathcal{M}$ 中是竖直的平环. 根据假设, A' 是 M 中的本质分离平环, 在 M 中合痕 A' , 使得 A' 与 A 处于一般位置, 且在 M 的所有本质分离平环中, A' 与 A 的相交分支数最少. 由定理 2.6, 可以在 M 中进一步合痕 A', 使得 A' 在 $\mathcal{M}$ 中或者是水平的, 或者是竖直的.

首先假设 A' 在 M 的纤维结构 $\mathcal{M}$ 中是竖直的, 则 $\partial A'$ 和 ∂A 均由 $\mathcal{M}$ 的 S^1- 纤维构成, 因此可以假设 $\partial A' \cap \partial A = \emptyset$, 从而 $A' \cap A$ 的分支均为简单闭曲线. 已知 A' 和 A 均在 M 中不可压缩, 若 $A' \cap A$ 有分支在 A 上非本质, 在 $A' \cap A$ 中选取在 A 上非本质且最内的分支 J, 则 J 在 A 上界定圆片 D_1, 使得 $D_1 \cap \mathrm{int}(A') = \emptyset$. 因 A' 在 M 中不可压缩, 故 J 在 A' 上也界定圆片, 记为 D_2. 由于实心环体 T_1 和 T_2 均不可约, 所以 $D_1 \cup D_2$ 在 T_1 或者 T_2 中界定实心球. 合痕移动 A', 将 D_2 沿该实心球推过 D_1, 即可减少 $|A' \cap A|$, 与 $|A' \cap A|$ 的极小性矛盾. 故 $A' \cap A$ 的每个分支在 A 和 A' 上都本质.

若 $A' \cap A \neq \emptyset$, 已知 A 和 A' 均在 M 中本质, 则由标准最内圆片法, 我们可以进一步假设 $A' \cap A$ 的每个分支都是一条在 A 和 A' 上均本质的简单闭曲线. 令 $C \in A \cap A'$, 则 C 从 A' 上切下一个平环 A^*, 使得 $A \cap \mathrm{int}(A^*) = \emptyset$. 不妨设 $A^* \subset T_1$. 将 A 沿 C 切开得到两个平环, 分别记为 A_1 和 A_2. 因 A^* 在 T_1 中边界平行, 故可以在 M 中合痕移动 A', 使得 A' 合痕于平环 $A'' = \overline{A' \setminus A^*} \cup A_1$ 或 $\overline{A' \setminus A^*} \cup A_2$. 进而在 M 中合痕移动 A'' , 使得 $|A'' \cap A| < |A' \cap A|$, 这与 $|A' \cap A|$ 的极小性相矛盾. 因此, $A \cap A' = \emptyset$, 且 A' 真嵌入于实心环体 T_1 或 T_2.

不妨假设 $A' \subset T_1$. 注意到实心环体中的本质曲面只有圆片, 因此 A' 在 T_1 中边界平行. 因 A' 在 M 中本质, 故 A' 与 A 在 M 中是合痕的. 结论得证.

下面考虑 A' 在纤维结构 $\mathcal{M}$ 中水平的情况. 由文 [3], Seifert 流形中的水平分离曲面将流形分解为两个不可定向曲面上的扭 I- 丛. 因 A' 在 M 中是水平的分离平环, 故

$M\backslash A'$ 的每个分支都是 Möbius 带上的扭 I- 丛, 即 M 是一个半丛, 且 $M \cong S^1 \widetilde{\times} S^1 \widetilde{\times} I$. 由定理 2.3 (2), $S^1 \widetilde{\times} S^1 \widetilde{\times} I$ 具有两种纤维结构, 分别为 $M(0,1;(2,1),(2,1))$ 和 $M(-1,1;)$. 当 $\mathcal{M} = M(-1,1;)$ 时, A' 是此纤维结构中的水平分离平环. 设 M_1 为 $M\backslash A'$ 的一个分支, 则 M_1 是 Möbius 带 B 上的扭 I- 丛. 因 A 在 $\mathcal{M}$ 中是竖直的, 故 $A \cap B$ 是一条在 A 和 B 上都本质的简单弧, 沿该简单弧切开 B 后仍连通. 从而 A 在 M 中是非分离的, 与平环 A 在 M 中的分离性矛盾. 故 A' 在 M 中水平的情况不会出现.

定理得证.

