数 学 年 刊 A 辑
2024, 45(2):155–170
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2024.0011

单位球上加权 Lebesgue 空间之间广义 Forelli-Rudin 型算子的有界性*

张 帆[1] 杨诗琪[1] 张学军[2]

提要 作者给出了 $1 \leqslant p < q \leqslant +\infty$ 以及 $p = q = +\infty$ 时广义 Forelli-Rudin 型算子 $S_{\lambda,\tau,c,k,k'}$ 是加权 Lebesgue 空间 $L^p(B_n, \mathrm{d}v_t)$ 到 $L^q(B_n, \mathrm{d}v_t)$ 有界算子的条件, 并且定理 3.2–3.5 给出了充要条件, 将第二作者等最近在《中国科学》上的结果完善到了 $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$.

关键词 广义 Forelli-Rudin 型算子, 加权 Lebesgue 空间, 有界性
MR (2000) 主题分类 47G10, 47B38, 32A25
中图法分类 O174.56
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2024)02-0155-16

§1 问题的引进和定义

Forelli-Rudin 型算子起源于投影算子 (见 [1]), 后来不少学者对其进行了研究和推广 (见 [2–22]). 最近, 张学军、郭雨婷和陈洪欣在文 [18] 中把 Kures 和 Zhu 在文 [7] 中引进的 Forelli-Rudin 型算子

$$S_{\lambda,\tau,c}f(z) = (1-|z|^2)^\lambda \int_{B_n} \frac{(1-|w|^2)^\tau f(w)}{|1-\langle z,w\rangle|^c}\,\mathrm{d}v(w), \quad z \in B_n$$

推广到了如下对数 Forelli-Rudin 型算子:

$$S_{\lambda,\tau,c,k,k'}f(z) = (1-|z|^2)^\lambda \int_{B_n} \frac{(1-|w|^2)^\tau f(w) \log^{k'} \frac{\mathrm{e}}{1-|w|^2} \left|\log \frac{\mathrm{e}}{1-\langle z,\varphi_z(w)\rangle}\right|^k}{|1-\langle z,w\rangle|^c}\,\mathrm{d}v(w),$$

其中 λ, τ, c, k 和 k' 都是实数, 并给出了当 $1 \leqslant p < +\infty$ 时, $S_{\lambda,\tau,c,k,k'}$ 是加权 Lebesgue 空间 $L^p(B_n, \mathrm{d}v_t)$ 上有界算子的充要条件, 但对于当 $1 \leqslant p < q \leqslant +\infty$ 以及 $p = q = +\infty$ 时, $S_{\lambda,\tau,c,k,k'}$ 为 $L^p(B_n, \mathrm{d}v_t)$ 到 $L^q(B_n, \mathrm{d}v_t)$ 有界算子的条件没有涉及, 本文主要目的就是解决这个问题, 将结果完善到 $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$ 的情形.

n 维复空间 $\mathbb{C}^n$ 中的两点 $z = (z_1, \cdots, z_n)$ 和 $w = (w_1, \cdots, w_n)$ 的内积记为 $\langle z, w\rangle = z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2} + \cdots + z_n\overline{w_n}$. 设 $B_n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = \sqrt{\langle z, z\rangle} < 1\}$ 表示 $\mathbb{C}^n$ 中的单位球, $S_n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = 1\}$ 表示 $\mathbb{C}^n$ 中的单位球面, $\mathrm{d}v$ 表示 B_n 上正规化的 Lebesgue 测度, $\mathrm{d}\sigma$ 表示 S_n 上正规化的旋转不变测度, 正规化加权 Lebesgue 测度 $\mathrm{d}v_t(z) = c_t(1-|z|^2)^t \mathrm{d}v(z)$ $(z \in B_n)$, 其中 $c_t = \frac{\Gamma(n+t+1)}{n!\Gamma(t+1)}(t > -1)$ 或 $c_t = 1$ $(t \leqslant -1)$.

本文 2023 年 5 月 21 日收到, 2024 年 2 月 27 日收到修改稿.
[1]湖南师范大学数学与统计学院, 长沙 410006. E-mail: 2914185325@qq.com;
1415477394@qq.com
[2]通信作者. 湖南师范大学数学与统计学院, 长沙 410006. E-mail: xuejunttt@263.net
*本文受到湖南省自然科学基金 (No. 2022JJ30369) 和湖南省教育厅重点项目 (No. 23A0095) 的资助.

给定 $a \in B_n$ 和 $r > 0$, 设 φ_a 为 B_n 上的对合 Möbius 变换, 以 a 为中心和 r 为半径的 Bergman 球定义为 $D(a,r) = \{w \in B_n : \beta(w,a) < r\}$, 其中

$$\beta(w,a) = \frac{1}{2}\log\frac{1+|\varphi_a(w)|}{1-|\varphi_a(w)|}.$$

设 $0 < p < +\infty$ 且 t 为实数, 若 B_n 上 Lebesgue 可测函数 f 满足

$$\|f\|_{p,t} = \Big(\int_{B_n} |f(z)|^p \,\mathrm{d}v_t(z)\Big)^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

称 f 属于加权 Lebesgue 空间 $L^p(B_n, \mathrm{d}v_t)$. 当 $p = +\infty$ 时,

$$L^\infty(B_n, \mathrm{d}v_t) = L^\infty(B_n) = \Big\{f:\ \|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{z \in B_n} |f(z)| < +\infty\Big\}.$$

本文中, 若有常数 $C_1 > 0$ 和 $C_2 > 0$, 使得 $C_1 E \leqslant Q \leqslant C_2 E$, 则称 E 和 Q 是等价的, 记为 "$E \asymp Q$"; 若有常数 $C > 0$, 使得 $Q \leqslant CE$ (或 $Q \geqslant CE$), 记为 $Q \lesssim E$ (或 $Q \gtrsim E$).

§2 主要引理及其证明

为了证明主要结果, 首先给出几个引理.

引理 2.1 (见 [18]) 设 c, δ, k 和 k' 为实数, 记

$$J_1(z) = \int_{B_n} \frac{(1-|w|^2)^\delta}{|1-\langle w,z\rangle|^c}\left|\log\frac{\mathrm{e}}{1-\langle\varphi_w(z),w\rangle}\right|^k \log^{k'}\frac{\mathrm{e}}{1-|w|^2}\,\mathrm{d}v(w), \qquad z \in B_n.$$

那么, 具有下列双向估计:

(1) 当 (i) $\delta > -1$ 且 $c < n+1+\delta$ 或 (ii) $\delta > -1$ 且 $c = n+1+\delta$ 以及 $k' < -1$ 或 (iii) $\delta = -1$ 且 $c < n$ 以及 $k'+k < -1$ 或 (iv) $\delta = -1$ 且 $c = n$ 以及 $k' < -1$ 和 $k+k' < -2$ 时, $J_1(z) \asymp 1$.

(2) 当 (i) $\delta > -1$ 且 $c > n+1+\delta$ 或 (ii) $\delta = -1$ 且 $c > n$ 及 $k + \max\{k', 0\} < -1$ 时,

$$J_1(z) \asymp \frac{1}{(1-|z|^2)^{c-n-1-\delta}}\log^{k'}\frac{\mathrm{e}}{1-|z|^2}.$$

(3) 当 $\delta = -1$ 且 $c > n$ 及 $k' < 0$ 和 $k = -1$ 时,

$$J_1(z) \asymp \frac{1}{(1-|z|^2)^{c-n}}\log^{k'}\frac{\mathrm{e}}{1-|z|^2}\log\log\frac{\mathrm{e}^2}{1-|z|^2}.$$

(4) 当 $\delta = -1$ 且 $c > n$ 及 $k'+k < -1 < k$ 时,

$$J_1(z) \asymp \frac{1}{(1-|z|^2)^{c-n}}\log^{k'+k+1}\frac{\mathrm{e}}{1-|z|^2}.$$

(5) 当 (i) $\delta > -1$ 且 $c = n+1+\delta$ 以及 $k' > -1$ 或 (ii) $\delta = -1$ 且 $c = n$ 和 $k < -1 < k'$ 以及 $k+k' < -1$ 时,

$$J_1(z) \asymp \log^{k'+1}\frac{\mathrm{e}}{1-|z|^2}.$$

(6) 当 $\delta = -1$ 且 $c = n$ 和 $k > -1$ 以及 $-2 < k+k' < -1$ 时,

$$J_1(z) \asymp \log^{k+k'+2}\frac{\mathrm{e}}{1-|z|^2}.$$

(7) 当 (i) $\delta > -1$ 且 $c = n+1+\delta$ 以及 $k' = -1$ 或 (ii) $\delta = -1$ 且 $c = n$ 和 $k > -1$ 以及 $k'+k = -2$ 或 (iii) $\delta = -1$ 且 $c = n$ 和 $k < -1 = k'$ 时,

$$J_1(z) \asymp \log\log \frac{\mathrm{e}^2}{1-|z|^2}.$$

(8) 当 $\delta = -1$ 且 $c = n$ 和 $k = -1 < k' < 0$ 时,

$$J_1(z) \asymp \log^{k'+1} \frac{\mathrm{e}}{1-|z|^2} \log\log \frac{\mathrm{e}^2}{1-|z|^2}.$$

(9) 当 $\delta = -1$ 且 $c = n$ 和 $k = -1 = k'$ 时,

$$J_1(z) \asymp \left(\log\log \frac{\mathrm{e}^2}{1-|z|^2}\right)^2.$$

这个结果来自文 [18] 中命题 3.2.

引理 2.2 (见 [18])　设 c, δ, k 和 k' 为实数, 记

$$J_2(z) = \int_{B_n} \frac{(1-|w|^2)^\delta}{|1-\langle w,z\rangle|^c} \left|\log \frac{\mathrm{e}}{1-\langle z,\varphi_z(w)\rangle}\right|^k \log^{k'} \frac{\mathrm{e}}{1-|w|^2}\, \mathrm{d}v(w), \quad z \in B_n.$$

那么, 具有下列双向估计:

(1) 当 $\delta > -1$ 且 $c > n+1+\delta$ 时, $J_2(z) \asymp \dfrac{1}{(1-|z|^2)^{c-n-\delta-1}} \log^{k'} \dfrac{\mathrm{e}}{1-|z|^2}$.

