数 学 年 刊 A 辑
2024, 45(2):171–184
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2024.0012

具有延迟参数的 Sturm-Liouville 算子的谱特征及其反问题

王 静[1] 杨传富[2]

提要 具有延迟参数的 Sturm-Liouville 算子的逆谱问题是 Sturm-Liouville 理论的一个重要分支. 延迟参数的 Sturm-Liouville 微分方程可用于对声波信号的传输以及液压冲击或其他波过程的模拟. 本文主要研究有限区间上具有延迟变量的二阶 Sturm-Liouville 算子的特征值及其逆谱问题, 利用势函数的 Fourier 展开式的方法得出了相应的逆谱问题的唯一性定理, 即在某些假设条件下由边值问题的两组谱可以唯一确定延迟变量 τ 和势函数 $q(x)$. 最后本文给出势函数的重构算法.

关键词 Sturm-Liouville 算子, 逆谱问题, 延迟参数, 特征值参数, 唯一性
MR (2000) 主题分类 34A55, 34B24, 47E05
中图法分类 O175.14
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2024)02-0171-14

§1 引言

本文考虑有限区间 $[0,\pi]$ 上具有延迟参数的 Sturm-Liouville 算子在两组不同边界条件下的两个边值问题 $L_j(q;H_j)(j=1,2)$, 具体研究内容如下:

$$-y''(x)+q(x)y(x-\tau)=\lambda y(x),\quad 0<x<\pi, \tag{1.1}$$

在边界顶点 0 处满足 Dirichlet 条件

$$y(0)=0, \tag{1.2}$$

在边界顶点 π 处满足含有特征值的一次线性二项式的边界条件

$$y'(\pi)+H_j(\lambda)y(\pi)=0, \tag{1.3}$$

其中 $H_j(\lambda):=a_j\lambda+b_j$, λ 为谱参数, τ 为延迟参数, 势函数 $q(x)$ 为区间 $[0,\pi]$ 上的复值函数并且连续, 当 $x\in(0,\tau)$ 时, $q(x)=0$.

Sturm-Liouville 问题起源于 19 世纪初对 Fourier 热传导问题的数学处理, 它的理论应用极其广泛, 已涉足于数学物理 (如波动方程、热传导方程、薛定谔方程) 和工程技术等各类应用及理论学科, 许多实际问题的解决可归结为对 Sturm-Liouville 问题的特征值与

本文 2023 年 2 月 17 日收到, 2024 年 4 月 20 日收到修改稿.
[1]南京理工大学数学与统计学院数学系, 南京 210094; 宁波市镇海区职业教育中心学校, 浙江 宁波 315201. E-mail: jingwang@njust.edu.cn
[2]通信作者. 南京理工大学数学与统计学院数学系, 南京 210094. E-mail: chuanfuyang@njust.edu.cn

特征函数的研究, 微分方程耦合不同的边界条件构成了微分方程边值问题, 可以描述特定的物理现象. 因此, Sturm-Liouville 问题已经逐步成为数学和物理学界的一个重要理论研究分支, 并受到相关领域专家及学者的广泛关注和深入研究.

随着对谱理论的深入研究并加以推广, 到上世纪中叶开始研究带有延迟参数的 Sturm-Liouville 微分算子, 并且对于具有延迟参数的微分算子的逆谱问题的研究有了越来越多的兴趣 (见 [1–19]), 其主要的研究方向是在给定谱的情况下恢复 Sturm-Liouville 算子的问题.

这类延迟参数的 Sturm-Liouville 微分算子通常更适合于模拟各种现实世界中具有非局域性质的过程, 并出现在许多研究领域, 包括自动控制理论、自振荡系统理论、生物学、经济中的长期预测、液压冲击建模以及自然科学和工程的其他分支 (见 [10–11, 14]). 例如, 液体火箭发动机 [14] 的燃烧过程可以利用具有延迟参数的 Sturm-Liouville 微分方程进行模拟, 其中对延迟参数的物理解释是根据从推进剂喷射时刻到推进剂燃烧时刻发生燃烧时间的延迟. 在这种情况下, 势函数 $q(x)$ 描述了导致这种延迟的所有参数的影响因素, 例如: 推进剂进料线的截面积、火箭喷嘴通道面积.

对于许多具体边值问题, 特征值参数不仅可以出现在微分方程中, 还可以出现在边界条件里. 对于两边界条件都含谱参数的 Sturm-Liouville 算子的问题, 它的物理背景是由两端连接于可以在滑道上运动的物体上的弦的振动方程分离变量时得到的 (见 [19]) . 目前人们对于含有特征值参数边界条件且具有延迟变量的 Sturm-Liouville 算子问题的谱特征及其反问题却很少有研究, 所以本文对这方面进行探索.

本文假设 $A=\int_\tau^\pi q(t)\mathrm{d}t\neq 0$. 下证延迟参数 τ 和势函数 $q(x)$ 可以由谱 L_1 和 L_2 唯一确定. 具体来说, 本文设 $\{\lambda_n^{(j)}\}_{n\geqslant 0}$ 是边值问题 L_j $(j=1,\ 2)$ 的谱, 所讨论的反问题是在某些假设条件下由两组不同边界条件的谱 $\{\lambda_n^{(j)}\}_{n\geqslant 0}(j=1,\ 2)$ 唯一确定势函数 $q(x)$, $H_j(j=1,\ 2)$ 和延迟变量 τ.

本文首先利用边界条件构造出该算子的示性函数, 从而使得特征值问题转化为某个整函数的零点问题; 其次将满足边界条件的解代入其中, 得出示性函数的具体表达式; 然后选取适当的围道并利用留数定理计算出示性函数的渐近估计式; 最后利用势函数的 Fourier 展开式得出反问题解的唯一性定理以及势函数的重构算法.

§2 谱性质

本节我们将讨论算子 $L_j(q)(j=1,2)$ 的特征值的渐近表达式及示性函数的乘积分解式, 得到下列引理. 首先, 我们通过方程的基本解及边界条件构造出边值问题 $L_j(q;H_j)(j=$

1, 2) 的示性函数, 从而将求解示性函数转化为求解一个整函数的零点问题.

