数 学 年 刊 A 辑
2024, 45(1):39–52
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2024.0004

Lie-Yamaguti 代数的相对微分算子*

腾　文 [1]

提要 本文研究 Lie-Yamaguti 代数的相对微分算子. 首先给出 Lie-Yamaguti 代数上相对微分算子的概念并给出等价刻画. 随后, 引入 Lie-Yamaguti 代数上相对微分算子的上同调. 最后, 讨论 Lie-Yamaguti 代数上相对微分算子的无穷小形变.

关键词 Lie-Yamaguti 代数, 相对微分算子, 上同调, 形变
MR (2000) 主题分类 17A30, 17B56, 17B38
中图法分类 O152.5
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2024)01-0039-14

§1 引 言

为了研究 Lie 代数的非阿贝尔扩张, 文 [1] 引入了 Lie 代数上交叉同态的概念, 它也被用于研究 Cartan 型 Lie 代数 [2] 的表示. 最近, 交叉同态也称为相对微分算子或关于伴随表示的 1 权微分算子 [3−5] . 其后, 文 [6] 引入了相对微分李代数的上同调, 并研究了相对微分李代数一些性质. 进一步, 文 [7] 引入了 3- 李代数上交叉同态的上同调与形变. 文 [8] 研究了 Hopf 代数的交叉同态和微分 Hopf 代数的 Cartier-Kostant-Milnor-Moore 定理.

作为 Lie 代数和李三系的推广, Lie-Yamaguti 代数的概念可以追溯到 Nomizu[9] 关于齐次空间上不变仿射连通的研究, 以及 Yamaguti [10] 对一般李三系和李三代数的工作. 20 世纪 50 年代至 60 年代, 文 [11–12] 引入了它的表示并建立了上同调理论. 后来直到 21 世纪，Kinyon 和 Weinstein[13] 在研究 Courant 代数体时, 才将其重新命名为 Lie-Yamaguti 代数. 近年, Lie-Yamaguti 代数的进一步研究见文 [14–19]. 本文主要将 Lie 代数上相对微分算子 [1,6] 的概念推广到 Lie-Yamaguti 代数上, 并研究 Lie-Yamaguti 代数上相对微分算子的上同调与形变.

本文中所有向量空间和线性映射均在特征为 0 的域 $\mathbb{K}$ 上.

§2 Lie-Yamaguti 代数的相对微分算子

定义 2.1[13] 设 L 为 向量空间, $[\cdot,\cdot]$ 和 $\{\cdot,\cdot,\cdot\}$ 分别是 L 上的二元和三元线性运算, 对于任意 $a,b,c,s,t,m\in L$, 满足下列等式:

$$[a,b]=-[b,a], \tag{2.1}$$

本文 2023 年 1 月 10 日收到, 2024 年 2 月 29 日收到修改稿.
[1] 贵州财经大学数学与统计学院, 贵阳 550025. E-mail: tengwen@mail.gufe.edu.cn
*本文受国家自然科学基金 (No. 12161013) 和贵州省科技厅基金项目 (黔科合基础 -ZK[2023] 一般 025) 的资助.

$$\{a,b,c\}=-\{b,a,c\}, \tag{2.2}$$

$$[[a,b],c]+[[b,c],a]+[[c,a],b]+\{a,b,c\}+\{b,c,a\}+\{c,a,b\}=0, \tag{2.3}$$

$$\{[a,b],c,s\}+\{[b,c],a,s\}+\{[c,a],b,s\}=0, \tag{2.4}$$

$$\{a,b,[s,t]\}=[\{a,b,s\},t]+[s,\{a,b,t\}], \tag{2.5}$$

$$\{a,b,\{s,t,m\}\}=\{\{a,b,s\},t,m\}+\{s,\{a,b,t\},m\}+\{s,t,\{a,b,m\}\}, \tag{2.6}$$

则称 $(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\})$ 为 Lie-Yamaguti 代数.

Lie-Yamaguti 代数的同态 $\psi:(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\})\to(L',[\cdot,\cdot]',\{\cdot,\cdot,\cdot\}')$ 是线性映射，且满足 $\psi([a,b])=[\psi(a),\psi(b)]',\psi(\{a,b,c\})=\{\psi(a),\psi(b),\psi(c)\}',\forall a,b,c\in L$.

定义 2.2 [12] 设 $(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\})$ 为 Lie-Yamaguti 代数, V 为向量空间. 如果线性映射 $\rho:L\to\mathfrak{gl}(V)$ 和双线性映射 $\theta:\wedge^2L\to\mathfrak{gl}(V)$, 对任意 $x,y,z,s,t\in L$ 满足下列等式:

$$\theta([x,y],z)-\theta(x,z)\rho(y)+\theta(y,z)\rho(x)=0, \tag{2.7}$$

$$D(x,y)\rho(z)-\rho(z)D(x,y)-\rho(\{x,y,z\})=0, \tag{2.8}$$

$$\theta(x,[y,z])-\rho(y)\theta(x,z)+\rho(z)\theta(x,y)=0, \tag{2.9}$$

$$\theta(s,t)D(x,y)-D(x,y)\theta(s,t)+\theta(\{x,y,s\},t)+\theta(s,\{x,y,t\})=0, \tag{2.10}$$

$$\theta(x,\{y,z,s\})-\theta(z,s)\theta(x,y)+\theta(y,s)\theta(x,z)-D(y,z)\theta(x,s)=0, \tag{2.11}$$

其中 $D(x,y)=\theta(y,x)-\theta(x,y)-\rho[x,y]+\rho(x)\rho(y)-\rho(y)\rho(x)$, 则称 $(V;\rho,\theta)$ 是 L 的一个表示. 此时, V 也称为 L- 模.

由等式 (2.7)–(2.11) 可得下面等式

$$D([x,y],z)+D([y,z],x)+D([z,x],y)=0. \tag{2.12}$$

设 $(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\})$ 为 Lie-Yamaguti 代数. 如果对于给定 $a_1,a_2\in L$, 定义线性映射 $\mathrm{ad}:L\to\mathfrak{gl}(L)$ 和双线性映射 $\mathcal{R}:\wedge^2L\to\mathfrak{gl}(L)$ 为

$$\mathrm{ad}(a_1)(a_3):=[a_1,a_3],\quad \mathcal{R}(a_1,a_2)(a_3):=\{a_3,a_1,a_2\},\quad \forall a_3\in L,$$

则 $(\mathrm{ad},\mathcal{R})$ 是 L 在自身上的一个表示. 此外 $\mathcal{L}(a_1,a_2)=\mathcal{R}(a_2,a_1)-\mathcal{R}(a_1,a_2)+[\mathrm{ad}(a_1),\mathrm{ad}(a_2)]-\mathrm{ad}([a_1,a_2])$, 由等式 (2.3), $\mathcal{L}(a_1,a_2)(a_3)=\{a_1,a_2,a_3\}$. 此时, $(L;\mathrm{ad},\mathcal{R})$ 称为 L 的伴随表示.

定义 2.3 设 $(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\})$ 为 Lie-Yamaguti 代数, 并定义 L 的子空间 $C(L)$ 为

$$C(L):=\{x\in L\mid [x,y]=0,\ \{x,y,z\}=0,\ \forall y,z\in L\}.$$

则称 $C(L)$ 是 L 的中心.