作为定理 3.1 的直接推论, 下面的推论给出满足 $r_1, r_2 \geqslant 2$ 的三维流形 $\mathcal{T}(r_1, s_1; r_2, s_2)$ 的拓扑分类.

推论 3.1 设 $M = \mathcal{T}(r_1, s_1; r_2, s_2)$, $M' = \mathcal{T}(r_1', s_1'; r_2', s_2')$, 满足 $r_1, r_2, r_1', r_2' \geqslant 2$. M 与 M' 同胚当且仅当 $r_1 = r_1'$, $r_2 = r_2'$, 且 $s_1 \equiv \pm s_1' \pmod{r_1}$, $s_2 \equiv \pm s_2' \pmod{r_2}$; 或 $r_1 = r_2'$, $r_2 = r_1'$, 且 $s_1 \equiv \pm s_2' \pmod{r_1}$, $s_2 \equiv \pm s_1' \pmod{r_2}$.

证 假设 $M = \mathcal{T}(r_1, s_1; r_2, s_2) = T_1 \cup_A T_2$, $M' = \mathcal{T}(r_1', s_1'; r_2', s_2') = T_1' \cup_{A'} T_2'$.

若存在同胚 $h: M \to M'$, 则由定理 3.1, $h(A)$ 在 M' 中合痕于 A'. 因此 M 同胚于 M' 当且仅当存在同胚

$$h': (M; (T_1, A, T_2)) \to (M'; (T_1', A', T_2'))$$

或

$$h': (M; (T_1, A, T_2)) \to (M'; (T_2', A', T_1')).$$

由命题 2.2, 结论成立.

接下来考虑环面纽结在 $\mathcal{L}(p,q)$ 中的补空间.

设 $T_1' \cup_F T_2'$ 为 $\mathcal{L}(p,q)$ 的亏格为 1 的 Heegaard 分解, $\gamma \subset F$ 是关于 T_1' 的 (r,s)- 环面纽结, $\eta(\gamma) \subset \mathcal{L}(p,q)$ 是 γ 在 $\mathcal{L}(p,q)$ 中的正则邻域, 满足 $\eta(\gamma) \cap F = A'$ 是 F 上一个平环. 记 $\mathcal{L}(p,q)_\gamma = \overline{\mathcal{L}(p,q) \setminus \eta(\gamma)}$ 为纽结 γ 在 $\mathcal{L}(p,q)$ 中的补空间, 记 $T_1 = T_1' \cap \mathcal{L}(p,q)_\gamma$, $T_2 = T_2' \cap \mathcal{L}(p,q)_\gamma$, $A = \overline{F \setminus A'} = T_1 \cap T_2$, 则 T_1 和 T_2 均为实心环体, A 为平环. 因此, $\mathcal{L}(p,q)_\gamma$ 上存在 H'- 分解 $T_1 \cup_A T_2$, 称此分解为 $\mathcal{L}(p,q)_\gamma$ 的典型的 H'- 分解, 称 A 为 $\mathcal{L}(p,q)_\gamma$ 的典型的 H'- 分解平环.

由环面纽结的定义, γ 是 $\mathcal{L}(p,q)$ 中的非平凡结, 故平环 A 在 T_1 和 T_2 中都不可压缩. 平环 A 的核曲线 δ 是关于 T_1 的 (r,s)- 型曲线, 因此 $\mathcal{L}(p,q)_\gamma$ 是三维流形 $\mathcal{T}(r,s;r',s')$. 由命题 3.1 可知, $\mathcal{L}(p,q)_\gamma$ 是实心环体当且仅当 $r=1$ 或 $r'=1$.

在 $\mathcal{L}(p,q)_\gamma = T_1 \cup_A T_2$ 中, 若 A 的核曲线 δ 是关于 T_1 的 (r,s)- 曲线, 那么 δ 关于 T_2 是什么曲线类型?

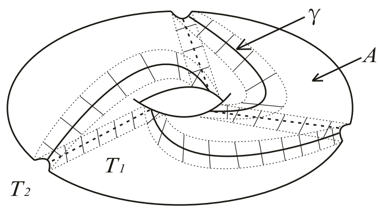

图 2　γ 是关于 T_1 的 $(2,3)$- 环面纽结

定理 3.2　设 $T_1 \cup_A T_2$ 为三维流形 $M = \mathcal{L}(p,q)_\gamma$ 的典型的 H'- 分解, γ 是关于 T_1 的 (r,s)- 环面纽结. 则 A 的核曲线 δ 是关于 T_2 的 $(\varepsilon(rq-sp), \varepsilon(sp'-rq'))$- 曲线, 其中 $\varepsilon = \pm 1$, $|rq-sp| \geqslant 1$, (p',q') 是 $\left|\begin{smallmatrix} p & q \\ p' & q' \end{smallmatrix}\right| = \pm 1$ 的一组解.