设 $\lambda=\rho^2$, $\rho=p+\mathrm{i}q$, 令函数 $y(x,\lambda)$ 是方程 (2.1) 在初始条件 $y(0)=0$, $y'(0)=1$ 的解, 我们利用常数变易法来求方程 (2.1) 在初始条件 $y(0)=0$, $y'(0)=1$ 下的解 $y(x,\lambda)$.

引理 2.1 记 $\lambda=\rho^2$, 则方程 (2.1) 的解为

$$y(x,\lambda)=\frac{\sin(\rho x)}{\rho}+\int_\tau^x\frac{q(t)\sin(\rho(x-t))}{\rho}y(t-\tau,\lambda)\mathrm{d}t. \tag{2.1}$$

证 方程

$$y''+\rho^2y=qy \tag{2.2}$$

的齐次方程通解为

$$y=c_1\cos(\rho x)+c_2\sin(\rho x), \tag{2.3}$$

利用常数变易法, 得

$$\begin{aligned}c_1'\cos(\rho x)+c_2'\sin(\rho x)=0,&\\ y'=-\rho c_1\sin(\rho x)+\rho c_2\cos(\rho x),&\\ y''=-\rho c_1'\sin(\rho x)+\rho c_2'\cos(\rho x)-\rho^2y.&\end{aligned}$$

将以上三个式子代入方程 (2.2), 得

$$c_1'\rho\sin(\rho x)-c_2'\rho\cos(\rho x)=-qy,$$

联立起来, 解得

$$c_1'=-\frac{\sin(\rho x)}{\rho}qy,\quad c_2'=-\frac{\cos(\rho x)}{\rho}qy.$$

上式两端在区间 $[0,\ x]$ 上积分, 得

$$c_1'=-\int_0^x\frac{\sin(\rho t)}{\rho}q(t)y(t)\mathrm{d}t+\alpha_1,$$

$$c_2'=\int_0^x\frac{\cos(\rho t)}{\rho}q(t)y(t)\mathrm{d}t+\alpha_2,$$

故

$$y=\alpha_1\cos(\rho t)+\alpha_2\sin(\rho t)+\int_0^x\frac{\sin(\rho(x-t))}{\rho}q(t)y(t)\mathrm{d}t.$$

如果 $y(0)=0$, $y'(0)=1$, 则

$$\alpha_1=0,\quad \alpha_2=\frac{1}{\rho},$$

所以

$$y(x,\lambda)=\frac{\sin(\rho x)}{\rho}+\int_\tau^x\frac{q(t)\sin(\rho(x-t))}{\rho}y(t-\tau,\lambda)\mathrm{d}t.$$

下面给出方程 (2.1) 的解的具体形式.

为此, 将方程 (2.1) 两端关于 x 求导, 得

$$y'(x,\lambda)=\cos(\rho x)+\int_{\tau}^{x}q(t)\cos(\rho(x-t))y(t-\tau,\lambda)\mathrm{d}t. \tag{2.4}$$

因此, 当 $x\in[0,\tau)$ 时, 方程 (2.1) 的解是

$$y(x,\lambda)=\frac{\sin(\rho x)}{\rho}+\int_{\tau}^{x}\frac{q(t)\sin(\rho(x-t))}{\rho}y(t-\tau,\lambda)\mathrm{d}t=\frac{\sin(\rho x)}{\rho}. \tag{2.5}$$

当 $x\in[\tau,2\tau)$ 时, 方程 (2.1) 的解是

$$y(x,\lambda)=\frac{\sin(\rho x)}{\rho}+\frac{1}{\rho^2}\int_{\tau}^{x}q(t)\sin(\rho(x-t))\sin(\rho(t-\tau))\mathrm{d}t. \tag{2.6}$$

当 $x\in[2\tau,\pi)$ 时, 方程 (2.1) 的解是

$$\begin{aligned}y(x,\lambda)=&\frac{\sin(\rho x)}{\rho}+\frac{1}{\rho^2}\int_{\tau}^{x}q(t)\sin(\rho(x-t))\sin(\rho(t-\tau))\mathrm{d}t\\&+\frac{1}{\rho^3}\int_{2\tau}^{x}\int_{\tau}^{t-\tau}q(t)q(s)\sin(\rho(x-t))\sin(\rho(t-\tau-s))\sin(\rho(s-\tau))\mathrm{d}s\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{2.7}$$

因此, 将 (2.5), (2.7) 进一步化简, 我们可以得到

$$y(x,\lambda)=\frac{\sin(\rho x)}{\rho}-\frac{\cos(\rho(x-\tau))}{2\rho^2}\int_{\tau}^{x}q(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2\rho^2}\int_{\tau}^{x}q(t)\cos(\rho(x-2t+\tau))\mathrm{d}t, \tag{2.8}$$

$$y'(x,\lambda)=\cos(\rho x)+\frac{\sin(\rho(x-\tau))}{2\rho}\int_{\tau}^{x}q(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2\rho}\int_{\tau}^{x}q(t)\sin(\rho(x-2t+\tau))\mathrm{d}t. \tag{2.9}$$

由引理 2.3 中的渐近估计式可以得到当 $x>\tau$ 时, $y(x,\lambda)$ 和 $y'(x,\lambda)$ 的渐近估计式为

$$\begin{aligned}y(x,\lambda)=&\frac{\sin(\rho x)}{\rho}-\frac{\cos(\rho(x-\tau))}{2\rho^2}\int_{\tau}^{x}q(t)\mathrm{d}t\\&+\frac{1}{2\rho^2}\int_{\tau}^{x}q(t)\cos(\rho(x-2t+\tau))\mathrm{d}t+O\Big(\frac{\mathrm{e}^{|\mathrm{Im}\rho|\pi}}{\rho^3}\Big),\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}y'(x,\lambda)=&\cos(\rho x)+\frac{\sin(\rho(x-\tau))}{2\rho}\int_{\tau}^{x}q(t)\mathrm{d}t\\&-\frac{1}{2\rho}\int_{\tau}^{x}q(t)\sin(\rho(x-2t+\tau))\mathrm{d}t+O\Big(\frac{\mathrm{e}^{|\mathrm{Im}\rho|\pi}}{\rho^2}\Big).\end{aligned} \tag{2.11}$$

