数 学 年 刊 A 辑
2024, 45(1):15–24
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2024.0002

Orlicz ϕ- 弦对数 Minkowski 不等式*

赵长健 [1]

提要 本文通过引进新的混合弦测度和 Orlicz 混合弦测度概念, 并且利用新近建立的 Orlicz 弦 Minkowski 不等式, 建立了 Orlicz 空间上的混合弦积分的 ϕ- 弦对数 Minkowski 不等式. 我们的结果 ϕ- 弦对数 Minkowski 不等式, 在两种特殊情况下分别产生了弦对数 Minkowski 不等式和 L_p- 弦对数 Minkowski 不等式.

关键词 混合弦积分, L_p- 混合弦积分, Orlicz 混合弦积分, 对数 Minkowski 不等式, 弦对数 Minkowski 不等式

MR (2000) 主题分类 46E30, 52A39

中图法分类 O186.5

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2024)01-0015-10

§1 引 言

2012 年, Böröczky, Lutwak, 杨和张 [1] 提出一个猜想: 对于中心对称凸体, 猜想存在一个比经典 Minkowski 不等式更强的对数 Minkowski 不等式, 这个猜想可以陈述为:

对数不等式的猜想. 令 K 和 L 是 $\mathbb{R}^n$ 中心对称凸体, 猜想下列不等式是否正确?

$$\int_{S^{n-1}} \ln\Big(\frac{h_K}{h_L}\Big)\mathrm{d}\overline{V}_L \geqslant \frac{1}{n}\ln\Big(\frac{V(K)}{V(L)}\Big), \tag{1.1}$$

其中 $\mathrm{d}\overline{b}_L = \frac{1}{n}h_L\mathrm{d}S_L$ 是 L 的锥体积测度, $\mathrm{d}\overline{V}_L = \frac{1}{V(L)}\mathrm{d}\overline{b}_L$ 是它的规范数, $S_L = S(L,\cdot)$ 是 L 的表面积测度, 且 S^{n-1} 是 $\mathbb{R}^n$ 上的单位球的表面. 这里, 函数 h_K 和 h_L 分别是 K 与 L 的支撑函数. 若 K 是 $\mathbb{R}^n$ 上非空的闭的凸集, 则

$$h_K = \max\{x\cdot y : y\in K\},$$

$x\in\mathbb{R}^n$, 这里定义 K 的支撑函数 h_K, 其中 $x\cdot y$ 表示 x 和 y 在 $\mathbb{R}^n$ 上通常的内积.

几年来, 关于这个猜想一直没有实质性进展. 2016 年, Stancu[2] 另辟蹊径, 建立了猜想的下列一个修正版本. 提出了更广泛的凸体而不是猜想中的中心对称凸体的一个优美的结果. 这里称之为凸体的对数 Minkowski 不等式.

对数 Minkowski 不等式. 若 K 和 L 是 $\mathbb{R}^n$ 上包含原点为它们内点的凸体, 则

$$\int_{S^{n-1}} \ln\Big(\frac{h_K}{h_L}\Big)\mathrm{d}\overline{v}_1 \geqslant \frac{1}{n}\ln\Big(\frac{V(K)}{V(L)}\Big), \tag{1.2}$$

本文 2023 年 6 月 26 日收到, 2024 年 3 月 3 日收到修改稿.

[1] 中国计量大学理学院数学系, 杭州 310018. E-mail: chjzhao@163.com; chjzhao@cjlu.edu.cn

*本文受到国家自然科学基金 (No. 11371334, No. 10971205) 资助.

等号成立当且仅当 K 和 L 是相似的, 其中 $\mathrm{d}v_1$ 是混合体积测度 $\mathrm{d}v_1=\frac{1}{n}h_K\mathrm{d}S_L$, $\mathrm{d}\overline{v}_1=\frac{1}{V_1(L,K)}\mathrm{d}v_1$ 是它的规范数, 且 $V_1(L,K)$ 表示 L 和 K 通常的混合体积, 定义为 (见 [3])

$$V_1(L,K)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}h_K\mathrm{d}S_L.$$

明显地, 这个结果与猜想比较, 仅测度不同而已!