证　设 $T_1' \cup_h T_2'$ 是 $\mathcal{L}(p,q)$ 的亏格为 1 的 Heegaard 分解, $\{\alpha_i, \beta_i\}$ 为实心环体 T_i' 的一对典范曲线, $i=1,2$, $h: \partial T_2' \to \partial T_1'$ 是满足 $h_*(\beta_2) = p\alpha_1 + q\beta_1$ 的同胚. 因 $T_1 \cup_A T_2$ 为 M 的典型的 H'- 分解, 故只需要考虑 δ 在 T_2' 上的曲线类型.

假设 $h_*(\alpha_2) = p'\alpha_1 + q'\beta_1$, 其中 p' 和 q' 为互素的整数. 由于 $|\alpha_2 \cap \beta_2| = 1$, 所以 $|h_*(\alpha_2) \cap h_*(\beta_2)| = 1$, 由命题 2.2 (4), h_* 的伴随矩阵 $P = \left(\begin{smallmatrix} p' & q' \\ p & q \end{smallmatrix}\right)$ 满足 $\det P = \pm 1$. 因此,

$$h_* \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix},$$

$$h_*^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} q & -q' \\ -p & p' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} q & -q' \\ -p & p' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix},$$

其中 $\varepsilon = \pm 1$. 从而有

$$\begin{aligned} h_*^{-1}(\delta) = h_*^{-1}(r\alpha_1 + s\beta_1) &= \begin{pmatrix} r & s \end{pmatrix} h_*^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \\ &= \varepsilon \begin{pmatrix} r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & -q' \\ -p & p' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \\ &= \varepsilon((rq-sp)\alpha_2 + (-rq'+sp')\beta_2). \end{aligned}$$

若 $rq - sp = 0$, 则 $\dfrac{q}{p} = \dfrac{s}{r}$, 即 γ 在 T_1 上的斜率为 $\dfrac{q}{p}$. 故 γ 在 $T_2 \subset \mathcal{L}(p,q)$ 中界定圆片, 与 γ 是 $\mathcal{L}(p,q)$ 中的非平凡结矛盾. 因此 $|rq-sp| \geqslant 1$.

综上所述, $h_*^{-1}(\delta)$ 在 $\partial T_2'$ 上的斜率为 $(-rq'+sp')/(rq-sp)$, 即 δ 是关于 T_2 的 $(\varepsilon(rq-sp), \varepsilon(sp'-rq'))$- 曲线.

定理得证.

结合命题 3.1 和定理 3.2, 有如下推论.

推论 3.2　设 γ 是 $\mathcal{L}(p,q)$ 中关于 T_1 的 (r,s)- 环面纽结, $T_1 \cup_A T_2$ 是 $\mathcal{L}(p,q)_\gamma$ 的典型的 H'- 分解. 则 $\mathcal{L}(p,q)_\gamma$ 是流形 $\mathcal{T}(r,s;\varepsilon(rq-sp),\varepsilon(sp'-rq'))$, $\varepsilon = \pm 1$, $|rq-sp| \geqslant 1$, 且 (p',q')

是 $\left|\begin{smallmatrix} p & q \\ p' & q' \end{smallmatrix}\right| = \pm 1$ 的一组解. 特别地, $\mathcal{L}(p,q)_\gamma$ 是实心环体当且仅当 $r=1$ 或 $|rq-sp|=1$.

