数 学 年 刊 A 辑
2024, 45(1):97–108
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2024.0007

滞后型脉冲泛函微分方程有界性的 Lyapunov 逆定理*

李宝麟[1] 周云菲[1]

提要 本文通过建立滞后型脉冲泛函微分方程饱和解的存在唯一性定理, 在广义常微分方程与滞后型脉冲泛函微分方程等价的基础上, 研究了滞后型脉冲泛函微分方程关于一致有界性的 Lyapunov 逆定理.

关键词 kurzweil 积分, Lyapunov 泛函, 饱和解, 一致有界

MR (2000) 主题分类 34K12, 37B25

中图法分类 O175.1

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2024)01-0097-12

§1 引 言

1960 年, Mil'man 和 Myshkis 在文 [1] 中提出了不连续系统中的一类非线性微分方程, 即脉冲微分方程. 它是描述系统在某一时刻状态发生突变的重要工具, 在物理学、生物技术、经济学等方面都有着广泛的应用. 2006 年, Federson 等学者在文 [2] 中建立了滞后型脉冲泛函微分方程

$$\begin{cases}\dot{y}(t)=f(y_t,t), \quad t\neq t_k,\\ \triangle\, y(t_k)=I_k(y(t_k)), \quad k=1,2,\cdots\end{cases} \tag{1.1}$$

与广义常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}=\mathrm{D}F(x,t) \tag{1.2}$$

的等价关系, 其中 $t_k, k=1,2,\cdots$ 是预先设定的脉冲时刻, 满足 $t_0<t_1<\cdots<t_k<\cdots<+\infty$, 设 $t=t_k$ 时. 若 y 是左连续的且右极限 $y(t_k^+)$ 存在, 则有

$$\triangle\, y(t_k)=y(t_k^+)-y(t_k^-)=y(t_k^+)-y(t_k).$$

方程 (1.1) 的积分等价形式为:

$$y(t)=y(t_0)+\int_{t_0}^{t}f(y_s,s)\mathrm{d}s+\sum_{t_0<t_k<t}I_k(y(t_k)), \quad t\in[t_0,+\infty), \tag{1.3}$$

其中 $r>0,\ t_0\geqslant 0,\ y:[t_0-r,+\infty)\to\mathbb{R}^n,\ y_t:[-r,0]\to\mathbb{R}^n$ 且 $y_t(\theta)=y(t+\theta),\theta\in[-r,0],t\in[t_0,+\infty),\ f:S\times[t_0,+\infty)\to\mathbb{R}^n$,

$$S=\{y_t;y\in O,t\in[t_0,+\infty)\}\subset G^-([-r,0],\mathbb{R}^n). \tag{1.4}$$

本文 2022 年 6 月 16 日收到, 2023 年 6 月 23 日收到修改稿.

[1]兰州工商学院数学教学部, 兰州 730101. E-mail: hsy_519@126.com; 1819942171@qq.com

*本文受到国家自然科学基金 (No. 12161080) 的资助.

设 $O \subset G^{-}([t_0 - r, +\infty), \mathbb{R}^n)$ 是具有延拓性质的集合, $t \to f(y_t, t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是局部 Lebesgue 可积的, 且满足下列条件:

(H_1) 存在一个局部 Lebesgue 可积函数 $M : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$, 使得对每一个 $x \in O$, $u_1, u_2 \in [t_0, +\infty)$, 有

$$\Big| \int_{u_1}^{u_2} f(x_s, s)\mathrm{d}s \Big| \leqslant \int_{u_1}^{u_2} M(s)\mathrm{d}s.$$

(H_2) 存在一个局部 Lebesgue 可积函数 $L : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$, 使得对每一个 $x, y \in O, u_1, u_2 \in [t_0, +\infty)$, 有

$$\Big| \int_{u_1}^{u_2} [f(x_s, s) - f(y_s, s)]\mathrm{d}s \Big| \leqslant \int_{u_1}^{u_2} L(s)\|x_s - y_s\|\mathrm{d}s.$$

脉冲算子 $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, k = 1, 2, \cdots$ 满足:

(H_3) 对于 $x \in \mathbb{R}^n, k = 1, 2, \cdots$, 存在常数 $K_1 > 0$, 使得

$$|I_k(x)| \leqslant K_1.$$

(H_4) 对于 $x, y \in \mathbb{R}^n, k = 1, 2, \cdots$, 存在常数 $K_2 > 0$, 使得

$$|I_k(x) - I_k(y)| \leqslant K_1|x - y|.$$

有界性作为微分方程解的重要性质, 长期以来受到了许多学者的广泛研究[3−5]. 2012 年, Afonso 等学者利用 Lyapunov 泛函, 在文 [6] 中定义并建立了广义常微分方程的解关于一致有界, 拟一致最终有界及一致最终有界的相关概念和定理, 并将此结果推广到脉冲滞后系统. 2017 年, Federson 等学者在文 [7] 中定义了广义常微分方程的 Lyapunov 泛函在不含 Lipschitz 条件下的有界性, 并通过借助广义常微分方程与测度微分方程解之间的等价关系, 建立了测度微分方程关于有界性的相关结果. 2019 年, Federson 等学者在文 [8] 中将广义常微分方程在 $[t_0, t_0 + \sigma]$ 上关于初值问题的解延拓到 $[t_0, +\infty)$, 进一步得到了广义常微分方程在 $[t_0, +\infty)$ 上关于初值问题饱和解的存在性定理. 2022 年, Andrade da Silva 等学者在文 [9] 中研究了广义常微分方程关于有界性的 Lyapunov 逆定理, 这一定理为讨论微分方程稳定性与有界性之间的关系提供了新的方法.

