

# 一个新的正则化张量补全算法及其在图像处理 与超光谱数据分析中的应用\*

谢亚君<sup>1</sup>

**摘要** 非负张量补全问题是在已知特定区域的张量数据集前提下, 对部分受干扰、破坏的数据进行修复或补全以达到还原数据集和揭示事物本质的目的. 本文引入一种修正的交替方向多乘法并结合正则化策略来求解非负张量补全问题, 同时给出算法的收敛性定理和结论. 最后, 将该算法应用于超光谱图像处理及其数据分析中. 数值结果表明所提出算法的有效性.

**关键词** 张量补全问题, 正则化, 修正交替方向乘法, 超光谱图像处理, 数值实验

**MR (2000) 主题分类** 65H10, 65K05, 49M15

**中图法分类** O224.2

**文献标志码** A

**文章编号** 1000-8314(2024)02-0229-20

## §1 引言

张量是一个多维矩阵或多通道数组. 它是矩阵和向量的高维形式, 阶数为 2 的张量退化为矩阵, 阶数为 1 的张量即为向量. 随着信息化技术的快速发展, 一些研究者对张量相关问题的关注程度也逐步提升, 特别是张量分解与张量补全问题. 张量补全的许多基本理论源于压缩感知问题<sup>[1-4]</sup>, 因为有着广阔应用前景而吸引了许多学者开展相关研究. 作为一种矩阵补全方法的推广, 张量补全方法应用更加广泛, 例如, 低秩张量补全算法常用于数据挖掘、图像去噪、视频填充、超光谱数据修复等问题<sup>[5-7]</sup>.

许多问题中需要分析的信号或图像数据是非负的, 经典的分析工具往往无法保证非负性, 需要借助非负张量补全工具来处理这些实际问题. 文 [8] 借助经典 ADM 与迭代收缩阈值算法提出了一种新的交替方向法求解非负张量凸优化问题. 文 [9] 研究了若干有效的张量补全算法, 包括算法 SiLRTC, FaLRTC 及 HaLRTC, 精确地恢复了视觉图像中受污染的数据, 特别是 HaLRTC 算法, 针对当前一些有效的算法进行了收敛性能提升. 最近, 文 [10] 介绍了几种有效的张量补全算法, 并利用 HaLRTC 算法来补全多通道声音信号, 取得较好的预测性能. 文 [11] 提出了一个解决低秩 Tucker 张量补全问题的对称块坐标下降法, 并在模型中结合图像和视频数据的时间特征来改进算法的性能. 关于非负张量补全的相关算法及其应用可进一步参考文 [12-15].

光谱数据按照分辨率或波段宽度可分为多光谱, 高光谱和超光谱. 超光谱数据是通过超光谱成像技术获取的, 例如超光谱遥感, 它能提供丰富的光谱信息, 从而能更充分精确地反映事物的性能与特征. 超光谱成像技术可在获取观测对象的二维空间信息的同时, 对

本文 2022 年 3 月 26 日收到, 2023 年 11 月 3 日收到修改稿.

<sup>1</sup>福州外语外贸学院, 大数据学院 & 数据科学与智能计算重点实验室, 福州 350202. E-mail: xyj@fzfu.edu.cn

\*本文受到国家自然科学基金 (No. 12371378) 和福建省自然科学基金 (No. 2023J011127, No. 2022J01378) 的资助.

每个空间像素色散, 形成几百甚至上千个带宽为 10 nm 左右波段的连续光谱覆盖, 从而在连续光谱段上对同一目标既能得到空间图像又能得到每个像素对应的光谱曲线, 直接反映被观测物体的光谱特征并识别各种伪装目标, 比传统相机或成像仪更能详细地探测目标辐射能量.

超光谱技术能检测到被探测物体的物理结构和化学成分等指标. 其成像技术是超光谱分析和图像分析技术发展的必然结果, 是二者完美结合的产物. 它不仅有光谱分辨能力, 还有图像识别能力, 可以对被探测物体进行定性、定量及定位分析. 利用物体表面的光谱差异, 可实现对目标的精确识别与定位. 该技术有许多实际应用与最新进展<sup>[16-17]</sup>, 在煤炭和石油勘探方面, 用来识别检测不同的煤炭石油等矿产<sup>[18]</sup>; 在农业和食品安全方面, 用来监测农作物健康发展状况, 检测植物或食品的化学成分和质量指数<sup>[19-20]</sup>; 在医学领域, 超光谱技术可用于医学诊断. 它提供氧合血红蛋白、脱氧血红蛋白等生物标志物信息的近实时图像, 并基于不同组织的光谱特征提供组织病理生理学评估, 已被应用于失血性休克的诊断, 外周动脉疾病评估, 肾结石类型快速表征, 癌症检测等<sup>[21-23]</sup>.

超光谱技术具有在分子、细胞和组织水平上扩展外科医生视野的潜力, 能指导完成高质量手术. 传统手术过程中, 癌变组织与健康组织往往难以区分, 导致肿瘤复发的高死亡率. 超光谱技术能够在手术过程中实时地分辨出正常组织和癌组织的光谱差异, 从而能促进肿瘤残留检测. 超光谱数据分析为疾病诊断和手术指导提供了重要手段, 是相关领域研究的前沿问题<sup>[24]</sup>. 据研究<sup>[25]</sup>, 乳房肿瘤切除术的再切除率高达 40%. 残余肿瘤经常出现在切除标本的边缘, 而外科医生在手术过程往往无法对其精准识别. 因此, 术中残余肿瘤的评估是完全切除的关键. 文<sup>[26]</sup>在老鼠乳腺肿瘤模型的手术实验中, 利用超光谱技术成功检测出留在手术中大小为 0.5 – 1.0 mm 的残余肿瘤. 通常超光谱图像以高维数组或张量数据形式存储, 借助张量分析工具来阐述其内部结构和关系能更加准确理解和把握物质本质和规律. 因此, 通过研究高效的非负张量补全算法来实现超光谱图像填充和去噪问题具有普遍的研究意义和价值.

本文将针对超光谱图像数据结构特征, 提出一种新的正则化低秩张量核范数优化模型, 然后将其转化为交替方向乘子法的求解框架, 通过引入变参迭代和松弛阈值收缩策略来提高算法的收敛速度, 并给出算法收敛性理论. 最后, 通过一些数值例子说明所提出的算法的有效性.

为方便, 对一些常用符号和公式进行约定:  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}_+$  及  $\mathbb{Z}_{++}$  分别表示实数, 非负数和正整数. 用花体字母  $\mathcal{T} = (t_{i_1 i_2 \dots i_n}) \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$  表示张量, 其中  $N$  表示张量的阶数, 指标  $I_1, I_2, \dots, I_N \in \mathbb{Z}_{++}$ , 元素  $t_{i_1 i_2 \dots i_n}$  的指标为  $i_n \in \{1, 2, \dots, I_n\}$ ,  $1 \leq n \leq N$ . 特别地,  $\mathcal{T} = (t_{ijk})$  表示三阶张量, 其中  $i = 1, 2, \dots, I_1$ ,  $j = 1, 2, \dots, I_2$ ,  $k = 1, 2, \dots, I_3$ . 斜体字母  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$  表示  $m \times n$  的矩阵. 黑体小写字母  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$  表示  $m$  维向量, 小写字母  $a \in \mathbb{R}$  表示标量. 符号  $\text{rank}(A)$  表示矩阵  $A$  的秩.  $\|A\|_*$ ,  $\|A\|_F$  及  $\|A\|_1$  分别表示矩阵  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  的核范数, Frobenius 范数以及 1-范数. 其中, 核范数定义为  $\|A\|_* = \sum_{i=1}^r \sigma_i(A)$  ( $r$  为矩阵  $A$  的奇异值个数), 1-范数定义为  $\|A\|_1 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ .

本文剩余部分的主要内容如下: 第二节, 构造了一个带正则项的张量核范数优化模型; 第三节, 结合 ADMM 和阈值收缩算法, 通过引入变参数松弛策略, 构造了一个求解正则化张量核范数优化模型的新的非负张量补全算法; 第四节, 分析了算法的收敛性结果; 第五节, 通过不同算法来比较数字图像处理的效果, 特别是针对超光谱图像填充问题的数

值测试效果, 验证本文所提出算法的高效性; 最后是结论部分.

## §2 张量核范数优化模型

本节给出张量相关的基本概念和定义 (见 [27]), 然后根据问题需求构造出对应的张量优化模型.

**定义 2.1** 两个同阶张量  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N}$  与  $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N}$  的内积定义为:

$$d = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle = \sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \cdots \sum_{i_N=1}^{I_N} a_{i_1, i_2, \dots, i_N} b_{i_1, i_2, \dots, i_N} \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

张量  $\mathcal{T}$  的 Frobenius 范数定义为:

$$\|\mathcal{T}\|_F = \sqrt{\langle \mathcal{T}, \mathcal{T} \rangle} = \sqrt{\sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \cdots \sum_{i_N=1}^{I_N} t_{i_1, i_2, \dots, i_N}^2}. \quad (2.2)$$

**定义 2.2** 张量纤维是张量的一维成分. 除了某一维指标在其上界内任意取值, 而其他所有指标均固定, 如此即可获得一个张量的一维分片, 即张量的向量形式. 例如,  $A(3, :, 6)$  是一个三阶张量纤维, 其中第二维指标是任意的, 第一、三维指标均被固定下来.

**定义 2.3** 张量切片是张量的二维成分. 除了某二维指标在其上界内任意取值, 而其他所有指标均固定, 如此即可获得一个张量的二维分片, 即张量的矩阵形式. 例如,  $A(:, 4, :)$  是一个三阶张量切片, 其中第一、三两个维度的指标是任意的, 第二维指标是固定的.