若 K 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个紧子集, 包含原点且相对于原点是星形的, 则 K 的径向函数 $\rho(K,\cdot):S^{n-1}\to[0,\infty)$, 定义为

$$\rho(K,u)=\max\{\lambda\geqslant 0:\lambda u\in K\}.$$

若 $\rho(K,\cdot)$ 是正的连续的, 则 K 被称为星体. 对于星体 K, $u\in S^{n-1}$ 方向上 K 的半弦, 表示为 $d(K,u)$, 定义为

$$d(K,u)=\frac{1}{2}\Big(\rho(K,u)+\rho(K,-u)\Big),\quad u\in S^{n-1}.$$

若存在一个常数 $\lambda>0$, 使得 $d(K,u)=\lambda d(L,u)$, 则星体 K 和 L 被称为有类似的弦度. 另外, 星体 K 的弦积分, 表示为 $B(K)$, 定义为 (见 [4])

$$B(K)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}d(K,u)^n\mathrm{d}S(u).$$

一石激起千层浪, 最近一些年, Stancu 的对数 Minkowski 不等式和它的对偶形式, 已经引起了许多数学家的广泛关注与研究, 参见文 [4–17]. 本文选择了对偶形式的一个新视角, 通过引进混合弦测度和 Orlicz 混合弦测度概念, 并且利用作者新近建立的 Orlicz 弦 Minkowski 不等式, 创建了下列弦积分的 Orlicz ϕ- 弦对数 Minkowski 不等式. 这个新的不等式在两种特殊情况下, 分别产生了弦对数 Minkowski 不等式和 L_p- 弦对数 Minkowski 不等式.

Orlicz ϕ- 弦对数 Minkowski 不等式. 令 $\phi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ 是凸的递减的函数, 且满足 $\lim\limits_{t\to\infty}\phi(t)=0$ 与 $\lim\limits_{t\to 0}\phi(t)=\infty$. 若 K 和 L 是 $\mathbb{R}^n$ 的星体, 则

$$\int_{S^{n-1}}\ln\Big(\phi\Big(\frac{d(K,u)}{d(L,u)}\Big)\Big)\mathrm{d}\overline{b}_\phi\geqslant\ln\Big(\phi\Big(\Big(\frac{B(K)}{B(L)}\Big)^{\frac{1}{n}}\Big)\Big).\tag{1.3}$$

如果 ϕ 严格凸的, 等号成立当且仅当 K 和 L 有类似的弦度, 其中 $\mathrm{d}b_\phi$ 表示 Orlicz 混合弦测度

$$\mathrm{d}b_\phi=\frac{1}{n}\phi\Big(\frac{d(K,u)}{d(L,u)}\Big)d(L,u)^n\mathrm{d}S(u),$$

且

$$\mathrm{d}\overline{b}_\phi=\frac{1}{B_\phi(L,K)}\mathrm{d}b_\phi$$

是它的规范数, 并且 $B_\phi(L,K)$ 表示 L 和 K 的 Orlicz 混合弦积分, 定义为 (见文 [17])

$$B_\phi(L,K)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\phi\Big(\frac{d(K,u)}{d(L,u)}\Big)d(L,u)^n\mathrm{d}S(u).$$

显然, 当 $\phi(x)=\frac{1}{x}$ 时, (1.3) 变成下列弦对数 Minkowski 不等式.