定义 2.4 设 $(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\})$ 和 $(L',[\cdot,\cdot]',\{\cdot,\cdot,\cdot\}')$ 为两个 Lie-Yamaguti 代数, $(L';\rho,\theta)$ 是 L 的表示. 如果对任意 $x,y,z\in L,u,v,w\in L'$, 有

$$\rho(x)u,\theta(x,y)u\in C(L), \tag{2.13}$$

$$\rho(x)[u,v]'=0,\quad \rho(x)\{u,v,w\}'=0,\quad \theta(x,y)[u,v]'=0,\quad \theta(x,y)\{u,v,w\}'=0, \tag{2.14}$$

则 (ρ,θ) 称为 L 在 L' 的一个作用, 记为 $(L,L';\rho,\theta)$.

由等式 (2.13) 和 (2.14) 可得

$$D(x,y)u\in C(L),\quad D(x,y)[u,v]'=0,\quad D(x,y)\{u,v,w\}'=0. \tag{2.15}$$

命题 2.1　设 $\rho: L\to \mathfrak{gl}(L')$, $\theta: L\otimes L\to \mathfrak{gl}(L')$ 为 Lie-Yamaguti 代数 $(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\})$ 在另一个 Lie-Yamaguti 代数 $(L',[\cdot,\cdot]',\{\cdot,\cdot,\cdot\}')$ 的一个作用. 则 $L\ltimes L' := (L\oplus L',[\cdot,\cdot]_{\ltimes},\{\cdot,\cdot,\cdot\}_{\ltimes})$ 是 Lie-Yamaguti 代数, 其中对任意 $a,b,c\in L, u,v,w\in L'$, 运算 $[\cdot,\cdot]_{\ltimes}$, $\{\cdot,\cdot,\cdot\}_{\ltimes}$ 定义如下:

$$[a+u,b+v]_{\ltimes} := [a,b]+\rho(a)v-\rho(b)u+[u,v]', \tag{2.16}$$

$$\{a+u,b+v,c+w\}_{\ltimes} := \{a,b,c\}+D(a,b)w+\theta(b,c)u-\theta(a,c)v+\{u,v,w\}'. \tag{2.17}$$

Lie-Yamaguti 代数 $L\ltimes L'$ 称为 Lie-Yamaguti 代数 L 与 Lie-Yamaguti 代数 L' 关于作用 (ρ,θ) 的半直积.

定义 2.5　设 (ρ,θ) 为 Lie-Yamaguti 代数 $(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\})$ 在 Lie-Yamaguti 代数 $(L',[\cdot,\cdot]',\{\cdot,\cdot,\cdot\}')$ 的一个作用. 如果线性映射 $H: L\to L'$, 对任意的 $x,y,z\in L$ 满足

$$H[x,y]=\rho(x)(Hy)-\rho(y)(Hx)+[Hx,Hy]', \tag{2.18}$$

$$H\{x,y,z\}=D(x,y)(Hz)+\theta(y,z)(Hx)-\theta(x,z)(Hy)+\{Hx,Hy,Hz\}', \tag{2.19}$$

则称 H 为关于作用 (ρ,θ) 的相对微分算子. 进一步, $(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\},H)$ 称为相对微分 Lie-Yamaguti 代数, 简记为 (L,H).

注 2.1　(i) 如果 L 在 L' 的作用 $\rho=0,\theta=0$, 则 L 到 L' 的相对微分算子 H 是 L 到 L' 的 Lie-Yamaguti 代数同态.

(ii) L 到 L 的关于伴随作用 $(\mathrm{ad},\mathcal{R})$ 的相对微分算子是 1 权微分算子. 详见文 [3–4].

命题 2.2　设 (ρ,θ) 为 $(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\})$ 在 $(L',[\cdot,\cdot]',\{\cdot,\cdot,\cdot\}')$ 的一个作用, 则线性映射 H 是 L 到 L' 的相对微分算子当且仅当 $\phi_H: L\to L\ltimes L', x\mapsto x+Hx$ 是 Lie-Yamaguti 代数同态.

证　对任意 $x,y,z\in L$, 我们有

$$\begin{aligned}
\phi_H[x,y]&=[x,y]+H[x,y],\\
[\phi_H(x),\phi_H(y)]_{\ltimes}&=[x,y]+\rho(x)(Hy)-\rho(y)(Hx)+[Hx,Hy]',\\
\phi_H\{x,y,z\}&=\{x,y,z\}+H\{x,y,z\},\\
\{\phi_H(x),\phi_H(y),\phi_H(z)\}_{\ltimes}&=\{x,y,z\}+D(x,y)(Hz)+\theta(y,z)(Hx)\\
&\quad-\theta(x,z)(Hy)+\{Hx,Hy,Hz\}'.
\end{aligned}$$

因此, H 是 L 到 L' 的相对微分算子当且仅当 ϕ_H 为 L 到 $L\ltimes L'$ 的 Lie-Yamaguti 代数同

态. 证毕.

线性映射 H 的图像可以刻画 Lie-Yamaguti 代数上的相对微分算子.

推论 2.1 设 (ρ,θ) 为 $(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\})$ 在 $(L',[\cdot,\cdot]',\{\cdot,\cdot,\cdot\}')$ 的一个作用, 则线性映射 $H:L\to L'$ 是相对微分算子当且仅当映射 H 的图像 $Gr(H):=\{x+Hx\mid x\in L\}$ 是半直积 Lie-Yamaguti 代数 $L\ltimes L'$ 的子代数.

证 由命题 2.2, $Gr(H)=\mathrm{im}(\phi_H)$. 因此, 结论成立. 证毕.

定义 2.6 设 (ρ,θ) 是 Lie-Yamaguti 代数 $(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\})$ 在 Lie-Yamaguti 代数 $(L',[\cdot,\cdot]',\{\cdot,\cdot,\cdot\}')$ 的一个作用, $T:L'\to L$ 是线性映射. 如果对任意 $\lambda\in\mathbb{K},u,v,w\in L'$, T 满足下列等式:

$$
\begin{aligned}
[Tu,Tv]&=T(\rho(Tu)v-\rho(Tv)u+\lambda[u,v]'),\\
\{Tu,Tv,Tw\}&=T(D(Tu,Tv)w+\theta(Tv,Tw)u-\theta(Tu,Tw)v+\lambda\{u,v,w\}'),
\end{aligned}
$$

则称 T 是 L' 到 L 的关于作用 (ρ,θ) 的 λ 权相对罗巴算子.

命题 2.3 设 (ρ,θ) 为 $(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\})$ 在 $(L',[\cdot,\cdot]',\{\cdot,\cdot,\cdot\}')$ 的一个作用. 则可逆线性映射 $H:L\to L'$ 是相对微分算子当且仅当 $H^{-1}:L'\to L$ 是关于作用 (ρ,θ) 的可逆 1 权相对罗巴算子.

证 设 $H:L\to L'$ 是可逆相对微分算子, 则对任意 $u,v,w\in L'$, 我们有

$$
\begin{aligned}
[H^{-1}u,H^{-1}v]&=H^{-1}(H[H^{-1}u,H^{-1}v])\\
&=H^{-1}(\rho(H^{-1}u)v-\rho(H^{-1}v)u+[u,v]'),\\
\{H^{-1}u,H^{-1}v,H^{-1}w\}&=H^{-1}(H\{H^{-1}u,H^{-1}v,H^{-1}w\})\\
&=H^{-1}(D(H^{-1}u,H^{-1}v)w+\theta(H^{-1}v,H^{-1}w)u\\
&\quad-\theta(H^{-1}u,H^{-1}w)v+\{u,v,w\}').
\end{aligned}
$$

因此, $H^{-1}:L'\to L$ 是关于作用 (ρ,θ) 的 1 权相对罗巴算子.