**定义 2.4** 张量  $\mathcal{T} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N}$  的模  $-n$  展开记为  $T_{(n)}$ , 它将张量模  $-n$  纤维作为列而展开成为一个矩阵. 具体而言, 把张量元素  $t_{i_1, i_2, \dots, i_N}$  映射为矩阵元素  $m_{i_n, j}$ , 其中  $j = 1 + \sum_{p \neq n} (i_p - 1) J_p$  且

$$J_p = \begin{cases} 1, & \text{若 } p = 1 \text{ 或若 } p = 2 \text{ 且 } n = 1, \\ \prod_{m \neq n} I_m, & \text{否则.} \end{cases}$$

为引入张量补全优化模型, 先简单回顾所谓基追踪优化问题 (见 [28])

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (2.3)$$

其中矩阵  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ . 模型 (2.3) 是源于压缩感知问题的松弛变换, 即如下的 NP 难优化问题

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{x}\|_0 \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (2.4)$$

其中矩阵  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\|\cdot\|_0$  表示向量的 0-范数, 即非零元素的个数.

一个矩阵补全问题的优化模型可视为压缩感知模型的推广, 即低秩非凸优化问题

$$\min_{X \in \mathbb{R}^{m \times n}} \text{rank}(X) \quad \text{s.t.} \quad X_\Omega = T_\Omega, \quad (2.5)$$

其中矩阵  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\Omega \subset [1, m] \times [1, n]$  为矩形区域的子集,  $X_\Omega$  表示区域  $\Omega$  内元素已知, 其他元素待定.

类似地, 模型 (2.5) 可通过求解如下矩阵核范数凸优化问题得到近似解

$$\min_{X \in \mathbb{R}^{m \times n}} \|X\|_* \quad \text{s.t.} \quad X_\Omega = T_\Omega. \quad (2.6)$$

下面重点讨论超光谱图像填充问题. 一个超光谱图像可看作一个三阶张量, 其图像填充问题自然可归结为如下张量补全优化模型

$$\min_{\underline{\mathcal{X}}} \text{rank}(\underline{\mathcal{X}}) \quad \text{s.t.} \quad \underline{\mathcal{X}}_\Omega = \underline{\mathcal{T}}_\Omega, \quad (2.7)$$

其中张量  $\underline{\mathcal{X}} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$ , 张量的秩  $\text{rank}(\underline{\mathcal{X}}) \triangleq \sum_{i=1}^3 \text{rank}(\underline{\mathcal{X}}_{(i)})$ , 张量  $\underline{\mathcal{X}}$  的模  $-i$  展开  $\underline{\mathcal{X}}_{(i)} = \text{tenmat}(\underline{\mathcal{X}}, i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  (见定义 2.4),  $\underline{\mathcal{T}}_\Omega$  为某立体区域  $\Omega \subset [1, I_1] \times [1, I_2] \times [1, I_3]$  的已知张量. 事实上, 关于张量秩的定义有不同版本, 例如 CP 秩和张量的  $n$ -秩及 Tucker 秩等 [29–30], 文献中把张量补全问题转化为如下的 CP 秩约束优化问题:

$$\min_{\underline{\mathcal{X}}} \|\underline{\mathcal{X}}_\Omega - \underline{\mathcal{T}}_\Omega\|_F \quad \text{s.t.} \quad \text{rank}_{CP}(\underline{\mathcal{X}}) = r, \quad (2.8)$$

其中

$$\text{rank}_{CP}(\underline{\mathcal{X}}) \triangleq \min \left\{ r \in \mathbb{Z}_+ : \exists \{a_i^{(n)}\} \text{ s.t. } \underline{\mathcal{X}} = \sum_{r=1}^r a_i^{(1)} \circ a_i^{(2)} \circ \cdots \circ a_i^{(N)} \right\}, \quad (2.9)$$

但目前未见某具体张量秩在优化问题求解中效果最佳的文献说明.

显然, 类似于矩阵补全优化模型 (2.5), 张量补全优化模型 (2.7) 的目标函数也缺乏凸性, 故难于求解. 文 [8] 把模型 (2.7) 松弛为如下优化模型

$$\min_{\underline{\mathcal{X}}} \|\underline{\mathcal{X}}\|_* \quad \text{s.t.} \quad \underline{\mathcal{X}}_\Omega = \underline{\mathcal{T}}_\Omega, \quad (2.10)$$

其中, 张量的核范数定义为

$$\|\underline{\mathcal{X}}\|_* := \sum_{i=1}^3 \alpha_i \|\underline{\mathcal{X}}_{(i)}\|_*, \quad (2.11)$$

张量  $\underline{\mathcal{X}} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$ ,  $\underline{\mathcal{X}}_{(i)}$  为张量  $\underline{\mathcal{X}}$  的模  $-i$  展开, 核范数系数满足  $\sum_{i=1}^3 \alpha_i = 1$ .

因此模型 (2.10) 可重写为

$$\min_{\underline{\mathcal{X}}} \sum_{i=1}^3 \alpha_i \|\underline{\mathcal{X}}_{(i)}\|_* \quad \text{s.t.} \quad \underline{\mathcal{X}}_\Omega = \underline{\mathcal{T}}_\Omega, \quad (2.12)$$

其中张量  $\underline{\mathcal{X}} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$ . 进一步, 考虑更一般的形式

$$\min_{\underline{\mathcal{X}}} \sum_{i=1}^3 \alpha_i \|\underline{\mathcal{X}}_{(i)}\|_* \quad \text{s.t.} \quad \mathcal{A}(\underline{\mathcal{X}}) = \underline{\mathcal{B}}, \quad (2.13)$$

其中  $\mathcal{A}$  为线性算子, 在实际问题中有不同的映射关系,  $\underline{\mathcal{B}}$  为已知张量. 问题 (2.13) 可转化为如下拉格朗日函数无约束优化问题

$$\min_{\underline{\mathcal{X}} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}} \mathcal{L}(\underline{\mathcal{X}}) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \|\underline{\mathcal{X}}_{(i)}\|_* + \frac{\gamma}{2} \|\mathcal{A}(\underline{\mathcal{X}}) - \underline{\mathcal{B}}\|_F^2, \quad (2.14)$$

其中  $\gamma$  为罚参数.

超光谱图像的第一、二维为空间图像数据, 第三维反映的是物质在不同波段的光谱信息. 鉴于超光谱图像这种特殊结构, 本文在以上分析的基础上对超光谱图像填充问题引入正则化, 得到如下新的张量补全核范数优化模型:

$$\min_{\mathcal{X}} \sum_{i=1}^3 \alpha_i \|\mathcal{X}_{(i)}\|_* + \frac{\gamma}{2} \|\mathcal{A}(\mathcal{X}) - \mathcal{B}\|_{\text{F}}^2 + \sum_{i=1}^{I_3} \tau \|(\mathcal{X}(:, :, i))_{x_1} + (\mathcal{X}(:, :, i))_{x_2}\|_{\text{F}}^2, \quad (2.15)$$

其中  $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$ ,  $(\mathcal{X}(:, :, i))_{x_1}$  与  $(\mathcal{X}(:, :, i))_{x_2}$  分别表示  $\mathcal{X}(:, :, i)$  沿着第一、二维两个坐标  $x_1$  和  $x_2$  方向的偏导数的离散格式,  $\gamma, \tau$  分别为给定的罚参数, 核范数系数  $\alpha_i$  的和  $\sum_{i=1}^3 \alpha_i = 1$ .

**注 2.1** 需要说明的是, 上式  $(\mathcal{X}(:, :, i))_{x_1}$  与  $(\mathcal{X}(:, :, i))_{x_2}$  的偏导数计算采用如下离散格式实现:

$$(\mathcal{X}(:, :, i))_{x_1} = D_{x_1} \mathcal{X}(:, :, i), \quad (\mathcal{X}(:, :, i))_{x_2} = \mathcal{X}(:, :, i) D_{x_2}.$$

$$D_{x_1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_1},$$

$$D_{x_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{I_2 \times I_2}, \quad (2.16)$$

'\*' 为 Hadamart 积,  $i = 1, 2, \dots, I_3$ .

### §3 张量补全算法

本节将构造一个新的张量补全算法来求解张量优化模型 (2.15). 考虑到经典的交替方向乘子法 (简称为 ADMM) 在求解特定优化模型时的优势, 下面将重点讨论如何转化张量优化模型 (2.15), 从而可在 ADMM 方法基础上进一步加速算法的收敛性能.

显然, 模型 (3.1) 可直接借助交替方向乘子法来近似求解 (见 [31]):

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) := f(\mathbf{x}) + s(\mathbf{y}) - \langle \mathbf{z}, G\mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle + \frac{\beta}{2} \|G\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2, \quad (3.1)$$

其中,  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$  是适当维数的向量. ADMM 的具体求解格式如下:

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{k+1} := \arg \min_{\mathbf{x} \in C_{\mathbf{x}}} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}^k, \mathbf{z}^k), \\ \mathbf{y}^{k+1} := \arg \min_{\mathbf{y} \in C_{\mathbf{y}}} L(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{y}, \mathbf{z}^k), \\ \mathbf{z}^{k+1} := \mathbf{z}^k - \beta(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{y}^{k+1}), \end{cases} \quad (3.2)$$

其中,  $C_x \subset \mathbb{R}^n$ ,  $C_y \subset \mathbb{R}^m$  表示非空的多面体集合.