弦对数 Minkowski 不等式. 若 K 和 L 是 $\mathbb{R}^n$ 的星体, 则

$$\int_{S^{n-1}}\ln\Big(\frac{d(K,u)}{d(L,u)}\Big)\mathrm{d}\bar{b}_1\leqslant\frac{1}{n}\ln\Big(\frac{B(K)}{B(L)}\Big),\tag{1.4}$$

等号成立当且仅当 K 和 L 有类似的弦度, 其中 $\mathrm{d}b_1$ 是 L 的混合弦测度

$$\mathrm{d}b_1=\frac{1}{n}d(L,u)^{n+1}d(K,u)^{-1}\mathrm{d}S(u)$$

且

$$\mathrm{d}\bar{b}_1=\frac{1}{B_1(L,K)}\mathrm{d}b_1$$

是它的规范数, 并且 $B_1(L,K)$ 表示 L 与 K 的混合弦积分, 定义为 (见 [17])

$$B_1(L,K)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}d(L,u)^{n+1}d(K,u)^{-1}\mathrm{d}S(u).$$

§2　概念与定义

本文讨论在 n- 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$. $\mathbb{R}^n$ 上的一个体是紧的等于有界闭的. 对于一个紧集 $K\subset\mathbb{R}^n$, 令 $V(K)$ 表示 K 的 n 维 Lebesgue 测度, 并且称其为 K 的 n 维体积. 令 $\mathcal{S}^n$ 表示所有星体的集合. 容易看到, 这类集 (星集) 在并集、交集和与子空间的交集下是闭的. 径向函数是 -1 齐次的, 即 (见 [3]),

$$\rho(K,ru)=r^{-1}\rho(K,u),$$

其中 $u\in S^{n-1}$ 和 $r>0$. 令 $\widetilde{\delta}$ 表示径向 Hausdorff 距离, 即, 设 $K,L\in\mathcal{S}^n$, 则

$$\widetilde{\delta}(K,L)=|\rho(K,u)-\rho(L,u)|_\infty,$$

其中 $|\cdot|_\infty$ 表示连续空间 $C(S^{n-1})$ 上的最大范数.

§2.1　混合弦积分

若 $K_1,\cdots,K_n\in\mathcal{S}^n$, 则 $K_1,\cdots,K_n$ 的混合弦积分表示为 $B(K_1,\cdots,K_n)$, 定义为 (见 [18])

$$B(K_1,\cdots,K_n)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}d(K_1,u)\cdots d(K_n,u)\mathrm{d}S(u).\tag{2.1}$$

若 $K_1=\cdots=K_{n-i}=K$, $K_{n-i+1}=\cdots=K_n=B$, 则混合弦积分 $B(K_1,\cdots,K_n)$ 被记作 $B_i(K)$ 且称 K 的 i 次弦积分. 若 $K_1=\cdots=K_{n-i-1}=K$, $K_{n-i}=\cdots=K_{n-1}=B$ 且

$K_n=L$, 则混合弦积分 $B(\underbrace{K,\cdots,K}_{n-i-1},\underbrace{B,\cdots,B}_{i},L)$ 记作 $B_i(K,L)$ 且称 K 与 L 的 i 次混合弦积分. 对于 $K,L\in\mathcal{S}^n$ 和 $0\leqslant i<n$, 不难看出

$$B_i(K,L)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}d(K,u)^{n-i-1}d(L,u)\mathrm{d}S(u). \tag{2.2}$$

一个重要的不等式是下列 i 次混合弦积分的 Minkowski 不等式: 若 $K,L\in\mathcal{S}^n$ 且 $0\leqslant i<n$, 则

$$B_i(K,L)^{n-i}\leqslant B_i(K)^{n-i-1}B_i(L), \tag{2.3}$$

等号成立当且仅当 K 与 L 有类似的弦度.

§2.2 L_p- 混合弦积分

令 $K,L\in\mathcal{S}^n$ 且 $p\geqslant 1$, 星体 K 与 L 的 L_p 弦和表示为 $\check{+}_p$, 定义为 (见 [17])

$$d(K\check{+}_pL,u)^{-p}=d(K,u)^{-p}+d(L,u)^{-p}, \tag{2.4}$$

$u\in S^{n-1}$. 对于 $p\geqslant 1$, 下列结果由 (2.4) 直接产生.

$$-\frac{p}{n-i}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{B_i(K\check{+}_p\varepsilon\cdot L)-B_i(K)}{\varepsilon}=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}d(K,u)^{n-i+p}d(L,u)^{-p}\mathrm{d}S(u),$$

其中, 组合 $K\check{+}_p\varepsilon\cdot L$ 定义见文 [17].