反之, 如果 $H^{-1}:L'\to L$ 是可逆 1 权相对罗巴算子, 对任意 $x,y,z\in L$, 则存在 $u,v,w\in L'$, 使得 $x=H^{-1}(u),y=H^{-1}(v),z=H^{-1}(w)$, 从而有

$$
\begin{aligned}
H[x,y]&=H[H^{-1}(u),H^{-1}(v)]=H(H^{-1}(\rho(H^{-1}(u))(v)-\rho(H^{-1}(v))(u)+[u,v]'))\\
&=\rho(x)(Hy)-\rho(y)(Hx)+[Hx,Hy]',\\
H\{x,y,z\}&=H\{H^{-1}u,H^{-1}v,H^{-1}w\})\\
&=H(H^{-1}(D(H^{-1}u,H^{-1}v)w+\theta(H^{-1}v,H^{-1}w)u\\
&\quad-\theta(H^{-1}u,H^{-1}w)v+\{u,v,w\}'))\\
&=D(x,y)(Hz)+\theta(y,z)(Hx)-\theta(x,z)(Hy)+\{Hx,Hy,Hz\}'.
\end{aligned}
$$

因此, H 是相对微分算子. 证毕.

定义 2.7　设 H^1 和 H^2 是 Lie-Yamaguti 代数 $(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\})$ 到 Lie-Yamaguti 代数 $(L',[\cdot,\cdot]',\{\cdot,\cdot,\cdot\}')$ 关于作用 (ρ,θ) 的两个相对微分算子. 如果存在 Lie-Yamaguti 代数自同态 $\psi:L\to L$ 和 $\psi':L'\to L'$, 使得 (对任意 $x,y\in L, u\in L'$)

$$\psi'(H^1x) = H^2(\psi(x)), \tag{2.20}$$

$$\psi'(\rho(x)u) = \rho(\psi(x))\psi'(u), \tag{2.21}$$

$$\psi'(\theta(x,y)u) = \theta(\psi(x),\psi(x))\psi'(u), \tag{2.22}$$

则称序对 (ψ,ψ') 是相对微分算子 H^1 到 H^2 的同态. 特别地, 如果 ψ 和 ψ' 都是可逆的, 则称序对 (ψ,ψ') 是相对微分算子 H^1 到 H^2 的同构.

由等式 (2.22) 可得: $\psi'(D(x,y)u) = D(\psi(x),\psi(x))\psi'(u)$.

命题 2.4　设 H 是 $(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\})$ 到 $(L',[\cdot,\cdot]',\{\cdot,\cdot,\cdot\}')$ 关于作用 (ρ,θ) 的相对微分算子. 如果 $\psi\in\mathrm{End}(L)$ 和 $\psi'\in\mathrm{End}(L')$ 为 Lie-Yamaguti 代数自同态且 ψ' 可逆, 使得等式 (2.21)–(2.22) 成立, 则 $\psi'^{-1}\circ H\circ\psi$ 是 L 到 L' 关于作用 (ρ,θ) 的相对微分算子.

证　对任意 $x,y,z\in L$, 由等式 (2.21)–(2.22), 有

$$\begin{aligned}
&(\psi'^{-1}\circ H\circ\psi)[x,y]\\
=&\ \psi'^{-1}(H[\psi(x),\psi(y)])\\
=&\ \psi'^{-1}(\rho(\psi(x))(H(\psi(y))) - \rho(\psi(y))(H(\psi(x))) + [H(\psi(x)),H(\psi(y))]')\\
=&\ \rho(x)(\psi'^{-1}\circ H\circ\psi(y)) - \rho(y)(\psi^{-1}\circ H\circ\psi(x)) + [\psi^{-1}\circ H\circ\psi(x),\psi^{-1}\circ H\circ\psi(y)]'),\\
&(\psi'^{-1}\circ H\circ\psi)\{x,y,z\}\\
=&\ \psi'^{-1}(H\{\psi(x),\psi(y),\psi(z)\})\\
=&\ \psi'^{-1}(D(\psi(x),\psi(y))(H(\psi(z))) + \theta(\psi(y),\psi(z))(H(\psi(x))) - \theta(\psi(x),\psi(z))(H(\psi(y)))\\
&\ +\{H(\psi(x)),H(\psi(y)),H(\psi(z))\}')\\
=&\ D(x,y)(\psi'^{-1}\circ H\circ\psi(z)) + \theta(y,z)(\psi'^{-1}\circ H\circ\psi(x)) - \theta(x,z)(\psi'^{-1}\circ H\circ\psi(y))\\
&\ +\{\psi'^{-1}\circ H\circ\psi(x),\psi'^{-1}\circ H\circ\psi(y),\psi'^{-1}\circ H\circ\psi(z)\}').
\end{aligned}$$

因此, $\psi'^{-1}\circ H\circ\psi$ 是相对微分算子. 证毕.

§3　Lie-Yamaguti 代数上相对微分算子的上同调

首先回顾 Lie-Yamaguti 代数的上同调理论 [12]. 设 $(V;\rho,\theta)$ 为 Lie-Yamaguti 代数 $(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\})$ 的表示. $n+1$- 上链空间 $C^{n+1}_{\mathrm{LY}}(L,V)$ 定义为:

当 $n\geqslant 1$, $C^{n+1}_{\mathrm{LY}}(L,V) = \mathrm{Hom}(\overbrace{\wedge^2L\otimes\cdots\otimes\wedge^2L}^{n},V)\times\mathrm{Hom}(\overbrace{\wedge^2L\otimes\cdots\otimes\wedge^2L}^{n}\otimes L,V)$;

当 $n=0$, $C^{1}_{\mathrm{LY}}(L,V) = \mathrm{Hom}(L,V)$.

当 $n \geqslant 1$ 时, 对任意 $(f,g) \in C_{\mathrm{LY}}^{n+1}(L,V)$, $K_i = x_i \wedge y_i \in \wedge^2 L, (i=1,2,\cdots,n+1), z \in L$, 上边缘算子 $\delta = (\delta^I, \delta^{II}) : C_{\mathrm{LY}}^{n+1}(L,V) \to C_{\mathrm{LY}}^{n+2}(L,V)$, $(f,g) \mapsto (\delta_I(f,g), \delta_{II}(f,g))$ 为:

$$\begin{aligned}
&\delta^I(f,g)(K_1,\cdots,K_{n+1})\\
&=(-1)^n(\rho(x_{n+1})g(K_1,\cdots,K_n,y_{n+1})-\rho(y_{n+1})g(K_1,\cdots,K_n,x_{n+1})\\
&\quad -g(K_1,\cdots,K_n,[x_{n+1},y_{n+1}]))+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}D(K_k)f(K_1,\cdots,\widehat{K_k},\cdots,K_{n+1})\\
&\quad +\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n+1}(-1)^k f(K_1,\cdots,\widehat{K_k},\cdots,\{x_k,y_k,x_l\}\wedge y_l+x_l\wedge\{x_k,y_k,y_l\},\cdots,K_{n+1}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\delta^{II}(f,g)(K_1,\cdots,K_{n+1},z)\\
&=(-1)^n(\theta(y_{n+1},z)g(K_1,\cdots,K_n,x_{n+1})-\theta(x_{n+1},z)g(K_1,\cdots,K_n,y_{n+1}))\\
&\quad +\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}D(K_k)g(K_1,\cdots,\widehat{K_k},\cdots,K_{n+1},z)\\
&\quad +\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n+1}(-1)^k g(K_1,\cdots,\widehat{K_k},\cdots,\{x_k,y_k,x_l\}\wedge y_l+x_l\wedge\{x_k,y_k,y_l\},\cdots,K_{n+1},z)\\
&\quad +\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k g(K_1,\cdots,\widehat{K_k},\cdots,K_{n+1},\{x_k,y_k,z\}),
\end{aligned}$$

其中符号^表示下面的字母被删除.