为了将张量优化模型转化为具有 (3.1) 的形式, 我们进行如下的分析. 首先, 用张量值集合  $\underline{y}_1, \underline{y}_2, \underline{y}_3$  来表示 3 个不同的模  $-i$  展开 ( $i=1, 2, 3$ )  $\underline{x}_{(1)}, \underline{x}_{(2)}, \underline{x}_{(3)}$ , 即  $\underline{y}_{i,(i)} = \underline{x}_{(i)}$ . 从而, 模型 (2.15) 可改写为关于多变量的增广拉格朗日形式

$$\begin{aligned} L(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}) &= f(\underline{x}) + s(\underline{y}) - \langle \underline{z}, G\underline{x} - \underline{y} \rangle_{\mathcal{K}} + \frac{\beta}{2} \|G\underline{x} - \underline{y}\|_{\mathcal{K}}^2 \\ &= \frac{\gamma}{2} \|\mathcal{A}(\underline{x}) - \underline{\mathcal{B}}\|_{\mathbb{F}}^2 + \sum_{i=1}^{I_3} \tau \|(\underline{x}(:, :, i))_{x_1} + (\underline{x}(:, :, i))_{x_2}\|_{\mathbb{F}}^2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^3 \left( \alpha_i \|\underline{y}_{i,(i)}\|_* - \langle \underline{z}_i, \underline{x} - \underline{y}_i \rangle + \frac{\beta}{2} \|\underline{x} - \underline{y}_i\|_{\mathbb{F}}^2 \right), \end{aligned} \quad (3.3)$$

其中

$$f(\underline{x}) := \frac{\gamma}{2} \|\mathcal{A}(\underline{x}) - \underline{\mathcal{B}}\|_{\mathbb{F}}^2 + \sum_{i=1}^{I_3} \tau \|(\underline{x}(:, :, i))_{x_1} + (\underline{x}(:, :, i))_{x_2}\|_{\mathbb{F}}^2, \quad (3.4)$$

$$s(\underline{y}) := \sum_{i=1}^3 \alpha_i \|\underline{y}_{i,(i)}\|_*, \quad \underline{y} := [\underline{y}_1, \underline{y}_2, \underline{y}_3]^T, \quad \underline{x} := G\underline{x}, \quad (3.5)$$

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle_{\mathcal{K}} := \sum_{i=1}^3 \langle \underline{x}_i, \underline{y}_i \rangle_{\mathbb{F}}, \quad (3.6)$$

$\mathcal{I}$  表示恒等算子, 内积  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{F}}$  表示张量所有对应元素乘积之和.

模型 (3.3) 可视为标准增广拉格朗日问题的推广, 从而可考虑利用 (3.2) 对其进行求解. 由于张量  $\underline{x}$  独立于张量  $\underline{y}_i$  及矩阵  $\underline{y}_{i,(i)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ), 模型 (3.3) 的求解转化为如下优化问题:

$$\begin{aligned} \min_{\underline{x}} L(\underline{x}) &= \frac{\gamma}{2} \|\mathcal{A}(\underline{x}) - \underline{\mathcal{B}}\|_{\mathbb{F}}^2 + \sum_{i=1}^{I_3} \frac{\tau}{2} \|(\underline{x}(:, :, i))_{x_1} + (\underline{x}(:, :, i))_{x_2}\|_{\mathbb{F}}^2 \\ &\quad - \sum_{i=1}^3 \left( \langle \underline{z}_i, \underline{x} - \underline{y}_i \rangle + \frac{\beta}{2} \|\underline{x} - \underline{y}_i\|_{\mathbb{F}}^2 \right) \\ &= \frac{\gamma}{2} \|\mathcal{A}(\underline{x}) - \underline{\mathcal{B}}\|_{\mathbb{F}}^2 + \sum_{i=1}^{I_3} \frac{\tau}{2} \|(\underline{x}(:, :, i))_{x_1} + (\underline{x}(:, :, i))_{x_2}\|_{\mathbb{F}}^2 \\ &\quad - \frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^3 \left\| \underline{x} - \left( \underline{y}_i - \frac{1}{\beta} \underline{z}_i \right) \right\|_{\mathbb{F}}^2 + \frac{1}{2\beta} \sum_{i=1}^3 \|\underline{z}_i\|_{\mathbb{F}}^2 \\ &:= f(\underline{x}) + h(\underline{x}), \end{aligned} \quad (3.7)$$

其中  $f(\underline{x}) := \frac{\gamma}{2} \|\mathcal{A}(\underline{x}) - \underline{\mathcal{B}}\|_{\mathbb{F}}^2 + \sum_{i=1}^{I_3} \frac{\tau}{2} \|(\underline{x}(:, :, i))_{x_1} + (\underline{x}(:, :, i))_{x_2}\|_{\mathbb{F}}^2$  以及  $h(\underline{x})$  是  $\mathbb{R}^{I_1, I_2, I_3} \rightarrow \mathbb{R}$  的光滑凸函数. 显然, (3.7) 的极小点可通过求解如下问题而得:

$$\nabla_{\underline{x}} L(\underline{x}) = \gamma \mathcal{A}^*(\mathcal{A}\underline{x} - \underline{\mathcal{B}}) - \sum_{i=1}^3 \underline{z}_i + \beta N\underline{x} - \beta \sum_{i=1}^3 \underline{y}_i + \tau \hat{\underline{x}} = 0. \quad (3.8)$$

方程 (3.8) 左边的张量  $\hat{\mathcal{X}}$  由如下具体形式给出, 其第三维的第  $i$  个切片矩阵

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{X}}(:, :, i) &= (\mathcal{X}(:, :, i))_{x_1, x_1} * ((\mathcal{X}(:, :, i))_{x_1} + (\mathcal{X}(:, :, i))_{x_2}) \\ &\quad + ((\mathcal{X}(:, :, i))_{x_1} + (\mathcal{X}(:, :, i))_{x_2}) * (\mathcal{X}(:, :, i))_{x_2, x_2}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

其中  $(\mathcal{X}(:, :, i))_{x_d, x_d}$  为  $\mathcal{X}(:, :, i)$  分别沿着第一、二维两个坐标  $x_1$  和  $x_2$  方向的二阶偏导数的离散格式 (后面将给出具体的计算方式),  $*$  代表 Hadamard 积,  $i = 1, 2, \dots, I_3$ ,  $d = 1, 2$ .

方程 (3.8) 的解  $\mathcal{X}^*$  同时也涉及到  $\mathcal{A}^* \mathcal{A} + \beta \mathcal{N}$  的逆运算 ( $\mathcal{A}^*$  表示  $\mathcal{A}$  的伴随算子<sup>[8]</sup>), 由于其计算量和存储量都较大, 在实际运算中会遇到很大挑战. 因此出现一些关于非精确算法的研究, 其中下面所给出的求解方法融合了 Barzilai-Borwein 算法、阈值收缩算法及优化设计技巧<sup>[32-35]</sup>. 具体形式为:

$$\mathcal{X}^{k+1} = \hat{\mathcal{X}}^k + \frac{t_k - 1}{t_{k+1}} (\hat{\mathcal{X}}^k - \hat{\mathcal{X}}^{k-1}), \quad (3.10)$$

$$\hat{\mathcal{X}}^k = \arg \min_{\mathcal{X}} L(\mathcal{X}) := g(\mathcal{X}^k), \quad (3.11)$$

$$t_{k+1} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_k^2}}{2}, \quad (3.12)$$

其中

$$g(\mathcal{X}^k) = \mathcal{X}^k - \theta \nabla_{\mathcal{X}} L^k(\mathcal{X}^k), \quad (3.13)$$

参数  $\theta$  的具体表达式由 (3.19) 给出.

受以上思想启发, 本文考虑通过引入一个新的变参数迭代阈值收缩加速技巧来获得  $\mathcal{X}$  的近似解  $\mathcal{X}^*$ . 具体设计方式如下:

$$t_{k+1} = \delta + \sqrt{\delta^2 + t_k^2}, \quad (3.14)$$

$$\mathcal{X}^{k+1} = \hat{\mathcal{X}}^k + \frac{t_k - 2\delta}{t_{k+1}} (\hat{\mathcal{X}}^k - \hat{\mathcal{X}}^{k-1}), \quad (3.15)$$

其中  $\hat{\mathcal{X}}^k$  由 (3.11) 给出, 参数  $0 < \delta < 1$ ,  $t_1 = 2\delta$ . 事实上, 当  $\delta = \frac{1}{2}$ , 此迭代格式退化为文 [33] 的情形. 显然, 由于参数取值范围更自由, 因此所提出的算法将更利于问题求解, 与此同时, 通过更加灵活的参数选取可搜索得到一个更小的上界, 从而保证迭代序列  $\{\mathcal{X}^{k+1}\}$  能获得更好的收敛性结果. 下一节将对以上描述情形进行详细讨论和分析.

另一方面, 关于  $\mathcal{Y}$  的最优值涉及到迹范数优化问题<sup>[28,36]</sup>. 注意到可通过极小化每一个  $\mathcal{Y}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 得到 (3.3) 中  $\mathcal{Y}$  的最小值. 为此, 考虑如下等价形式:

$$\begin{aligned} \arg \min_{\mathcal{Y}_i} L(\mathcal{Y}_i) &= \arg \min_{\mathcal{Y}_i} \left( \alpha_i \|\mathcal{Y}_{i,(i)}\|_* - \langle \mathcal{Z}_{i,(i)}, \mathcal{X}_{(i)} - \mathcal{Y}_{i,(i)} \rangle + \frac{\beta}{2} \|\mathcal{X}_{(i)} - \mathcal{Y}_{i,(i)}\|_F^2 \right) \\ &= \arg \min_{\mathcal{Y}_i} \left( \frac{\alpha_i}{\beta} \|\mathcal{Y}_{i,(i)}\|_* + \frac{1}{2} \|\mathcal{Y}_{i,(i)} - \left( \mathcal{X}_{(i)} - \frac{1}{\beta} \mathcal{Z}_{i,(i)} \right)\|_F^2 \right) \\ &= \text{shrink} \left( \mathcal{X}_{(i)} - \frac{1}{\beta} \mathcal{Z}_{i,(i)}, \frac{\alpha_i}{\beta} \right), \end{aligned} \quad (3.16)$$

从而有

$$(\mathcal{Y}_i)_{\min} = \text{refold} \left( \text{shrink} \left( \mathcal{X}_{(i)} - \frac{1}{\beta} \mathcal{Z}_{i,(i)}, \frac{\alpha_i}{\beta} \right) \right), \quad (3.17)$$

其中 shrink 表示收缩算子, 即大于阈值  $\frac{\alpha_i}{\beta}$  保留原值, 小于阈值  $\frac{\alpha_i}{\beta}$  则设置为 0, refold 表示张量展开 (Unfolding) 的逆运算, 即把矩阵折叠回张量形式 (见 [37-38] 及相关参考文献

献). 至此所有准备工作均已完成. 下面给出完整的变参数正则化交替方面乘子算法 (简称为 ADMVP) 的计算框架.