(2) 当 $\delta > -1$ 且 $c = n+1+\delta$ 及 $k < -1$ 和 $k < k'$ 时, $J_2(z) \asymp \log^{k'} \dfrac{\mathrm{e}}{1-|z|^2}$.

(3) 当 $\delta > -1$ 且 $c = n+1+\delta$ 及 $k > -1$ 和 $k' > -1$ 时, $J_2(z) \asymp \log^{k'+k+1} \dfrac{\mathrm{e}}{1-|z|^2}$.

(4) 当 $\delta > -1$ 且 $c = n+1+\delta$ 以及 $k = -1 \leqslant k'$ 时,

$$J_2(z) \asymp \log^{k'} \frac{\mathrm{e}}{1-|z|^2} \log\log \frac{\mathrm{e}^2}{1-|z|^2}.$$

(5) 当 (i) $\delta > -1$ 且 $c < n+1+\delta$ 或 (ii) $\delta > -1$ 且 $c = n+1+\delta$ 以及 $k' < -1$ 和 $k' \leqslant k$ 或 (iii) $\delta = -1$ 且 $c < n$ 以及 $k' < -1$ 或 (iv) $\delta = -1$ 且 $c = n$ 以及 $k' < -2$ 和 $k > k'+1$ 时,

$$J_2(z) \asymp \log^k \frac{\mathrm{e}}{1-|z|^2}.$$

(6) 当 (i) $\delta > -1$ 且 $c = n+1+\delta$ 以及 $k' = -1 < k$ 或 (ii) $\delta = -1$ 且 $c = n$ 以及 $k > -1$ 和 $k' = -2$ 时, $J_2(z) \asymp \log^k \dfrac{\mathrm{e}}{1-|z|^2} \log\log \dfrac{\mathrm{e}^2}{1-|z|^2}$.

(7) 当 $\delta = -1$ 且 $c > n$ 及 $k' < -1$ 时,

$$J_2(z) \asymp \frac{1}{(1-|z|^2)^{c-n}} \log^{k'+1} \frac{\mathrm{e}}{1-|z|^2}.$$

(8) 当 $\delta = -1$ 且 $c = n$ 及 $k-1 \leqslant k' < -1$ 和 $k < -1$ 时,

$$J_2(z) \asymp \log^{k'+1} \frac{\mathrm{e}}{1-|z|^2}.$$

(9) 当 $\delta = -1$ 且 $c = n$ 及 $-2 < k' < -1 < k$ 时,

$$J_2(z) \asymp \log^{k+k'+2} \frac{\mathrm{e}}{1-|z|^2}.$$

(10) 当 $\delta=-1$ 且 $c=n$ 及 $-2\leqslant k'<-1$ 和 $k=-1$ 时,

$$J_2(z)\asymp\log^{k'+1}\frac{\mathrm{e}}{1-|z|^2}\log\log\frac{\mathrm{e}^2}{1-|z|^2}.$$

这个结果来自文 [18] 中命题 3.3.

引理 2.3 (见 [5]) 给定 $r>0$ 和实数 α 以及 $z\in B_n$, 则有下列结果:

(1) $1-|w|^2\asymp|1-\langle z,w\rangle|\asymp 1-|z|^2$ 对一切 $w\in D(z,r)$ 成立.

(2) $\xi,\eta\in B_n$ 且 $\beta(\xi,\eta)<r$ 则有 $|1-\langle w,\xi\rangle|\asymp|1-\langle w,\eta\rangle|$ 对一切 $w\in B_n$ 成立.

(3) $v_\alpha[D(z,r)]\asymp(1-|z|^2)^{n+1+\alpha}$.

这些结果分别来自于文 [5] 中引理 2.20 和引理 2.27 以及引理 1.24.

引理 2.4 设 $1<p<+\infty$ 和实数 t 以及 $-1<x<-\frac{1}{p}$, 则

$$H_w(z)=\frac{(1-|z|^2)^{-\frac{t+1}{p}}}{|1-\langle z,w\rangle|^{\frac{n}{p}}}\log^{-\frac{2}{p}}\frac{\mathrm{e}}{1-|z|^2}\Big\{\log\log\frac{\mathrm{e}^2}{1-|z|^2}\Big\}^x,\quad w,z\in B_n,$$

满足 $\|H_w\|_{p,t}\asymp 1$ 和 $\sup\limits_{w\in B_n}F(w)=+\infty$, 其中

$$F(w)=\int_{B_n}\frac{(1-|z|^2)^{-1}\log^{-2}\frac{\mathrm{e}}{1-|z|^2}}{|1-\langle z,w\rangle|^n}\Big\{\log\log\frac{\mathrm{e}^2}{1-|z|^2}\Big\}^x\mathrm{d}v(z),\qquad w\in B_n.$$

证 不妨设 $|w|>\frac{3}{4}$, 根据文 [5] 中引理 1.8 和文 [23] 中命题 1.4.10 并做变换 $y=\frac{(1-r)|w|}{1-r|w|}$ 和 $s=(1-|w|)y$ 以及 $t=\frac{1-y}{1-|w|}$ 可得

$$\begin{aligned}
\|H_w\|_{p,t}^p&=\int_{B_n}\frac{c_t(1-|z|^2)^{-1}\log^{-2}\frac{\mathrm{e}}{1-|z|^2}}{|1-\langle z,w\rangle|^n}\Big\{\log\log\frac{\mathrm{e}^2}{1-|z|^2}\Big\}^{px}\mathrm{d}v(z)\\
&=2nc_t\int_0^1\frac{\rho^{2n-1}\log^{-2}\frac{\mathrm{e}}{1-\rho^2}}{1-\rho^2}\Big\{\log\log\frac{\mathrm{e}^2}{1-\rho^2}\Big\}^{px}\Big\{\int_{S_n}\frac{\mathrm{d}\sigma(\xi)}{|1-\langle\rho\xi,w\rangle|^n}\Big\}\mathrm{d}\rho\\
&\asymp\int_0^1(1-r)^{-1}\log^{-2}\frac{\mathrm{e}}{1-r}\log\frac{\mathrm{e}}{1-r|w|}\Big(\log\log\frac{\mathrm{e}^2}{1-r}\Big)^{px}\mathrm{d}r\\
&=\int_0^{|w|}\frac{1}{y(1-y)}\log^{-2}\frac{\mathrm{e}(1-y)|w|}{y(1-|w|)}\log\frac{\mathrm{e}(1-y)}{1-|w|}\Big(\log\log\frac{\mathrm{e}^2(1-y)|w|}{(1-|w|)y}\Big)^{px}\mathrm{d}y\\
&\asymp\log\frac{\mathrm{e}}{1-|w|}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{y}\log^{-2}\frac{\mathrm{e}}{y(1-|w|)}\Big(\log\log\frac{\mathrm{e}^2}{(1-|w|)y}\Big)^{px}\mathrm{d}y\\
&\quad+\int_{\frac{1}{2}}^{|w|}\frac{1}{1-y}\log^{-1}\frac{\mathrm{e}(1-y)}{1-|w|}\Big(\log\log\frac{\mathrm{e}^2(1-y)}{1-|w|}\Big)^{px}\mathrm{d}y\\
&=\log\frac{\mathrm{e}}{1-|w|}\int_0^{\frac{1-|w|}{2}}\frac{1}{s}\log^{-2}\frac{\mathrm{e}}{s}\Big(\log\log\frac{\mathrm{e}^2}{s}\Big)^{px}\mathrm{d}s\\
&\quad+\int_1^{\frac{1}{2(1-|w|)}}\frac{1}{t}\log^{-1}\mathrm{e}t\Big(\log\log\mathrm{e}^2t\Big)^{px}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

由 $px<-1$, 可得

$$\int_0^{\frac{1-|w|}{2}}\frac{1}{s}\log^{-2}\frac{\mathrm{e}}{s}\Big(\log\log\frac{\mathrm{e}^2}{s}\Big)^{px}\mathrm{d}s\lesssim\int_0^{\frac{1-|w|}{2}}\frac{1}{s}\log^{-2}\frac{\mathrm{e}}{s}\mathrm{d}s=\log^{-1}\frac{2\mathrm{e}}{1-|w|},$$

$$\int_1^{\frac{1}{2(1-|w|)}}\frac{1}{t}\log^{-1}\mathrm{e}t\Big(\log\log\mathrm{e}^2t\Big)^{px}\mathrm{d}t\asymp 1 \quad\Rightarrow\quad \|H_w\|_{p,t}\asymp 1.$$

利用同样的方法可得, 当 $x>-1$ 时,

$$\begin{aligned}F(w)&=\int_{B_n}\frac{(1-|z|^2)^{-1}\log^{-2}\frac{\mathrm{e}}{1-|z|^2}}{|1-\langle z,w\rangle|^n}\left\{\log\log\frac{\mathrm{e}}{1-|z|^2}\right\}^x\mathrm{d}v(z)\\&\gtrsim\int_1^{\frac{1}{2(1-|w|)}}\frac{\Big(\log\log\mathrm{e}^2t\Big)^x}{t\log\mathrm{e}t}\,\mathrm{d}t\asymp\left\{\log\log\frac{\mathrm{e}^2}{1-|w|}\right\}^{x+1}\Rightarrow\sup_{w\in B_n}F(w)=+\infty.\end{aligned}$$

本引理证完.

引理 2.5 (见 [22]) 设 μ 和 ν 是区域 X 上两个正测度, 并设 $K(x,y)$ 是 $X\times X$ 上一个非负可测函数. 定义积分算子

$$Tf(x)=\int_X K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}\mu(y).$$

(1) 当 $1\leqslant p<+\infty$ 时, 如果 $\|K(x,.)\|_{L_\mu^{p'}}$ 一致有界, 则 T 是 $L^p(X,\mathrm{d}\mu)$ 到 $L^\infty(X,\mathrm{d}\nu)$ 的有界算子.