下面给出边值问题 $L_j(q;H_j)(j=1,2)$ 的示性函数的表达式. 为了简洁, 令

$$\begin{aligned}A&=\int_{\tau}^{\pi}q(t)\mathrm{d}t,\\A_1(\rho,\tau)&=\frac{1}{2}\int_{\tau}^{\pi}q(t)\sin(\rho(2t-\tau))\mathrm{d}t,\\A_2(\rho,\tau)&=\frac{1}{2}\int_{\tau}^{\pi}q(t)\cos(\rho(2t-\tau))\mathrm{d}t,\\C_1(\rho,\tau)&=\frac{1}{2}\sin(\rho\tau),\\C_2(\rho,\tau)&=\frac{1}{2}\cos(\rho\tau).\end{aligned} \tag{2.12}$$

引理 2.2　边值问题 $L_j(q;H_j)(j=1,2)$ 的示性函数 Δ_j 可以表示为

$$\Delta_j(\lambda)=y'(\pi,\lambda)+H_j(\lambda)y(\pi,\lambda),\quad j=1,2. \tag{2.13}$$

引理 2.2 说明边值问题 $L_j(q;H_j)(j=1,2)$ 的特征值集与示性函数 $\Delta_j(\lambda)$ 的零点集一致, 从而表明求解微分算子 $L_j(q;H_j)$ 的示性函数可以转化为求解 $\Delta_j(\lambda)$ 的零点问题. 为了求解示性函数 $\Delta_j(\lambda)$ 的零点, 我们需要先计算出示性函数 $\Delta_j(\lambda)$ 的渐近表达式. 因此将 (2.10)–(2.11) 代入 (2.13), 我们有

$$\begin{aligned}\Delta_j(\lambda)=&\cos(\rho\pi)+\int_\tau^\pi q(t)\cos(\rho(\pi-t))y(t-\tau,\lambda)\mathrm{d}t-(a_j\rho^2+b_j)\Big[\frac{\sin(\rho\pi)}{\rho}\\&+\int_\tau^\pi\frac{q(t)\sin(\rho(\pi-t))}{\rho}y(t-\tau,\lambda)\mathrm{d}t\Big],\end{aligned} \tag{2.14}$$

化简可得

$$\begin{aligned}\Delta_j(\lambda)=&a_j\rho\sin(\rho\pi)+\cos(\rho\pi)+\frac{b_j\sin(\rho\pi)}{\rho}\\&+a_j\rho\int_\tau^\pi q(t)\sin(\rho(\pi-t))y(t-\tau,\lambda)\mathrm{d}t\\&+\int_\tau^\pi q(t)\cos(\rho(\pi-t))y(t-\tau,\lambda)\mathrm{d}t\\&+\frac{b_j}{\rho}\int_\tau^\pi q(t)\sin(\rho(\pi-t))y(t-\tau,\lambda)\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{2.15}$$

因为

$$y(t-\tau,\lambda)=\frac{\sin(\rho(t-\tau))}{\rho}+O\Big(\frac{\mathrm{e}^{|\mathrm{Im}\rho|\pi}}{\rho^2}\Big), \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}\int_\tau^\pi q(t)\cos(\rho(\pi-t))\sin(\rho(t-\tau))\mathrm{d}t=&\frac{1}{2}\int_\tau^\pi q(t)[\sin(\rho(\pi-\tau))\\&-\sin(\rho(\pi-2t+\tau))]\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}\int_\tau^\pi q(t)\sin(\rho(\pi-t))\sin(\rho(t-\tau))\mathrm{d}t=&-\frac{1}{2}\int_\tau^\pi q(t)[\cos(\rho(\pi-\tau))\\&-\cos(\rho(\pi-2t+\tau))]\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{2.18}$$

所以将上述表达式 (2.16)–(2.18) 代入 (2.15), 可得

$$\begin{aligned}\Delta_j(\lambda)=&a_j\rho\sin(\rho\pi)+\cos(\rho\pi)-\frac{a_jA}{2}\cos(\rho(\pi-\tau))\\&+\frac{a_j}{2}\int_\tau^\pi q(t)\cos(\rho(\pi-2t+\tau))\mathrm{d}t+\frac{b_j\sin(\rho\pi)}{\rho}+\frac{A}{2\rho}\sin(\rho(\pi-\tau))\\&-\frac{1}{2\rho}\int_\tau^\pi q(t)\sin(\rho(\pi-2t+\tau))\mathrm{d}t+O\Big(\frac{\mathrm{e}^{|\mathrm{Im}\rho|\pi}}{\rho^2}\Big)\\=&a_j\rho\sin(\rho\pi)+\cos(\rho\pi)-\frac{a_jA}{2}\cos(\rho\tau)\cos(\rho\pi)\\&-\frac{a_jA}{2}\sin(\rho\tau)\sin(\rho\pi)-\frac{a_j\sin(\rho\pi)}{2}\int_\tau^\pi q(t)\sin(\rho(2t-\tau))\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$+\frac{b_j\sin(\rho\pi)}{\rho}+\frac{A}{2\rho}\cos(\rho\tau)\sin(\rho\pi)-\frac{A_1}{2\rho}\sin(\rho\tau)\cos(\rho\pi)$$
$$+O\Big(\frac{\mathrm{e}^{|\mathrm{Im}\rho|\pi}}{\rho^2}\Big),\tag{2.19}$$

因此示性函数 $\Delta_j(\lambda)$ 的渐近表达式为

$$\begin{aligned}\Delta_j(\lambda)&=a_j\rho\sin(\rho\pi)+[1-a_jAC_2(\rho,\tau)+a_jA_2(\rho,\tau)]\cos(\rho\pi)\\&\quad-[a_jAC_1(\rho,\tau)+a_jA_1(\rho,\tau)]\sin(\rho\pi)+\frac{1}{\rho}\,[b_j+AC_2(\rho,\tau)]\sin(\rho\pi)\\&\quad-\frac{1}{\rho}\,AC_1(\rho,\tau)\cos(\rho\pi)+O\Big(\frac{\mathrm{e}^{|\mathrm{Im}\rho|\pi}}{\rho^2}\Big).\end{aligned}\tag{2.20}$$

下面给出算子 $L_j(q;H_j)(j=1,2)$ 的特征值的渐近估计式.