**算法 3.1** 变参数正则化交替方面乘子算法 (ADMVP)

**步骤 1** 给定超光谱图像数据  $\mathcal{I} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$  及初始张量  $\underline{\mathcal{X}}^0, \underline{\mathcal{Y}}_i^0, \underline{\mathcal{Z}}_i^0$ , 设定适当参数  $\alpha_i > 0, \beta_1 > 0, \gamma_1 > 0, \tau > 0, t_1 = 2\delta, 0 < \delta < 1, \rho_\beta > 1, \rho_\gamma > 1, \varepsilon > 0, i = 1, 2, 3$ . 置  $k := 1$ .

**步骤 2** 若满足  $\|\mathcal{I} - \underline{\mathcal{X}}^k\| \leq \varepsilon$  停算; 否则转步骤 3.

**步骤 3** 更新迭代序列

$$\underline{\mathcal{X}}^{k+1} = \hat{\underline{\mathcal{X}}}^k + \frac{t_k - 2\delta}{t_{k+1}}(\hat{\underline{\mathcal{X}}}^k - \hat{\underline{\mathcal{X}}}^{k-1}), \quad \beta_k = \rho_\beta \beta_{k-1}, \quad \gamma_k = \rho_\gamma \gamma_{k-1}, \quad (3.18)$$

其中

$$\hat{\underline{\mathcal{X}}}^k = \underline{\mathcal{X}}^k - \theta \nabla L^k(\underline{\mathcal{X}}^k), \quad \theta = \frac{\langle \underline{\mathcal{X}}^k - \underline{\mathcal{X}}^{k-1}, \Delta g \rangle}{\langle \Delta g, \Delta g \rangle}, \quad (3.19)$$

$$\Delta g = \nabla L^k(\underline{\mathcal{X}}^k) - \nabla L^{k-1}(\underline{\mathcal{X}}^{k-1}), \quad t_{k+1} = \delta + \sqrt{\delta^2 + t_k^2}, \quad (3.20)$$

$$\nabla L^k(\underline{\mathcal{X}}^k) = \gamma_k \mathcal{A}^*(\mathcal{A}\underline{\mathcal{X}}^k - \mathcal{B}) - \sum_{i=1}^N \underline{\mathcal{Z}}_i^k + \beta_k N \underline{\mathcal{X}}^k - \beta_k \sum_{i=1}^N \underline{\mathcal{Y}}_i^k + \tau \hat{\underline{\mathcal{X}}}. \quad (3.21)$$

**步骤 4** 更新迭代序列

$$\underline{\mathcal{Y}}_i^{k+1} = \text{refold}\left(\text{shrink}\left(\underline{\mathcal{X}}_{(i)}^{k+1} - \frac{1}{\beta_k} \underline{\mathcal{Z}}_{i,(i)}^k, \frac{\alpha_i}{\beta_k}\right)\right), \quad (3.22)$$

$$\underline{\mathcal{Z}}_i^{k+1} = \underline{\mathcal{Z}}_i^k - \beta_k(\underline{\mathcal{X}}^{k+1} - \underline{\mathcal{Y}}_i^{k+1}). \quad (3.23)$$

**步骤 5** 置  $k := k + 1$ . 返回步骤 2.

**注 3.1** 需要说明的是, 算法 3.1 的步骤 3 关于 (3.21) 中  $\hat{\underline{\mathcal{X}}}$  的计算, 采用如下的离散格式来实现:

$$\begin{aligned} \hat{\underline{\mathcal{X}}}(:, :, i) &= (\underline{\mathcal{X}}(:, :, i))_{x_1, x_1} * ((\underline{\mathcal{X}}(:, :, i))_{x_1} + (\underline{\mathcal{X}}(:, :, i))_{x_2}) \\ &\quad + ((\underline{\mathcal{X}}(:, :, i))_{x_1} + (\underline{\mathcal{X}}(:, :, i))_{x_2}) * (\underline{\mathcal{X}}(:, :, i))_{x_2, x_2} \\ &\approx (D_{x_1}^2 \underline{\mathcal{X}}(:, :, i)) * [D_{x_1} \underline{\mathcal{X}}(:, :, i) + \underline{\mathcal{X}}(:, :, i) D_{x_2}] \\ &\quad + [D_{x_1} \underline{\mathcal{X}}(:, :, i) + \underline{\mathcal{X}}(:, :, i) D_{x_2}] * (\underline{\mathcal{X}}(:, :, i) D_{x_2}^2), \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} D_{x_1} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_1}, \\ D_{x_2} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{I_2 \times I_2}, \end{aligned} \quad (3.25)$$



$*$  为 Hadamart 积,  $i = 1, 2, \dots, I_3$ .

#### §4 算法的收敛性

首先, 给出一些有用的引理来支撑收敛性定理的证明, 其中部分是文 [33] 的推广. 利用文 [33] 中的引理 2.1 – 2.3, 再结合式 (3.7), 可得下面结论.

**引理 4.1** 令  $\underline{\mathcal{X}} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ ,  $\beta > 0$ . 对任意的  $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$  有不等式

$$L(\mathcal{X}) - L(g(\underline{\mathcal{X}})) \geq \frac{\beta}{2} \|g(\underline{\mathcal{X}}) - \mathcal{X}\|_{\mathbb{F}}^2 + \beta \langle g(\underline{\mathcal{X}}) - \mathcal{X}, \mathcal{X} - \mathcal{X} \rangle \quad (4.1)$$

成立, 其中  $g(\underline{\mathcal{X}})$  与  $L(\cdot) = f(\cdot) + h(\cdot)$  源于式 (3.11) 和 (3.7).

**引理 4.2** 迭代序列  $\widehat{\underline{\mathcal{X}}}^k$  与  $\underline{\mathcal{X}}^k \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$  由式 (3.11), (3.14) – (3.15) 产生, 则对任意的  $k > 1$ , 不等式

$$\frac{2}{\beta_k} t_k^2 \Delta_k - \frac{2}{\beta_{k+1}} t_{k+1}^2 \Delta_{k+1} \geq \|\underline{\mathcal{U}}^{k+1}\|_{\mathbb{F}}^2 - \|\underline{\mathcal{U}}^k\|_{\mathbb{F}}^2 \quad (4.2)$$

成立, 其中  $\beta_k > 0$ ,  $0 < \delta < 1$ ,  $\Delta_k := L(\widehat{\underline{\mathcal{X}}}^k) - L(\underline{\mathcal{X}}^*)$ ,  $\underline{\mathcal{U}}^k := t_k \widehat{\underline{\mathcal{X}}}^k - (t_k - 2\delta) \widehat{\underline{\mathcal{X}}}^{k-1} - \underline{\mathcal{X}}^*$ ,  $t_k$  源于式 (3.14),  $\underline{\mathcal{X}}^*$  为问题 (3.7) 的极小值点.

**证** 首先, 令  $\underline{\mathcal{X}} := \widehat{\underline{\mathcal{X}}}^k$ ,  $\underline{\mathcal{X}} := \underline{\mathcal{X}}^{k+1}$ ,  $\underline{\mathcal{X}} := \underline{\mathcal{X}}^*$ ,  $\underline{\mathcal{X}} := \underline{\mathcal{X}}^{k+1}$ . 利用引理 4.1 可得不等式

$$2\beta_{k+1}^{-1} (\Delta_k - \Delta_{k+1}) \geq \|\widehat{\underline{\mathcal{X}}}^{k+1} - \underline{\mathcal{X}}^{k+1}\|_{\mathbb{F}}^2 + 2\langle \widehat{\underline{\mathcal{X}}}^{k+1} - \underline{\mathcal{X}}^{k+1}, \underline{\mathcal{X}}^{k+1} - \widehat{\underline{\mathcal{X}}}^k \rangle, \quad (4.3)$$

$$2\beta_{k+1}^{-1} \Delta_{k+1} \geq \|\widehat{\underline{\mathcal{X}}}^{k+1} - \underline{\mathcal{X}}^{k+1}\|_{\mathbb{F}}^2 + 2\langle \widehat{\underline{\mathcal{X}}}^{k+1} - \underline{\mathcal{X}}^{k+1}, \underline{\mathcal{X}}^{k+1} - \underline{\mathcal{X}}^* \rangle. \quad (4.4)$$

不等式 (4.3) 乘以  $t_{k+1} - 2\delta$ , 不等式 (4.4) 乘以  $2\delta$ , 然后求和整理得

$$\begin{aligned} & 2\beta_{k+1}^{-1} ((t_{k+1} - 2\delta)\Delta_k - t_{k+1}\Delta_{k+1}) \\ & \geq t_{k+1} \|\widehat{\underline{\mathcal{X}}}^{k+1} - \underline{\mathcal{X}}^{k+1}\|_{\mathbb{F}}^2 + 2\langle \widehat{\underline{\mathcal{X}}}^{k+1} - \underline{\mathcal{X}}^{k+1}, t_{k+1}\underline{\mathcal{X}}^{k+1} - (t_{k+1} - 2\delta)\widehat{\underline{\mathcal{X}}}^k - 2\delta\underline{\mathcal{X}}^* \rangle. \end{aligned}$$

上面不等式两边同乘以  $t_{k+1}$ , 并结合 (3.14) 中的关系  $t_k^2 = t_{k+1}^2 - 2\delta t_{k+1}$  可得

$$\begin{aligned} & 2\beta_{k+1}^{-1} (t_k^2 \Delta_k - t_{k+1}^2 \Delta_{k+1}) \\ & \geq \|t_{k+1}(\widehat{\underline{\mathcal{X}}}^{k+1} - \underline{\mathcal{X}}^{k+1})\|_{\mathbb{F}}^2 + 2t_{k+1} \langle \widehat{\underline{\mathcal{X}}}^{k+1} - \underline{\mathcal{X}}^{k+1}, \\ & \quad t_{k+1}\underline{\mathcal{X}}^{k+1} - (t_{k+1} - 2\delta)\widehat{\underline{\mathcal{X}}}^k - 2\delta\underline{\mathcal{X}}^* \rangle. \end{aligned} \quad (4.5)$$

利用勾股定理有

$$\|\mathcal{B} - \mathcal{A}\|_{\mathbb{F}}^2 + 2\langle \mathcal{B} - \mathcal{A}, \mathcal{A} - \mathcal{C} \rangle = \|\mathcal{B} - \mathcal{C}\|_{\mathbb{F}}^2 - \|\mathcal{A} - \mathcal{C}\|_{\mathbb{F}}^2.$$