(2) T 是 $L^\infty(X,\mathrm{d}\mu)$ 到 $L^\infty(X,\mathrm{d}\nu)$ 的有界算子当且仅当

$$\int_X K(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)\in L^\infty(X,\mathrm{d}\nu).$$

结果 (1) 和 (2) 分别来源于文 [22] 中命题 5.4 和问题 5.5.

§3　主要结果及其证明

下面讨论当 $1\leqslant p<q\leqslant+\infty$ 或 $p=q=+\infty$ 时, 广义 Forelli-Rudin 型算子 $S_{\lambda,\tau,c,k,k'}$ 从 $L^p(B_n,\mathrm{d}v_t)$ 到 $L^q(B_n,\mathrm{d}v_t)$ 的有界性条件, 分五种情况讨论: (i) $1<p<q<+\infty$, (ii) $1=p<q<+\infty$, (iii) $1<p<q=+\infty$, (iv) $p=q=+\infty$, (v) $1=p<q=+\infty$.

定理 3.1 设 $1<p<q<+\infty$, 若参数满足下列条件之一, 则 $S_{\lambda,\tau,c,k,k'}$ 从 $L^p(B_n,\mathrm{d}v_t)$ 到 $L^q(B_n,\mathrm{d}v_t)$ 有界:

(1) $-q\lambda<t+1<p(\tau+1)$ 且 $c=n+1+\lambda+\tau+(n+1+t)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)$ 及 $k'\leqslant 0$;

(2) $-q\lambda<t+1<p(\tau+1)$ 且 $c<n+1+\lambda+\tau+(n+1+t)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)$;

(3) $-q\lambda<t+1=p(\tau+1)$ 且 $c<n+\lambda+\frac{n+1+t}{q}-\frac{n}{p}$ 及 $k'<\frac{1}{q}-1$;

(4) $-q\lambda=t+1<p(\tau+1)$ 且 $c<n+1+\tau+\frac{n}{q}-\frac{n+1+t}{p}$ 及 $k<-\frac{1}{q}$;

(5) $-q\lambda=t+1=p(\tau+1)$ 且 $c<n+\frac{n}{q}-\frac{n}{p}$ 及 $k<-\frac{1}{q}$ 和 $k'<\frac{1}{p}-1$;

(6) $-q\lambda=t+1<p(\tau+1)$ 且 $c=n+1+\tau+\frac{n}{q}-\frac{n+1+t}{p}$ 及 $k<-\frac{1}{q}$ 和 $k'\leqslant 0$ 与 $k+k'\leqslant\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1$, 但要除去情形 $k'=0=k+1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$;

(7) $-q\lambda<t+1=p(\tau+1)$ 且 $c=n+\lambda+\frac{n+1+t}{q}-\frac{n}{p}$ 及 $k'\leqslant\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1$;

(8) $-q\lambda=t+1=p(\tau+1)$ 且 $c=n+\frac{n}{q}-\frac{n}{p}$ 以及 $k'\leqslant\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1$ 和 $k<-\frac{1}{q}$ 与 $k+k'\leqslant\frac{2}{p}-\frac{2}{q}-2$, 但要除去情形 $k'=k=\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1$.

证 情形 (1) 和 (2).

我们选取 τ_1 和 y 满足 $p'(\tau-\frac{\tau_1}{p})>-1$ 和 $y-p'(\tau-\frac{\tau_1}{p})-n-1>0$. 对任意的 $f\in L^p(B_n,\mathrm{d}v_t)$, 根据 Hölder 不等式和引理 2.1(2)(i) 可得

$$
\begin{aligned}
&\{S_{\lambda,\tau,c,k,k'}|f|(z)\}^p\\
&\leqslant(1-|z|^2)^{p\lambda}\Big\{\int_{B_n}\frac{(1-|w|^2)^{(\tau-\frac{\tau_1}{p})p'}}{|1-\langle z,w\rangle|^y}\,\mathrm{d}v(w)\Big\}^{\frac{p}{p'}}\\
&\quad\times\int_{B_n}\frac{|f(w)|^p(1-|w|^2)^{\tau_1}}{|1-\langle z,w\rangle|^{p(c-\frac{y}{p'})}}\log^{pk'}\frac{\mathrm{e}}{1-|w|^2}\Big|\log\frac{\mathrm{e}}{1-\langle z,\varphi_z(w)\rangle}\Big|^{pk}\mathrm{d}v(w)\\
&\asymp(1-|z|^2)^{p(n+1+\lambda+\tau-y)+y-n-1-\tau_1}\\
&\quad\times\int_{B_n}\frac{|f(w)|^p(1-|w|^2)^{\tau_1}}{|1-\langle z,w\rangle|^{p(c-\frac{y}{p'})}}\log^{pk'}\frac{\mathrm{e}}{1-|w|^2}\Big|\log\frac{\mathrm{e}}{1-\langle z,\varphi_z(w)\rangle}\Big|^{pk}\mathrm{d}v(w). \qquad (3.1)
\end{aligned}
$$

条件 $1+t<p(1+\tau)$ 表明 $n+\lambda-\frac{n}{p}+\frac{n+1+t}{q}<n+1+\lambda+\tau+(n+1+t)(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})$. 当 $n+\lambda-\frac{n}{p}+\frac{n+1+t}{q}<c\leqslant n+1+\lambda+\tau+(n+1+t)(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})$ 时, 由于 $-q\lambda<1+t$, 我们可选取 $p(n+1+\lambda+\tau-c)-n-1+\frac{p(n+1+t)}{q}<\tau_1<p(\tau+1)-1$ 和 $n+1+p'(\tau-\frac{\tau_1}{p})<y<p'(n+1+\lambda+\tau)-\frac{p'(n+1+\tau_1)}{p}+\frac{p'(t+1)}{q}$, 使得 $p'(\tau-\frac{\tau_1}{p})>-1$, $y-p'(\tau-\frac{\tau_1}{p})-n-1>0$, $q(n+1+\lambda+\tau-y)+\frac{q(y-n-1-\tau_1)}{p}+t>-1$ 和 $q(c-\frac{y}{p'})>n+1+q(n+1+\lambda+\tau-y)+\frac{q(y-n-1-\tau_1)}{p}+t$. 根据 $1<\frac{q}{p}<+\infty$ 与 Minkowski 不等式结合 (3.1) 式以及引理 2.1(2)(i) 和题设条件, 可得

$$
\begin{aligned}
\|S_{\lambda,\tau,c,k,k'}f\|_{q,t}^p&\lesssim\int_{\mathbb{B}^n}|f(w)|^p(1-|w|^2)^{\tau_1}\log^{pk'}\frac{\mathrm{e}}{1-|w|^2}\\
&\qquad\times\Big\{\int_{B_n}\frac{(1-|z|^2)^{q(n+1+\lambda+\tau-y)+\frac{q(y-n-1-\tau_1)}{p}+t}}{|1-\langle z,w\rangle|^{q(c-\frac{y}{p'})}\Big|\log\frac{\mathrm{e}}{1-\langle z,\varphi_z(w)\rangle}\Big|^{-qk}}\,\mathrm{d}v(z)\Big\}^{\frac{p}{q}}\mathrm{d}v(w)\\
&\asymp\int_{B_n}\frac{|f(w)|^p(1-|w|^2)^{p(n+1+\lambda+\tau+\frac{n+1+t}{q}-\frac{n+1+t}{p}-c)}}{\log^{-pk'}\frac{\mathrm{e}}{1-|w|^2}}\,\mathrm{d}v_t(w)\lesssim\|f\|_{p,t}^p.
\end{aligned}
$$

若 $c\leqslant n+\lambda+\frac{n+1+t}{q}-\frac{n}{p}$, 选 $n+\lambda+\frac{n+1+t}{q}-\frac{n}{p}<c_0<n+1+\lambda+\tau+(n+1+t)(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})$, 由已证结果, 有

$$\|S_{\lambda,\tau,c,k,k'}f\|_{q,t}\leqslant 2^{c_0-c}\|S_{\lambda,\tau,c_0,k,k'}f\|_{q,t}\leqslant 2^{c_0-c}\|S_{\lambda,\tau,c_0,k,k'}\|\cdot\|f\|_{p,t}.$$

情形 (3)–(5).

当 $-q\lambda\leqslant 1+t=p(1+\tau)$ 时, 可取 $\{c-\lambda-\frac{n+1+t}{q}\}p'<y<n$; 当 $-q\lambda=1+t<p(1+\tau)$ 时, 可取 $\{c-\lambda-\frac{n+1+t}{q}\}p'<y<n+1+(\tau-\frac{t}{p})p'$. 因而 $(c-\frac{y}{p'})q-(q\lambda+t)-n-1<0$. 当 $-q\lambda<1+t=p(1+\tau)$ 时, 再取 $k'\leqslant x<-\frac{1}{p'}$, 则 $(\tau-\frac{t}{p})p'=-1$ 和 $p'x<-1$ 且 $q\lambda+t>-1$ 及 $p(k'-x)\leqslant 0$; 当 $-q\lambda=1+t=p(1+\tau)$ 时, 同样取 $k'\leqslant x<-\frac{1}{p'}$, 则 $(\tau-\frac{t}{p})p'=-1$ 和 $p'x<-1$ 且 $q\lambda+t=-1$ 与 $qk<-1$ 及 $p(k'-x)\leqslant 0$; 当 $-q\lambda=1+t<p(1+\tau)$ 时, 再取 $x\geqslant k'$, 则 $(\tau-\frac{t}{p})p'>-1$ 和 $q\lambda+t=-1$ 且 $qk<-1$ 及 $p(k'-x)\leqslant 0$. 根据文 [18] 中 (3.7) 式可得

$$\{S_{\lambda,\tau,c,k,k'}|f|(z)\}^p\lesssim\int_{B_n}\frac{|f(w)|^p(1-|w|^2)^t\log^{p(k'-x)}\frac{\mathrm{e}}{1-|w|^2}\Big|\log\frac{\mathrm{e}}{1-\langle z,\varphi_z(w)\rangle}\Big|^{pk}}{(1-|z|^2)^{-p\lambda}|1-\langle z,w\rangle|^{p(c-\frac{y}{p'})}}\,\mathrm{d}v(w).$$

根据上式与 $1<\frac{q}{p}<+\infty$ 和 Minkowski 不等式, 结合引理 2.1(1)(i)(iii) 可得

$$\begin{aligned}\|S_{\lambda,\tau,c,k,k'}f\|_{q,t}^p &\lesssim \int_{B_n}|f(w)|^p(1-|w|^2)^t\log^{p(k'-x)}\frac{\mathrm{e}}{1-|w|^2}\\&\quad\times\Big\{\int_{B_n}\frac{(1-|z|^2)^{q\lambda+t}\left|\log\frac{\mathrm{e}}{1-\langle z,\varphi_z(w)\rangle}\right|^{qk}}{|1-\langle z,w\rangle|^{(c-\frac{y}{p'})q}}\,\mathrm{d}v(z)\Big\}^{\frac{p}{q}}\mathrm{d}v(w)\\&\asymp\int_{B_n}|f(w)|^p\log^{p(k'-x)}\frac{\mathrm{e}}{1-|w|^2}\,\mathrm{d}v_t(w)\leqslant\|f\|_{p,t}^p.\end{aligned}$$

情形 (6).