令 $K,L\in\mathcal{S}^n$, $0\leqslant i<n$ 且 $p\geqslant 1$, 星体 K 与 L 的 L_p- 混合弦积分表示为 $B_{p,i}(K,L)$, 定义为 (见 [17])

$$B_{p,i}(K,L)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}d(K,u)^{n-i+p}d(L,u)^{-p}\mathrm{d}S(u). \tag{2.5}$$

明显地, 当 $K=L$, L_p- 混合弦积分 $B_{p,i}(K,K)$ 变为 K 的弦积分 $B_i(K)$. 一个相关的重要不等式是下列 L_p- 弦 Minkowski 不等式: 若 $K,L\in\mathcal{S}^n$, $0\leqslant i<n$ 且 $p\geqslant 1$, 则

$$B_{p,i}(K,L)^{n-i}\geqslant B_i(K)^{n-i+p}B_i(L)^{-p}, \tag{2.6}$$

等号成立当且仅当 K 和 L 有类似的弦度. 另外, L_p- 弦 Brunn-Minkowski 不等式可以陈述为: 若 $K,L\in\mathcal{S}^n$, $0\leqslant i<n$ 且 $p\geqslant 1$, 则

$$B_i(K\check{+}_pL)^{\frac{-p}{n-i}}\geqslant B_i(K)^{\frac{-p}{n-i}}+B_i(L)^{\frac{-p}{n-i}}, \tag{2.7}$$

等号成立当且仅当 K 和 L 有类似的弦度.

§2.3 Orlicz 混合弦积分

假定 $\phi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ 是一个凸的递减的函数, 使得 $\lim\limits_{t\to\infty}\phi(t)=0$ 且 $\lim\limits_{t\to 0}\phi(t)=\infty$. 本文用 $\mathcal{C}$ 表示所有这些函数 ϕ 组成的集合. 最近, 一个新的 Orlicz 混合弦积分被该文作者引进在文 [17], 即: 对于 $K,L\in\mathcal{S}^n$ 且 $\phi\in\mathcal{C}$, 星体 L 与 K 的 Orlicz 混合弦积分表示为

$B_\phi(L,K)$, 定义为

$$B_\phi(L,K)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\phi\Big(\frac{d(K,u)}{d(L,u)}\Big)d(L,u)^n\mathrm{d}S(u). \tag{2.8}$$

当 $\phi(t)=t^{-p}$ 且 $p\geqslant 1$, Orlicz 混合弦积分变成一个新的 L_p 空间的混合弦积分, 表示为 $B_p(K,L)$, 且有

$$B_p(L,K)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}d(L,u)^{n+p}d(K,u)^{-p}\mathrm{d}S(u). \tag{2.9}$$

§3　Orlicz 弦对数 Minkowski 不等式

为了获得 Orlicz 弦对数 Minkowski 不等式, 这一节, 我们还需要引进一些星体的新的混合弦测度.

把 $i=0$ 与 $p=1$ 代入 (2.5), 容易获得星体 L 与 K 的 L_1- 混合弦积分, 表示为 $B_1(L,K)$, 且

$$B_1(L,K)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}d(L,u)^{n+1}d(K,u)^{-1}\mathrm{d}S(u), \tag{3.1}$$

其中 $K,L\in\mathcal{S}^n$. 通过 (3.1), 我们引进下列星体 L 与 K 的混合弦测度.