由 (4.5) 可得

$$\begin{aligned} 2\beta_{k+1}^{-1} (t_k^2 \Delta_k - t_{k+1}^2 \Delta_{k+1}) & \geq \|t_{k+1}\widehat{\underline{\mathcal{X}}}^{k+1} - (t_{k+1} - 2\delta)\widehat{\underline{\mathcal{X}}}^k - 2\delta\underline{\mathcal{X}}^*\|_{\mathbb{F}}^2 \\ & \quad - \|t_{k+1}\underline{\mathcal{X}}^{k+1} - (t_{k+1} - 2\delta)\widehat{\underline{\mathcal{X}}}^k - 2\delta\underline{\mathcal{X}}^*\|_{\mathbb{F}}^2, \end{aligned}$$

其中令

$$\mathcal{A} := t_{k+1}\underline{\mathcal{X}}^{k+1}, \mathcal{B} := t_{k+1}\widehat{\underline{\mathcal{X}}}^{k+1}, \mathcal{C} := (t_{k+1} - 2\delta)\widehat{\underline{\mathcal{X}}}^k + 2\delta\underline{\mathcal{X}}^*. \quad (4.6)$$

进一步, 由 (3.15) 及  $\underline{\mathcal{U}}^k$  的定义可得

$$2\beta_{k+1}^{-1} (t_k^2 \Delta_k - t_{k+1}^2 \Delta_{k+1}) \geq \|\underline{\mathcal{U}}^{k+1}\|_{\mathbb{F}}^2 - \|\underline{\mathcal{U}}^k\|_{\mathbb{F}}^2. \quad (4.7)$$

注意到算法 3.1 的步骤 3 中  $\beta_{k+1} \geq \beta_k$ , 最终有

$$\frac{2}{\beta_k} t_k^2 \Delta_k - \frac{2}{\beta_{k+1}} t_{k+1}^2 \Delta_{k+1} \geq \|\underline{\mathcal{U}}^{k+1}\|_{\mathbb{F}}^2 - \|\underline{\mathcal{U}}^k\|_{\mathbb{F}}^2. \quad (4.8)$$

**引理 4.3** 假设  $\{a_k, b_k\}$  是满足如下不等式的正数序列

$$a_k - a_{k+1} \geq b_{k+1} - b_k, \quad (4.9)$$

其中  $a_1 + b_1 \leq c, c > 0$ . 则对任意的  $k \geq 1$  有  $a_k \leq c$ .

该结论可直接计算而得. 同时, 通过式 (3.14) 中  $t_k$  的具体表达式易得如下引理.

**引理 4.4** 迭代序列  $\{t_k\}$  由 (3.14) 产生且  $t_1 = 2\delta$ , 则对任意  $k \geq 1$  有  $t_k \geq \delta(k+1)$ , 其中  $0 < \delta < 1$ .

**定理 4.1** 假设张量  $\underline{\mathcal{X}}^k, \hat{\underline{\mathcal{X}}}^k \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$  由 (3.11), (3.14) – (3.15) 产生. 则对任意的  $k \geq 1$  有

$$L(\underline{\mathcal{X}}^k) - L(\underline{\mathcal{X}}^*) \leq \frac{2\kappa \|\underline{\mathcal{X}}^0 - \underline{\mathcal{X}}^*\|_{\mathbb{F}}^2}{(k+1)^2}, \quad (4.10)$$

其中  $\underline{\mathcal{X}}^*$  为问题 (3.7) 的极小值点,  $\kappa$  为序列  $\beta_k$  (算法 3.1 中) 的上界.

**证** 首先令

$$a_k := \frac{2}{\beta_k} t_k^2 \Delta_k, \quad b_k := \|\underline{\mathcal{U}}^k\|_{\mathbb{F}}^2, \quad c := 4\delta^2 \|\underline{\mathcal{X}}^1 - \underline{\mathcal{X}}^*\|_{\mathbb{F}}^2 = 4\delta^2 \|\hat{\underline{\mathcal{X}}}^0 - \underline{\mathcal{X}}^*\|_{\mathbb{F}}^2, \quad (4.11)$$

其中  $\Delta_k, \underline{\mathcal{U}}^k$  源于引理 4.2 中的定义. 由  $t_1 = 2\delta$ , 显然上式关于  $c$  中的第二个等式成立. 由引理 4.2 可得

$$a_k - a_{k+1} \geq b_k - b_{k+1}, \quad (4.12)$$

若再有

$$a_1 + b_1 \leq c \quad (4.13)$$

成立, 则引理 4.3 的条件必将满足 (下面将证明这一点).

结合引理 4.3 – 4.4 可得

$$\Delta_k \leq \frac{2\kappa \|\underline{\mathcal{X}}^0 - \underline{\mathcal{X}}^*\|_{\mathbb{F}}^2}{(k+1)^2}, \quad (4.14)$$

其中  $\kappa$  为  $\beta_k$  的上界, 即  $\beta_k \leq \kappa$ . 再由  $\Delta_k$  的定义可得结论 (4.10).

接下来需证明 (4.13) 的关系成立. 由  $t_1 = 2\delta$  则有

$$a_1 = \frac{2}{\beta_1} 4\delta^2 \Delta_1, \quad b_1 = \|\underline{\mathcal{U}}^1\|_{\mathbb{F}}^2 = 4\delta^2 \|\hat{\underline{\mathcal{X}}}_1 - \underline{\mathcal{X}}^*\|_{\mathbb{F}}^2. \quad (4.15)$$

假设  $\underline{\mathcal{X}} := \underline{\mathcal{X}}^*, \underline{\mathcal{X}} := \underline{\mathcal{X}}^1, \beta = \beta_1$ , 可得

$$L(\underline{\mathcal{X}}^*) - L(g(\underline{\mathcal{X}}^1)) \geq \frac{\beta}{2} \|g(\underline{\mathcal{X}}^1) - \underline{\mathcal{X}}^1\|_{\mathbb{F}}^2 + \beta_1 \langle g(\underline{\mathcal{X}}^1) - \underline{\mathcal{X}}^1, \underline{\mathcal{X}}^1 - \underline{\mathcal{X}}^* \rangle. \quad (4.16)$$

从而有

$$\begin{aligned} L(\underline{\mathcal{X}}^*) - L(g(\hat{\underline{\mathcal{X}}}^1)) &= L(\underline{\mathcal{X}}^*) - L(g(\underline{\mathcal{X}}^1)) \\ &\geq \frac{\beta_1}{2} \|g(\underline{\mathcal{X}}^1) - \underline{\mathcal{X}}^1\|_{\mathbb{F}}^2 + \beta_1 \langle g(\underline{\mathcal{X}}^1) - \underline{\mathcal{X}}^1, \underline{\mathcal{X}}^1 - \underline{\mathcal{X}}^* \rangle \\ &= \frac{\beta_1}{2} \|\hat{\underline{\mathcal{X}}}^1 - \underline{\mathcal{X}}^1\|_{\mathbb{F}}^2 + \beta_1 \langle \hat{\underline{\mathcal{X}}}^1 - \underline{\mathcal{X}}^1, \underline{\mathcal{X}}^1 - \underline{\mathcal{X}}^* \rangle \end{aligned}$$

$$= \frac{\beta_1}{2} \{ \|\hat{\mathcal{X}}^1 - \mathcal{X}^*\|_F^2 - \|\mathcal{X}^1 - \mathcal{X}^*\|_F^2 \},$$

这意味着

$$\frac{2}{\beta_1} \Delta_1 \leq \|\mathcal{X}^1 - \mathcal{X}^*\|_F^2 - \|\hat{\mathcal{X}}^1 - \mathcal{X}^*\|_F^2. \quad (4.17)$$

再经过简单计算可得  $a_1 + b_1 < c$ . 证毕.

## §5 数值实验

本节将通过若干数值测试来验证所提出的算法 ADMVP 的可行性. 并与文 [9] 中的 SiLRTC, HaLRTC 算法和文 [8] 中的 ADMTRIE 算法做了比较. 为方便, 数值实验中的迭代步、CPU 时间、误差分别简记为 ‘IT’、‘CPU’、‘RES’. 数值例子主要针对模型 (2.15) 进行测试和分析, 在超光谱图像填充和修复问题中, 映射  $\mathcal{A}$  退化为单位映射, 即优化问题 (2.12) 的约束条件. 数值测试的信噪比 (简称为 SNR), 峰值信噪比 (简称为 PSNR) 及结构相似度 (简称为 SSIM) 按照如下定义计算 [39]:

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{\|\mathcal{T}_1\|_F^2}{\|\mathcal{T} - \mathcal{T}_1\|_F^2}, \quad MSE = \frac{\|\mathcal{T} - \mathcal{T}_1\|_F^2}{SZ}, \quad PSNR = 10 \log_{10} \frac{255^2}{MSE},$$

$$SSIM(\mathcal{T}, \mathcal{T}_1) = \frac{(2\mu_{\mathcal{T}}\mu_{\mathcal{T}_1} + C_1)(2\sigma_{\mathcal{T}, \mathcal{T}_1} + C_2)}{(\mu_{\mathcal{T}}^2\mu_{\mathcal{T}_1}^2 + C_1)(\sigma_{\mathcal{T}}^2\sigma_{\mathcal{T}_1}^2 + C_2)},$$

$$\mu_{\mathcal{T}} = \frac{1}{mns} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^s t_{ijk}, \quad \sigma_{\mathcal{T}} = \frac{1}{mns-1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^s (t_{ijk} - \mu_{\mathcal{T}})^2,$$

$$\mu_{\mathcal{T}_1} = \frac{1}{mns} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^s (t_1)_{ijk}, \quad \sigma_{\mathcal{T}_1} = \frac{1}{mns-1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^s ((t_1)_{ijk} - \mu_{\mathcal{T}_1})^2,$$

$$\sigma_{\mathcal{T}, \mathcal{T}_1} = \frac{1}{mns-1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^s (t_{ijk} - \mu_{\mathcal{T}})((t_1)_{ijk} - \mu_{\mathcal{T}_1}),$$

其中  $\mathcal{T}$  代表原始数据,  $\mathcal{T}_1$  代表修复数据,  $SZ$  代表  $\mathcal{T}_1$  所包含的元素个数. 数值实验的环境为 Intel(R) Core(TM) i7-2670QM, RAM 8.0GB, CPU 2.20GHZ, 程序编程软件为 Matlab R2019a.