当 $n=0$ 时, 对任意 $f \in C_{\mathrm{LY}}^1(L,V)$, 上边缘算子 $\delta = (\delta^I, \delta^{II}) : C_{\mathrm{LY}}^1(L,V) \to C_{\mathrm{LY}}^2(L,V)$, $f \mapsto (\delta_I(f), \delta_{II}(f))$ 为

$$\begin{aligned}
\delta^I(f)(x,y) &= \rho(x)f(y)-\rho(y)f(x)-f([x,y]),\\
\delta^{II}(f)(x,y,z) &= D(x,y)f(z)+\theta(y,z)f(x)-\theta(x,z)f(y)-f(\{x,y,z\}),
\end{aligned}$$

Yamaguti[12] 已证明 $\delta\circ\delta=0$. 因此, $(C_{\mathrm{LY}}^{\bullet}(L,V)=\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty}C_{\mathrm{LY}}^{n+1}(L,V),\delta)$ 为上链复形.

引理 3.1 设 H 是 $(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\})$ 到 $(L',[\cdot,\cdot]',\{\cdot,\cdot,\cdot\}')$ 关于作用 (ρ,θ) 的相对微分算子. 定义 $\rho_H : L \to \mathfrak{gl}(L')$ 和 $\theta_H : \wedge^2 L \to \mathfrak{gl}(L')$ 为

$$\begin{aligned}
\rho_H(x)u &:= \rho(x)u+[Hx,u]',\\
\theta_H(x,y)u &:= \theta(x,y)u+\{u,Hx,Hy\}',\quad \forall x,y\in L, u\in L',
\end{aligned}$$

则 $(L';\rho_H,\theta_H)$ 是 L 的一个表示.

证 首先, 对任意 $x,y,z,s,t \in L, u \in L'$, 直接计算, 有 $D_H(x,y)u = \theta_H(y,x)u - \theta_H(x,y)u + [\rho_H(x),\rho_H(y)]u - \rho_H[x,y]u = D(x,y)u + \{Hx,Hy,u\}'$. 进一步由等式 (2.1)–(2.19), 我们有

$$\begin{aligned}
&(\theta_H([x,y],z)-\theta_H(x,z)\rho_H(y)+\theta_H(y,z)\rho_H(x))u\\
&=\theta([x,y],z)u+\{u,H[x,y],Hz\}'-\theta(x,z)\rho(y)u-\{\rho(y)u,Hx,Hz\}'-\theta(x,z)[Hy,u]'
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad -\{[Hy,u]',Hx,Hz\}'+\theta(y,z)\rho(x)u+\{\rho(x)u,Hy,Hz\}'\\
&\quad +\theta(y,z)[Hx,u]'+\{[Hx,u]',Hy,Hz\}'\\
&=0,\\
&\quad (D_H(x,y)\rho_H(z)-\rho_H(z)D_H(x,y)-\rho_H(\{x,y,z\}))u\\
&=D(x,y)\rho(z)u+\{Hx,Hy,\rho(z)u\}'+D(x,y)[Hz,u]'+\{Hx,Hy,[Hz,u]'\}'\\
&\quad -\rho(z)D(x,y)u-[Hz,D(x,y)u]'-\rho(z)\{Hx,Hy,u\}'-[Hz,\{Hx,Hy,u\}']'\\
&\quad -\rho(\{x,y,z\})u-[H\{x,y,z\},u]'\\
&=0,\\
&\quad (\theta_H(x,[y,z])-\rho_H(y)\theta_H(x,z)+\rho_H(z)\theta_H(x,y))u\\
&=\theta(x,[y,z])u+\{u,Hx,H[y,z]\}'-\rho(y)\theta(x,z)u-[Hy,\theta(x,z)u]'-\rho(y)\{u,Hx,Hz\}'\\
&\quad -[Hy,\{u,Hx,Hz\}']'+\rho(z)\theta(x,y)u+[Hz,\theta(x,y)u]'\\
&\quad +\rho(z)\{u,Hx,Hy\}'+[Hz,\{u,Hx,Hy\}']'\\
&=0,\\
&\quad (\theta_H(s,t)D_H(x,y)-D_H(x,y)\theta_H(s,t)+\theta_H(\{x,y,s\},t)+\theta_H(s,\{x,y,t\}))u\\
&=\theta(s,t)D(x,y)u+\{D(x,y)u,Hs,Ht\}'+\theta(s,t)\{Hx,Hy,u\}'\\
&\quad +\{\{Hx,Hy,u\}',Hs,Ht\}'-D(x,y)\theta(s,t)u-\{Hx,Hy,\theta(s,t)u\}'\\
&\quad -D(x,y)\{u,Hs,Ht\}'-\{Hx,Hy,\{u,Hs,Ht\}'\}'+\theta(\{x,y,s\},t)u\\
&\quad +\{u,H\{x,y,s\},Ht\}'+\theta(s,\{x,y,t\}))u+\{u,Hs,H\{x,y,t\}\}'\\
&=0,\\
&\quad (\theta_H(x,\{y,z,s\})-\theta_H(z,s)\theta_H(x,y)+\theta_H(y,s)\theta_H(x,z)-D_H(y,z)\theta_H(x,s))u\\
&=\theta(x,\{y,z,s\})u+\{u,Hx,H\{y,z,s\}\}'-\theta(z,s)\theta(x,y)u-\{\theta(x,y)u,Hz,Hs\}'\\
&\quad -\theta(z,s)\{u,Hx,Hy\}'-\{\{u,Hx,Hy\}',Hz,Hs\}'+\theta(y,s)\theta(x,z)u\\
&\quad +\{\theta(x,z)u,Hy,Hs\}'+\theta(y,s)\{u,Hx,Hz\}'+\{\{u,Hx,Hz\}',Hy,Hs\}'\\
&\quad -D(y,z)\theta(x,s)u-\{Hy,Hz,\theta(x,s)u\}'-D(y,z)\{u,Hx,Hs\}'\\
&\quad -\{Hy,Hz,\{u,Hx,Hs\}'\}'\\
&=0.
\end{aligned}
$$

因此, $(L';\rho_H,\theta_H)$ 是 L 的表示. 证毕.

下面给出 Lie-Yamaguti 代数上相对微分算子的上同调.