设 M 为三维流形, K 是 M 内部的一个纽结, $\eta(K)$ 是 K 在 M 中一个紧致正则邻域. 记 $M_K = \overline{M\backslash\eta(K)}$ 为纽结 K 的补空间, $F = M_K \cap \partial\eta(K)$ 为环面. 选取 $\eta(K)$ 的一对典范曲线 $\{\alpha,\beta\} \subset F$, 其中 α 和 β 分别为 $\eta(K)$ 的经线和纬线. 令 $h: F=\partial\eta(K) \to F = \partial M_K$ 为同胚的, 使得 β 在 h 下的同胚像是斜率为 $m/n \in \mathbb{Q}\cup\{\infty\}$ 的曲线 $\gamma_{(n,m)}$ $(h(\beta) = n\alpha + m\beta)$. 显然, 流形 $M' = M_K \cup_h \eta(K)$ 由 m/n 完全决定. 称 M' 为对 M 沿纽结 K 作 m/n-Dehn 手术所得流形, 其中 m/n 称为 Dehn 系数.

仍沿用上面的记号 $\gamma = \gamma_{(r,s)}$ 和 $\mathcal{L}(p,q)_\gamma$. 当 $r=1$ 或 $|rq-sp|=1$ 时, $\mathcal{L}(p,q)_\gamma$ 为实心环体, 此时对 $\mathcal{L}(p,q)$ 沿 γ 作 Dehn 手术所得流形 M' 为 S^3, $S^2\times S^1$ 或透镜空间.

考虑 $r, |rq-sp| \geqslant 2$ 情形下, 定理 3.3 对在 $\mathcal{L}(p,q)$ 中沿 (r,s)- 环面纽结作 Dehn 手术所得流形进行了分类.

定理 3.3 设 γ 为 $\mathcal{L}(p,q)$ 中的 (r,s)- 环面纽结, $r \geqslant 2$ 且 $|rq-sp| \geqslant 2$, M' 为对 $\mathcal{L}(p,q)$ 沿 γ 作 m/n-Dehn 手术所得流形, 则下列结果之一成立:

(1) $|m|>1$ 当且仅当 M' 为棱镜流形, 此时

$$M' \cong M(0,0;(r,s),(\varepsilon(rq-sp),\varepsilon(sp'-rq')),(m,n)),$$

其中 $\varepsilon=\pm 1$, (p',q') 是 $\left|\begin{smallmatrix} p & q \\ p' & q' \end{smallmatrix}\right| = \pm 1$ 的一组解;

(2) $|m|=1$ 当且仅当 M' 为透镜空间 $L(p_*,q_*)$, 其中 $p_* = \left|\begin{smallmatrix} r & \varepsilon(rq-sp) \\ -s & \varepsilon(sp'-rq') \end{smallmatrix}\right|$, $q_* = \left|\begin{smallmatrix} r & p_2' \\ -s & q_2' \end{smallmatrix}\right|$, $\varepsilon=\pm1$, (p_2',q_2') 是 $\left|\begin{smallmatrix} \varepsilon(rq-sp) & p_2' \\ \varepsilon(sp'-rq') & q_2' \end{smallmatrix}\right| = 1$ 的一组解, (p',q') 是 $\left|\begin{smallmatrix} p & q \\ p' & q' \end{smallmatrix}\right| = \pm 1$ 的一组解. 特别地, 当 $n=0$ 时, M' 是透镜空间 $L(p,q)$;

(3) $m=0$ 当且仅当 M' 是可约的, 此时 M' 是两个透镜空间的连通和, M' 同胚于

$$L(r,s)\# L(\varepsilon(rq-sp),\varepsilon(sp'-rq')),$$

其中 $\varepsilon=\pm1$, (p',q') 是 $\left|\begin{smallmatrix} p & q \\ p' & q' \end{smallmatrix}\right| = \pm 1$ 的一组解.

证 令 $M = \mathcal{L}(p,q)_\gamma = \overline{\mathcal{L}(p,q)\setminus\eta(\gamma)} = T_1 \cup_A T_2$, 其中 $\eta(\gamma)$ 为 γ 在 $\mathcal{L}(p,q)$ 中的正则邻域, $T_1\cup_A T_2$ 是 M 的典型的 H'- 分解. 设 $\{\alpha_i,\beta_i\}$ 为 T_i 的一对典范曲线, $i=1,2$. 由定理 3.2 可知, $\gamma = r\alpha_1 + s\beta_1 \in H_1(\partial T_1)$, $\gamma = \varepsilon(rq-sp)\alpha_2 + \varepsilon(sp'-rq')\beta_2 \in H_1(\partial T_2)$, 其中 $\varepsilon = 1$ 或 -1, $\varepsilon(rq-sp)>0$. 由假设条件可知, $r, |rq-sp| \geqslant 2$. 由命题 3.1 和命题 3.2, M 不是实心环体, 且 A 是 M 中的本质平环. 所以 T_1 是标准的 (r,s)- 型纤维化实心环, T_2 是标准的 $(\varepsilon(rq-sp),\varepsilon(sp'-rq'))$- 型纤维化实心环, 且 M 是以圆片为底空间、带有两个奇异纤维的 Seifert 流形 $M(0,1;(r,s),(\varepsilon(rq-sp),\varepsilon(sp'-rq')))$.