受到以上工作的启示, 本文通过建立滞后型脉冲泛函微分方程 (1.1) 饱和解的存在唯一性定理, 在广义常微分方程 (1.2) 与滞后型脉冲泛函微分方程 (1.1) 的解等价的基础上, 研究了滞后型脉冲泛函微分方程 (1.1) 的 Lyapunov 泛函在没有 Lipschitz 条件下的一致有界性, 进而建立了滞后型脉冲泛函微分方程 (1.1) 关于一致有界性的 Lyapunov 逆定理.

本文包括三个部分: 第二部分介绍了本文所用到的一些基本概念及引理, 第三部分建立了滞后型脉冲泛函微分方程 (1.1) 关于一致有界性的 Lyapunov 逆定理, 并用一个例子证明了该定理的有效性.

§2 预备知识

设 X 是定义了范数 $\|.\|$ 的 Banach 空间, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ 是一个紧区间. 如果函数 φ 的左右极限 $\lim\limits_{s \to t^-} \varphi(s) = \varphi(t^-), t \in (a, b]$, $\lim\limits_{s \to t^+} \varphi(s) = \varphi(t^+), t \in [a, b)$ 分别存在, 则称函数 $\varphi : [a, b] \to X$ 为 $[a, b]$ 上的正则函数. 记 $G^{-}([a, b], X)$ 为左连续的正则函数 $\varphi : [a, b] \to X$ 构成的空间, 其范数定义为 $\|\varphi\|_\infty = \sup\limits_{a \leqslant t \leqslant b} \|\varphi(t)\|$, 则 $G^{-}([a, b], X)$ 依范数 $\|\cdot\|_\infty$ 构成 Banach 空间.

定义 2.1 [2] 称函数 $U:[a,b]\times[a,b]\to X$ 在区间 $[a,b]$ 上是 kurzweil 可积的, 若存在向量 $I\in\mathbb{R}^n$, 使得对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在正值函数 $\delta(t):[a,b]\to(0,+\infty)$, 使得对 $[a,b]$ 的任何 δ– 精细分划 $D=\{(\tau_i,[\alpha_{i-1},\alpha_i]),i=1,2,\cdots,k\}$, 都有

$$\Big\|\sum_{i=1}^{k}[U(\tau_i,\alpha_i)-U(\tau_i,\alpha_{i-1})]-I\Big\|<\varepsilon.$$

此时定义 $\int_a^b \mathrm{D}U(\tau,t)=I$ 为 U 在区间 $[a,b]$ 上的 kurzweil 积分. 特别地, 当 $U(\tau,t)=f(\tau)g(t)$ 时, 有 $\int_a^b \mathrm{D}U(\tau,t)=\int_a^b f(s)\mathrm{d}g(s)$.

引理 2.1 [2] 任意在 $[a,b]$ 上 Lebesgue 可积的函数 f 一定在 $[a,b]$ 上 kurzweil 可积. 若函数 f 在 $[a,b]$ 上 kurzweil 可积且非负, 则 f 在 $[a,b]$ 上 Lebesgue 可积.

定义 2.2 [2] 设 $\mathcal{O}\subset X$ 是一个开集, $\Omega=\mathcal{O}\times[t_0,+\infty)$. 称函数 $x:[a,b]\to X,[a,b]\subset[t_0,+\infty)$ 为广义常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}=\mathrm{D}F(x,t)$$

的解, 是指对所有的 $t\in[a,b],(x(t),t)\in\Omega$, 都有

$$x(s_2)-x(s_1)=\int_{s_1}^{s_2}\mathrm{D}F(x(\tau),t),$$

其中 $s_1,s_2\in[a,b]$.

定义 2.3 [9] 若存在一个左连续不减函数 $H:[t_0,+\infty)\to\mathbb{R}$, 使得 $F:\Omega\to X$ 满足

(B_1) 对所有 $(x,s_i)\in\Omega,i=1,2$, 有

$$\|F(x,s_2)-F(x,s_1)\|\leqslant|H(s_2)-H(s_1)|;\tag{2.1}$$

(B_2) 对所有 $(x,s_i),(y,s_i)\in\Omega,i=1,2$, 有

$$\|F(x,s_2)-F(x,s_1)-F(y,s_2)+F(y,s_1)\|\leqslant|H(s_2)-H(s_1)|\|x-y\|,\tag{2.2}$$

则称 $F:\Omega\to X$ 属于 $\mathcal{F}(\Omega,H)$, 即为 $F\in\mathcal{F}(\Omega,H)$.

引理 2.2 [9] 设 $F:\Omega\to X$ 满足 (2.1) 式, 若 $[a,b]\in[t_0,+\infty)$, 并且 $x:[a,b]\to X$ 是广义常微分方程 (1.2) 的解, 则对任意的 $t,s\in[a,b]$, 不等式

$$\|x(t)-x(s)\|\leqslant|H(t)-H(s)|$$

成立, 并且在 $[a,b]$ 上, H 连续的点就是 x 连续的点.

设 $F:\Omega\to X$ 满足 (2.1)–(2.2) 式, 定义

$$\Omega_F:=\{(x,t)\in\Omega:x+F(x,t^+)-F(x,t)\in\mathcal{O}\}.$$

引理 2.3 [9] 设 $F\in\mathcal{F}(\Omega,H)$, 其中 $H:[t_0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 是一个左连续的不减函数, 若 $(x_0,t_0)\in\Omega_F$, 则存在广义常微分方程 (1.2) 在初值条件 $x(t_0)=x_0$ 下的唯一饱和解 $x:[t_0,+\infty)\to X$.

引理 2.4 [9] 设 $\Omega=\mathcal{O}\times[t_0,+\infty),F\in\mathcal{F}(\Omega,H)$, 其中 $H:[t_0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 是一个左连续的不减函数, 则对于每个 $(x_0,\tau_0)\in\Omega$, 都存在广义常微分方程 (1.2) 定义在区间 $[\tau_0,+\infty)$ 上的唯一饱和解, 其中 $x(\tau_0)=x_0$.