**例 5.1** 本例测试的随机张量规模为  $\mathbb{R}^{60 \times 60 \times 60}$  及  $\mathbb{R}^{100 \times 60 \times 40}$ , 其中 70% 和 90% 的元素受到破坏, 即仅保留 30%, 10% 数据为原始数据, 利用本文提出的 ADMVP 算法与 SiLRTC, ADMTRIE, HaLRTC 三种现有的算法进行比较并考察数值效果.

这些数值结果由表 1-2 展示. 从两个表中可见, 算法 HaLRTC 略优于 SiLRTC, 这个结果与文 [9] 所给出的结论是相一致. 算法 HaLRTC 与 ADMTRIE 相比, 收敛性能相当. 但无论从 CPU 时间、残差 ERR 或是信噪比 SNR、峰值信噪比 PSNR、结构相似度 SSIM 等综合方面看, 算法 ADMVP 的收敛性能都是最佳的.

**例 5.2** 本例测试 3 维的 RGB 图像, 图片大小分别为  $\mathbb{R}^{256 \times 256 \times 3}$ ,  $\mathbb{R}^{320 \times 320 \times 3}$ ,  $\mathbb{R}^{299 \times 400 \times 3}$ ,  $\mathbb{R}^{279 \times 318 \times 3}$ . 然后通过 SiLRTC, ADMTRIE, HaLRTC 及 ADMVP 四个算法来修复和重构. 为描述方便, 分别将四个图片命名为 Picture 1–Picture 4.

例 5.2 中所涉及的部分参数来源于文 [9], 例如, 算法 SiLRTC 以及 HaLRTC 中的  $\alpha_i = \frac{1}{3}$ ,  $\beta_i = 1$ , ( $i = 1, 2, 3$ ). 算法 ADMVP 的参数  $\alpha_i = 1$ ,  $\rho_\beta = 10$ ,  $\rho_\gamma = 10$ ,  $\delta = 10^{-9}$ ,

表 1 例 5.1 的测试结果

| sample | Size  |     | SiLRTC          | ADMTRIE        | HaLRTC         | ADMVP          |
|--------|-------|-----|-----------------|----------------|----------------|----------------|
| 30%    | m=60  | IT  | 16              | 16             | 16             | 16             |
|        | n=60  | CPU | $2.4968e + 01$  | $2.4848e + 01$ | $2.4788e + 01$ | $2.3162e + 01$ |
|        | s=60  | RES | $9.3542e - 01$  | $4.9896e - 01$ | $4.7005e - 01$ | $2.5251e - 01$ |
| 30%    | m=100 | IT  | 16              | 16             | 16             | 16             |
|        | n=60  | CPU | $3.58812e + 01$ | $3.9553e + 01$ | $3.6338e + 01$ | $3.3878e + 01$ |
|        | s=40  | RES | $8.8632e - 01$  | $5.2072e - 01$ | $4.8589e - 01$ | $2.1709e - 01$ |
| 10%    | m=60  | IT  | 16              | 16             | 16             | 16             |
|        | n=60  | CPU | $2.3184e + 01$  | $2.4698e + 01$ | $2.3783e + 01$ | $2.2001e + 01$ |
|        | s=60  | RES | $9.4638e - 01$  | $7.3835e - 01$ | $7.2194e - 01$ | $2.5281e - 01$ |
| 10%    | m=100 | IT  | 16              | 16             | 16             | 16             |
|        | n=60  | CPU | $3.5115e + 01$  | $3.7865e + 01$ | $3.5676e + 01$ | $3.3115e + 01$ |
|        | s=40  | RES | $7.8664e + 00$  | $5.7265e - 01$ | $5.3793e - 01$ | $2.4629e - 01$ |

表 2 例 5.1 的测试结果

| sample | Size  |      | SiLRTC | ADMTRIE | HaLRTC | ADMVP |
|--------|-------|------|--------|---------|--------|-------|
| 30%    | m=60  | PSNR | 58.1   | 58.4    | 58.9   | 63.9  |
|        | n=60  | SNR  | 6.0    | 6.2     | 6.9    | 12.2  |
|        | s=60  | SSIM | 65.4%  | 65.6%   | 66.7%  | 83.4% |
| 30%    | m=100 | PSNR | 58.4   | 59.6    | 59.3   | 64.5  |
|        | n=60  | SNR  | 6.1    | 7.2     | 7.4    | 12.3  |
|        | s=40  | SSIM | 65.1%  | 68.3%   | 69.4%  | 85.9% |
| 10%    | m=60  | PSNR | 54.3   | 54.8    | 56.2   | 60.9  |
|        | n=60  | SNR  | 4.9    | 5.2     | 5.9    | 8.3   |
|        | s=60  | SSIM | 60.6%  | 62.9%   | 65.6%  | 75.3% |
| 10%    | m=100 | PSNR | 54.5   | 55.0    | 55.2   | 60.9  |
|        | n=60  | SNR  | 4.3    | 4.9     | 5.9    | 8.7   |
|        | s=40  | SSIM | 62.2%  | 64.1%   | 65.7%  | 78.6% |

$\gamma_0 = 3, \beta_0 = 0.01, \beta_i = 1, (i = 1, 2, 3)$ . 本例设置最大迭代数  $k_{\max} = 50$ , 随机选取已知区域  $\bar{\Omega}$  的初始值, 并给定 70%, 80% 的数据, 需要重构 30%, 20% 的数据.

表 3 及图 1 - 2 中具体呈现了例 5.2 的数值实验结果. 总体而言, 相比于 HaLRTC, SiLRTC, 算法 ADMTRIE 与 ADMVP 的计算误差更小, 进一步地, 算法 ADMVP 的稳定性又略优于 ADMTRIE. 这一点可从 PSNR, SNR (图 1), 误差 (图 2), 结构相似度 (见表 3) 等数据性能得到验证, 这些都说明了算法 ADMVP 的优越性.