设 T 为实心环体, $M' = M\cup_h T$ 为对 $\mathcal{L}(p,q)$ 沿 γ 作 m/n-Dehn 手术所得流形, $h: \partial T \to \partial M$ 是满足 $h(\beta') = n\gamma + m\beta$ 的同胚, 其中 β' 和 β 分别为 T 和 $\eta(\gamma)$ 的纬线, γ 为 A 的核曲线 (是 γ 在 $\mathcal{L}(p,q)$ 中的一个平行拷贝) 且是 M 的一个正则纤维.

首先, 分别证明 (1), (2) 和 (3) 的必要性.

(1) 假设 $|m| > 1$. 则 T 为标准的 (m,n)- 型纤维化实心环, 故 M' 同胚于以 2- 球面 S^2 为底空间且带有三个奇异纤维的 Seifert 流形, 即棱镜流形

$$M' \cong M(0,0;(r,s),(\varepsilon(rq-sp),\varepsilon(sp'-rq')),(m,n)).$$

(2) 假设 $|m| = 1$. 则 $h(\beta') = n\gamma \pm \beta$, 且 γ 是 T 的经线, 故 T 是 M' 中的正常的纤维化实心环. 因此 M' 同构于 $M(0,0;(r,s),(\varepsilon(rq-sp),\varepsilon(sp'-rq'))$. 由引理 2.4 可知 M' 是透镜空间, 记为 $L(p_*,q_*)$, 其中 $p_* = \begin{vmatrix} r & \varepsilon(rq-sp) \\ -s & \varepsilon(sp'-rq') \end{vmatrix}$, $q_* = \begin{vmatrix} r & p_2' \\ -s & q_2' \end{vmatrix}$, (p_2', q_2') 是 $\begin{vmatrix} \varepsilon(rq-sp) & p_2' \\ \varepsilon(sp'-rq') & q_2' \end{vmatrix} = 1$ 的一组解. 特别地, 若 $n = 0$, 则 $h(\alpha') = \pm\gamma + m'\beta$, 其中 α' 是 T 的经线, 此时 M' 就是透镜空间 $L(p,q)$.

(3) 假设 $m = 0$. 因 n 和 m 是互素的整数, 故 $n = \pm 1$, $h(\beta') = \pm\gamma$, γ 在 T 中界定一个纬圆片. 令 D_1 和 D_2 为 ∂A 在 T 中界定的两个平行的纬圆片, 沿 $\{D_1, D_2\}$ 切开实心环体 T 可得到两个实心球 E_1 和 E_2, 使得 $\partial E_i \cap T_i = A_i$ 是 ∂M 上的平环, $i = 1, 2$, 且 $\partial A_1 = \partial A_2 = \partial A$, $A_1 \cup A_2 = \partial M = \partial T$. 记 $P = A \cup D_1 \cup D_2$, $M_i' = T_i \cup_{A_i} E_i$, $i = 1, 2$, 则 P 为 M' 中的分离 2- 球面, 将 M' 分为流形 M_1' 和 M_2', 其中 M_i' 是沿 A_i 往 T_i 上粘 2- 把柄所得流形, $i = 1, 2$. 因此, M_1' 同胚于从透镜空间 $L(r,s)$ 中挖掉一个实心球所得流形, M_2' 同胚于从透镜空间 $L(\varepsilon(rq-sp),\varepsilon(sp'-rq'))$ 中挖掉一个实心球所得流形. 故 M' 是可约的三维流形, 其约化 2- 球面为 P. 因此 M' 是两个透镜空间的连通和, 即

$$M' \cong L(r,s) \# L(\varepsilon(rq-sp),\varepsilon(sp'-rq')).$$

反之, 由定理 2.5, 棱镜流形和透镜空间均是不可约的三维流形. 由定理 2.3 (3), 透镜空间的 Seifert 纤维结构中至多只有两个奇异纤维, 所以棱镜空间与透镜空间一定不同胚. 综上所述, (1), (2) 和 (3) 的充分性得证.