定义 2.4 [7] 广义常微分方程 (1.2) 被称为

(i) 一致有界的, 若对每个 $\alpha>0$, 存在 $M=M(\alpha)>0$, 使得当 $x_0\in\mathcal{O}$ 且 $\|x_0\|<\alpha$ 时, 对任意的 $t\in[t_0,+\infty)$, 有 $\|x(t,t_0,x_0)\|<M$;

(ii) 拟一致最终有界的, 若存在一个常数 $C>0$, 使得对每个 $\alpha>0$, 总存在 $T=T(\alpha)>0$, 当 $x_0\in\mathcal{O}$ 且 $\|x_0\|<\alpha$ 时, 对任意的 $t\in[t_0+T(\alpha),+\infty)$, 有 $\|x(t,t_0,x_0)\|<C$;

(iii) 一致最终有界的, 若方程 (2.1) 既是一致有界的又是拟一致最终有界的.

注 2.1 $x(s,t_0,x_0)$ 表示广义常微分方程在初值条件 $x(t_0)=x_0$ 下的饱和解.

引理 2.5[7] 设泛函 $V:[t_0,+\infty)\times X\to\mathbb{R}$, 使得对每个在 $(\alpha,\beta]$ 上左连续的函数 $z:[\alpha,\beta]\to X$, 函数 $[\alpha,\beta]\ni t\to V(t,z(t))$ 在 $(\alpha,\beta]$ 上左连续. 再设泛函 V 满足下列条件:

(E_1) 存在两个单调增函数 $p,b:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, 使得 $p(0)=b(0)=0$,

$$\lim_{s\to+\infty}b(s)=+\infty,$$

且对于 $(t,x)\in[t_0,+\infty)\times X$, 有

$$b(\|x\|)\leqslant V(t,x)\leqslant p(\|x\|).$$

(E_2) 对于广义常微分方程 (1.2) 的每个解 $x:[t_0,+\infty)\to X$, 当 $t_0\leqslant t\leqslant s<+\infty$ 时, 有

$$V(s,x(s))-V(t,x(t))\leqslant 0.$$

则广义常微分方程 (1.2) 是一致有界的.

引理 2.6[2] 设 $O\subset G^-([t_0-r,+\infty),\mathbb{R}^n)$ 是一个开集, O 具有延拓性是指对任意的 $y\in O,\overline{t}\in[t_0-r,+\infty)$, 都有 $\overline{y}\in O$, 其中函数 $\overline{y}$ 定义为

$$\overline{y}(t)=\begin{cases}y(t), & t_0-r\leqslant t\leqslant\overline{t},\\ y(\overline{t}), & \overline{t}<t<+\infty.\end{cases}$$

引理 2.7[2] 设 $t_0\geqslant 0, r\geqslant 0$. 给定 $y\in O$ 且 $t\in[t_0,+\infty)$, 定义函数

$$G(y,t)(\vartheta)=\begin{cases}0, & t_0-r\leqslant\vartheta\leqslant t_0,\\ \int_{t_0}^{\vartheta}f(y_s,s)\mathrm{d}s, & t_0\leqslant\vartheta\leqslant t<+\infty,\\ \int_{t_0}^{t}f(y_s,s)\mathrm{d}s, & t_0\leqslant t\leqslant\vartheta<+\infty\end{cases}$$

及

$$J(y,t)(\vartheta)=\sum_{k=1}^{m}H_{t_k}(t)H_{t_k}(\vartheta)I_k y(t_k),$$

其中 $H_{t_k}(t)$ 表示左连续的 Heavyside 函数, 且

$$H_{t_k}(t)=\begin{cases}0, & t_0\leqslant t\leqslant t_k,\\ 1, & t>t_k.\end{cases}$$

定义广义常微分方程 (1.2) 中的函数 $F:O\times[t_0,+\infty)\to G^-([t_0-r,+\infty),\mathbb{R}^n)$ 为

$$F(y,t)(\vartheta)=G(y,t)(\vartheta)+J(y,t)(\vartheta).\tag{2.3}$$

则滞后型脉冲泛函微分方程 (1.1) 可以被转化为广义常微分方程 (1.2) 的形式.

引理 2.8[2] 假设 $f:S\times[t_0,+\infty)\to\mathbb{R}^n$ 满足条件 (H_1)–(H_2), 脉冲算子 $I_k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n, k=1,2,\cdots$ 满足条件 (H_3)–(H_4), $\Omega_1=O\times[t_0,+\infty)$. 则由 (2.3) 式给出的函数 F :

$\Omega_1 \to G^-([t_0-r,+\infty),\mathbb{R}^n)$ 属于 $\mathcal{F}(\Omega_1,h)$, 其中 $h(t)=h_1(t)+h_2(t)$,

$$h_1(t)=\int_{t_0}^{t}[L(s)+M(s)]\mathrm{d}s,$$

$$h_2(t)=\max\{K_1,K_2\}\sum_{k=1}^{m}H_{t_k}(t).$$

引理 2.9[2] 设 $O\subset G^-([t_0-r,+\infty),\mathbb{R}^n)$ 是具有延拓性质的开集, S 由 (1.4) 式给出且 $\phi\in S$. 考虑方程 (1.1), 其中 $f: G^-([-r,0],\mathbb{R}^n)\times[t_0,+\infty)\to\mathbb{R}^n, t\to f(y_t,t)$ 在 $[t_0,+\infty)$ 上是局部 Lebesgue 可积的, 且满足条件 $(\mathrm{H}_1)-(\mathrm{H}_4)$.