定义 3.1 (混合弦测度)　对于 $L,K\in\mathcal{S}^n$, 星体 L 与 K 的混合弦测度表示为 $\mathrm{d}b_1(L,K)$, 定义为

$$\mathrm{d}b_1(L,K)=\frac{1}{n}d(L,u)^{n+1}d(K,u)^{-1}\mathrm{d}S(u). \tag{3.2}$$

当 $K=L$, $\mathrm{d}b_1(L,K)$ 变成 $\mathrm{d}b_L$ 且称之为星体 L 的弦测度, 且有

$$\mathrm{d}b_L=\frac{1}{n}d(L,u)^n\mathrm{d}S(u). \tag{3.3}$$

由定义 3.1, 不难发现下列混合弦概率测度

$$\mathrm{d}\bar{b}_1(L,K)=\frac{1}{B_1(L,K)}\mathrm{d}b_1(L,K). \tag{3.4}$$

由 (2.8), 我们引进星体 L 与 K 的下列 Orlicz 混合弦测度.

定义 3.2 (Orlicz 混合弦测度) 对于 $L,K\in\mathcal{S}^n$, 星体 L 与 K 的 Orlicz 混合弦测度表示为 $\mathrm{d}b_\phi(L,K)$, 定义为

$$\mathrm{d}b_\phi(L,K)=\frac{1}{n}\cdot\phi\Big(\frac{d(K,u)}{d(L,u)}\Big)d(L,u)^n\mathrm{d}S(u). \tag{3.5}$$

同样由定义 3.2, 不难发现下列 Orlicz 混合弦概率测度

$$\mathrm{d}\bar{b}_\phi(L,K)=\frac{1}{B_\phi(L,K)}\mathrm{d}b_\phi(L,K). \tag{3.6}$$

显然, 当 $\phi(x)=x^{-p}$ 且 $p\geqslant 1$, 有

$$\mathrm{d}\overline{b}_\phi(L,K)=\mathrm{d}\overline{b}_p(L,K), \tag{3.7}$$

其中 $\mathrm{d}\overline{b}_p(L,K)$ 定义见 (3.5) 且是它的特殊情况. 明显地, 混合弦测度 $\mathrm{d}b_1(L,K)$ 也是 Orlicz 混合弦测度的一个特殊情况. 当 $\phi(x)=x^{-p}$ 且 $p=1$, 有

$$\mathrm{d}b_\phi(L,K)=\mathrm{d}b_1(L,K). \tag{3.8}$$

下列关于 Orlicz 混合弦积分的 Orlicz 弦 Minkowski 不等式, 将用于证明我们的主要结果.

引理 3.1 (Orlicz 弦 Minkowski 不等式) 若 $K,L\in\mathcal{S}^n$ 且 $\phi\in\mathcal{C}$, 则 (见 [17])

$$B_\phi(K,L)\geqslant B(K)\phi\Big(\Big(\frac{B(L)}{B(K)}\Big)^{\frac{1}{n}}\Big).$$

如果 ϕ 是严格凸的, 等号成立当且仅当 K 与 L 有类似的弦度.

我们的主要结果由下列定理给出. 这里需要指出的是定理 3.1 的证明遵循并推广了 Stancu 的对数 Minkowski 不等式证明的方法与思想 (见 [2]).

定理 3.1 (Orlicz 弦对数 Minkowski 不等式) 若 $K,L\in\mathcal{S}^n$, 且 $\phi\in\mathcal{C}$, 则

$$\int_{S^{n-1}}\ln\Big(\phi\Big(\frac{d(K,u)}{d(L,u)}\Big)\Big)\mathrm{d}\overline{b}_\phi(L,K)\geqslant\ln\Big(\phi\Big(\Big(\frac{B(K)}{B(L)}\Big)^{\frac{1}{n}}\Big)\Big). \tag{3.9}$$

若 ϕ 严格凸的, 则等号成立当且仅当 K 与 L 有类似的弦度. 这里 $\mathrm{d}\overline{b}_\phi(L,K)$ 定义见 (3.6).