我们分情况讨论: (a) $k'=0$ 且 $k<\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1$; (b) $k'<0$ 且 $k'+k<\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1$ 和 $k<-\frac{1}{q}$; (c) $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1<k<-\frac{1}{q}$ 且 $k+k'=\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1$.

(a) 由条件 $1+t<p(1+\tau)$ 和 $c=n+1+\tau+\frac{n}{q}-\frac{n+1+t}{p}$ 可知 $n<p'(c-\frac{n}{q})$. 取 $p'x<-1$, 根据 Hölder 不等式和引理 2.2(2) 以及 $-q\lambda=1+t$, 可得

$$\begin{aligned}\{S_{\lambda,\tau,c,k,k'}|f|(z)\}^p&\leqslant\Big\{\int_{B_n}\frac{(1-|w|^2)^{\tau+\frac{q\lambda}{p}}\left|\log\frac{\mathrm{e}}{1-\langle z,\varphi_z(w)\rangle}\right|^{p'x}}{(1-|z|^2)^{-p'\lambda}|1-\langle z,w\rangle|^{n+1+\tau+\frac{q\lambda}{p}}}\,\mathrm{d}v(w)\Big\}^{\frac{p}{p'}}\\&\quad\times\int_{B_n}\frac{|f(w)|^p(1-|w|^2)^{\tau-\frac{q\lambda}{p'}}}{|1-\langle z,w\rangle|^{\frac{pn}{q}+1+\tau-\frac{1+t}{p}}}\left|\log\frac{\mathrm{e}}{1-\langle z,\varphi_z(w)\rangle}\right|^{p(k-x)}\mathrm{d}v(w)\\&\asymp\int_{B_n}\frac{|f(w)|^p(1-|w|^2)^{\tau-\frac{q\lambda}{p'}}\left|\log\frac{\mathrm{e}}{1-\langle z,\varphi_z(w)\rangle}\right|^{p(k-x)}}{(1-|z|^2)^{-p\lambda}|1-\langle z,w\rangle|^{\frac{pn}{q}+1+\tau-\frac{1+t}{p}}}\,\mathrm{d}v(w).\end{aligned}\tag{3.2}$$

我们进一步选取 $k+\frac{1}{q}<x<\frac{1}{p}-1$, 使得 $q(k-x)<-1$. 由 $1<\frac{q}{p}<+\infty$ 与 Minkowski 不等式结合 (3.2) 式和 $1+\tau>\frac{1+t}{p}$ 以及引理 2.1(2), 可得

$$\begin{aligned}\|S_{\lambda,\tau,c,k,k'}f\|_{q,t}^p&\lesssim\int_{B_n}|f(w)|^p(1-|w|^2)^{\tau-\frac{q\lambda}{p'}}\\&\quad\times\Big\{\int_{B_n}\frac{(1-|z|^2)^{-1}\left|\log\frac{\mathrm{e}}{1-\langle z,\varphi_z(w)\rangle}\right|^{q(k-x)}}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+\frac{q(1+\tau)}{p}-\frac{q(1+t)}{p^2}}}\,\mathrm{d}v(z)\Big\}^{\frac{p}{q}}\mathrm{d}v(w)\\&\asymp\int_{B_n}|f(w)|^p\,\mathrm{d}v_t(w)=\|f\|_{p,t}^p.\end{aligned}$$

(b) 选择 $p'x>-1$ 和 $p's>-1$, 根据 Hölder 不等式和引理 2.2(3), 可得

$$\begin{aligned}&\{S_{\lambda,\tau,c,k,k'}|f|(z)\}^p\\&\leqslant\Big\{\int_{B_n}\frac{(1-|w|^2)^{\tau+\frac{q\lambda}{p}}\log^{p'x}\frac{\mathrm{e}}{1-|w|^2}\left|\log\frac{\mathrm{e}}{1-\langle z,\varphi_z(w)\rangle}\right|^{p's}}{(1-|z|^2)^{-p'\lambda}|1-\langle z,w\rangle|^{n+1+\tau+\frac{q\lambda}{p}}}\,\mathrm{d}v(w)\Big\}^{\frac{p}{p'}}\\&\quad\times\int_{B_n}\frac{|f(w)|^p(1-|w|^2)^{\tau-\frac{q\lambda}{p'}}\log^{p(k'-x)}\frac{\mathrm{e}}{1-|w|^2}}{|1-\langle z,w\rangle|^{\frac{pn}{q}+1+\tau-\frac{1+t}{p}}}\left|\log\frac{\mathrm{e}}{1-\langle z,\varphi_z(w)\rangle}\right|^{p(k-s)}\mathrm{d}v(w)\\&\asymp\int_{B_n}\frac{|f(w)|^p(1-|w|^2)^{\tau-\frac{q\lambda}{p'}}\log^{p(k'-x)}\frac{\mathrm{e}}{1-|w|^2}\left|\log\frac{\mathrm{e}}{1-\langle z,\varphi_z(w)\rangle}\right|^{p(k-s)}}{(1-|z|^2)^{-p\lambda}|1-\langle z,w\rangle|^{\frac{pn}{q}+1+\tau-\frac{1+t}{p}}\log^{1-p(x+s+1)}\frac{\mathrm{e}}{1-|z|^2}}\,\mathrm{d}v(w).\end{aligned}\tag{3.3}$$

由于 $k'<0$ 和 $k+k'<\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1$ 以及 $k<-\frac{1}{q}$, 我们可选取 $\max\{\frac{1}{p}-1,k+\frac{1}{q}\}<s\leqslant\frac{1}{p}-1-k'$ 和 $\max\{\frac{1}{p}-1,k+\frac{1}{q}\}<s<0$ 以及 $\frac{1}{p}-1<x\leqslant\frac{1}{p}-1-s$, 使得 $q(x+s+1)-\frac{q}{p}\leqslant 0$ 和 $q(k-s)<-1$ 以及 $p(k'-x)+p(x+s+1)-1=p(k'+s+1)-1\leqslant 0$. 由 $1<\frac{q}{p}<+\infty$ 与 Minkowski 不等式结合 (3.3) 式和引理 2.1(2)(ii), 可得

$$\begin{aligned}
&\|S_{\lambda,\tau,c,k,k'}f\|_{q,t}^p\\
\lesssim&\int_{B_n}|f(w)|^p(1-|w|^2)^{\tau-\frac{q\lambda}{p'}}\log^{p(k'-x)}\frac{\mathrm{e}}{1-|w|^2}\\
&\times\Big\{\int_{B_n}\frac{(1-|z|^2)^{-1}\log^{q(x+s+1)-\frac{q}{p}}\frac{\mathrm{e}}{1-|z|^2}\Big|\log\frac{\mathrm{e}}{1-\langle z,\varphi_z(w)\rangle}\Big|^{q(k-s)}}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+\frac{q(1+\tau)}{p}-\frac{q(1+t)}{p^2}}}\,\mathrm{d}v(z)\Big\}^{\frac{p}{q}}\mathrm{d}v(w)\\
\asymp&\int_{B_n}|f(w)|^p\log^{p(k'+s+1)-1}\frac{\mathrm{e}}{1-|w|^2}\,\mathrm{d}v_t(w)\leqslant\|f\|_{p,t}^p.
\end{aligned}$$

(c) 由于 $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1<k<-\frac{1}{q}$, 我们可选 $\frac{1}{p}-1<x<\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1-k$ 和 $\frac{1}{p}-1<s<k+\frac{1}{q}$, 使得 $q(x+s+1)-\frac{q}{p}+q(k-s)<-1<q(k-s)$. 由 Minkowski 不等式结合 (3.3) 式和引理 2.1(4) 以及 $k+k'=\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1$, 可得

$$\|S_{\lambda,\tau,c,k,k'}f\|_{q,t}^p\lesssim\int_{B_n}|f(w)|^p\log^{p\left(k+k'+\frac{1}{q}+1-\frac{1}{p}\right)}\frac{\mathrm{e}}{1-|w|^2}\,\mathrm{d}v_t(w)=\|f\|_{p,t}^p.$$

情形 (7).