(i) 若 $y:[t_0-r,+\infty)\to\mathbb{R}^n$ 是滞后型脉冲泛函微分方程 (1.1) 在初值条件 $y_{t_0}=\phi$ 下的解, 对于任意的 $t\in[t_0,+\infty)$, 设

$$x(t)(\vartheta)=\begin{cases}y(\vartheta), & t_0-r\leqslant\vartheta\leqslant t,\\ y(t), & t\leqslant\vartheta<+\infty.\end{cases}$$

则函数 $x(t)\in G^-([t_0-r,+\infty),\mathbb{R}^n)$ 是广义常微分方程 (1.2) 在 $[t_0,+\infty)$ 上的解.

(ii) 反之, 若 $x:[t_0,+\infty)\to O$ 是广义常微分方程 (2.1) 满足初值条件

$$x(t_0)(\vartheta)=\begin{cases}\phi(\vartheta-t_0), & t_0-r\leqslant\vartheta\leqslant t_0,\\ x(t_0)(t_0), & t_0\leqslant\vartheta<+\infty\end{cases}$$

的解, 其中 F 由 (2.4) 式给出. 对于每个 $\vartheta\in[t_0-r,+\infty)$, 定义

$$y(\vartheta)=\begin{cases}x(t_0)(\vartheta), & t_0-r\leqslant\vartheta\leqslant t_0,\\ x(\vartheta)(\vartheta), & t_0\leqslant\vartheta<+\infty.\end{cases}$$

则 $y:[t_0-r,+\infty)\to\mathbb{R}^n$ 是滞后型脉冲泛函微分方程 (1.1) 的解.

§3　主要结果

本节令 $F\in\mathcal{F}(\Omega_1,h)$, $\Omega_1=O\times[t_0,+\infty)$, $h:[t_0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 是一个左连续的不减函数. 设集合 $E_c=\{\psi\in G^-([-r,0],\mathbb{R}^n):\|\psi\|_\infty<c\}, \overline{E}_\rho=\{\psi\in G^-([-r,0],\mathbb{R}^n):\|\psi\|_\infty\leqslant\rho\}, 0<\rho<c$.

定义 3.1 滞后型脉冲泛函微分方程 (1.1) 被称为

(i) 一致有界的, 若对每个 $\alpha>0$, 存在 $M=M(\alpha)>0$, 使得当 $\phi\in S$ 且 $\|\phi\|_\infty<\alpha$ 时, 对任意的 $t\in[t_0,+\infty)$, 有 $\|y(t,t_0,\phi)\|<M$;

(ii) 拟一致最终有界的, 若存在一个常数 $C>0$, 使得对每个 $\alpha>0$, 总存在一个常数 $T=T(\alpha)>0$, 当 $\phi\in S$ 且 $\|\phi\|_\infty<\alpha$ 时, 对任意的 $t\in[t_0+T(\alpha),+\infty)$, 有 $\|y(t,t_0,\phi)\|<C$;

(iii) 一致最终有界的, 若方程 (1.1) 既是一致有界的又是拟一致最终有界的.

为了证明定理 3.2–3.3 成立, 首先建立关于滞后型脉冲泛函微分方程 (1.1) 饱和解的存在唯一性定理.

定理 3.1 设 $F\in\mathcal{F}(\Omega_1,h)$, 其中 $h:[t_0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 是在 $(t_0,+\infty)$ 上左连续的不减函数. 若 $\Omega_1=\Omega_F=\{(y_t,t)\in\Omega_1: y_t+F(y_t,t^+)-F(y_t,t)\in O\}$, 则对于每个 $(\phi,t_0)\in\Omega_F$, 都存在滞后型脉冲泛函微分方程 (1.1) 在初值条件 $y_{t_0}=\phi$ 下的唯一饱和解 $y:[t_0-r,+\infty)\to\mathbb{R}^n$.

证 存在性. 设 $(\phi,t_0)\in\Omega_F$, 并考虑 $x_0:[t_0-r,+\infty)\to O$, 其中

$$x_0(\vartheta)=\begin{cases}\phi(\vartheta-t_0), & t_0-r\leqslant\vartheta\leqslant t_0,\\ x(t_0)(t_0), & t_0\leqslant\vartheta<+\infty.\end{cases}$$

由条件 $\Omega_1=\Omega_F=\{(y_t,t)\in\Omega_1: y_t+F(y_t,t^+)-F(y_t,t)\in O\}$ 及引理 2.3 可知, 存在广义常微分方程 (1.2) 在初值条件 $x(t_0)=x_0$ 下的唯一饱和解 $x:[t_0,+\infty)\to O$. 则由引理 2.9(ii), 对每个 $\vartheta\in[t_0-r,+\infty)$, 都存在滞后型脉冲泛函微分方程 (1.1) 在初值条件 $y_{t_0}=\phi$ 下的饱和解 $y(\vartheta)$, 其中

$$y(\vartheta)=\begin{cases}x(t_0)(\vartheta), & t_0-r\leqslant\vartheta\leqslant t_0,\\ x(\vartheta)(\vartheta), & t_0\leqslant\vartheta<+\infty.\end{cases}$$

唯一性. 设 $\overline{y}:[t_0-r,+\infty)\to X$ 是滞后型脉冲泛函微分方程 (1.1) 在初值条件 $\overline{y}_{t_0}=\phi$ 下的另一个解. 由引理 2.9(i), 存在广义常微分方程 (1.1) 在初值条件 $\overline{x}(t_0)=x_0$ 下的解 $\overline{x}:[t_0,+\infty)\to O$, 其中

$$\overline{x}(t)(\vartheta)=\begin{cases}\overline{y}(\vartheta), & t_0-r\leqslant\vartheta\leqslant t,\\ \overline{y}(t), & t\leqslant\vartheta<+\infty.\end{cases}$$

又由引理 2.4, 对于任意的 $t\in[t_0,+\infty)$, 都有 $\overline{x}(t)=x(t)$. 从而, 对于任意的 $\vartheta\in[t_0-r,t_0]$, 有

$$y(\vartheta)=x(t_0)(\vartheta)=\overline{x}(t_0)(\vartheta)=\overline{y}(\vartheta).$$

对于任意的 $\vartheta\in[t_0,+\infty)$, 有

$$y(\vartheta)=x(\vartheta)(\vartheta)=\overline{x}(\vartheta)(\vartheta)=\overline{y}(\vartheta).$$

因此, 对于任意的 $\vartheta\in[t_0-r,+\infty)$, 都有 $y(\vartheta)=\overline{y}(\vartheta)$. 这样即证, 滞后型脉冲泛函微分方程 (1.1) 饱和解是唯一的.