证 由 (3.3) 和 (3.5), 可得

$$\int_{S^{n-1}}\phi\Big(\frac{d(K,u)}{d(L,u)}\Big)\ln\Big(\frac{d(K,u)}{d(L,u)}\Big)\mathrm{d}b_L=\int_{S^{n-1}}\ln\Big(\frac{d(K,u)}{d(L,u)}\Big)\mathrm{d}b_\phi(L,K). \tag{3.10}$$

另一方面, 注意到

$$B_\phi(L,K)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\phi\Big(\frac{d(K,u)}{d(L,u)}\Big)d(L,u)^n\mathrm{d}S(u),$$

并且利用 Lebesgue 控制收敛定理, 有

$$\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\phi\Big(\frac{d(K,u)}{d(L,u)}\Big)^{\frac{q}{q+n}}\mathrm{d}b_L\to B_\phi(L,K),\quad q\to\infty$$

且

$$\int_{S^{n-1}}\phi\Big(\frac{d(K,u)}{d(L,u)}\Big)^{\frac{q}{q+n}}\ln\Big(\frac{d(K,u)}{d(L,u)}\Big)\mathrm{d}b_L\to\int_{S^{n-1}}\ln\Big(\frac{d(K,u)}{d(L,u)}\Big)\mathrm{d}b_\phi(L,K),\quad q\to\infty$$

另外, 考虑函数 $f_{L,K}(q):[1,\infty]\to\mathbb{R}$

$$f_{L,K}(q)=\frac{1}{nB_\phi(L,K)}\int_{S^{n-1}}\phi\Big(\frac{d(K,u)}{d(L,u)}\Big)^{\frac{q}{q+n}}\mathrm{d}b_L. \tag{3.11}$$

通过计算这个函数的导数和极限, 我们获得下列结果:

$$\frac{\mathrm{d}f_{L,K}(q)}{\mathrm{d}q}=\frac{n}{(q+n)^2\cdot B_\phi(L,K)}\int_{S^{n-1}}\phi\Big(\frac{d(K,u)}{d(L,u)}\Big)^{\frac{q}{q+n}}\ln\Big(\phi\Big(\frac{d(K,u)}{d(L,u)}\Big)\Big)\mathrm{d}b_L \tag{3.12}$$

且

$$\lim_{q\to\infty} f_{L,K}(q) = 1. \tag{3.13}$$

由 (3.11)–(3.13), 有

$$\begin{aligned}
\lim_{q\to\infty} \ln\Big(f_{L,K}(q)\Big)^{q+n} &= -(q+n)^2 \lim_{q\to\infty} \frac{\frac{\mathrm{d}f_{L,K}(q)}{\mathrm{d}q}}{f_{L,K}(q)}\\
&= -\frac{n}{B_\phi(L,K)}\\
&\quad\times \lim_{q\to\infty} \frac{\int_{S^{n-1}} \phi\Big(\frac{d(K,u)}{d(L,u)}\Big)^{\frac{q}{q+n}} \ln\Big(\phi\Big(\frac{d(K,u)}{d(L,u)}\Big)\Big)\mathrm{d}b_L}{f_{L,K}(q)}\\
&= -\frac{n}{B_\phi(L,K)}\\
&\quad\times \int_{S^{n-1}} \phi\Big(\frac{d(K,u)}{d(L,u)}\Big) \ln\Big(\phi\Big(\frac{d(K,u)}{d(L,u)}\Big)\Big)\mathrm{d}b_L.
\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
&\exp\Big(-\frac{n}{B_\phi(L,K)} \int_{S^{n-1}} \phi\Big(\frac{d(K,u)}{d(L,u)}\Big) \ln\Big(\phi\Big(\frac{d(K,u)}{d(L,u)}\Big)\Big)\mathrm{d}b_L\Big)\\
&= \lim_{q\to\infty} (f_{L,K}(q))^{q+n}\\
&= \lim_{q\to\infty} \Big(\frac{1}{B_\phi(L,K)} \int_{S^{n-1}} \phi\Big(\frac{d(K,u)}{d(L,u)}\Big)^{\frac{q}{q+n}} \mathrm{d}b_L\Big)^{q+n}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