取 $p'x<-1$ 和 $y>n$. 根据 Hölder 不等式和引理 2.1(4), 可得

$$\begin{aligned}
&\{S_{\lambda,\tau,c,k,k'}|f|(z)\}^p\\
\leqslant&\Big\{\int_{B_n}\frac{(1-|w|^2)^{-1}\log^{p'x}\frac{\mathrm{e}}{1-|w|^2}}{(1-|z|^2)^{-p'\lambda}|1-\langle z,w\rangle|^y}\,\mathrm{d}v(w)\Big\}^{\frac{p}{p'}}\\
&\times\int_{B_n}\frac{|f(w)|^p(1-|w|^2)^t}{|1-\langle z,w\rangle|^{(c-\frac{y}{p'})p}}\Big|\log\frac{\mathrm{e}}{1-\langle z,\varphi_z(w)\rangle}\Big|^{pk}\log^{p(k'-x)}\frac{\mathrm{e}}{1-|w|^2}\,\mathrm{d}v(w)\\
\asymp&\int_{B_n}\frac{|f(w)|^p(1-|w|^2)^t\log^{p(k'-x)}\frac{\mathrm{e}}{1-|w|^2}\Big|\log\frac{\mathrm{e}}{1-\langle z,\varphi_z(w)\rangle}\Big|^{pk}}{(1-|z|^2)^{(p-1)(y-n)-p\lambda}|1-\langle z,w\rangle|^{(c-\frac{y}{p'})p}\log^{1-p(x+1)}\frac{\mathrm{e}}{1-|z|^2}}\,\mathrm{d}v(w).
\end{aligned}\tag{3.4}$$

我们进一步选取 $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1<x<\frac{1}{p}-1$, 使得 $q(x+1)-\frac{q}{p}>-1$. 条件 $-q\lambda<1+t$ 确保可取到 $n<y<n+\frac{p\{\lambda+\frac{1+t}{q}\}}{p-1}$, 使得 $q\lambda+t-\frac{q(p-1)(y-n)}{p}>-1$ 和 $(c-\frac{y}{p'})q-(q\lambda+t)+\frac{q(p-1)(y-n)}{p}-n-1=0$. 由 $1<\frac{q}{p}<+\infty$ 与 Minkowski 不等式结合 (3.4) 式和引理 2.1(5)(i) 以及 $k'\leqslant\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1$, 可得

$$\begin{aligned}
&\|S_{\lambda,\tau,c,k,k'}f\|_{q,t}^p\\
\lesssim&\int_{B_n}|f(w)|^p(1-|w|^2)^t\log^{p(k'-x)}\frac{\mathrm{e}}{1-|w|^2}\\
&\times\Big\{\int_{B_n}\frac{(1-|z|^2)^{q\lambda+t-\frac{q(p-1)}{p}(y-n)}\Big|\log\frac{\mathrm{e}}{1-\langle z,\varphi_z(w)\rangle}\Big|^{qk}}{|1-\langle z,w\rangle|^{(c-\frac{y}{p'})q}\log^{\frac{q}{p}-q(x+1)}\frac{\mathrm{e}}{1-|z|^2}}\,\mathrm{d}v(z)\Big\}^{\frac{p}{q}}\mathrm{d}v(w)\\
\asymp&\int_{B_n}|f(w)|^p\log^{p(k'+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}+1)}\frac{\mathrm{e}}{1-|w|^2}\,\mathrm{d}v_t(w)\leqslant\|f\|_{p,t}^p.
\end{aligned}$$

情形 (8).

类似情形 (6) 的证明, 我们同样分情形讨论: (a) $k' = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - 1$ 且 $k < \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - 1$; (b) $k' < \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - 1$ 且 $k' + k < \frac{2}{p} - \frac{2}{q} - 2$ 和 $k < -\frac{1}{q}$; (c) $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} - 1 < k < -\frac{1}{q}$ 且 $k + k' = \frac{2}{p} - \frac{2}{q} - 2$.

(a) 选择 $p'x < -1$, 根据 Hölder 不等式和引理 2.2(8), 可得

$$\begin{aligned}&\{S_{\lambda,\tau,c,k,k'}|f|(z)\}^p\\ &\lesssim \int_{B_n} \frac{(1-|z|^2)^{p\lambda}|f(w)|^p(1-|w|^2)^t\left|\log\frac{\mathrm{e}}{1-\langle z,\varphi_z(w)\rangle}\right|^{p(k-x)}}{|1-\langle z,w\rangle|^{\frac{pn}{q}}\log^{1-p-px}\frac{\mathrm{e}}{1-|z|^2}\log^{p\left(1+x+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}\frac{\mathrm{e}}{1-|w|^2}}\,\mathrm{d}v.\end{aligned} \tag{3.5}$$

由于 $k < \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - 1$, 我们可选 $\max\{\frac{1}{p} - \frac{1}{q} - 1, k + \frac{1}{q}\} < x < \frac{1}{p} - 1$, 使得 $q(k-x) < -1 < q(x+1) - \frac{q}{p}$ 且 $q(k-x) + q(x+1) - \frac{q}{p} < -1$. 根据 Minkowski 不等式结合 (3.5) 式和引理 2.1(5)(ii) 以及 $k' = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - 1$, 可得

$$\|S_{\lambda,\tau,c,k,k'}f\|_{q,t}^p \lesssim \int_{B_n}|f(w)|^p\log^{p\left(k'-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+1\right)}\frac{\mathrm{e}}{1-|w|^2}\,\mathrm{d}v_t(w) = \|f\|_{p,t}^p.$$

(b) 因 $k' < \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - 1$ 且 $k' + k < \frac{2}{p} - \frac{2}{q} - 2$ 和 $k < -\frac{1}{q}$, 可选 $\max\left\{\frac{1}{p} - 1, \frac{1}{q} + k\right\} < y \leqslant \frac{2}{p} - \frac{1}{q} - k' - 2$ 和 $\frac{2}{p} - 2 < x < \min\left\{\frac{1}{p} - 1, \frac{2}{p} - \frac{1}{q} - k - 2\right\}$ 及 $x + y > \frac{2}{p} - \frac{1}{q} - 2$ (必有公共部分), 使 $q(k-y) < -1 < q(x+y+2) - \frac{2q}{p}$ 和 $q(k-y) + q(x+y+2) - \frac{2q}{p} < -1$ 且 $p(k'-x) + p(x+y+2) - 2 + \frac{p}{q} = p(k'+y+2) - 2 + \frac{p}{q} \leqslant 0$. 利用引理 2.2(9), 类似 (3.5) 式的证明, 可得

$$\begin{aligned}&\{S_{\lambda,\tau,c,k,k'}|f|(z)\}^p\\ &\lesssim \int_{B_n} \frac{(1-|z|^2)^{p\lambda}|f(w)|^p(1-|w|^2)^t\left|\log\frac{\mathrm{e}}{1-\langle z,\varphi_z(w)\rangle}\right|^{p(k-y)}}{|1-\langle z,w\rangle|^{\frac{pn}{q}}\log^{2-p(x+y+2)}\frac{\mathrm{e}}{1-|z|^2}\log^{p(x-k')}\frac{\mathrm{e}}{1-|w|^2}}\,\mathrm{d}v(w).\end{aligned} \tag{3.6}$$

由 $1 < \frac{q}{p} < +\infty$ 与 Minkowski 不等式和引理 2.1(5)(ii) 结合 (3.6) 式, 可得

$$\begin{aligned}&\|S_{\lambda,\tau,c,k,k'}f\|_{q,t}^p\\ &\lesssim \int_{B_n}|f(w)|^p(1-|w|^2)^t\log^{p(k'-x)}\frac{\mathrm{e}}{1-|w|^2}\\ &\quad\times\left\{\int_{B_n}\frac{(1-|z|^2)^{-1}\log^{q(x+y+2)-\frac{2q}{p}}\frac{\mathrm{e}}{1-|z|^2}\left|\log\frac{\mathrm{e}}{1-\langle z,\varphi_z(w)\rangle}\right|^{q(k-y)}}{|1-\langle z,w\rangle|^n}\,\mathrm{d}v(z)\right\}^{\frac{p}{q}}\mathrm{d}v(w)\\ &\asymp \int_{B_n}|f(w)|^p\log^{p(k'+y+2)-2+\frac{p}{q}}\frac{\mathrm{e}}{1-|w|^2}\,\mathrm{d}v_t(w) \leqslant \|f\|_{p,t}^p.\end{aligned}$$

(c) 由于 $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} - 1 < k < -\frac{1}{q}$, 可选 $\max\left\{\frac{2}{p} - 2, \frac{2}{p} - \frac{2}{q} - k - 2\right\} < x < \min\left\{\frac{1}{p} - 1, \frac{2}{p} - 2 - k - \frac{1}{q}\right\}$ 和 $\frac{1}{p} - 1 < y < k + \frac{1}{q}$, 使得 $q(k-y) > -1$ 和 $-2 < q(k-y) + q(x+y+2) - 2\frac{q}{p} < -1$. 根据 Minkowski 不等式和引理 2.1(6) 结合 (3.6) 式以及 $k + k' = \frac{2}{p} - \frac{2}{q} - 2$, 可得

$$\|S_{\lambda,\tau,c,k,k'}f\|_{q,t}^p \lesssim \int_{B_n}|f(w)|^p\log^{p\left(k'+k-\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+2\right)}\frac{\mathrm{e}}{1-|w|^2}\,\mathrm{d}v_t(w) = \|f\|_{p,t}^p.$$

本定理证完.

定理 3.2 设 $1 < q < +\infty$, 则 $S_{\lambda,\tau,c,k,k'}$ 从 $L^1(B_n, \mathrm{d}v_t)$ 到 $L^q(B_n, \mathrm{d}v_t)$ 有界的充要条

件为参数满足下列条件之一:

(1) $-q\lambda < t+1 < \tau+1$ 且 $c = \lambda+\tau+\frac{n+1+t}{q}-t$ 及 $k' \leqslant 0$;

(2) $-q\lambda < t+1 < \tau+1$ 且 $c < \lambda+\tau+\frac{n+1+t}{q}-t$;

(3) $-q\lambda < t+1 = \tau+1$ 且 $c < \lambda+\frac{n+1+t}{q}$ 及 $k' \leqslant 0$;

(4) $-q\lambda = t+1 < \tau+1$ 且 $c < \tau+\frac{n}{q}-t$ 及 $k < -\frac{1}{q}$;

(5) $-q\lambda = t+1 = \tau+1$ 且 $c < \frac{n}{q}$ 及 $k < -\frac{1}{q}$ 和 $k' \leqslant 0$;

(6) $-q\lambda = t+1 < \tau+1$ 且 $c = \tau+\frac{n}{q}-t$ 及 $k < -\frac{1}{q}$ 和 $k' \leqslant 0$;

(7) $-q\lambda < t+1 = \tau+1$ 且 $c = \lambda+\frac{n+1+t}{q}$ 及 $k' \leqslant -\frac{1}{q}$;

(8) $-q\lambda = t+1 = \tau+1$ 且 $c = \frac{n}{q}$ 以及 $k' \leqslant -\frac{1}{q}$ 和 $k < -\frac{1}{q}$.