设 $\delta_H=(\delta_H^I,\delta_H^{II}):C_{\rm LY}^{n+1}(L,L')\to C_{\rm LY}^{n+2}(L,L')$, $(f,g)\mapsto(\delta_H^I(f,g),\delta_H^{II}(f,g))$ 是 Lie-Yamaguti 代数 $(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\})$ 的上边缘算子, 其系数取自 $(L';\rho_H,\theta_H)$. 具体地, 当 $n\geqslant 1$

时, 对任意 $(f,g)\in C^{n+1}_{\mathrm{LY}}(L,L')$, $K_i=x_i\wedge y_i\in\wedge^2L$, $(i=1,2,\cdots,n+1), z\in L$,

$$\begin{aligned}
&\delta^I_H(f,g)(K_1,\cdots,K_{n+1})\\
&=(-1)^n(\rho(x_{n+1})g(K_1,\cdots,K_n,y_{n+1})+[Hx_{n+1},g(K_1,\cdots,K_n,y_{n+1})]'\\
&\quad-\rho(y_{n+1})g(K_1,\cdots,K_n,x_{n+1})-[Hy_{n+1},g(K_1,\cdots,K_n,x_{n+1})]'\\
&\quad-g(K_1,\cdots,K_n,[x_{n+1},y_{n+1}]))+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}(D(K_k)f(K_1,\cdots,\widehat{K_k},\cdots,K_{n+1})\\
&\quad+\{Hx_k,Hy_k,f(K_1,\cdots,\widehat{K_k},\cdots,K_{n+1})\}')\\
&\quad+\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n+1}(-1)^kf(K_1,\cdots,\widehat{K_k},\cdots,\{x_k,y_k,x_l\}\wedge y_l+x_l\wedge\{x_k,y_k,y_l\},\cdots,K_{n+1}),\\
&\delta^{II}_H(f,g)(K_1,\cdots,K_{n+1},z)\\
&=(-1)^n(\theta(y_{n+1},z)g(K_1,\cdots,K_n,x_{n+1})+\{g(K_1,\cdots,K_n,x_{n+1}),Hy_{n+1},Hz\}'\\
&\quad-\theta(x_{n+1},z)g(K_1,\cdots,K_n,y_{n+1})-\{g(K_1,\cdots,K_n,y_{n+1}),Hx_{n+1},Hz\}')\\
&\quad+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}(D(K_k)g(K_1,\cdots,\widehat{K_k},\cdots,K_{n+1},z)\\
&\quad+\{Hx_k,Hy_k,g(K_1,\cdots,\widehat{K_k}\cdots,K_{n+1},z)\}')\\
&\quad+\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n+1}(-1)^kg(K_1,\cdots,\widehat{K_k},\cdots,\{x_k,y_k,x_l\}\wedge y_l+x_l\wedge\{x_k,y_k,y_l\},\cdots,K_{n+1},z)\\
&\quad+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^kg(K_1,\cdots,\widehat{K_k},\cdots,K_{n+1},\{x_k,y_k,z\}).
\end{aligned}$$

当 $n=0$ 时, 对任意 $f\in C^1_{\mathrm{LY}}(L,L')$, 上边缘算子 $\delta_H=(\delta^I_H,\delta^{II}_H):C^1_{\mathrm{LY}}(L,L')\to C^2_{\mathrm{LY}}(L,L'), f\mapsto(\delta^I_H(f),\delta^{II}_H(f))$ 为

$$\begin{aligned}
\delta^I_H(f)(x,y)&=\rho(x)f(y)+[Hx,f(y)]'-\rho(y)f(x)-[Hy,f(x)]'-f([x,y]),\\
\delta^{II}_H(f)(x,y,z)&=D(x,y)f(z)+\{Hx,Hy,f(z)\}'+\theta(y,z)f(x)\\
&\quad+\{f(x),Hy,Hz\}'-\theta(x,z)f(y)-\{f(y),Hx,Hz\}'-f(\{x,y,z\}).
\end{aligned}$$

定义 $\wp:\wedge^2L\to C^1_{\mathrm{LY}}(L,L')$ 为

$$\wp(K)c=\theta(b,c)(Ha)-\theta(a,c)(Hb)+\{Ha,Hb,Hc\}',\quad \forall K=a\wedge b\in\wedge^2L,\quad c\in L.$$

定理 3.1 设 H 是 $(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\})$ 到 $(L',[\cdot,\cdot]',\{\cdot,\cdot,\cdot\}')$ 关于作用 (ρ,θ) 的相对微分算子. 则 $\delta_H(\wp(K))=0$, 即 $\wedge^2L\xrightarrow{\wp}C^1_{\mathrm{LY}}(L,L')\xrightarrow{\delta_H}C^2_{\mathrm{LY}}(L,L')$ 复合为零映射.

证 对任意 $x,y,z\in L$, 由等式 (2.1)–(2.19), 我们有

$$\begin{aligned}
&\delta^I_H(\wp(K))(x,y)\\
&=\rho(x)\wp(K)(y)+[Hx,\wp(K)(y)]'-\rho(y)\wp(K)(x)-[Hy,\wp(K)(x)]'-\wp(K)([x,y])\\
&=\rho(x)(\theta(b,y)(Ha)-\theta(a,y)(Hb)+\{Ha,Hb,Hy\}')
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+[Hx,\theta(b,y)(Ha)-\theta(a,y)(Hb)+\{Ha,Hb,Hy\}']'\\
&-\rho(y)(\theta(b,x)(Ha)-\theta(a,x)(Hb)+\{Ha,Hb,Hx\}')\\
&-[Hy,\theta(b,x)(Ha)-\theta(a,x)(Hb)+\{Ha,Hb,Hx\}']'\\
&-\theta(b,[x,y])(Ha)+\theta(a,[x,y])(Hb)-\{Ha,Hb,H[x,y]\}'\\
=\;&0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\delta_H^{II}(\wp(K))(x,y,z)\\
=\;&D(x,y)\wp(K)(z)+\{Hx,Hy,\wp(K)(z)\}'+\theta(y,z)\wp(K)(x)+\{\wp(K)(x),Hy,Hz\}'\\
&-\theta(x,z)\wp(K)(y)-\{\wp(K)(y),Hx,Hz\}'-\wp(K)(\{x,y,z\})\\
=\;&D(x,y)(\theta(b,z)(Ha)-\theta(a,z)(Hb)+\{Ha,Hb,Hz\}')\\
&+\{Hx,Hy,\theta(b,z)(Ha)-\theta(a,z)(Hb)+\{Ha,Hb,Hz\}'\}'\\
&+\theta(y,z)(\theta(b,x)(Ha)-\theta(a,x)(Hb)+\{Ha,Hb,Hx\}')\\
&+\{\theta(b,x)(Ha)-\theta(a,x)(Hb)+\{Ha,Hb,Hx\}',Hy,Hz\}'\\
&-\theta(x,z)(\theta(b,y)(Ha)-\theta(a,y)(Hb)+\{Ha,Hb,Hy\}')\\
&-\{\theta(b,y)(Ha)-\theta(a,y)(Hb)+\{Ha,Hb,Hy\}',Hx,Hz\}'\\
&-\theta(b,\{x,y,z\})(Ha)+\theta(a,\{x,y,z\})(Hb)-\{Ha,Hb,H\{x,y,z\}\}'\\
=\;&0.
\end{aligned}
$$

因此, $\delta_H(\wp(K))=0$. 证毕.