利用 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}
\Big(\int_{S^{n-1}} \phi\Big(\frac{d(K,u)}{d(L,u)}\Big)^{\frac{q}{q+n}} \mathrm{d}b_L\Big)^{\frac{q+n}{q}} \Big(\int_{S^{n-1}} \mathrm{d}b_L\Big)^{\frac{-n}{q}} &\leqslant \int_{S^{n-1}} \phi\Big(\frac{d(K,u)}{d(L,u)}\Big)\mathrm{d}b_L\\
&= B_\phi(L,K).
\end{aligned} \tag{3.15}$$

由 Hölder 不等式等号成立的条件, 不难看出 (3.15) 中等号成立当且仅当 $d(K,u)$ 与 $d(L,u)$ 成比例. 这就产生了 (3.15) 等号成立当且仅当 K 和 L 有类似的弦度.

进一步, 有

$$\Big(\frac{1}{B_\phi(L,K)} \int_{S^{n-1}} \phi\Big(\frac{d(K,u)}{d(L,u)}\Big)^{\frac{q}{q+n}} \mathrm{d}b_L\Big)^{q+n} \leqslant \Big(\frac{B(L)}{B_\phi(L,K)}\Big)^n,$$

等号成立当且仅当 K 和 L 有类似的弦度.

于是

$$\exp\Big(-\frac{n}{B_\phi(L,K)} \int_{S^{n-1}} \phi\Big(\frac{d(K,u)}{d(L,u)}\Big) \ln\Big(\phi\Big(\frac{d(K,u)}{d(L,u)}\Big)\Big)\mathrm{d}b_L\Big) \leqslant \Big(\frac{B(L)}{B_\phi(L,K)}\Big)^n,$$

等号成立当且仅当 K 和 L 有类似的弦度, 即

$$\frac{1}{B_\phi(L,K)} \int_{S^{n-1}} \phi\Big(\frac{d(K,u)}{d(L,u)}\Big) \ln\Big(\phi\Big(\frac{d(K,u)}{d(L,u)}\Big)\Big)\mathrm{d}b_L \geqslant \ln\Big(\frac{B_\phi(L,K)}{B(L)}\Big),$$

等号成立当且仅当 K 和 L 有类似的弦度.

因此

$$\int_{S^{n-1}} \ln\Big(\phi\Big(\frac{d(K,u)}{d(L,u)}\Big)\Big) \mathrm{d}\bar{b}_\phi(L,K) \geqslant \ln\Big(\frac{B_\phi(L,K)}{B(L)}\Big), \tag{3.16}$$

等号成立当且仅当 K 和 L 有类似的弦度.

另外, 由引理 3.1, 并且注意到 Orlicz 弦 Minkowski 不等式等号成立的条件, 有

$$\int_{S^{n-1}} \ln\Big(\phi\Big(\frac{d(K,u)}{d(L,u)}\Big)\Big) \mathrm{d}\bar{b}_\phi(L,K) \geqslant \ln\Big(\phi\Big(\Big(\frac{B(K)}{B(L)}\Big)^{\frac{1}{n}}\Big)\Big).$$

若 ϕ 是严格凸, 等号成立当且仅当 K 和 L 有类似的弦度.

证毕.

当 $\phi(x) = x^{-p}$ 且 $p \geqslant 1$ 时, (3.9) 变为下列 L_p- 弦对数 Minkowski 不等式.

推论 3.1 (L_p- 弦对数 Minkowski 不等式) 若 $K, L \in \mathcal{S}^n$, 且 $p \geqslant 1$, 则

$$\int_{S^{n-1}} \ln\Big(\frac{d(K,u)}{d(L,u)}\Big) \mathrm{d}\bar{b}_p \leqslant \frac{1}{n} \ln\Big(\frac{B(K)}{B(L)}\Big), \tag{3.17}$$

等号成立当且仅当 K 和 L 有类似的弦度, 其中 $\mathrm{d}b_p$ 是 L_p 混合弦测度, 有

$$\mathrm{d}b_p = \frac{1}{n}\Big(\frac{d(L,u)}{d(K,u)}\Big)^p d(L,u)^n \mathrm{d}S(u)$$

且

$$\mathrm{d}\bar{b}_p = \frac{1}{B_p(L,K)} \mathrm{d}b_p$$

是它的规范数, 并且 $B_p(L,K)$ 表示 L 与 K 的 L_p 混合弦积分.