证 先证必要性.

设 $S_{\lambda,\tau,c,k,k'}$ 是 $L^1(B_n, \mathrm{d}v_t)$ 到 $L^q(B_n, \mathrm{d}v_t)$ 的有界算子. 首先, 类似文 [18] 中定理 3.1 和定理 3.2 必要性的证明可得: (i) $-q\lambda < 1+t$ 或 $-q\lambda = 1+t$ 且 $qk < -1$; (ii) $t < \tau$ 或 $t = \tau$ 且 $k' \leqslant 0$.

给定 $\alpha > -1-t$ 和 $\beta > 0$, 对任意的 $w \in B_n$, 我们取函数

$$f_w(z) = \frac{(1-|w|^2)^\beta (1-|z|^2)^\alpha}{|1-\langle z,w\rangle|^{\beta+n+1+t+\alpha}}, \quad z \in B_n.$$

由引理 2.1(2) 可得 $\|f_w\|_{1,t} \asymp 1$. 由 $S_{\lambda,\tau,c,k,k'}$ 的有界性, 知

$$\|S_{\lambda,\tau,c,k,k'} f_w\|_{q,t} \leqslant \|S_{\lambda,\tau,c,k,k'}\| . \|f_w\|_{1,t} \asymp \|S_{\lambda,\tau,c,k,k'}\|. \tag{3.7}$$

由引理 2.3(1)(2), 可得

$$\begin{aligned}
&\frac{(1-|w|^2)^\beta (1-|z|^2)^{n+1+\lambda+\tau+\alpha-c}}{|1-\langle z,w\rangle|^{\beta+n+1+t+\alpha}} \log^{k'} \frac{\mathrm{e}}{1-|z|^2} \\
&\asymp \int_{D(z,r)} \frac{(1-|z|^2)^\lambda (1-|w|^2)^\beta (1-|u|^2)^{\tau+\alpha} |\log \frac{\mathrm{e}}{1-\langle z,\varphi_z(u)\rangle}|^k}{|1-\langle z,u\rangle|^c |1-\langle u,w\rangle|^{\beta+n+1+t+\alpha} \log^{-k'} \frac{\mathrm{e}}{1-|u|^2}} \,\mathrm{d}v(u) \\
&\leqslant S_{\lambda,\tau,c,k,k'} f_w(z)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

对任意 $z \in B_n$ 成立.

由 (3.7)–(3.8) 结合引理 2.3(3), 有

$$\begin{aligned}
&(1-|w|^2)^{q(n+1+\lambda+\tau-c)+(1-q)(n+1+t)} \log^{qk'} \frac{\mathrm{e}}{1-|z|^2} \\
&\asymp \int_{D(w,r)} \frac{(1-|w|^2)^{q\beta} (1-|z|^2)^{q(n+1+\lambda+\tau+\alpha-c)+t} \log^{qk'} \frac{\mathrm{e}}{1-|z|^2}}{|1-\langle z,w\rangle|^{q\beta+q(n+1+t)+q\alpha}} \,\mathrm{d}v_t(z) \\
&\lesssim \int_{D(w,r)} |S_{\lambda,\tau,c,k,k'} f_w(z)|^q \,\mathrm{d}v_t(z) \leqslant \|S_{\lambda,\tau,c,k,k'} f_w\|_{q,t}^q \lesssim \|S_{\lambda,\tau,c,k,k'}\|^q
\end{aligned}$$

对一切 $w \in B_n$ 成立, 这表明 $q(n+1+\lambda+\tau-c)+(1-q)(n+1+t) > 0$, 或 $q(n+1+\lambda+\tau-c)+(1-q)(n+1+t) = 0$ 且 $qk' \leqslant 0$. 因此, 我们得到 $c < \lambda+\tau+\frac{n+1+t}{q}-t$, 或 $c = \lambda+\tau+\frac{n+1+t}{q}-t$ 且 $k' \leqslant 0$. 这样证明了结果 (1)–(6) 是成立的.

下面证明 (7) 和 (8) 成立.

此时只需证 $k'\leqslant -\frac{1}{q}$. 给定 $q'\alpha+t>-1$ 和 $\lambda+t+\alpha>-1$, 我们再取

$$g_w(z)=\frac{(1-|z|^2)^{\alpha}}{|1-\langle z,w\rangle|^{\alpha+\frac{n+1+t}{q'}}}\log^{-\frac{1}{q'}}\frac{\mathrm{e}}{1-|w|^2},\quad z\in B_n.$$

由引理 2.1(5) 可得 $\|g_w\|_{q',t}\asymp 1$. 另一方面, 我们知道 $S_{\lambda,\tau,c,k,k'}$ 的共轭算子为

$$S^*_{\lambda,\tau,c,k,k'}g(w)=\frac{\log^{k'}\frac{\mathrm{e}}{1-|w|^2}}{(1-|w|^2)^{t-\tau}}\int_{B_n}\frac{(1-|z|^2)^{\lambda+t}g(z)}{|1-\langle w,z\rangle|^{c}}\left|\log\frac{\mathrm{e}}{1-\langle\varphi_z(w),z\rangle}\right|^{k}\mathrm{d}v(z).$$

由引理 2.1(5) 可得

$$\begin{aligned}S^*_{\lambda,\tau,c,k,k'}g_w(w)&=\log^{k'-\frac{1}{q'}}\frac{\mathrm{e}}{1-|w|^2}\int_{B_n}\frac{(1-|z|^2)^{\lambda+t+\alpha}\left|\log\frac{\mathrm{e}}{1-\langle\varphi_z(w),z\rangle}\right|^{k}}{|1-\langle z,w\rangle|^{\lambda+\alpha+n+1+t}}\mathrm{d}v(z)\\&\asymp\log^{k'+1-\frac{1}{q'}}\frac{\mathrm{e}}{1-|w|^2}.\end{aligned}$$

这表明对一切 $w\in B_n$, 都有

$$\begin{aligned}\log^{k'+1-\frac{1}{q'}}\frac{\mathrm{e}}{1-|w|^2}&\asymp T^*_{\lambda,\tau,c,k,k'}g_w(w)\\&\leqslant\|T^*_{\lambda,\tau,c,k,k'}g_w\|_{\infty}\leqslant\|T^*_{\lambda,\tau,c,k,k'}\|.\|g_w\|_{q',t}\asymp\|T^*_{\lambda,\tau,c,k,k'}\|.\end{aligned}$$

这样必有 $k'+1-\frac{1}{q'}\leqslant 0$, 即 $k'\leqslant-\frac{1}{q}$.

至于充分性, 对任意的 $f\in L^1(B_n,\mathrm{d}v_t)$, 根据 Minkowski 不等式, 可得

$$\begin{aligned}&\|S_{\lambda,\tau,c,k,k'}f\|_{q,t}\\&\leqslant\int_{B_n}(1-|w|^2)^{\tau}|f(w)|\log^{k'}\frac{\mathrm{e}}{1-|w|^2}\\&\quad\times\left\{\int_{B_n}\frac{(1-|z|^2)^{q\lambda+t}}{|1-\langle z,w\rangle|^{qc}}\left|\log\frac{\mathrm{e}}{1-\langle\varphi_z(w),z\rangle}\right|^{qk}\mathrm{d}v(z)\right\}^{\frac{1}{q}}\mathrm{d}v(w).\end{aligned}$$

然后利用引理 2.1 分别设八种情形, 容易验证 $\|S_{\lambda,\tau,c,k,k'}f\|_{q,t}\lesssim\|f\|_{1,t}$.

本定理证完.

定理 3.3 设 $1<p<+\infty$, 则 $S_{\lambda,\tau,c,k,k'}$ 从 $L^p(B_n,\mathrm{d}v_t)$ 到 $L^{\infty}(B_n)$ 有界的充要条件为参数满足下列条件之一:

(1) $\lambda>0$ 和 $t+1<p(\tau+1)$ 且 $c<n+1+\lambda+\tau-\frac{n+1+t}{p}$;

(2) $\lambda>0$ 和 $t+1<p(\tau+1)$ 且 $c=n+1+\lambda+\tau-\frac{n+1+t}{p}$ 及 $k'\leqslant 0$;

(3) $\lambda>0$ 和 $t+1=p(\tau+1)$ 且 $c\leqslant n+\lambda-\frac{n}{p}$ 及 $k'<\frac{1}{p}-1$;

(4) $\lambda=0$ 和 $t+1<p(\tau+1)$ 且 $c<n+1+\tau-\frac{n+1+t}{p}$ 及 $k\leqslant 0$;

(5) $\lambda=0$ 和 $t+1=p(\tau+1)$ 且 $c<n-\frac{n}{p}$ 及 $k\leqslant 0$ 与 $k'<\frac{1}{p}-1$;

(6) $\lambda=0$ 和 $t+1<p(\tau+1)$ 且 $c=n+1+\tau-\frac{n+1+t}{p}$ 及 $k\leqslant 0$ 与 $k'\leqslant 0$ 还有 $k+k'\leqslant\frac{1}{p}-1$, 但要除去情形 $k'=0=pk+p-1$ 和 $k=0=pk'+p-1$;

(7) $\lambda=0$ 和 $t+1=p(\tau+1)$ 且 $c=n-\frac{n}{p}$ 及 $k'<\frac{1}{p}-1$ 与 $k\leqslant 0$ 还有 $k+k'\leqslant\frac{2}{p}-2$, 但要除去情形 $k=0=k'+2-\frac{2}{p}$.