定理 3.2 设泛函 $U:[t_0,+\infty)\times\overline{E}_\rho\to\mathbb{R}$, 使得对每个在 $(\alpha,\beta]$ 上左连续的函数 $\psi:[\alpha,\beta]\to\overline{E}_\rho$, 函数 $[\alpha,\beta]\ni t\to U(t,\psi)$ 在 $(\alpha,\beta]$ 上左连续. 再假设泛函 U 满足下列条件:

(G_1) 存在两个单调增函数 $p,b:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, 使得 $p(0)=b(0)=0$,

$$\lim_{s\to+\infty}b(s)=+\infty,\tag{3.1}$$

且对于 $(t,\psi)\in[t_0,+\infty)\times\overline{E}_\rho$, 有

$$b(\|\psi\|_\infty)\leqslant U(t,\psi)\leqslant p(\|\psi\|_\infty).\tag{3.2}$$

(G_2) 当 $t_0\leqslant t<s<+\infty$ 时, 对于 $\psi,\overline{\psi}\in\overline{E}_\rho$, 有

$$U(s,\overline{\psi})-U(t,\psi)\leqslant 0.$$

则滞后型脉冲泛函微分方程 (1.1) 是一致有界的.

证 设 $\alpha>0$, 因为 $p(\alpha)>0$, 由 (3.1) 式可知, 存在 $M=M(2\alpha)>0$, 使得当 $s\geqslant M$ 时, 有 $p(\alpha)<b(s)$. 特别地, 令 $s=M$, 则有

$$p(\alpha)<b(M).$$

现设 $\psi,\overline{\psi}\in\overline{E}_\rho$, $y(\cdot,t_0,\phi):[t_0,+\infty)\to O$ 是滞后型脉冲泛函微分方程 (1.1) 在初值条件 $y_{t_0}=\phi$ 下的解, 其中 $\|\phi\|_\infty<\alpha$.

由条件 (G_1)–(G_2) 可知, 当 $t_0 \leqslant t < s < +\infty$ 时, 有

$$U(s,\overline{\psi}) \leqslant U(t,\psi) \leqslant p(\|\widetilde{\psi}\|_\infty) \leqslant p(\alpha) < b(M),$$

即

$$U(s,\overline{\psi}) < b(M), \quad s \geqslant t_0. \tag{3.3}$$

下证当 $s \geqslant t_0$ 时, 有 $\|y_s\|_\infty < M$.

假设存在 $\widetilde{s} \in [t_0,+\infty)$, 使得 $\|y_{\widetilde{s}}\|_\infty = \|\widetilde{\phi}\|_\infty \geqslant M$. 由于 b 是增函数, 结合 (3.2) 式得

$$U(\widetilde{s},\widetilde{\phi}) \geqslant b(\|\widetilde{\phi}\|_\infty) \geqslant b(M).$$

这与 (3.3) 式矛盾. 因此, 当 $s \geqslant t_0$ 时, 有 $\|y_s\|_\infty < M$. 即证滞后型脉冲泛函微分方程 (1.1) 是一致有界的.

下述用 $y(\cdot,t,\psi)$ 表示滞后型脉冲泛函微分方程 (1.1) 饱和解, 假设滞后型脉冲泛函微分方程 (1.1) 是一致有界的. 对任意的 $t \in [t_0,+\infty), \psi \in \overline{E}_\rho$, 定义

$$U(t,\psi) = \sup_{\tau \in [t-r,+\infty)} \|y(\tau,t,\psi)\|. \tag{3.4}$$

定理 3.3 假设滞后型脉冲泛函微分方程 (1.1) 是一致有界的, 则存在泛函 $U : [t_0,+\infty) \times \overline{E}_\rho \to \mathbb{R}$ 满足下列条件:

(i) 对于每个 $\psi \in \overline{E}_\rho$, $U(\cdot,\psi)$ 在 $(t_0,+\infty)$ 上是左连续的;

(ii) 存在严格增的连续函数 $b : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, 使得 $b(0) = 0$, $\lim\limits_{s\to+\infty} b(s) = +\infty$, 且对于 $(t,\psi) \in [t_0,+\infty) \times \overline{E}_\rho$, 有 $b(\|\psi\|_\infty) \leqslant U(t,\psi)$;

(iii) 对于滞后型脉冲泛函微分方程 (1.1) 的每个解 $y : [t_0 - r,+\infty) \to \mathbb{R}^n$, 有

$$\dot{U}(t,\psi) := \lim_{\eta\to 0^+} \sup \frac{U(t+\eta, y_{t+\eta}(t,\psi)) - U(t, y_t(t,\psi))}{\eta} \leqslant 0, \quad t \in [t_0,+\infty);$$

(iv) 对于滞后型脉冲泛函微分方程 (1.1) 的每个饱和解 $y : [t_0 - r,+\infty) \to \mathbb{R}^n$, 当 $t_0 \leqslant t_1 < t_2 < +\infty$ 时, 对于 $\widetilde{\psi}, \overline{\psi} \in \overline{E}_\rho$, 有 $U(t_2,\widetilde{\psi}) - U(t_1,\overline{\psi}) \leqslant 0$;

(v) 存在一个单调增函数 $p : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, 使得 $p(0) = 0$, 且对于 $(t,\psi) \in [t_0,+\infty) \times \overline{E}_\rho$, 有 $p(\|\psi\|_\infty) \geqslant U(t,\psi)$;

(vi) 对于 $t \in [t_0,+\infty)$, 有 $U(t,0) = 0$.