假设 $M = \mathcal{T}(r_1, s_1; r_2, s_2)$. 由命题 3.1 知 M 是实心环体当且仅当 $r_1 = 1$ 或 $r_2 = 1$. 显然实心环体是 $L(p,q)$ 中 $(1,s)$- 环面纽结的补空间. 对于 $r_1, r_2 \geqslant 2$ 的情形, 定理 3.4 分别给出了 M 是透镜空间 $L(p,q)$, S^3 以及 $S^2 \times S^1$ 中 (r,s)- 环面纽结的补空间的充要条件.

定理 3.4　假设 $M = \mathcal{T}(r_1, s_1; r_2, s_2)$.

(1) M 是 $L(p,q)$ 中 (r,s)- 环面纽结的补空间当且仅当 $(r_1, s_1) = (r, s)$, $r_2 = \varepsilon(r_1 q - s_1 p) \geqslant 2$, $s_2 = \varepsilon(s_1 p' - r_1 q')$, 其中 $\varepsilon = \pm 1$, (p', q') 是 $\begin{vmatrix} p & q \\ p' & q' \end{vmatrix} = \pm 1$ 的一组解;

(2) M 是 S^3 中 (r,s)- 环面纽结的补空间当且仅当 $(r_1, s_1) = (r, s)$, $r_2 = \varepsilon(r_1 q - s_1)$, $s_2 = r_1$, 其中 $\varepsilon = \pm 1$;

(3) M 是 $S^2 \times S^1$ 中 (r,s)- 环面纽结的补空间当且仅当 $(r_1, s_1) = (r, s)$, $r_2 = \varepsilon r$, $s_2 = s$, 其中 $\varepsilon = \pm 1$.

证　(1) 假设 M 是 $L(p,q)$ 中 (r,s)- 环面纽结的补空间, $T_1' \cup_{A'} T_2'$ 是 M 的典型的 H'- 分解. 已知 $r_1, r_2 \geqslant 2$, 由命题 3.1, M 不是实心环体, 所以 A 和 A' 在 M 中都是本质的. 由定理 3.1 可知, 本质平环 A 和 A' 在 M 中合痕. 因此, 不失一般性, 我们可以假设 $T_i' = T_i$,

$i=1,2$, $A'=A$, 并且 $(r,s)=(r_1,s_1)$. 由定理 3.2, A 的核曲线 δ 是关于 T_1 的 (r,s)- 曲线, 是关于 T_2 的 $(\varepsilon(rq-sp),\varepsilon(sp'-rq'))$- 曲线, 其中 $\varepsilon=\pm1$, (p',q') 是 $\left|\begin{smallmatrix} p & q \\ p' & q' \end{smallmatrix}\right|=\pm1$ 的一组解.

反之, 充分性可由定理 3.3 (2) 直接得到.

(2) 假设 M 是 S^3 中 (r,s)- 环面纽结的补空间, $T_1'\cup_{A'}T_2'$ 是 M 的典型的 H'- 分解. 与 (1) 中的证明类似, δ 是关于 T_2 的 $(\varepsilon(rq-s),\varepsilon(rq-s)(-p')\pm r)$- 曲线. 由命题 2.2 (2), δ 同胚于 T_2 上的 $(\varepsilon(rq-s),r)$- 曲线. 因此, $r_2=\varepsilon(rq-s)$ 且 $s_2=r$.

因 $S^3=\mathcal{L}(1,q)$, 故充分性与 (1) 类似, 可由定理 3.3 (2) 直接得到.

(3) 假设 M 是 $S^2\times S^1$ 中 (r,s)- 环面纽结的补空间, $T_1'\cup_{A'}T_2'$ 是 M 的典范的 H'- 分解. 与 (1) 中的证明类似, δ 是关于 T_2 的 $(\varepsilon r,\varepsilon(sp'-rq'))$- 曲线, 其中 (p',q') 是 $\left|\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ p' & q' \end{smallmatrix}\right|=\pm1$ 的一组解. 故 $p'=\pm1$, δ 是关于 T_2 的 $(\varepsilon r,\varepsilon r(-q')\pm s)$- 曲线. 由命题 2.2 (2), δ 同胚于 T_2 上的 $(\varepsilon r,s)$- 曲线.