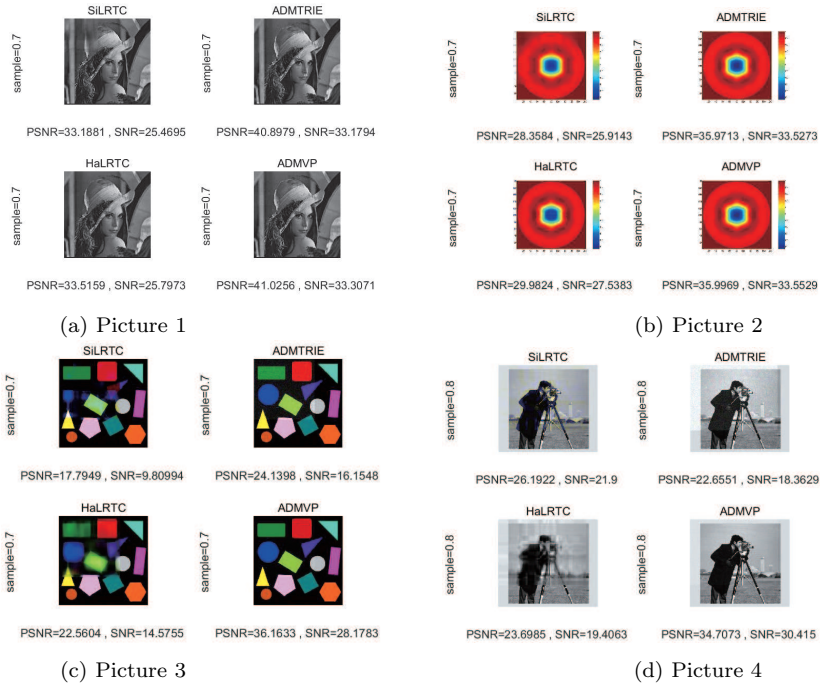


图 1 例 5.2 四种算法收敛性能比较

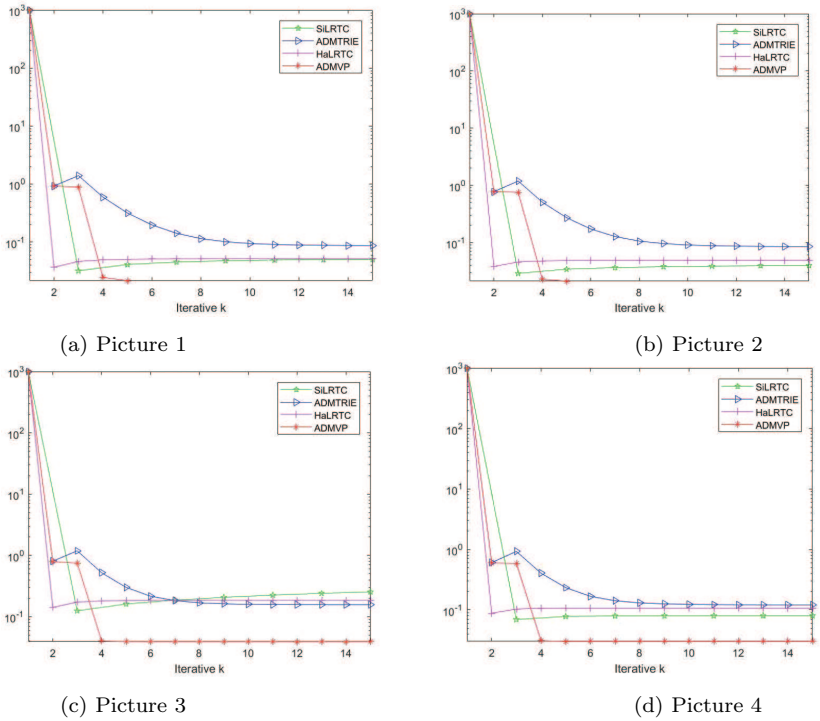


图 2 例 5.2 四种算法收敛性能比较

表 3 例 5.2 的测试结果

| Picture1 | It | CPU            | RES          | SSIM   |
|----------|----|----------------|--------------|--------|
| SiLRTC   | 50 | 4.6632e + 00   | 5.3275e - 02 | 98.02% |
| ADMTRIE  | 20 | 7.1440e + 00   | 2.1930e - 02 | 98.43% |
| HaLRTC   | 50 | 2.7880e + 00   | 5.1302e - 02 | 98.93% |
| ADMVP    | 5  | 1.5031e + 00   | 2.1609e - 02 | 99.89% |
| Picture2 | It | CPU            | RES          | SSIM   |
| SiLRTC   | 50 | 7.772077e + 00 | 5.0615e - 02 | 93.71% |
| ADMTRIE  | 26 | 2.248726e + 01 | 2.1069e - 02 | 97.72% |
| HaLRTC   | 50 | 5.179320e + 00 | 4.1984e - 02 | 97.52% |
| ADMVP    | 5  | 3.566974e + 00 | 2.1007e - 02 | 99.88% |
| Picture3 | It | CPU            | RES          | SSIM   |
| SiLRTC   | 50 | 4.3821e + 00   | 3.2320e - 01 | 93.68% |
| ADMTRIE  | 50 | 1.0944e + 01   | 1.5563e - 01 | 97.71% |
| HaLRTC   | 50 | 6.3721e + 00   | 1.8671e - 01 | 97.55% |
| ADMVP    | 6  | 3.4253e + 00   | 3.9124e - 02 | 99.84% |
| Picture4 | It | CPU            | RES          | SSIM   |
| SiLRTC   | 50 | 5.1545e + 00   | 8.035e - 01  | 98.22% |
| ADMTRIE  | 50 | 6.8423e + 00   | 1.207e - 01  | 97.61% |
| HaLRTC   | 50 | 5.6054e + 00   | 1.071e - 01  | 96.71% |
| ADMVP    | 5  | 2.8258e + 00   | 3.015e - 02  | 99.83% |

**例 5.3** 本例探测了两种不同的超光谱图像数据. 第一个是 ROSIS 传感器在意大利北部帕维亚的空中拍摄的, 此超光谱图像大小  $\mathbb{R}^{610 \times 610 \times 103}$ . 前两个坐标表示空间维度, 即行列维度的像素  $610 \times 610$ , 第三个维度表示波长, 范围从  $0.4-1.42 \mu\text{m}$ . 第二幅超光谱图像的大小为  $\mathbb{R}^{145 \times 145 \times 200}$ , 由 AVIRIS 传感器在印第安纳州西北部的印第安农场 (Indian Pines) 测试站点采集, 由  $145 \times 145$  像素和 200 个反射率波段组成, 波长范围  $0.4-2.5 \mu\text{m}$ , 此光谱图像仅是一张大图像的子集.

例 5.3 的实验中固定了超光谱图像的第 12 个波段数据, 即  $T(:, :, 12)$ , 然后利用 SiLRTC, ADMTRIE, HaLRTC 及 ADMVP 四个算法进行重构和比较. 具体图像修复结果可见图 3, 从中可见四种方法都能很好恢复超光谱图像, 都是可行有效的. 然而, 从表 4 和图 4 的收敛性能和修复指标数据来看, 对于帕维亚场景的超光谱图像, 本文提出的 ADMVP 方法比其他三种方法更有效. 另外, 从图 4 中超光谱图像的反射率数据匹配效果也强化了我们的结论. 下面将具体说明.

众所周知, 通过遥感器可探测不同物体的反射、辐射或散射情况. 不同表面特征的物体以不同方式反射或吸收太阳辐射. 物体的反射率 (比) 特性取决于特定材料的物理和化学状态 (如水分)、表面粗糙度和几何环境 (如阳光入射角) 等. 最重要的表面特征是结构、颜色和表面纹理. 这些差异使得通过分析它们的光谱反射模式或光谱特征来识别不同表面特征或材料成为可能. 作为可由波长来刻画的函数, 这些特征可在所谓光谱反射率曲线中显示出来. 图 4 给出 SiLRTC, ADMTRIE, HaLRTC 以及 ADMVP 四个算法对超光谱反射率数据的拟合匹配度. 为展示方便, 先选择任意一个像素点, 图中设置行位置为 75, 列位置为 141 的像素点, 然后展示反射率曲线还原情况, 其中光谱范围为  $0.4-0.49 \mu$  或  $0.4-0.8$

$\mu$ . 本例还具体给出图像的压缩比 (简称为 CR). CR 越小, 所需内存空间就越小, 即在 CR 值较低情况下该方法也是有效的.

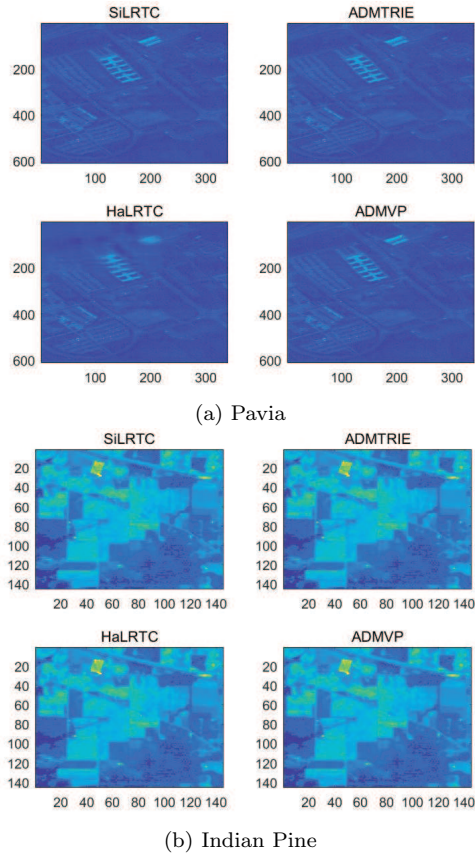
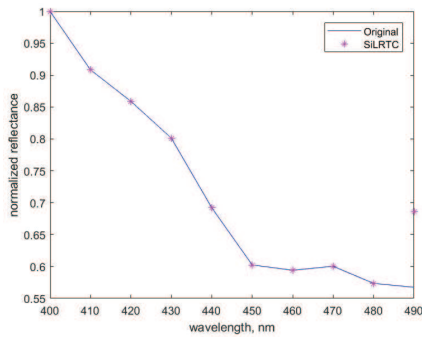


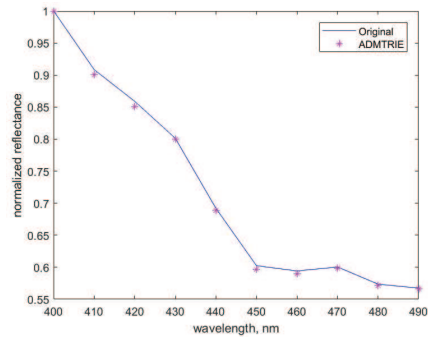
图 3 例 5.2 四种算法收敛性能比较

表 4 例 5.3 的测试结果

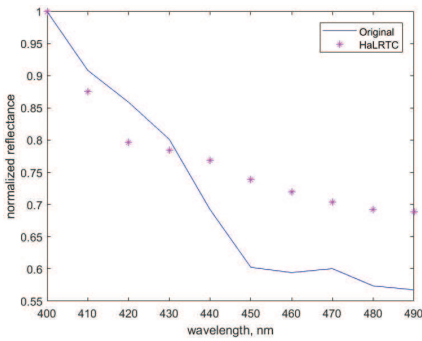
| Pavia        | It | CPU     | RES    | SSIM  | PSNR | SNR  |
|--------------|----|---------|--------|-------|------|------|
| SiLRTC       | 20 | 16.1712 | 0.0868 | 98.76 | 21.2 | 9.31 |
| ADMTRIE      | 20 | 41.4113 | 0.0067 | 99.89 | 43.5 | 31.6 |
| HaLRTC       | 20 | 17.8071 | 0.1813 | 94.19 | 14.8 | 6.9  |
| ADMVP        | 6  | 12.2513 | 0.0041 | 99.99 | 47.8 | 35.9 |
| Indian Pines | It | CPU     | RES    | SSIM  | PSNR | SNR  |
| SiLRTC       | 20 | 6.3713  | 0.0053 | 99.97 | 45.5 | 21.1 |
| ADMTRIE      | 20 | 25.2127 | 0.0046 | 99.92 | 46.7 | 22.2 |
| HaLRTC       | 20 | 7.0776  | 0.0140 | 99.81 | 37.0 | 12.5 |
| ADMVP        | 5  | 5.3515  | 0.0007 | 99.99 | 62.4 | 38.0 |