设 H 是 $(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\})$ 到 $(L',[\cdot,\cdot]',\{\cdot,\cdot,\cdot\}')$ 关于作用 (ρ,θ) 的相对微分算子. 定义相对微分算子 H 的 p- 上链空间为: 当 $p\geqslant 1$ 时, $\mathcal{C}_{\mathrm{H}}^p(L,L'):=C_{\mathrm{LY}}^p(L,L')$; 当 $p=0$ 时, $\mathcal{C}_{\mathrm{H}}^0(L,L'):=\wedge^2 L,\delta_H=\wp$. 则 $(\bigoplus_{p=0}^{\infty}\mathcal{C}_{\mathrm{H}}^p(L,L'),\delta_H)$ 是上链复形. 当 $p\geqslant 1$, 对应的 p- 上闭链空间与 p- 上边缘空间分别记成 $\mathcal{Z}_{\mathrm{H}}^p(L,L')$ 与 $\mathcal{B}_{\mathrm{H}}^p(L,L')$. p- 上同调群定义为 $\mathcal{H}_{\mathrm{H}}^p(L,L')=\frac{\mathcal{Z}_{\mathrm{H}}^p(L,L')}{\mathcal{B}_{\mathrm{H}}^p(L,L')}$, 称为 Lie-Yamaguti 代数上相对微分算子 H 的上同调, 其系数取自 L'.

本节最后, 我们证明相对微分算子之间的同态诱导了对应的上同调群之间的同态. 设 H 和 H' 是 Lie-Yamaguti 代数 $(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\})$ 到 Lie-Yamaguti 代数 $(L',[\cdot,\cdot]',\{\cdot,\cdot,\cdot\}')$ 关于作用 (ρ,θ) 的两个相对微分算子, (ψ,ψ') 是 H 到 H' 的同态且 ψ 可逆. 对任意 $(f,g)\in\mathcal{C}_{\mathrm{H}}^{n+1}(L,L')$, 定义线性映射 $\Phi=(\Phi^I,\Phi^{II}):\mathcal{C}_{\mathrm{H}}^{n+1}(L,L')\to\mathcal{C}_{\mathrm{H}'}^{n+1}(L,L'),(f,g)\mapsto(\Phi^I f,\Phi^{II}g)$ 为

$$
\begin{aligned}
(\Phi^I f)(K_1,\cdots,K_n)&=\psi'(f(\psi^{-1}(x_1)\wedge\psi^{-1}(y_1),\cdots,\psi^{-1}(x_n)\wedge\psi^{-1}(y_n))),\\
(\Phi^{II} g)(K_1,\cdots,K_n,z)&=\psi'(g(\psi^{-1}(x_1)\wedge\psi^{-1}(y_1),\cdots,\psi^{-1}(x_n)\wedge\psi^{-1}(y_n),\psi^{-1}(z))),
\end{aligned}
$$

其中 $K_i=x_i\wedge y_i\in\wedge^2 L, i=1,2,\cdots,n+1, z\in L$.

定理 3.2 上面定义的线性映射 Φ 是复形 $(\bigoplus_{p=1}^{\infty}\mathcal{C}_{\mathrm{H}}^{n}(L,L'),\delta_H)$ 到复形 $(\bigoplus_{p=1}^{\infty}\mathcal{C}_{\mathrm{H}'}^{n}(L,L'),\delta_{H'})$ 的上链映射, 即 $\Phi\circ\delta_H=\delta_{H'}\circ\Phi$. 换言之, 下面的图表可交换

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{C}_{\mathrm{H}}^{n+1}(L,L') & \xrightarrow{\delta_H} & \mathcal{C}_{\mathrm{H}}^{n+2}(L,L')\\ \Big\downarrow\Phi & & \Big\downarrow\Phi\\ \mathcal{C}_{\mathrm{H}'}^{n+1}(L,L') & \xrightarrow{\delta_{H'}} & \mathcal{C}_{\mathrm{H}'}^{n+2}(L,L').\end{array}$$

因此, Φ 诱导了对应的上同调群之间的同态 $\Phi_*:\mathcal{H}_{\mathrm{H}}^{n}(L,L')\to\mathcal{H}_{\mathrm{H}'}^{n}(L,L')$.