证 充分性方面, 我们选取核函数

$$K(z,w)=\frac{(1-|z|^2)^{\lambda}|\log\frac{\mathrm{e}}{1-\langle z,\varphi_z(w)\rangle}|^k\log^{k'}\frac{\mathrm{e}}{1-|w|^2}}{c_t(1-|w|^2)^{t-\tau}|1-\langle z,w\rangle|^c},\quad z,w\in B_n,$$

则

$$S_{\lambda,\tau,c,k,k'}f(z)=\int_{B_n}K(z,w)f(w)\,\mathrm{d}v_t(w),\quad z\in B_n.$$

根据引理 2.5(1), 我们只需要证明 $\|K(z,.)\|_{p',t}$ 一致有界, 即

$$\sup_{z\in B_n}\int_{B_n}\frac{(1-|z|^2)^{p'\lambda}|\log\frac{\mathrm{e}}{1-\langle z,\varphi_z(w)\rangle}|^{p'k}\log^{p'k'}\frac{\mathrm{e}}{1-|w|^2}}{(1-|w|^2)^{p'(t-\tau)-t}|1-\langle z,w\rangle|^{p'c}}\,\mathrm{d}v(w)<+\infty.$$

根据引理 2.2, 分情况综合起来可验证在题设 7 种情形下符合要求.

必要性方面, 设 $S_{\lambda,\tau,c,k,k'}$ 从 $L^p(B_n,\mathrm{d}v_t)$ 到 $L^\infty(B_n)$ 有界.

给定 $\alpha>\max\{-\frac{1+t}{p},-1-\tau,c-\tau-n-1\}$, 取 $f(z)=(1-|z|^2)^{\alpha}$, 则 $f\in L^p(B_n,\mathrm{d}v_t)$. 根据引理 2.2(5) 可得

$$S_{\lambda,\tau,c,k,k'}f(z)\asymp(1-|z|^2)^{\lambda}\log^k\frac{\mathrm{e}}{1-|z|^2},\quad z\in B_n.$$

若 $S_{\lambda,\tau,c,k,k'}f\in L^\infty(B_n)$, 则必有: $\lambda>0$, 或 $\lambda=0$ 且 $k\leqslant 0$. 类似文 [18] 中定理 3.1 必要性的证明可得: $1+t<p(1+\tau)$, 或 $1+t=p(1+\tau)$ 且 $k'<\frac{1}{p}-1$, 只不过此时用到 $L^1(B_n,\mathrm{d}v)$ 含在 $L^\infty(B_n)$ 的对偶空间以及共轭算子为

$$S^*_{\lambda,\tau,c,k,k'}g(w)=\frac{\log^{k'}\frac{\mathrm{e}}{1-|w|^2}}{(1-|w|^2)^{t-\tau}}\int_{B_n}\frac{(1-|z|^2)^{\lambda}g(z)}{c_t|1-\langle w,z\rangle|^c}\left|\log\frac{\mathrm{e}}{1-\langle\varphi_z(w),z\rangle}\right|^k\,\mathrm{d}v(z).$$

对任意的 $w\in B_n$, 我们取属于 $L^p(B_n,\mathrm{d}v_t)$ 的函数

$$f_w(z)=\frac{(1-|w|^2)(1-|z|^2)^{\alpha}}{|1-\langle z,w\rangle|^{1+\frac{n+1+t}{p}+\alpha}},\quad z\in B_n.$$

类似 (3.8) 式的证明并利用 $S_{\lambda,\tau,c,k,k'}$ 的有界性且取 $z=w$, 可得

$$\sup_{w\in B_n}(1-|w|^2)^{n+1+\lambda+\tau-\frac{n+1+t}{p}-c}\log^{k'}\frac{\mathrm{e}}{1-|w|^2}<+\infty.$$

因而 $c<n+1+\lambda+\tau-\frac{n+1+t}{p}$, 或 $c=n+1+\lambda+\tau-\frac{n+1+t}{p}$ 且 $k'\leqslant 0$. 这表明结论 (1)–(5) 成立.

为了证明 (6) 的结果中余下的条件, 对 $p\alpha+t>-1$ 且 $\tau+\alpha>-1$, 我们先取

$$g_w(z)=\frac{(1-|z|^2)^{\alpha}}{|1-\langle z,w\rangle|^{\alpha+\frac{n+1+t}{p}}}\Big\{\log\log\frac{\mathrm{e}^2}{1-|w|^2}\Big\}^{-\frac{1}{p}}\log^{-\frac{1}{p}}\frac{\mathrm{e}}{1-|z|^2},\quad z\in B_n.$$

由引理 2.1(7) 可得 $\|g_w\|_{p,t}\asymp 1$. 再由引理 2.2(2)–(6) 得

$$S_{\lambda,\tau,c,k,k'}g_w(w)=\int_{B_n}\frac{\Big\{\log\log\frac{\mathrm{e}^2}{1-|w|^2}\Big\}^{-\frac{1}{p}}(1-|z|^2)^{\tau+\alpha}\left|\log\frac{\mathrm{e}}{1-\langle w,\varphi_w(z)\rangle}\right|^k\,\mathrm{d}v(z)}{|1-\langle z,w\rangle|^{\alpha+n+1+\tau}\log^{\frac{1}{p}-k'}\frac{\mathrm{e}}{1-|z|^2}},$$

$$
\asymp \begin{cases}
\left\{\log\log\dfrac{e^2}{1-|w|^2}\right\}^{-\frac{1}{p}}\log^{k'-\frac{1}{p}}\dfrac{e}{1-|w|^2}, & k<-1,\ k<k'-\dfrac{1}{p},\\
\left\{\log\log\dfrac{e^2}{1-|w|^2}\right\}^{-\frac{1}{p}}\log^{k+k'+1-\frac{1}{p}}\dfrac{e}{1-|w|^2}, & k>-1,\ k'-\dfrac{1}{p}>-1,\\
\left\{\log\log\dfrac{e^2}{1-|w|^2}\right\}^{1-\frac{1}{p}}\log^{k'-\frac{1}{p}}\dfrac{e}{1-|w|^2}, & -1=k\leqslant k'-\dfrac{1}{p},\\
\left\{\log\log\dfrac{e^2}{1-|w|^2}\right\}^{-\frac{1}{p}}\log^{k}\dfrac{e}{1-|w|^2}, & k'-\dfrac{1}{p}<-1,\ k'-\dfrac{1}{p}\leqslant k,\\
\left\{\log\log\dfrac{e^2}{1-|w|^2}\right\}^{1-\frac{1}{p}}\log^{k}\dfrac{e}{1-|w|^2}, & k'-\dfrac{1}{p}=-1<k.
\end{cases}
$$

若 $\sup\limits_{w\in B_n} S_{\lambda,\tau,c,k,k'}f_w(w)<+\infty$, 则必有 $k+k'\leqslant \frac{1}{p}-1$, 但要除去情形 $k=0=pk'+p-1$. 我们再证除去情形 $k'=0=pk+p-1$. 再取

$$
h_w(z)=\frac{(1-|z|^2)^{\frac{\tau-t}{p-1}}\left\{\log\log\frac{e^2}{1-|w|^2}\right\}^{-\frac{1}{p}}}{|1-\langle z,w\rangle|^{\frac{1}{p-1}\left(n+1+\tau-\frac{n+1+t}{p}\right)}}\left|\log\frac{e}{1-\langle w,\varphi_w(z)\rangle}\right|^{-\frac{1}{p}},\quad z\in B_n.
$$

由 $1+t<p(1+\tau)$ 可得 $\delta=\frac{p\tau-t}{p-1}>-1$, 又 $\frac{\{p(n+1+\tau)-n-1-t\}}{p-1}=n+1+\delta$. 由引理 2.2(4) 可得

$$
\|h_w\|_{p,t}^p=\int_{B_n}\frac{c_t(1-|z|^2)^{\frac{p\tau-t}{p-1}}\left\{\log\log\frac{e^2}{1-|w|^2}\right\}^{-1}\left|\log\frac{e}{1-\langle w,\varphi_w(z)\rangle}\right|^{-1}}{|1-\langle z,w\rangle|^{\frac{p(n+1+\tau)-n-1-t}{p-1}}}\,dv(z)\asymp 1.
$$

但由引理 2.2(4) 有

$$
\begin{aligned}
&S_{0,\tau,n+1+\tau-\frac{n+1+t}{p},\frac{1}{p}-1,0}h_w(w)\\
&=\int_{B_n}\frac{(1-|z|^2)^{\frac{p\tau-t}{p-1}}\left\{\log\log\frac{e^2}{1-|w|^2}\right\}^{-\frac{1}{p}}\left|\log\frac{e}{1-\langle w,\varphi_w(z)\rangle}\right|^{-1}}{|1-\langle z,w\rangle|^{\frac{p(n+1+\tau)-n-1-t}{p-1}}}\,dv(z)\\
&\asymp\left\{\log\log\frac{e^2}{1-|w|^2}\right\}^{1-\frac{1}{p}}\quad\Rightarrow\quad\sup_{w\in B_n}S_{0,\tau,n+1+\tau-\frac{n+1+t}{p},\frac{1}{p}-1,0}h_w(w)=+\infty.
\end{aligned}
$$

下面证明 (7) 中的 $k+k'\leqslant\frac{2}{p}-2$ 成立. 我们已经证明了 $k\leqslant 0$ 和 $k'<\frac{1}{p}-1$, 因而只需要在范围 $k'>\frac{2}{p}-2$ 和 $k>\frac{1}{p}-1$ 内证明 $k+k'\leqslant\frac{2}{p}-2$ 即可. 假设 $k+k'>\frac{2}{p}-2$, 我们可选 $-2-k-k'<x<-\frac{2}{p}$ 使得 $px<-2$ 和 $-2<k'+x<-1<k$ 以及 $k+k'+x+2>0$. 取

$$
h_w(z)=\frac{(1-|z|^2)^{-\frac{1+t}{p}}}{|1-\langle z,w\rangle|^{\frac{n}{p}}}\log^{x}\frac{e}{1-|z|^2},\quad z\in B_n.
$$

由引理 2.1(1) 可得 $\|h_w\|_{p,t}\asymp 1$. 但根据引理 2.2(9), 我们有

$$
\begin{aligned}
\sup_{w\in B_n}S_{\lambda,\tau,c,k,k'}h_w(w)&=\sup_{w\in B_n}\int_{B_n}\frac{\log^{k'+x}\frac{e}{1-|z|^2}\left|\log\frac{e}{1-\langle w,\varphi_w(z)\rangle}\right|^{k}}{(1-|z|^2)|1-\langle z,w\rangle|^{n}}\,dv(z)\\
&\asymp\sup_{w\in B_n}\log^{k+k'+x+2}\frac{e}{1-|w|^2}=+\infty.
\end{aligned}
$$

该矛盾说明 $k+k'\leqslant\frac{2}{p}-2$. 至于除去情形 $k=0=k'+2-\frac{2}{p}$, 取引理 2.4 中的函数 H_w, 由于 $S_{0,\tau,n-\frac{n}{p},0,\frac{2}{p}-2}H_w(w)=F(w)$, 利用引理 2.4 的结果即可.