定理 2.1 当 $|n|$ 充分大时, 边值问题 L_j, $j=1,2$, 的特征值为 $\{\lambda_n^{(j)}\}_{n\geqslant 0}$ $(j=1,2)$, 且有以下渐近估计表达式:

$$\rho_n^{(j)}=n+\frac{1-a_jAC_2(n,\tau)+a_jA_2(n,\tau)}{a_jn\pi}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big).\tag{2.21}$$

证 定义函数

$$\widetilde{\Delta}_j(\lambda):=a_j\rho\sin(\rho\pi).\tag{2.22}$$

记 $\widetilde{\lambda}_n^{(j)}$, $n\in\mathbb{Z}$, 是函数 $\widetilde{\Delta}_j(\lambda)$ 的零点, 则有 $\widetilde{\lambda}_n^{(j)}=n$, $n\in\mathbb{Z}$, 并且它是函数 $\widetilde{\Delta}_j(\lambda)$ 简单零点. 接下来本定理只证明 $j=1$ 的情况. 取逆时针围道 $\gamma_n=\{\lambda:|\lambda-\widetilde{\lambda}_n^{(1)}|=\varepsilon,n\in\mathbb{Z}\}$ $(0<\varepsilon<\frac{1}{2})$. 由文 [2] 的方法, 如果 $\rho\in\gamma_n$, 那么当 $|n|$ 充分大时, 在 γ_n 上有 $|\widetilde{\Delta}_1(\lambda)|\geqslant C_1|\rho|\mathrm{e}^{|t|\pi}(C_1>0)$.

因为 $\Delta_1(\lambda)$ 和 $\widetilde{\Delta}_1(\lambda)$ 都是关于 λ 的整函数, 且 $\widetilde{\Delta}_1(\lambda)$ 在 γ_n 上无零点, 所以 $\Delta_1(\lambda)=\widetilde{\Delta}_1(\lambda)(1+O(\frac{1}{\rho}))$, 进而 $|\Delta_1(\lambda)-\widetilde{\Delta}_1(\lambda)|<\widetilde{\Delta}_1(\lambda),\lambda\in\gamma_n$, 所以由儒歇定理知 $\Delta_1(\lambda)$ 和 $\widetilde{\Delta}_1(\lambda)$ 在 γ_n 内有相同的零点个数. 又因为 $a_1a_2\neq 0$, 所以当 $\lambda\in\gamma_n$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{\Delta_1(\lambda)}{\widetilde{\Delta}_1(\lambda)}&=1+\frac{1-a_jAC_2(\rho,\tau)+a_jA_2(\rho,\tau)}{a_1\rho}\cdot\frac{\cos(\rho\pi)}{\sin(\rho\pi)}\\&\quad-\frac{AC_1(\rho,\tau)+A_1(\rho,\tau)}{\rho}+\frac{b_1+AC_2(\rho,\tau)}{a_1\rho^2}\\&\quad-\frac{AC_1(\rho,\tau)}{a_1\rho^2}\cdot\frac{\cos(\rho\pi)}{\sin(\rho\pi)}+O\Big(\frac{1}{\rho^3}\Big).\end{aligned}$$

上式两端同时取对数并应用泰勒展开式, 化简可得

$$\begin{aligned}\ln\frac{\Delta_1(\lambda)}{\widetilde{\Delta}_1(\lambda)}&=-\frac{1-a_jAC_2(\rho,\tau)+a_jA_2(\rho,\tau)}{a_1\rho}\cdot\frac{\cos(\rho\pi)}{\sin(\rho\pi)}\\&\quad+\frac{AC_1(\rho,\tau)+A_1(\rho,\tau)}{\rho}-\frac{b_1+AC_2(\rho,\tau)}{a_1\rho^2}\end{aligned}$$

$$+\frac{AC_1(\rho,\tau)}{a_1\rho^2}\cdot\frac{\cos(\rho\pi)}{\sin(\rho\pi)}+O\Big(\frac{1}{\rho^3}\Big).$$

由儒歇定理 (见 [17]), 可得

$$\begin{aligned}\rho_n^{(1)}-n&=-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\gamma_n}\ln\ \frac{\Delta_1(\rho^2)}{\widetilde{\Delta}_1(\rho^2)}\mathrm{d}\rho\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\gamma_n}\frac{1-a_jAC_2(\rho,\tau)+a_jA_2(\rho,\tau)}{a_1\rho}\cdot\frac{\cos(\rho\pi)}{\sin(\rho\pi)}\mathrm{d}\rho\\&\quad-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\gamma_n}\frac{AC_1(\rho,\tau)+A_1(\rho,\tau)}{\rho}\mathrm{d}\rho\\&\quad+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\gamma_n}\frac{b_1+AC_2(\rho,\tau)}{a_1\rho^2}\mathrm{d}\rho\\&\quad-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\gamma_n}\frac{AC_1(\rho,\tau)}{a_1\rho^2}\cdot\frac{\cos(\rho\pi)}{\sin(\rho\pi)}\mathrm{d}\rho+O\Big(\frac{1}{n^3}\Big).\end{aligned}$$

最后对上面等式的右边逐项进行留数计算, 可得

$$\rho_n^{(1)}-n=\frac{1-a_1AC_2(n,\tau)+a_1A_2(n,\tau)}{a_1n\pi}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

因此我们有如下渐近表达式:

$$\rho_n^{(1)}=n+\frac{1-a_1AC_2(n,\tau)+a_1A_2(n,\tau)}{a_1n\pi}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

为了问题便于处理, 下面由 Hadamard 分解定理给出示性函数的乘积展开式.

定理 2.2　示性函数 $\Delta_j(\lambda)$ 是关于 λ 的 $\frac{1}{2}$ 阶整函数, 且有如下乘积展开式

$$\Delta_j(\lambda)=a_j\lambda\pi\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n^{(j)}-\lambda}{n^2},\quad j=1,\ 2.\tag{2.23}$$

从而示性函数 $\Delta_j(\lambda)$ $(j=1,2)$ 可由特征值 $\{\lambda_n^{(j)}\}_{n\geqslant0}$ $(j=1,2)$ 和 a_j $(j=1,2)$ 唯一确定.