致谢 感谢审稿专家给出的宝贵意见.

参 考 文 献

[1] Böröczky K J, Lutwak E, Yang D, et al. The log-Brunn-Minkowski inequality [J]. *Adv Math,* 2012, 231:1974–1997.

[2] Stancu A. The logarithmic Minkowski inequality for non-symmetric convex bodies [J]. *Adv Appl Math,* 2016, 73:43–58.

[3] Burago Y D, Zalgaller V A. Geometric Inequalities [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1988.

[4] Li C, Wang W. Log-Minkowski inequalities for the L_p-mixed quermassintegrals [J]. *J Inequal Appl,* 2019, 2019:85.

[5] Colesanti A, Cuoghi P. The Brunn-Minkowski inequality for the n-dimensional logarithmic capacity of convex bodies [J]. *Potential Math,* 2005, 22:289–304.

[6] Fathi M, Nelson B. Free Stein kernels and an improvement of the free logarithmic Sobolev inequality [J]. *Adv Math,* 2017, 317:193–223.

[7] Henk M, Pollehn H. On the log-Minkowski inequality for simplices and parallelepipeds [J]. *Acta Math Hung,* 2018, 55:141–157.

[8] Hou S, Xiao J. A mixed volumetry for the anisotropic logarithmic potential [J]. *J Geom Anal,* 2018, 28:2018–2049.

[9] Lv S. The ϕ-Brunn-Minkowski inequality [J]. *Acta Math Hung,* 2018, 156:226–239.

[10] Ma L. A new proof of the Log-Brunn-Minkowski inequality [J]. *Geom Dedicata,* 2015, 177:75–82.

[11] Saroglou C. Remarks on the conjectured log-Brunn-Minkowski inequality [J]. *Geom Dedicata,* 2015, 177:353–365.

[12] Wang W, Liu L. The dual log-Brunn-Minkowski inequality [J]. *Taiwan J Math,* 2016, 20:909–919.

[13] Wang W, Feng M. The log-Minkowski inequalities for quermassintegrals [J]. *J Math Inequal,* 2017, 11:983–995.

[14] Zhao C J. The log-Aleksandrov-Fenchel inequality [J]. *Mediterr J Math,* 2020, 17:96.

[15] Zhao C J. On areas log-Minkowski inequality [J]. *RACSAM,* 2021, 115:131.

[16] Zhao C J. Orlicz log-Minkowski inequality [J]. *Diff Geom Appl,* 2021, 74:101695.

[17] Zhao C J. Orlicz mixed chord-integrals [J]. *AIMS Mathematics,* 2020, 5(6):6639–6656.

[18] Lu F. Mixed chord-integrals of star bodies [J]. *J Korean Math Soc,* 2010, 47:277–288.

Orlicz ϕ-Chord Log-Minkowski Inequality

ZHAO Changjian[1]

[1]Department of Mathematics, China Jiliang University, Hangzhou 310018, China. E-mail: chjzhao@163.com; chjzhao@cjlu.edu.cn

Abstract In this paper, the author establishes the ϕ-chord logarithmic Minkowski inequality for mixed chord integrals by introducing the concepts of mixed chord measure and Orlicz mixed chord measure and using the Orlicz chord inequality recently established. The ϕ-chord logarithmic Minkowski inequality in two special cases yields the logarithmic chord Minkowski inequality and the L_p-logarithmic chord Minkowski inequality, respectively.

Keywords Mixed chord integral, L_p-Mixed chord integral, Orlicz mixed chord integral, Logarithmic Minkowski inequality, Chord logarithmic Minkowski inequality

2000 MR Subject Classification 46E30, 52A39

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 45 No. 1, 2024

by ALLERTON PRESS, INC., USA