本定理证完.

定理 3.4 $S_{\lambda,\tau,c,k,k'}$ 在 $L^\infty(B_n)$ 上有界的充要条件为参数满足下列条件之一:

(1) $-\lambda<0<\tau+1$ 且 $c<n+1+\lambda+\tau$;

(2) $-\lambda<0<\tau+1$ 且 $c=n+1+\lambda+\tau$ 以及 $k'\leqslant 0$;

(3) $-\lambda<0=\tau+1$ 且 $c\leqslant n+\lambda$ 以及 $k'<-1$;

(4) $-\lambda=0<\tau+1$ 且 $c<n+1+\tau$ 以及 $k\leqslant 0$;

(5) $-\lambda=0<\tau+1$ 且 $c=n+1+\tau$ 和 $k\leqslant 0$ 与 $k'\leqslant 0$ 以及 $k+k'\leqslant -1$ 除去情形 $k'=0=k+1$ 和 $k=0=k'+1$;

(6) $-\lambda=0=\tau+1$ 且 $c<n$ 和 $k\leqslant 0$ 和 $k'<-1$;

(7) $-\lambda=0=\tau+1$ 且 $c=n$ 和及 $k'<-1$ 与 $k\leqslant 0$ 以及 $k+k'\leqslant -2$ 除去情形 $k=0=k'+2$.

证 我们选取核函数

$$K(z,w)=\frac{(1-|z|^2)^\lambda(1-|w|^2)^\tau\left|\log\frac{\mathrm{e}}{1-\langle z,\varphi_z(w)\rangle}\right|^k\log^{k'}\frac{\mathrm{e}}{1-|w|^2}}{|1-\langle z,w\rangle|^c},\quad z,w\in B_n,$$

则

$$S_{\lambda,\tau,c,k,k'}f(z)=\int_{B_n}K(z,w)f(w)\,\mathrm{d}v(w),\quad z\in B_n.$$

根据引理 2.5 可知, $S_{\lambda,\tau,c,k,k'}$ 在 $L^\infty(B_n)$ 上有界当且仅当

$$\int_{B_n}K(z,w)\,\mathrm{d}v(w)\in L^\infty(B_n).$$

根据引理 2.2, 可分情况可得出相应结果, 详细过程略去.

本定理证完.

定理 3.5 $S_{\lambda,\tau,c,k,k'}$ 从 $L^1(B_n,\mathrm{d}v_t)$ 到 $L^\infty(B_n)$ 有界, 当且仅当满足下列条件之一:

(1) $\lambda>0$, $t<\tau$ 且 $c=\lambda+\tau-t$ 及 $k'\leqslant 0$;

(2) $\lambda>0$, $t<\tau$ 且 $c<\lambda+\tau-t$;

(3) $\lambda>0$, $t=\tau$ 且 $c\leqslant\lambda$ 及 $k'\leqslant 0$;

(4) $\lambda=0$, $t<\tau$ 且 $c<\tau-t$ 及 $k\leqslant 0$;

(5) $\lambda=0$, $t=\tau$ 且 $c\leqslant 0$ 及 $k\leqslant 0$ 和 $k'\leqslant 0$;

(6) $\lambda=0$, $t<\tau$ 且 $c=\tau-t$ 及 $k\leqslant 0$ 和 $k'\leqslant 0$.

证 必要性方面, 利用定理 3.3 的证法可得

$$\lambda>0,\ 或\ \lambda=0\ 且\ k\leqslant 0;\ t<\tau,\ 或\ t=\tau\ 且\ k'\leqslant 0;$$

$$c<\lambda+\tau-t,\ 或\ c=\lambda+\tau-t\ 且\ k'\leqslant 0.$$

充分性方面利用引理 2.5(1) 立即得到结果.

下列两个问题可以考虑:

问题 1: 定理 3.1 中的条件是不是充要条件?

问题 2: 对于如下算子:

$$T_{\lambda,\tau,c,k,k'}f(z)=\int_{B_n}\frac{(1-|w|^2)^{\tau}f(w)}{(1-|z|^2)^{-\lambda}(1-\langle z,w\rangle)^c}\log^k\frac{\mathrm{e}}{1-\langle z,\varphi_z(w)\rangle}\log^{k'}\frac{\mathrm{e}}{1-|w|^2}\,\mathrm{d}v(w)$$

有没有同样的结果?

参　考　文　献

[1] Forelli F, Rudin W. Projections on spaces of holomorphic functions on balls [J]. *Indiana Univ Math J*, 1974, 24:593–602.

[2] Kolaski C. A new look at a theorem of Forelli and Rudin [J]. *Indiana Univ Math J*, 1979, 28:495–499.

[3] Zhu K H. A Forelli-Rudin type theorem with applications [J]. *Complex Var Elliptic Equ*, 1991, 16:107–113.

[4] Ren G B, Shi J H. Bergman type operator on mixed norm spaces with applications [J]. *Chin Ann Math Ser B*, 1997, 18(2):265–276.

[5] Zhu K H. Spaces of holomorphic functions in the unit ball [M]. New York: Springer-Verlag, 2005.

[6] Kaptanoğlu H. Bergman projections on Besov spaces on balls [J]. *Illinois J Math*, 2005, 49:385–403.

[7] Kures O, Zhu K H. A class of integral operators on the unit ball of $\mathbb{C}^n$ [J]. *Int Enquat Oper Theorey*, 2006, 56:71–82.

[8] Zhao R H. Generalization of Schur's test and its application to a class of integral operators on the unit ball of $\mathbb{C}^n$ [J]. *Int Enquat Oper Theorey*, 2015, 82:519–532.

[9] Liu C W. Sharp Forelli-Rudin estimates and the norm of the Bergman projection [J]. *J Funct Anal*, 2015, 268:255–277.

[10] Peláez J, Rättyä J. Two weight inequality for Bergman projection [J]. *J Math Pures Appl*, 2016, 105:102–130.

[11] Rahm R, Tchoundja E, Wick B. Weighted estimates for the Berezin transform and Bergman projection on the unit ball [J]. *Math Z*, 2017, 286:1465–1478.

[12] Cheng G Z, Fang X, Wang Z P, et al. The hyper-singular cousin of the Bergman projection [J]. *Trans Amer Math Soc*, 2017, 369:8643–8662.

[13] Liu C W, Shi J J, Hu P Y. L^p-L^q boundedness of Bergman-type operators over the Siegel upper half-space [J]. *J Math Anal Appl*, 2018, 464:1203–1212.

[14] Kaptanoğlu H, Üreyen A. Singular integral operators with Bergman-Besov kernels on the ball [J]. *Int Enquat Oper Theorey*, 2019, 91:30.

[15] Zhao R H, Zhou L F. L^p-L^q boundedness of Forelli-Rudin type operators on the unit ball of $\mathbb{C}^n$ [J]. *J Funct Anal*, 2022, 282:109345.

[16] Li S L. Bergman type operator on spaces of holomorphic functions in the unit ball of $\mathbb{C}^n$ [J]. *J Math Anal Appl*, 2022, 514:126088.

[17] Zhang X J, Chen H X, Zhou M. Forelli-Rudin type operators on the space $L^{p,q,s}(B)$ and some applications [J]. *J Math Anal Appl*, 2023, 525:127305.

[18] 张学军, 郭雨婷, 陈洪欣. 积分估计和加权 Lebesgue 空间上广义 Forelli-Rudin 型算子的有界性 [J]. 中国科学: 数学, 2023, 53(10):1357–1376.

[19] Lv X F. Bergman projections on weighted Fock spaces in several complex variables [J]. *J of Inequal Appl*, 2017, 286:10.

[20] Peláez J, Rättyä J. Bergman projection induced by radial weight [J]. *Adv Math*, 2021, 391:107950.

[21] Zhang X J, Guo Y T, Chen H X, et al. Generalized Forelli-Rudin type operators between several function spaces on the unit ball of $\mathbb{C}^n$ [J]. *Acta Math Sci*, 2014, 44B:1301–1326.

[22] Tao T. Harmonic analysis, Lecture notes at UCLA [J/OL]. http:// www.math.ucla.edu/ tao/ 247a. 1.06f/notes2.pdf.

[23] Rudin W. Function theory in the unit ball of $\mathbb{C}^n$ [M]. New York: Springer-Verlag, 1980.

Boundedness of Extended Forelli-Rudin Type Operators Between Weighted Lebesgue Spaces on the Unit Ball

ZHANG Fan[1] YANG Shiqi[1] ZHANG Xuejun[2]

[1]College of Mathematics and Statistics, Hunan Normal University, Changsha 410006, China. E-mail: 2914185325@qq.com; 1415477394@qq.com

[2]Corresponding author. College of Mathematics and Statistics, Hunan Normal University, Changsha 410006, China. E-mail: xuejunttt@263.net

Abstract In this paper, the authors give the conditions of boundedness for the generalized Forelli Rudin type operator $S_{\lambda,\tau,c,k,k'}$ from the weighted Lebesgue space $L^p(B_n, \mathrm{d}v_t)$ to $L^q(B_n, \mathrm{d}v_t)$ for $1 \leqslant p < q \leqslant +\infty$ or $p = q = +\infty$, and give the necessary and sufficient conditions in Theorems 3.2–3.5. The authors improve the recent's results in Scientia Sinica Mathematica by the second author et al to $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$.

Keywords Extended Forelli Rudin type operator, Weighted Lebesgue space, Boundedness

2000 MR Subject Classification 47G10, 47B38, 32A25