证　根据 (2.20) 显然可知 $\Delta_j(\lambda)$ $(j=1,2)$ 是关于 λ 的 $\frac{1}{2}$ 阶整函数, 因此由 Hadamard 分解定理 (见 [8]) 知, $\Delta_j(\lambda)$ 可以写成

$$\Delta_j(\lambda)=a_j\lambda C\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{\lambda}{\lambda_n^{(j)}}\Big).$$

下面求乘积展开式常数 C.

考虑函数

$$\widetilde{\Delta}_j(\lambda):=a_j\rho\sin(\rho\pi)=a_j\pi\lambda\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{\lambda}{n^2}\Big),$$

那么

$$\frac{\Delta_j(\lambda)}{\widetilde{\Delta}_j(\lambda)}=\frac{C}{\pi}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\lambda_n^{(j)}}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n^{(j)}-\lambda}{n^2-\lambda}.$$

结合 (2.19) 和 (2.17), 我们可以计算出

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\frac{\Delta_j(\lambda)}{\widetilde{\Delta}_j(\lambda)}=1,\qquad \lim_{\lambda\to-\infty}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n^{(j)}-\lambda}{n^2-\lambda}=1,$$

因此可得常数

$$C=\pi\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n^{(j)}}{n^2}.$$

从而完成定理 2.2 的证明.

§3 唯一性定理及重构算法

上一小节我们讨论了算子 $L_j(q;H_j)(j=1,2)$ 的特征值的渐近表达式及示性函数 $\Delta_j(\lambda)$ 的乘积分解式. 接下来本节将给出带有延迟参数的 Sturm-Liouvile 算子的反问题解的唯一性定理及势函数的重构算法, 即给定两组谱 $\{\lambda_n^{(1)},\lambda_n^{(2)}\}_{n\geqslant 0}$, 求势函数 $q(x)$, 延迟参数 τ, A, a_1, a_2, b_1 和 b_2.

首先, 给出延迟参数 τ 的唯一确定性, 即探究边值问题 $L_j(q;H_j)(j=1,2)$ 的几组谱可以唯一确定延迟参数 τ.

引理 3.1 延迟参数 τ 可以由边值问题 $L_1(q;H_1)$ 的特征值 $\{\lambda_n^{(1)}\}_{n\geqslant 0}$ 唯一确定. 同理也可由边值问题 $L_2(q;H_2)$ 的特征值 $\{\lambda_n^{(2)}\}_{n\geqslant 0}$ 唯一确定.

证 因为存在无数多个 $k\in\mathbb{N}$ 和 $\delta>0$, 使得 $|\sin(k\tau)|>\delta>0$, 所以由 (2.21) 以及假设条件 $A\neq 0$, 我们有

$$\begin{aligned}&\lim_{k\to\infty}\frac{\lambda_{k-2}^{(1)}-(k-2)^2-\lambda_{k+2}^{(1)}+(k+2)^2}{\lambda_{k-1}^{(1)}-(k-1)^2-\lambda_{k+1}^{(1)}+(k+1)^2}\\ =&\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{2}{a_1\pi}+\frac{2A\cos((k-2)\tau)}{\pi}-\frac{2}{a_1\pi}-\frac{2A\cos((k+2)\tau)}{\pi}}{\frac{2}{a_1\pi}+\frac{2A\cos((k-1)\tau)}{\pi}-\frac{2}{a_1\pi}-\frac{2A\cos((k+1)\tau)}{\pi}}\\ =&\lim_{k\to\infty}\frac{\cos((k-2)\tau)-\cos((k+2)\tau)}{\cos((k-1)\tau)-\cos((k+1)\tau)}\\ =&\lim_{k\to\infty}\frac{\sin(k\tau)\sin(2\tau)}{\sin(k\tau)\sin\tau}\\ =&2\cos\tau.\end{aligned}$$

因此可得 τ 的表达式为

$$\tau=\arccos\Big[\frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\frac{\lambda_{k-2}^{(1)}-(k-2)^2-\lambda_{k+2}^{(1)}+(k+2)^2}{\lambda_{k-1}^{(1)}-(k-1)^2-\lambda_{k+1}^{(1)}+(k+1)^2}\Big].\tag{3.1}$$

由上式可知 τ 可由边值问题 $L_1(q;H_1)$ 的特征值 $\{\lambda_n^{(1)}\}_{n\geqslant 0}$ 唯一确定. 同理也可证得 τ 可由边值问题 $L_2(q;H_2)$ 的特征值 $\{\lambda_n^{(2)}\}_{n\geqslant 0}$ 唯一确定.

由记号 $A:=\int_\tau^\pi q(t)\mathrm{d}t$, 下面考虑该积分与边值问题 $L_j(q;H_j)$ 的谱的关系.

引理 3.2　当 $\pi-\tau\in\mathbb{Q}^c$ 时, A 可以由边值问题 $L_1(q;H_1)$ 的特征值 $\{\lambda_n^{(1)}\}_{n\geqslant 0}$ 唯一确定. 同理也可由边值问题 $L_2(q;H_2)$ 的特征值 $\{\lambda_n^{(2)}\}_{n\geqslant 0}$ 唯一确定.