证 (i) 因为 $F \in \mathcal{F}(O \times [t_0,+\infty), h), h : [t_0,+\infty) \to \mathbb{R}$ 是一个左连续的不减函数, 并设 $x : [a,b] \to X$ 是广义常微分方程 (1.2) 的解, 则由引理 2.2 可知, 广义常微分方程的解 x 是左连续的.

又由引理 2.9 可知, 方程 (1.2) 的解 x 与方程 (1.1) 的解 y 之间的关系为:

$$x(t)(\vartheta) = \begin{cases} y(\vartheta), & t_0 - r \leqslant \vartheta \leqslant t, \\ y(t), & t \leqslant \vartheta < +\infty. \end{cases}$$

从而, 滞后型脉冲泛函微分方程 (1.1) 的解 y 也是左连续的. 由于泛函 U 的定义为

$$U(t,\psi) = \sup_{\tau \in [t-r,+\infty)} \|y(\tau,t,\psi)\|,$$

因此, 对于任意的 $\psi \in \overline{E}_\rho, U(\cdot,\psi)$ 在 $(t_0,+\infty)$ 上是左连续的.

(ii) 对每个 $(t,\psi)\in[t_0,+\infty)\times\overline{E}_\rho$, 设 $y:[t-r,+\infty)\to O$ 是滞后型脉冲泛函微分方程在初值条件 $y_t=\psi$ 下的解. 显然

$$\|y_t(\theta)\|_\infty=\sup_{\theta\in[-r,0]}\|y(t+\theta)\|\leqslant\sup_{\tau\in[t-r,+\infty)}\|y(\tau,t,\psi)\|=U(t,\psi).$$

我们取函数 b 为恒等函数, 即对任意的 $s\in\mathbb{R}^+$, 都有 $b(s)=s$, 则可证明

$$b(\|\psi\|_\infty)=b(\|y_t\|_\infty)=\|y_t\|_\infty\leqslant U(t,\psi).$$

(iii) 设 $y:[t-r,+\infty)\to O$ 是滞后型脉冲泛函微分方程的解, 则对于任意的 $t\in[t_0,+\infty),\tau\in[t+\eta,+\infty),\eta\geqslant 0$, 有

$$\begin{aligned}y(\tau,t,y_t)&=y(t)+\int_t^\tau f(y_s,s)\mathrm{d}s+\sum_{t<t_k<\tau}I_k(y(t_k))\\&=y(t)+\int_t^{t+\eta}f(y_s,s)\mathrm{d}s+\int_{t+\eta}^\tau f(y_s,s)\mathrm{d}s\\&\quad+\sum_{t<t_k\leqslant t+\eta}I_k(y(t_k))+\sum_{t+\eta<t_k<\tau}I_k(y(t_k))\\&=y(t+\eta)+\int_{t+\eta}^\tau f(y_s,s)\mathrm{d}s+\sum_{t+\eta\leqslant t_k<\tau}I_k(y(t_k))\\&=y(\tau,t+\eta,y_{t+\eta}).\end{aligned}\tag{3.5}$$

于是

$$\begin{aligned}U(t+\eta,y_{t+\eta})-U(t,y_t)&=\sup_{\tau\in[t+\eta-r,+\infty)}\|y(\tau,t+\eta,y_{t+\eta})\|-\sup_{\tau\in[t-r,+\infty)}\|y(\tau,t,y_t)\|\\&=\sup_{\tau\in[t+\eta-r,+\infty)}\|y(\tau,t,y_t)\|-\sup_{\tau\in[t-r,+\infty)}\|y(\tau,t,y_t)\|\\&\leqslant\sup_{\tau\in[t-r,+\infty)}\|y(\tau,t,y_t)\|-\sup_{\tau\in[t-r,+\infty)}\|y(\tau,t,y_t)\|=0.\end{aligned}$$

因此, 对于任意的 $t\in[t_0,+\infty)$

$$\dot{U}(t,\psi):=\lim_{\eta\to0^+}\sup\frac{U(t+\eta,y_{t+\eta}(t,\psi))-U(t,y_t(t,\psi))}{\eta}\leqslant 0.$$

(iv) 设 $y:[t_0-r,+\infty)\to O$ 是滞后型脉冲泛函微分方程在初值条件 $y_t=\psi$ 下的饱和解. 令 $t_1<t_2$, 与 (3.5) 式类似可得, 当 $t\in[t_1,+\infty)$ 时,

$$\begin{aligned}y(\tau,t,\psi)&=y(t_1)+\int_{t_1}^t f(y_s,s)\mathrm{d}s+\sum_{t_1<t_k\leqslant t}I_k(y(t_k))\\&=y(\tau,t_1,\overline{\psi}).\end{aligned}$$

同理, 当 $t\in[t_2,+\infty)$ 时, $y(t,t_2,\widetilde{\psi})=y(\tau,t,\psi)$.