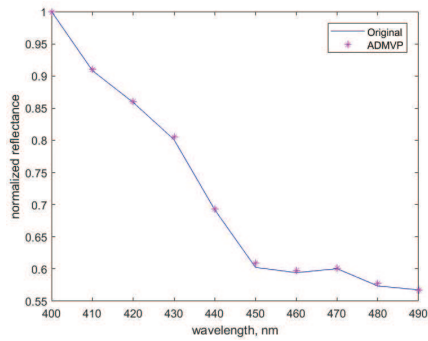
(a) SiLRTC



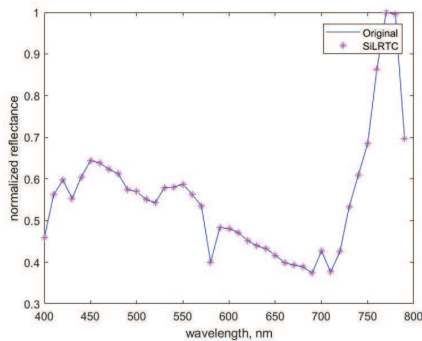
(b) ADMTRIE



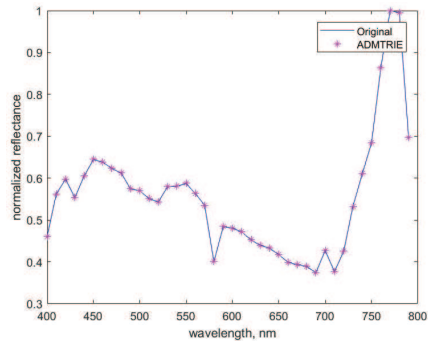
(c) HaLRTC



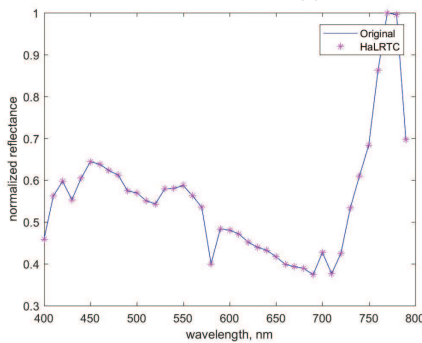
(d) ADMVP



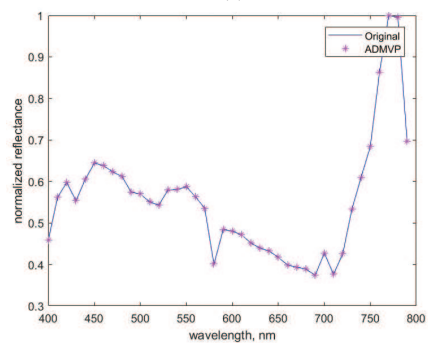
(e) SiLRTC



(f) ADMTRIE



(g) HaLRTC



(h) ADMVP

图 4 例 5.3 四种算法的超光谱数据反射率恢复情况



## §6 结论

近些年, 在医学图像研究领域中超光谱图像处理与数据分析为疾病诊断和手术指导提供了重要手段, 是相关学术领域研究的前沿问题. 由于超光谱图像数据往往以高维数组(或张量)形式存储, 需借助张量分析工具来阐述其内部结构和关系, 从而能更加准确理解和把握疾病演变规律. 因此, 通过研究快速非负张量补全方法来探究超光谱图像数据内涵具有很强的现实意义和广泛的应用前景. 本文主要考虑了超光谱图像的特殊结构, 构建一个带正则化项的张量核范数优化模型. 针对新的模型给出一个变参型的交替方向乘法来加速新模型的求解过程, 理论上分析了算法的收敛性. 充分的数值实验例子也展现了算法的综合指标性能优于当前一些有效的算法, 能很好应用于超光谱图像填充问题, 从而表明了该算法的可行性与高效性.

## 参 考 文 献

- [1] Candès E, Wakin M. An introduction to compressive sampling [J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, 25(2):21–30.
- [2] Candès E, Wakin M, Boyd S. Enhancing sparsity by reweighted  $\ell_1$  minimization [J]. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 2008, 14(5):877–905.
- [3] Donoho D L. Compressed sensing [J]. *IEEE Transactions on information theory*, 2006, 52(4):1289–1306.
- [4] Duarte M, Baraniuk R. Kronecker compressive sensing [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2012, 21(2):494–504.
- [5] Jia Z G, Ng M K, Wang W M. Color image restoration by saturation-value total variation [J]. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2019, 12(2):972–1000.
- [6] Li K, Wu G. A randomized generalized low rank approximations of matrices algorithm for high dimensionality reduction and image compression [J]. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 2021, 28(1): e2338.
- [7] Xie Y J, Ke Y F. Neural network approaches based on new ncp-functions for solving tensor complementarity problem [J]. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 2021, 4:1–21.
- [8] Gandy S, Recht B, Yamada I. Tensor completion and low-n-rank tensor recovery via convex optimization [J]. *Inverse Problems*, 2011, 27(2):025010.
- [9] Liu J, Musialski P, Wonka P, et al. Tensor completion for estimating missing values in visual data [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2013, 35(1):208–220.
- [10] Ding W, Sun Z, Wu X, et al. Tensor completion algorithms for estimating missing

- values in multi-channel audio signals [J]. *Computers & Electrical Engineering*, 2022, 97:107561.
- [11] Yu Q, Zhang X, Chen Y, et al. Low Tucker rank tensor completion using a symmetric block coordinate descent method [J]. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 2023, 30(3): e2464.
- [12] Liu A, Moitra A. Tensor completion made practical [J]. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 2020, 33:18905–18916.
- [13] Long Z, Liu Y, Chen L. et al. Low rank tensor completion for multiway visual data [J]. *Signal Processing*, 2019, 155:301–316.
- [14] Song Q, Ge H, Caverlee J, et al. Tensor completion algorithms in big data analytics [J]. *ACM Transactions on Knowledge Discovery from Data (TKDD)*, 2019, 13(1):1–48.
- [15] Yang Y, Feng Y, Suykens J. A rank-one tensor updating algorithm for tensor completion [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2015, 22(10):1633–1637.
- [16] Arican M, Polat K. Binary particle swarm optimization (BPSO) based channel selection in the EEG signals and its application to speller systems [J]. *Journal of Artificial Intelligence and Systems*, 2020, 2(1):27–37.
- [17] Rizwan Q, Khurram K, Hong Y. Hyperspectral document image processing: applications, challenges and future prospects [J]. *Pattern Recognition*, 2019, 90:12–22.
- [18] Bedini E. The use of hyperspectral remote sensing for mineral exploration: A review [J]. *Journal of Hyperspectral Remote Sensing*, 2017, 7(4):189–211.
- [19] Jia B B, Wang W, et al. Essential processing methods of hyperspectral images of agricultural and food products [J]. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 2020, 198: 103936.
- [20] Zhang L, Rao Z H, Ji H Y. Hyperspectral imaging echnology combined with multivariate data analysis to identify heat-damaged rice seeds [J]. *Spectroscopy Letters*, 2020, 1–15.
- [21] Kiyotoki S, Nishikawa J, Okamoto T, et al. New method for detection of gastric cancer by hyperspectral imaging: a pilot study [J]. *Journal of Biomedical Optics*, 2013, 18(2): 026010.
- [22] Kuleke A, Holmer A, Wahl P, et al. A compact hyperspectral camera for measurement of perfusion parameters in medicine [J]. *Biomedical Engineering / Biomedizinische Technik*, 2018, 63:519–527.
- [23] Schuler R L, Kish P E, Plese C A. Preliminary observations on the ability of hyperspectral imaging to provide detection and visualization of bloodstain patterns on black fabrics [J]. *Journal of Forensic Sciences*, 2012, 57(6):1562–1569.

- [24] Fei B W. Hyperspectral imaging in medical applications, data handling in science and technology [M]//Elsevier: Data Handling in Science and Technology, 2020, 32:523–565.
- [25] Fisher B, Anderson S, Brgant J, et al. Twenty-Year follow-up of a randomized trial comparing total mastectomy, lumpectomy, and lumpectomy plus irradiation for the treatment of invasive breast cancer [J]. *New England Journal of Medicine*, 2002, 347(16):1233–1241.
- [26] Panasyuk S V, Yang S, Faller D V, et al. Medical hyperspectral imaging to facilitate residual tumor identification during surgery [J]. *Cancer Biology & Therapy*, 2007, 6(3):439–446.
- [27] Cichocki A, Zdunek R, amd Phan A H, et al. Nonnegative matrix factorization and tensor factorization, applications to exploratory multi-way data analysis and blind source separation [M]. New York: Wiley, 2009.
- [28] Cai J, Osher S, Shen Z. Linearized bregman iterations for compressed sensing [J]. *Mathematics of Computation*, 2009, 78(267):1515–1536.
- [29] Ashraphijuo M, Wang X D. Fundamental conditions for low-CP-rank tensor completion [J]. *Journal of Machine Learning Research*, 2017, 18(1):2116–2145.
- [30] Jain P, Oh S. Provable tensor factorization with missing data [J]. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 2014, 27.
- [31] Bertsekas D P, Tsitsiklis J N. Parallel and distributed computation: numerical methods [M], New Jersey: Athena Scientific, 2003.
- [32] Barzilai J, Borwein J M. Two-Point step size gradient methods [J]. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 1988, 8:141–148.
- [33] Beck A, Teboulle M. A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems [J]. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2009, 2(1):183–202.
- [34] Nesterov Y E. A method for solving the convex programming problem with convergence rate  $o(1/k^2)$  [J]. *Dokl Akad Nauk SSSR*, 1983, 269:543–547.
- [35] Nesterov Y E. Gradient methods for minimizing composite functions [J]. *Mathematical Programming*, 2013, 140(1): 125-161.
- [36] Cai J, Candès E, Shen Z. A singular value thresholding algorithm for matrix completion [J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2010, 20(4):1956–1982.
- [37] Combettes P L, Pesquet J C. A douglas-rachford splitting approach to nonsmooth convex variational signal recovery [J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2007, 1(4):564–574.
- [38] Douglas J, Rachford H. On the numerical solution of heat conduction problems in two

and three space variables [J]. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1956, 82(2):421–439.

- [39] Wang Z, Bovik A C, Sheikh H R, et al. Image quality assessment: from error visibility to structural similarity [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2004, 13(4):600–612.

## A Novel Tensor Completion Algorithm with Regularization and Its Application to Image Processing and Hyperspectral Data Analysis

XIE Yajun<sup>1</sup>

<sup>1</sup>School of Big Data & Key Laboratory of Data Science and Intelligent Computing, Fuzhou University of International Studies and Trade, Fuzhou 350202, China. E-mail: xyj@fzfu.edu.cn

**Abstract** The problem of non-negative tensor completion is to restore or complete some disturbed and damaged data, and to achieve the purpose of revealing the essence of things under the premise of known tensor data set in a given region. In this paper, the author introduces a modified alternating direction method of multipliers and regularization strategy to solve the non-negative tensor completion problem, and give the convergence theorem and conclusion of the approach. Finally, the proposed algorithm is applied to hyperspectral image processing and data analysis, and sufficient numerical results show the efficiency of the proposed algorithm.

**Keywords** Tensor completion problem, Regularization, Modified alternating direction method of multipliers, Hyperspectral image processing, Numerical experiment

**2000 MR Subject Classification** 65H10, 65K05, 49M15

The English translation of this paper will be published in

**Chinese Journal of Contemporary Mathematics**, Vol. 45 No. 2, 2024

by ALLERTON PRESS, INC., USA