证　根据 (2.15), 我们有

$$\Delta_1(\lambda)=a_1\rho\sin(\rho\pi)+\cos(\rho\pi)+\frac{a_1A\cos(\rho(\pi-\tau))}{2}+O\Big(\frac{\mathrm{e}^{|\mathrm{Im}\rho|\pi}}{\rho}\Big). \tag{3.2}$$

因为 $a_1\neq 0$, 结合 (2.23) 和 (3.2), 有

$$\pi\lambda\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n^{(1)}-\lambda}{n^2}=\rho\sin(\rho\pi)+\frac{\cos(\rho\pi)}{a_1}+\frac{A\cos(\rho(\pi-\tau))}{2}+O\Big(\frac{\mathrm{e}^{|\mathrm{Im}\rho|\pi}}{\rho}\Big). \tag{3.3}$$

由于 $\{\rho_n:\rho_n=n+\frac{1}{2},\ n\in\mathbb{Z}\}$ 和 $\{\rho_m:\rho_m=\frac{(m+\frac{1}{2})\pi}{\pi-\tau},\ m\in\mathbb{Z}\}$ 分别是 $\cos(\rho\pi)$ 和 $\cos(\rho(\pi-\tau))$ 的零点集, 在假设 $\pi-\tau\in\mathbb{Q}^c$ 下, 显然可得三角函数 $\cos(\rho\pi)$ 和 $\cos(\rho(\pi-\tau))$ 在复数域 $\mathbb{C}$ 内无公共零点. 记

$$G_\delta:=\Big\{\lambda:\Big|\rho-\frac{(m+\frac{1}{2})\pi}{\pi-\tau}\Big|>\delta,\ m\in\mathbb{Z}\Big\},$$

其中 δ 充分小, 那么存在常数 C_δ, 使得

$$|\cos(\rho(\pi-\tau))|\geqslant C_\delta\mathrm{e}^{|t|(\pi-\tau)}>0,\quad\forall\lambda\in G_\delta.$$

令 $\rho_m=m+\frac{1}{2}$, $m\in\mathbb{N}$, 当 $\rho_m\in G_\delta$ 时, 我们有 $\cos(\rho_m\pi)=0$, $|\cos(\rho_m(\pi-\tau))|\geqslant C_\delta>0$, 将表达式 $\rho_m=m+\frac{1}{2}$ 代入 (3.3), 可得

$$\pi\Big(m+\frac{1}{2}\Big)^2\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_m^{(1)}-(m+\frac{1}{2})^2}{m^2}=(-1)^m\Big(m+\frac{1}{2}\Big)+\frac{A\cos((m+\frac{1}{2})(\pi-\tau))}{2}+O\Big(\frac{1}{\rho}\Big).$$

由上式解得 A 的表达式为

$$A=2\lim_{m\to\infty}\frac{(-1)^m(m+\frac{1}{2})-\pi(m+\frac{1}{2})^2\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_m^{(1)}-(m+\frac{1}{2})^2}{m^2}}{\cos((m+\frac{1}{2})(\pi-\tau))}. \tag{3.4}$$

下面两个引理讨论该边值问题的边界条件中系数 a_j, b_j 与谱的关系, 并给出相应结果.

引理 3.3　当 $\pi-\tau\in\mathbb{Q}^c$ 时, a_1 可以由边值问题 $L_1(q;H_1)$ 的特征值 $\{\lambda_n^{(1)}\}_{n\geqslant 0}$ 唯一确定. 同理 a_2 也可由边值问题 $L_2(q;H_2)$ 的特征值 $\{\lambda_n^{(2)}\}_{n\geqslant 0}$ 唯一确定.

证　由 (2.21) 和 (3.3) , 我们有

$$a_j=\frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\Big(n^2-\lambda_n^{(j)}-\frac{1}{\pi}A\cos(n\tau)\Big)^{-1}. \tag{3.5}$$

因为由引理 3.1–3.2 知 A 和 τ 可以由边值问题 $L_1(q;H_1)$ 的特征值 $\{\lambda_n^{(1)}\}_{n\geqslant 0}$ 唯一确定, 所以 a_1 可以由边值问题 $L_1(q;H_1)$ 的特征值 $\{\lambda_n^{(1)}\}_{n\geqslant 0}$ 唯一确定. 同理也可证明 a_2 由边值问题 $L_2(q;H_2)$ 的特征值 $\{\lambda_n^{(2)}\}_{n\geqslant 0}$ 唯一确定. 因此引理得证.

引理 3.4 当 $\pi-\tau\in\mathbb{Q}^c$ 时, b_1 可以由边值问题 $L_1(q;H_1)$ 的特征值 $\{\lambda_n^{(1)}\}_{n\geqslant 0}$ 唯一确定. b_2 可以由边值问题 $L_2(q;H_2)$ 的特征值 $\{\lambda_n^{(2)}\}_{n\geqslant 0}$ 唯一确定.

证 由 (2.5)–(2.7), 我们有

$$\begin{aligned}\Delta_j(\lambda)=&a_j\rho\sin(\rho\pi)+\cos(\rho\pi)-\frac{a_jA\cos(\rho(\pi-\tau))}{2}+\frac{A\sin(\rho(\pi-\tau))}{2\rho}\\&+\frac{b_j\sin(\rho\pi)}{\rho}-\frac{b_jA\cos(\rho(\pi-\tau))}{2\rho^2}-\frac{1}{2\rho}\int_\tau^\pi q(t)\sin(\rho(\pi-2t+\tau))\mathrm{d}t\\&+\frac{a_j}{2\tau}\int_\tau^\pi q(t)\cos(\rho(\pi-2t+\tau))\mathrm{d}t+\frac{b_j}{2\tau\rho^2}\int_\tau^\pi q(t)\cos(\rho(\pi-2t+\tau))\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{3.6}$$

另外, 有如下表达式成立

$$\begin{aligned}&\int_\tau^\pi q(t)\cos(\rho(\pi-2t+\tau))\mathrm{d}t\\&=\cos(\rho(\pi+\tau))\int_\tau^\pi q(t)\cos(2\rho t)\mathrm{d}t+\sin(\rho(\pi+\tau))\int_\tau^\pi q(t)\sin(2\rho t)\mathrm{d}t,\end{aligned}\tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}&\int_\tau^\pi q(t)\sin(\rho(\pi-2t+\tau))\mathrm{d}t\\&=\sin(\rho(\pi+\tau))\int_\tau^\pi q(t)\cos(2\rho t)\mathrm{d}t-\cos(\rho(\pi+\tau))\int_\tau^\pi q(t)\sin(2\rho t)\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{3.8}$$

然后将表达式 $\rho_m=2m+\frac12$, $m\in\mathbb{Z}$, 代入 (3.7)–(3.8), 并且由 Riemann-Lebesgue 引理, 可得

$$\lim_{m\to\infty}\int_\tau^\pi q(t)\cos\Big(2m+\frac12\Big)(\pi-2t+\tau)\mathrm{d}t=0,$$

$$\lim_{m\to\infty}\int_\tau^\pi q(t)\sin\Big(2m+\frac12\Big)(\pi-2t+\tau)\mathrm{d}t=0.$$

最后, 根据 (3.6), 有

$$b_j=-\lim_{m\to\infty}\frac{\Delta_j(\rho_m^2)-a_j\rho_m+\frac12a_jA\cos(\rho_m(\pi-\tau))+\frac12A(\pi-\tau)}{A(\pi-\tau)^2-\pi}.\tag{3.9}$$

因此, 我们得到了关于 b_j 的表达式. 综上可知引理得证.