因此, 当 $t_1 < t_2$ 时, 对于 $\widetilde{\psi}, \overline{\psi} \in \overline{E}_\rho$,

$$\begin{aligned} U(t_2, \overline{\psi}) &= \sup_{\tau \in [t_2 - r, +\infty)} \|y(\tau, t_2, \overline{\psi})\| = \sup_{\tau \in [t_2 - r, +\infty)} \|y(\tau, t, \psi)\| \\ &\leqslant \sup_{\tau \in [t_1 - r, +\infty)} \|y(\tau, t, \psi)\| = \sup_{\tau \in [t_1 - r, +\infty)} \|y(\tau, t_1, \widetilde{\psi})\| \\ &= U(t_1, \widetilde{\psi}). \end{aligned}$$

(v) 由于滞后型脉冲泛函微分方程 (1.1) 是一致有界的, 设 $\alpha > 0$. 由定义 (3.1) 中的 (i), 当 $t_1 \geqslant t_0, \widetilde{\psi} \in \overline{E}_\rho$ 时, 存在 $M(\alpha) > 0$, 使得若 $\|\widetilde{\psi}\|_\infty < \alpha$, 则有 $\|y(t, t_1, \widetilde{\psi})\|_\infty < M(\alpha), t \geqslant t_1$. 从而, 集合

$$\{\|y(t, t_1, \widetilde{\psi})\|; \|\widetilde{\psi}\|_\infty < \alpha, t_1 \geqslant t_0, t \geqslant t_1\}$$

有上界.

定义 $\overline{M} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 为

$$\overline{M}(\alpha) = \begin{cases} \sup\{\|y(t, t_1, \widetilde{\psi})\|; \|\widetilde{\psi}\|_\infty < \alpha, t_1 \geqslant t_0, t \geqslant t_1\}, & \alpha > 0, \\ 0, & \alpha = 0. \end{cases}$$

即知 $\overline{M}$ 单调增加. 现在, 令 $0 < \alpha_1 < \alpha_2$, 考虑集合

$$A = \{\|y(t, t_1, \widetilde{\psi})\|; \|\widetilde{\psi}\|_\infty < \alpha_1, t_1 \geqslant t_0, t \geqslant t_1\}$$

和

$$B = \{\|y(t, t_1, \widetilde{\psi})\|; \|\widetilde{\psi}\|_\infty < \alpha_2, t_1 \geqslant t_0, t \geqslant t_1\}.$$

显然, $A \subset B$, 这说明 $\overline{M}(\alpha_1) \leqslant \overline{M}(\alpha_2)$.

由于 $\overline{M}$ 不是严格单调增加的, 现令函数 $\widehat{M} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ 非负且单调增加, 则对任意的 $\alpha > 0$, 都有 $\widehat{M}(0) = 0$, $\overline{M}(\alpha) \leqslant \widehat{M}(\alpha)$. 设 $\beta > 0$, 定义令函数 $p : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, 满足 $p(0) = 0$, $p(\beta) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \widehat{M}(\beta + \varepsilon)$. 注意到, 若有 $0 \leqslant t_1 < t_2$, 则有 $p(t_1) = \widehat{M}(t_1)^+ < \widehat{M}(t_2) \leqslant \widehat{M}(t_2)^+ = p(t_2)$, 即函数 p 是一个单调增函数.

现在, 令 $y(\cdot, t, \psi)$ 是滞后型脉冲泛函微分方程在初值条件 $y_t = \psi$ 下的解. 对于给定 $\psi \in \overline{E}_\rho, t \in [t_0, +\infty)$, 取 $\alpha = \|\psi\|_\infty + \varepsilon$, 其中 ε 是一个足够小的数. 则由函数 $\overline{M}(\cdot)$ 和 $\widehat{M}(\cdot)$ 的定义, 当 $\tau \in [t_0, +\infty)$ 时, 有

$$\|y(\tau, t, \psi)\| \leqslant \overline{M}(\alpha) \leqslant \widehat{M}(\alpha) = \widehat{M}(\|\psi\|_\infty + \varepsilon). \tag{3.6}$$

根据泛函 U 的定义及 (3.6) 式, 得

$$\begin{aligned} U(t, \psi) &= \sup_{\tau \in [t - r, +\infty)} \|y(\tau, t, \psi)\| = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup_{\tau \in [t, +\infty)} \|y(\tau, t, \psi)\| \\ &\leqslant \lim_{\varepsilon \to 0^+} \widehat{M}(\|\psi\|_\infty + \varepsilon) = p(\|\psi\|_\infty). \end{aligned}$$

(vi) 由条件 (ii) 和条件 (v) 的结论可得, 对于任意的 $t \in [t_0, +\infty)$

$$0 = b(0) \leqslant U(t, 0) \leqslant p(0) = 0.$$

即证 $U(t, 0) = 0, t \in [t_0, +\infty)$.

例 3.1 考虑滞后型脉冲泛函微分方程

$$\begin{cases}\dot{y}(t)=-\int_{t-r}^{t}p(t-s)g(y(s))\mathrm{d}s, \quad t\neq t_k, t\geqslant 0,\\ \triangle\, y(t)=I_k(y(t)), \quad t=t_k, k=1,2,\cdots,\\ y_0=\phi,\end{cases} \tag{3.7}$$

其中 $r>0, \phi\in G^{-}([-r.0],\mathbb{R}^n), p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ 是局部 Lebesgue 可积的函数, 满足对于任意的 $u\in\mathbb{R}$, 有 $p(u)\leqslant C, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ 是一个增函数, 满足当 $\mathcal{K}\geqslant 0,\ x,y\in\mathbb{R}$ 时, 有 $|g(x)-g(y)|\leqslant\mathcal{K}|x-y|$, 并且存在另一个局部 Lebesgue 可积的函数 $m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 使得对 $s_1,s_2\in\mathbb{R}$, 有

$$\Big|\int_{s_1}^{s_2}g(y(s))\mathrm{d}s\Big|\leqslant\int_{s_1}^{s_2}m(s)\mathrm{d}s.$$

令 I_k 是脉冲算子, 且满足条件 (H_3)–(H_4), 则方程 (3.7) 是一致有界的.

下面验证定理 3.3 的结论是成立的.

定义函数 $W:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 且 $W(y)=\frac{1}{3}y^3$, 其中 $y(t)$ 是方程 (3.7) 的解. 泛函 $U:[0,+\infty)\times S\to\mathbb{R}$ 满足

$$U(t,\psi)=\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}W(\psi(\theta))=\frac{1}{3}\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}\psi^3(\theta)=\frac{1}{3}\Big(\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}\psi(\theta)\Big)^3=\frac{1}{3}\|\psi\|_\infty^3. \tag{3.8}$$

(i) 由 (3.8) 式 U 的定义可知, $U(t,\psi)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是左连续的, 且是连续的.