因 $S^2\times S^1=\mathcal{L}(0,1)$, 故充分性与 (1) 类似, 可由定理 3.3 (2) 直接得到.

定理得证.

参 考 文 献

[1] Gordon C, Luecke J. Knots are determined by their Complements [J]. *J Amer Math Soc*, 1989, 2:371–415.

[2] Norwood F H. Every two-generator knot is prime [J]. *Proc Amer Math Soc*, 1982, 86(1):143–147.

[3] Hatcher A. Notes on Basic 3-Manifold Topology [M/OL]. http:// www. math. cornell. edu/ hatcher, 2000.

[4] Bonahon F. Difféotopies des espaces lenticulairese [J]. *Topology*, 1983, 22:305–314.

[5] Jankins M, Neumann W D. Lectures on Seifert manifolds [M]// Brandeis lecture notes 2, Waltham MA: Brandeis University, 1983.

[6] Geiges H, Lange C. Seifert fibrations of lens spaces [J]. *Abh Math Sem Univ Hamburg*, 2018, 88:1–22.

[7] Geiges H, Lange C. Seifert fibrations of lens spaces over non-orientable bases [J]. *Abh Math Sem Univ Hamburg*, 2021, 91:145–150.

[8] Moser L. Elementary surgery along a torus knot [J]. *Pac J Math.*, 1971, 38:737–745.

[9] Gabai D. Foliations and topology of 3-manifolds III [J]. *J Differ Geom*, 1987, 26:479–536.

[10] Bleiler S, Litherland R. Lens spaces and Dehn surgery [J]. *Proc Amer Math Soc*, 1989, 107(4):1127–1131.

[11] Wang S. Cyclic surgery on knots [J]. *Proc Amer Math Soc*, 1989, 107(4):1091–1094.

[12] Wu Y Q. Cyclic surgery and satellite knots [J]. *Topology Appl*, 1990, 36(3):205–208.

[13] Jaco W. Lectures on three manifold topology [M]// CBMS Regional Conference Series in Mathematics, Providence: Amer Math Soc, 1980, No 43.

[14] Scharlemann M. Heegaard splittings of compact 3-manifolds [M]// Handbook of Geometric Topology, Amsterdam: North-Holland, 2002:921–953.

[15] Gao Y, Li F, Liang L, et al. Weakly reducible H'-splittings of 3-manifolds [J]. *J Knot Theor Ramif*, 2021, 30(10):2140004.

[16] Jaco W. Adding a 2-handle to a 3-manifold: An application to property R [J]. *Proc Amer Math Soc*, 1984, 92:288–292.

[17] Lei F. Some properties of an annulus sum of 3-manifolds [J]. *Northeast Math J*, 1994, 10:325–329.

[18] Rolfsen D. Knots and links [M]. Houston: Publish or Perish Inc, 1990.

[19] Waldhausen F. Heegaard-Zerlegungen der 3-Sphäre [J]. *Topology*, 1968, 7:195–203.

On Torus Knots in 3-Manifolds with Genus One Heegaard Splitting

XU Yan[1]　LEI Fengchun[1]　LI Fengling[2]　LIANG Liang[3]

[1]School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian 116024, Liaoning, China.
E-mail: xuyannn@yeah.net; fclei@dlut.edu.cn

[2]Corresponding author. School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian 116024, Liaoning, China.
E-mail: fenglingli@dlut.edu.cn

[3]School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian 116029, Liaoning, China. E-mail: liang_liang@aliyun.com

Abstract Let $M = \mathcal{L}(p, q)$ be a 3-manifold which admits a Heegaard splitting $T_1' \cup_F T_2'$ of genus 1, where p and q are co-prime integers, and a meridian curve of T_2' has the slope $s = q/p$ on T_1'. A simple closed curve γ on the torus F is called a torus knot in M if it is non-trivial in M. The main results of the paper are as follows: the authors classify the manifolds obtained by performing a m/n-Dehn surgery along a torus knot in M, and describe the characteristics for the manifold obtained by gluing two solid tori together along an annulus on the boundary of each solid torus to be a torus knot complement in $\mathcal{L}(p,q)$.

Keywords H'-Splitting, Lens space, Torus knot, Seifert manifold

2000 MR Subject Classification 57N10

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 45 No. 1, 2024

by ALLERTON PRESS, INC., USA