接下来我们将证明势函数 $q(x)$ 可以由算子 $L_j(q;H_j)(j=1,2)$ 的谱唯一确定. 本文假设势函数 $q(x)$ 在实直线上的展开式以 π 为周期, 那么在区间 $[0,\pi]$ 外 $q(x)$ 以周期 π 进行延拓. 因为 $q(x)\in L^2[0,\pi]$, 并且在区间 $(0,\tau)$ 上 $q(x)=0$, 所以势函数 $q(x)$ 有如下 Fourier 展开式:

$$q(x)=\frac{c_0}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty(c_n\cos(2nx)+d_n\sin(2nx)),\tag{3.10}$$

其中

$$c_0=\int_\tau^\pi q(t)\mathrm{d}t=A,\quad c_n=\int_\tau^\pi q(t)\cos(2nt)\mathrm{d}t,\quad d_n=\int_\tau^\pi q(t)\sin(2nt)\mathrm{d}t.$$

根据引理 3.7, 系数 c_0 可以由一组谱唯一确定. 接下来本节将要证明其他系数 c_n 和 d_n 可以由两组谱唯一确定. 因此当 Fourier 系数 c_0, c_n 和 d_n 都确定时, 由 (3.10) 可知势函数 $q(x)$ 也可以由两组谱唯一确定.

定理 3.1　当 $\pi-\tau\in\mathbb{Q}^c$ 时, 由边值问题 L_j $(j=1,2)$ 的两组谱 $\{\lambda_n^{(1)},\ \lambda_n^{(2)}\}_{n\geqslant 0}$ 可以唯一确定 Fourier 系数 c_n, d_n $(n=1,2,\cdots)$.

证　将 $\rho=n$, $n\in\mathbb{N}$, 代入 (3.6), 我们可以得到如下表达式:

$$\begin{aligned}&\Big(-\frac{\sin(n(\pi+\tau))}{2n}-\frac{a_1\cos(n(\pi+\tau))}{4\tau}-\frac{b_1\cos(n(\pi+\tau))}{2\tau n^2}\Big)c_n\\&+\Big(\frac{\cos(n(\pi+\tau))}{2n}-\frac{a_1\sin(n(\pi+\tau))}{4\tau}-\frac{b_1\sin(n(\pi+\tau))}{2\tau n^2}\Big)d_n\\&=\Delta_1(n^2)-(-1)^n-a_1A\cos(n(\pi-\tau))-\frac{A\sin(n(\pi-\tau))}{2n}-\frac{b_1A\cos(n(\pi-\tau))}{2n^2},\\&\Big(-\frac{\sin(n(\pi+\tau))}{2n}-\frac{a_2\cos(n(\pi+\tau))}{4\tau}-\frac{b_2\cos(n(\pi+\tau))}{2\tau n^2}\Big)c_n\\&+\Big(\frac{\cos(n(\pi+\tau))}{2n}-\frac{a_2\sin(n(\pi+\tau))}{4\tau}-\frac{b_2\sin(n(\pi+\tau))}{2\tau n^2}\Big)d_n\\&=\Delta_2(n^2)-(-1)^n-a_2A\cos(n(\pi-\tau))-\frac{A\sin(n(\pi-\tau))}{2n}-\frac{b_2A\cos(n(\pi-\tau))}{2n^2}.\end{aligned}$$

解方程可得

$$c_n=\frac{P}{D},\quad d_n=\frac{Q}{D},\tag{3.11}$$

其中

$$D=\frac{n(a_2-a_1)}{8\tau n^2},\tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}P=&\frac{\Delta_1(n^2)-\Delta_2(n^2)}{2n}\cos(n(\pi+\tau))+\frac{3(a_1b_2-a_2b_1)}{8\tau n^2}A\cos(n(\pi-\tau))\sin(n(\pi+\tau))\\&-\Big[\frac{a_2\Delta_1(n^2)-a_1\Delta_2(n^2)}{4\tau}+\frac{b_2\Delta_1(n^2)-b_1\Delta_2(n^2)}{4\tau n^2}-(-1)^n\frac{a_2-a_1}{4\tau n}\\&-(-1)^n\frac{b_2-b_1}{2\tau n^2}\Big]\sin(n(\pi+\tau))+\Big(\frac{a_2-a_1}{2n}+\frac{b_2-b_1}{4n^3}\Big)A\cos(n(\pi-\tau))\cos(n(\pi+\tau))\\&+\Big(\frac{a_2-a_1}{8n\tau}+\frac{b_2-b_1}{4\tau n^3}\Big)A\sin(n(\pi-\tau))\sin(n(\pi+\tau)),\end{aligned}\tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}Q=&\frac{\Delta_1(n^2)-\Delta_2(n^2)}{2n}\sin(n(\pi+\tau))-\frac{3(a_1b_2-a_2b_1)}{8\tau n^2}A\cos(n(\pi-\tau))\cos(n(\pi+\tau))\\&+\Big[\frac{a_2\Delta_1(n^2)-a_1\Delta_2(n^2)}{4\tau}+\frac{b_2\Delta_1(n^2)-b_1\Delta_2(n^2)}{4\tau n^2}-(-1)^n\frac{a_2-a_1}{4\tau n}\\&-(-1)^n\frac{b_2-b_1}{2\tau n^2}\Big]\cos(n(\pi+\tau))+\Big(\frac{a_2-a_1}{2n}+\frac{b_2-b_1}{4n^3}\Big)A\cos(n(\pi-\tau))\sin(n(\pi+\tau))\end{aligned}$$

$$-\left(\frac{a_2-a_1}{8n\tau}+\frac{b_2-b_1}{4\tau n^3}\right)A\sin(n(\pi-\tau))\cos(n(\pi+\tau)). \tag{3.14}$$

因为 τ, A, a_1, a_2, b_1, b_2, Δ_1 和 Δ_2 可以由谱唯一确定, 所以 Fourier 系数 c_n 和 d_n 可以由两组谱 $\{\lambda_n^{(1)}, \lambda_n^{(2)}\}_{n\geqslant 0}$ 唯一确定.