证 对任意 $(f,g)\in\mathcal{C}_{\mathrm{H}}^{n+1}(L,L')$, 由等式 (2.20)–(2.22), 我们有

$$\begin{aligned}
&\delta_{H'}^{I}(\Phi^I f,\Phi^{II}g)(K_1,\cdots,K_{n+1})\\
=&(-1)^n\big(\rho(x_{n+1})(\Phi^{II}g)(K_1,\cdots,K_n,y_{n+1})+[H'x_{n+1},(\Phi^{II}g)(K_1,\cdots,K_n,y_{n+1})]'\\
&-\rho(y_{n+1})(\Phi^{II}g)(K_1,\cdots,K_n,x_{n+1})-[H'y_{n+1},(\Phi^{II}g)(K_1,\cdots,K_n,x_{n+1})]'\\
&-(\Phi^{II}g)(K_1,\cdots,K_n,[x_{n+1},y_{n+1}])\big)+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}(D(K_k)(\Phi^I f)(K_1,\cdots,\widehat{K_k},\cdots,K_{n+1})\\
&+\{H'x_k,H'y_k,(\Phi^I f)(K_1,\cdots,\widehat{K_k},\cdots,K_{n+1})\}')\\
&+\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n+1}(-1)^k(\Phi^I f)(K_1,\cdots,\widehat{K_k},\cdots,\{x_k,y_k,x_l\}\wedge y_l+x_l\wedge\{x_k,y_k,y_l\},\cdots,K_{n+1}),\\
=&(-1)^n(\rho(x_{n+1})\psi'(g(\psi^{-1}(x_1)\wedge\psi^{-1}(y_1),\cdots,\psi^{-1}(x_n)\wedge\psi^{-1}(y_n),\psi^{-1}(y_{n+1})))\\
&+[H'x_{n+1},\psi'(g(\psi^{-1}(x_1)\wedge\psi^{-1}(y_1),\cdots,\psi^{-1}(x_n)\wedge\psi^{-1}(y_n),\psi^{-1}(y_{n+1})))]'\\
&-\rho(y_{n+1})\psi'(g(\psi^{-1}(x_1)\wedge\psi^{-1}(y_1),\cdots,\psi^{-1}(x_n)\wedge\psi^{-1}(y_n),\psi^{-1}(x_{n+1})))\\
&-[H'y_{n+1},\psi'(g(\psi^{-1}(x_1)\wedge\psi^{-1}(y_1),\cdots,\psi^{-1}(x_n)\wedge\psi^{-1}(y_n),\psi^{-1}(x_{n+1})))]'\\
&-\psi'(g(\psi^{-1}(x_1)\wedge\psi^{-1}(y_1),\cdots,\psi^{-1}(x_n)\wedge\psi^{-1}(y_n),\psi^{-1}([x_{n+1},y_{n+1}])))\\
&+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}(D(K_k)\psi'(f(\psi^{-1}(x_1)\wedge\psi^{-1}(y_1),\cdots,\widehat{\psi^{-1}(x_k)}\wedge\widehat{\psi^{-1}(y_k)},\cdots,\psi^{-1}(x_{n+1})\wedge\psi^{-1}(y_{n+1})))\\
&+\{H'x_k,H'y_k,\psi'(f(\psi^{-1}(x_1)\wedge\psi^{-1}(y_1),\cdots,\widehat{\psi^{-1}(x_k)}\wedge\widehat{\psi^{-1}(y_k)},\cdots,\psi^{-1}(x_{n+1})\wedge\psi^{-1}(y_{n+1})))\}')\\
&+\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n+1}(-1)^k\psi'(f(\psi^{-1}(x_1)\wedge\psi^{-1}(y_1),\cdots,\widehat{\psi^{-1}(x_k)}\wedge\widehat{\psi^{-1}(y_k)},\cdots,\psi^{-1}\{x_k,y_k,x_l\}\wedge\psi^{-1}(y_l)\\
&+\psi^{-1}(x_l)\wedge\psi^{-1}\{x_k,y_k,y_l\},\cdots,\psi^{-1}(x_{n+1})\wedge\psi^{-1}(y_{n+1})))\\
=&\psi'(\delta_H^I(f,g)(\psi^{-1}(x_1)\wedge\psi^{-1}(y_1),\cdots,\psi^{-1}(x_{n+1})\wedge\psi^{-1}(y_{n+1})))\\
=&\Phi^I(\delta_H^I(f,g)(K_1,\cdots,K_{n+1})),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\delta_{H'}^{II}(\Phi^I f,\Phi^{II}g)(K_1,\cdots,K_{n+1},z)\\
=&(-1)^n(\theta(y_{n+1},z)(\Phi^{II}g)(K_1,\cdots,K_n,x_{n+1})+\{(\Phi^{II}g)(K_1,\cdots,K_n,x_{n+1}),H'y_{n+1},H'z\}'\\
&-\theta(x_{n+1},z)(\Phi^{II}g)(K_1,\cdots,K_n,y_{n+1})-\{(\Phi^{II}g)(K_1,\cdots,K_n,y_{n+1}),H'x_{n+1},H'z\}')\\
&+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}(D(K_k)(\Phi^{II}g)(K_1,\cdots,\widehat{K_k},\cdots,K_{n+1},z)\\
&+\{H'x_k,H'y_k,(\Phi^{II}g)(K_1,\cdots,\widehat{K_k},\cdots,K_{n+1},z)\}')
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n+1}(-1)^k(\Phi^{II}g)(K_1,\cdots,\widehat{K_k},\cdots,\{x_k,y_k,x_l\}\wedge y_l+x_l\wedge\{x_k,y_k,y_l\},\cdots,K_{n+1},z)\\
&+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k(\Phi^{II}g)(K_1,\cdots,\widehat{K_k},\cdots,K_{n+1},\{x_k,y_k,z\})\\
=&(-1)^n(\theta(y_{n+1},z)\psi'(g(\psi^{-1}(x_1)\wedge\psi^{-1}(y_1),\cdots,\psi^{-1}(x_n)\wedge\psi^{-1}(y_n),\psi^{-1}(x_{n+1})))\\
&+\{\psi'(g(\psi^{-1}(x_1)\wedge\psi^{-1}(y_1),\cdots,\psi^{-1}(x_n)\wedge\psi^{-1}(y_n),\psi^{-1}(x_{n+1}))),H'y_{n+1},H'z\}'\\
&-\theta(x_{n+1},z)\psi'(g(\psi^{-1}(x_1)\wedge\psi^{-1}(y_1),\cdots,\psi^{-1}(x_n)\wedge\psi^{-1}(y_n),\psi^{-1}(y_{n+1})))\\
&-\{\psi'(g(\psi^{-1}(x_1)\wedge\psi^{-1}(y_1),\cdots,\psi^{-1}(x_n)\wedge\psi^{-1}(y_n),\psi^{-1}(y_{n+1}))),H'x_{n+1},H'z\}')\\
&+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}(D(K_k)\psi'(g(\psi^{-1}(x_1)\wedge\psi^{-1}(y_1),\cdots,\widehat{\psi^{-1}(x_k)}\wedge\widehat{\psi^{-1}(y_k)},\cdots,\\
&\psi^{-1}(x_{n+1})\wedge\psi^{-1}(y_{n+1}),\psi^{-1}(z)))\\
&+\{H'x_k,H'y_k,\psi'(g(\psi^{-1}(x_1)\wedge\psi^{-1}(y_1),\cdots,\widehat{\psi^{-1}(x_k)}\wedge\widehat{\psi^{-1}(y_k)},\cdots,\\
&\psi^{-1}(x_{n+1})\wedge\psi^{-1}(y_{n+1}),\psi^{-1}(z)))\}')\\
&+\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n+1}(-1)^k\psi'(g(\psi^{-1}(x_1)\wedge\psi^{-1}(y_1),\cdots,\widehat{\psi^{-1}(x_k)}\wedge\widehat{\psi^{-1}(y_k)},\cdots,\psi^{-1}\{x_k,y_k,x_l\}\wedge\psi^{-1}(y_l)\\
&+\psi^{-1}(x_l)\wedge\psi^{-1}\{x_k,y_k,y_l\},\cdots,\psi^{-1}(x_{n+1})\wedge\psi^{-1}(y_{n+1}),\psi^{-1}(z)))\\
&+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\psi'(g(\psi^{-1}(x_1)\wedge\psi^{-1}(y_1),\cdots,\widehat{\psi^{-1}(x_k)}\\
&\wedge\widehat{\psi^{-1}(y_k)},\cdots,\psi^{-1}(x_{n+1})\wedge\psi^{-1}(y_{n+1}),\psi^{-1}(\{x_k,y_k,z\})))\\
=&\psi'(\delta_H^{II}(f,g)(\psi^{-1}(x_1)\wedge\psi^{-1}(y_1),\cdots,\psi^{-1}(x_{n+1})\wedge\psi^{-1}(y_{n+1}),\psi^{-1}(z)))\\
=&\Phi^{II}(\delta_H^{II}(f,g)(K_1,\cdots,K_{n+1},z)).
\end{aligned}
$$

因此, $\Phi\circ\delta_H=\delta_{H'}\circ\Phi$. 进一步, Φ 诱导了对应的上同调群之间的同态 $\Phi_*:\mathcal{H}^n_{\mathrm{H}}(L,L')\to\mathcal{H}^n_{\mathrm{H}'}(L,L')$. 证毕.

§4 Lie-Yamaguti 代数上相对微分算子的无穷小形变

设 $(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\})$ 是 $\mathbb{K}$ 上的 Lie-Yamaguti 代数, $\mathbb{K}[t]$ 是单变量 t 的多项式环, 则 $\mathbb{K}[t]/(t^2)\otimes L$ 是 $\mathbb{K}[t]/(t^2)$- 模. 进一步, $\mathbb{K}[t]/(t^2)\otimes L$ 是 $\mathbb{K}[t]/(t^2)$ 上的 Lie-Yamaguti 代数, 其 Lie-Yamaguti 代数结构为

$$[f(t)x,g(t)y]=f(t)g(t)[x,y],\quad \{f(t)x,g(t)y,h(t)z\}=f(t)g(t)h(t)\{x,y,z\},$$

其中 $f(t),g(t),h(t)\in\mathbb{K}[t]/(t^2),x,y,z\in L$.

定义 4.1 设 H 是 $(L,[\cdot,\cdot],\{\cdot,\cdot,\cdot\})$ 到 $(L',[\cdot,\cdot]',\{\cdot,\cdot,\cdot\}')$ 关于作用 (ρ,θ) 的相对微分算子, $\Im:L\to L'$ 为线性映射. 如果 $H_t=H+t\Im\mod(t^2)$ 也是相对微分算子, 则称 $\Im$ 生成相对微分算子 H 的一个无穷小形变.

命题 4.1 如果 $\Im$ 生成相对微分算子 H 的一个无穷小形变, 则 $\Im$ 是相对微分算子 H 的一个 1- 上闭链.