(ii) 给定 $t\geqslant 0,\psi\in S$, 取 $b(s)=\frac{1}{4}s^3$, 有

$$U(t,\psi)=\frac{1}{3}\|\psi\|_\infty^3\geqslant\frac{1}{4}\|\psi\|_\infty^3=b(\|\psi\|_\infty).$$

(iii) 给定 $t\geqslant 0,\psi\in S$, 考虑方程 (3.7) 的解 $y:[t-r,+\infty)\to\mathbb{R}$, 使得 $y_t=\psi$, 我们有

$$U(t,\psi)=U(t,y_t)=\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}W(y_t(\theta))=W(y_t(\theta_0)).$$

要证明 $\dot{U}(t,\psi)\leqslant 0$, 我们分两种情况考虑:

(a) $\theta_0=0$, 则

$$\begin{aligned}\dot{U}(t,\psi)=\dot{W}(y(t))&=W'(y(t))y'(t)=y^2(t)y'(t)\\ &=-y^2(t)\int_{t-r}^{t}p(t-s)g(y(s))\mathrm{d}s\\ &\leqslant 0.\end{aligned}$$

(b) $-r\leqslant\theta_0<0$, 由于 $\sup\limits_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}W(y_t(\theta))=W(y_t(\theta_0))$, 当 η 足够小时, 有

$$\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}W(y_{t+\eta}(\theta))=\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}W(y_t(\theta)).$$

因此,

$$\dot{U}(t,\psi):=\lim_{\eta\to 0^+}\sup\frac{\sup\limits_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}W(y_{t+\eta}(\theta))-\sup\limits_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}W(y_t(\theta))}{\eta}=0.$$

(iv) 当 $t_1 < t_2$ 时, 对于 $\widetilde{\psi}, \overline{\psi} \in S$, 有

$$\begin{aligned} U(t_2,\widetilde{\psi}) - U(t_1,\overline{\psi}) &= \frac{1}{3}(\|\widetilde{\psi}\|_\infty^3 - \|\overline{\psi}\|_\infty^3) = \frac{1}{3}(\|y_{t_2}\|_\infty^3 - \|y_{t_1}\|_\infty^3) \\ &= \frac{1}{3}\Big[\Big(\sup_{t_2\in[t_1,+\infty)}\|y(t_2+\theta)\|\Big)^3 - \Big(\sup_{t_1\in[0,+\infty)}\|y(t_1+\theta)\|\Big)^3\Big] \\ &\leqslant 0. \end{aligned}$$

(v) 给定 $t \geqslant 0, \psi \in S$, 取 $p(s) = s^3$, 有

$$U(t,\psi) = \frac{1}{3}\|\psi\|_\infty^3 \leqslant \|\psi\|_\infty^3 = p(\|\psi\|_\infty).$$

(vi) 由 (3.8) 式可知, 对 $t \geqslant 0$, 有 $U(t,0) = \frac{1}{3}\|0\|_\infty^3 = 0$.

参　考　文　献

[1] Mil'man V D, Myshkis A D. On the stability of motion in the presense of impulses [J]. *Siberian Mathematical Journal*, 1960, 1(2):233–237.

[2] Federson M, Schwabik Š. Generalized ODEs approach to impulsive retarded differential equations [J]. *Differential and Integral Equations*, 2006, 19(11):1201–1234.

[3] Akin-Bohner E, Raffoul Y. Boundedness in function dynamic equations on time scales [J]. *Advances in Difference Equations*, 2006(2006):1–18.

[4] Fan M, Dishen J, Wan Q, et al. Stability and boundedness of solutions of neutral functional differential equations with finite delay [J]. *Journal Math and Analysis and Applications*, 2002, 276(2):545–560.

[5] Stamova I M. Boundedness of impulsive functional differential equations with variable impulsive perturbations [J]. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 2008, 77(2):331–345.

[6] Afonso S M, Bonotto E M, Federson M, et al. Boundedness of solutions of retarded functional differential equations with variable impulses via generalized ordinary differential equations [J]. *Mathematische Nachrichten*, 2012, 285(5–6):545–561.

[7] Federson M ,Grau R, Mesquita J G, et al. Boundedness of solutions of the measure differential equations and dynamic equations on time scales [J]. *Journal of Differential Equations*, 2017, 263(1):26–56.

[8] Federson M, Grau R, Mesquita J G. Prolongation of solutions of measure differential equations and dynamic equations on time scales [J]. *Mathematische Nachrichten*, 2019, 292(1):22–55.

[9] Andrade da Silva F, Federson M, Toon E. Stability, boundedness and controllability of solutions of measure functional differenetial equcations [J]. *Journal of Differential Equations*, 2022, 307:160–210.

Converse Lyapunov Theorems on Boundedness of Impulsive Retarded Functional Differential Equations

LI Baolin[1] ZHOU Yunfei[1]

[1]Department of Mathematics Teaching, Lanzhou Technology and Business College, Lanzhou 730101, China.
E-mail: hsy_519@126.com; 1819942171@qq.com

Abstract In this paper, The authors established the theorem of the existence and uniqueness of maximal solution of impulsive retarded functional differential equations, and on the basis of the equivalence relationship between the generalized ordinary differential equations and impulsive retarded functional differential equations, the converse Lyapunov theorems on uniform boundedness of impulsive retarded functional differential equations are established.

Keywords Kurzweil integral, Lyapunov functional, Maximal solution, Uniform boundedness

2000 MR Subject Classification 34K12, 37B25

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 45 No. 1, 2024
by ALLERTON PRESS, INC., USA