下面给出相应势函数 $q(x)$ 的重构算法.

算法 3.1 给定两组谱 $\{\lambda_n^{(1)}, \lambda_n^{(2)}\}_{n\geqslant 0}$, 重构 $q(x)$, A, τ, a_1, a_2, b_1 和 b_2 算法如下:

1 利用公式 (3.1) 计算延迟参数 τ.

2 通过公式 (3.4) 计算 A.

3 利用公式 (3.5) 计算 a_j.

4 通过 (2.23) 和 (3.5) 重构示性函数 $\Delta_j(\lambda)$.

5 利用公式 (3.9) 计算 b_j.

6 通过公式 (3.11) 计算势函数 $q(x)$ 的 Fourier 系数 c_n 和 d_n.

7 通过将公式 (3.11) 代入 (3.10) 重构势函数 $q(x)$.

参 考 文 献

[1] Bondarenko N P. Partial inverse problems for Sturm-Liouville equation with deviating argument [J]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2018, 41:8350–8354.

[2] Bondarenko N P, Yurko V A. An inverse problem for Sturm-Liouville differential operators with deviating argument [J]. *Applied Mathematics Letters*, 2018, 83:140–144.

[3] Buterin S A, Pikula M, Yurko V A. Sturm-Liouville differential operators with deviating argument [J]. *Tamkang Journal of Mathematics*, 2017, 48:61–71.

[4] Buterin S A, Yurko V A. An inverse spectral problem for Sturm-Liouville operators with a large constant delay [J]. *Analysis and Mathematical Physics*, 2017, 9:17–27.

[5] Djuric N. Inverse problems for Sturm-Liouville-type operators with delay: symmetric case [J]. *Applied Mathematical Sciences*, 2021, 11:505–510.

[6] Djuric N, Buterin S. On an open question in recovering Sturm-Liouville-type operators with delay [J]. *Applied Mathematics Letters*, 2021, 113:1062–1068.

[7] Djuric N, Buterin S. On non-uniqueness of recovering Sturm-Liouville operators with delay [J]. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul*, 2021, 102, Paper No.105900, 6 pp.

[8] Djuric N, Vladičić V. Incomplete inverse problem for Sturm-Liouville type differential equation with constant delay [J]. *Results in Mathematics*, 2019, 74:377–390.

[9] Freiling G, Yurko V A. Inverse problems for Sturm-Liouville differential operators with a constant delay [J]. *Applied Mathematics Letters*, 2012, 25:1999–2004.

[10] Gaskell R E. A problem in heat conduction and an expansion theorem [J]. *American Journal of Mathematics*, 1942, 64:447–455.

[11] Ignatiev M Y. On an inverse regge problem for the Sturm-Liouville operator with deviating argument [J]. *Journal of Samara State Technical University, Ser Physical and Mathematical Sciences*, 2018, 22:203–213.

[12] Norkin S B. On a boundary problem of Sturm-Liouville type for a second-order differential equation with a retarded argument [J]. *American Institute of Physics*, 1958, 6:203–214.

[13] Pikula M, Vladičić V, Vojvodić B. Inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators with a constant delay less than half the length of the interval and Robin boundary conditions [J]. *Results in Mathematics*, 2019, 74:45–58.

[14] Tischler A, Bellman D. Combustion instability in an acid-heptane rocket with a pressurized-gas propellant pumping system [M]. Washington: NACA, Technical Notes, 1953.

[15] Vladimir V, Pikula M. An inverse problems for Sturm-Liouville-type differential equation with a constant delay [J]. *Sarajevo Journal of Mathematics*, 2016, 12:83–88.

[16] Vladimir V, Milica B, Biljana V. Inverse problems for Sturm-Liouville-type differential equation with a constant delay under Dirichlet/ polynomial boundary conditions [J]. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 2021, 48:1–15.

[17] Yang C F. Trace and inverse problem of a discontinuous Sturm-Liouville operator with retarded argument [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2012, 395:30–41.

[18] Yang C F. Inverse nodal problems for the Sturm-Liouville operator with a constant delay [J]. *Journal of Differential Equations*, 2014, 257:1288–1306.

[19] 张茂柱, 黄振友. 一类两边界条件含参数的 Sturm-Liouville 问题 [J]. *应用泛函分析学报*, 2008, 4:366–372.

Spectral Characterizations for Sturm-Liouville Operators with a Constant Delay and Their Inverse Spectral Problems

WANG Jing[1] YANG Chuanfu[2]

[1]Department of Mathematics, School of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China; Ningbo Zhenhai District Vocational Education Center School, Ningbo 315201, Zhejiang, China. E-mail: jingwang@njust.edu.cn

[2]Corresponding author. Department of Mathematics, School of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China. E-mail: chuanfuyang@njust.edu.cn

Abstract The inverse spectral problem of Sturm-Liouville operators with a constant delay is an important branch of Sturm-Liouville theory. The Sturm-Liouville differential equation with a constant delay can be used to model the transmission of acoustic signals, hydraulic shock or other wave processes. In this paper, the authors mainly study the eigenvalues and inverse spectrum problems of second-order Sturm-Liouville operators with a constant delay on finite interval. And the authors also obtain the uniqueness theorems by Fourier expansion of the potential function. That is, under certain assumptions, the delay variable τ and the potential function can be uniquely determined by the two sets of spectra of the boundary value problem. Finally the authors give the reconstruction algorithms of the potential function.

Keywords Sturm-Liouville operator, Inverse spectral problem, Delay arguement, Eigenparameter, Uniqueness

2000 MR Subject Classification 34A55, 34B24, 47E05

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 45 No. 2, 2024

by ALLERTON PRESS, INC., USA