证 假设 $H_t = H + t\Im$ 是相对微分算子, 则对任意 $x, y, z \in L$, 我们有

$$H_t[x,y] = \rho(x)(H_t y) - \rho(y)(H_t x) + [H_t x, H_t y]',$$
$$H_t\{x,y,z\} = D(x,y)(H_t z) + \theta(y,z)(H_t x) - \theta(x,z)(H_t y) + \{H_t x, H_t y, H_t z\}'.$$

比较上述等式两边 t^1 的系数, 有

$$\Im[x,y] = \rho(x)(\Im y) - \rho(y)(\Im x) + [Hx, \Im y]' + [\Im x, Hy]',$$
$$\Im\{x,y,z\} = D(x,y)(\Im z) + \theta(y,z)(\Im x) - \theta(x,z)(\Im y) + \{\Im x, Hy, Hz\}' + \{Hx, \Im y, Hz\}' + \{Hx, Hy, \Im z\}'.$$

因此, $\delta_H(\Im) = (\delta_H^I(\Im), \delta_H^{II}(\Im)) = 0$, 即 $\delta_{\mathrm{H}}(\Im) = 0$. 证毕.

定义 4.2 设 H 是 $(L, [\cdot,\cdot], \{\cdot,\cdot,\cdot\})$ 到 $(L', [\cdot,\cdot]', \{\cdot,\cdot,\cdot\}')$ 关于作用 (ρ, θ) 的相对微分算子, $H_t^1 = H + t\Im_1$ 和 $H_t^2 = H + t\Im_2$ 是 H 的两个单参数无穷小形变. 如果存在 $K = a \wedge b \in L \wedge L$, 使得 $(\mathrm{Id}_L + t\mathcal{L}(K), \mathrm{Id}_{L'} + tD(K))$ 是 H_t^1 到 H_t^2 的同态, 则称 H_t^1 与 H_t^2 等价.

特别地, 如果存在 $K = a \wedge b \in L \wedge L$, 使得 $(\mathrm{Id}_L + t\mathcal{L}(K), \mathrm{Id}_{L'} + tD(K))$ 是 H_t 到 H 的同态, 则称 H_t 是平凡的.

定理 4.1 如果两个单参数无穷小形变 $H_t^1 = H + t\Im_1, H_t^2 = H + t\Im_2$ 是等价的, 则 $\Im_1$ 与 $\Im_2$ 在 $\mathcal{H}_{\mathrm{H}}^1(L, L')$ 中属于同一个上同调类.

证 设 $(\mathrm{Id}_L + t\mathcal{L}(K), \mathrm{Id}_{L'} + tD(K))$ 是 H_t^1 到 H_t^2 的同态, 由等式 (2.20), 可得

$$(\mathrm{Id}_{L'} + tD(K))(H + t\Im_1)c = (H + t\Im_2)(\mathrm{Id}_L + t\mathcal{L}(K))(c), \quad \forall c \in L.$$

比较上面等式两边 t^1 的系数及由等式 (2.19), 有

$$(\Im_1 - \Im_2)(c) = \theta(b,c)(Ha) - \theta(a,c)(Hb) + \{Ha, Hb, Hc\}'.$$

因此, $(\Im_1 - \Im_2)(c) = \wp(K)c$, 即 $\Im_1(c) - \Im_2(c) = \delta_{\mathrm{H}}(K)(c) \in \mathcal{B}_{\mathrm{H}}^1(L, L')$. 即证 $\Im_1$ 与 $\Im_2$ 在 $\mathcal{H}_{\mathrm{H}}^1(L, L')$ 中属于同一个上同调类. 证毕.

致谢 感谢匿名评审专家对改善论文质量所提出的宝贵意见和建议.

参 考 文 献

[1] Lue A. Crossed homomorphisms of Lie algebras [J]. *Proc Cambridge Philos Soc*, 1966, 62(04):577–581.

[2] Pei Y, Sheng Y, Tang R, et al. Actions of monoidal categories and representations of Cartan type Lie algebras [J]. *J Inst Math Jussieu*, 2022, 22(5):2367–2402.

[3] Guo L, Keigher W. On differential Rota-Baxter algebras [J]. *J Pure Appl Algebra*, 2008, 212(3):522–540.

[4] Guo L, Sit W, Zhang R. Differential type operators and Grobner-Shirshov bases [J]. *J Symbolic Comput*, 2013, 52:97–123.

[5] Liu X, Guo L, Guo X. λ-Differential operators and λ-differential modules for the Virasoro algebra [J]. *Lin Multi Algebra*, 2019, 67(7):1308–1324.

[6] Jiang J, Sheng Y. Deformations, cohomologies and integrations of relative difference Lie algebras [J]. *J Algerba*, 2023, 614:535–563.

[7] Hou S, Hu M, Song L, et al. Cohomology and the controlling algebra of crossed homomorphisms on 3-Lie algebras [EB/OL]. arXiv:2212.02729.

[8] Guo L, Li Y, Sheng Y, et al. Crossed homomorphisms and Cartier-Kostant-Milnor-Moore theorem for difference Hopf algebras [EB/OL]. arXiv:2112.08434.

[9] Nomizu K. Invariant affine cinnections on homogeneous spaces [J]. *Amer J Math*, 1954, 76:33–65.

[10] Yamaguit K. On the Lie triple system and its generalization [J]. *J Sci Hiroshima Univ Ser A*, 1958, 21:155–160.

[11] Yamaguit K. On the cohomology space of Lie triple systems [J]. *Kumamoto J Sci A*, 1960, 5(1):44–52.

[12] Yamaguit K. On cohmology groups of general Lie triple systems [J]. *Kumamoto J Sci A*, 1969, 8:135–146.

[13] Kinyou M K, Weinstein A. Leibniz algebras, Courant algebroids and multiplications on reductive homogeneous spaces [J]. *Amer J Math*, 2001, 123:525–550.

[14] Lin J, Ma Y, Chen L. Quasi-derivations of Lie-Yamaguti algebras [J]. *J Algebra Appl*, 2023, 22(05):2350119.

[15] Sheng Y, Zhao J, Zhou Y. Nijenhuis operators, product structures and complex structures on Lie-Yamaguti algebras [J]. *J Algebra Appl*, 2021, 20(8):2150146.

[16] Sheng Y, Zhao J. Relative Rota-Baxter operators and symplectic structures on Lie-Yamaguti algebras [J]. *Comm Algebra*, 2022, 50(9):4056–4073.

[17] Takahashi N. Modules over quandle spaces and representations of Lie-Yamaguti algebras [EB/OL]. arXiv:2010.05564.

[18] Zhang T, Li J. Deformations and extensions of Lie-Yamaguti algebras [J]. *Lin Multi Algebra*, 2015, 63:2212–2231.

[19] Zhao J, Qiao Y. Cohomologies and deformations of relative Rota-Baxter operators on Lie-Yamaguti algebras [EB/OL]. arXiv:2204.04872v1.

Relative Differential Operators on Lie-Yamaguti Algebras

TENG Wen[1]

[1]School of Mathematics and Statistics, Guizhou University of Finance and Economics, Guiyang 550025, China. E-mail: tengwen@mail.gufe.edu.cn

Abstract In this paper, the author considers relative differential operators on Lie-Yamaguti algebras. Firstly, the concept of relative differential operators on Lie-Yamaguti algebras is given and its equivalent characterization is given. Then, the cohomology of relative differential operators on Lie-Yamaguti algebras is introduced. Finally, the infinitesimal deformation of relative differential operators on Lie-Yamaguti algebras is discussed.

Keywords Lie-Yamaguti algebras, Relative differential operator, Cohomology, Deformation

2000 MR Subject Classification 17A30, 17B56, 17B38

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 45 No. 1, 2024
by ALLERTON PRESS, INC., USA