数 学 年 刊 A 辑
2024, 45(4):423–436
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2024.0029

环自同构诱导的广义循环矩阵*

徐华博[1]　王利萍[2]

提要 设 φ 是结合环 R 上阶为 n 的自同构映射. 根据自同构 φ, 作者引入广义循环矩阵的概念. 令 R^{φ} 是 R 关于 φ 的不动点子环, $C_n(\varphi,R)$ 为 R 上所有 $n\times n$ 广义循环矩阵构成的集合. 作者证明了 $C_n(\varphi,R)$ 是自同态环 $\mathrm{End}_{R^{\varphi}}(R^n)$ 的子环. 此外, 还证明了如果 R 是 R^{φ} 上交换的 Hopf 代数, 则 $C_n(\varphi,R)$ 也是 R^{φ} 上的 Hopf 代数.

关键词 广义循环矩阵, Hopf 代数, 不动点子环
MR (2000) 主题分类 16W20, 16W30, 16S50
中图法分类 O15
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2024)04-0423-14

§1 引 言

给定一个正整数 n 以及结合环 R 上 n 个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$. 对任意的 $1\leqslant i\leqslant n$, 令 n 阶方阵的第 i 行元素为 $a_{(1)\sigma^{i-1}},a_{(2)\sigma^{i-1}},\cdots,a_{(n)\sigma^{i-1}}$, 其中 σ 为置换 $(n,n-1,\cdots,2,1)$, 称满足上面条件的矩阵为循环矩阵. 显然, 循环矩阵由它的第一行元素决定; 单位矩阵和零矩阵为循环矩阵; 循环矩阵的线性组合, 乘积仍为循环矩阵. 如果 R 是交换环, 易知任意两个同阶循环矩阵的乘积可交换的. 因此, 交换环 R 上 n 阶循环方阵构成的集合 $C_n(R)$ 为全矩阵环 $M_n(R)$ 的交换子环. 循环矩阵有很好的性质, 例如, 复数域上 n 阶循环方阵的特征值完全由 n - 次单位根决定 (见文 [1, 定理5.8]). 此外, 循环矩阵与图论以及非线性动力系统联系紧密 (见文 [2–3]). 设 m 为正整数, 令 $\sum_m$ 为作用在集合 $\{1,2,\cdots,m\}$ 上的 m 次对称群. 对 $\sum_m$ 的任一子群 G, 作者在文 [4] 中引入了 G - 不动矩阵环的概念, 并研究了 G - 不动矩阵环与环扩张间的关系. 本文主要考虑环 R 的自同构群 $\mathrm{Aut}(R)$ 在矩阵元素上的作用. 对 $\mathrm{Aut}(R)$ 中任意的自同构群, 引入一类矩阵, 证明此类矩阵与不动点理论联系紧密.

设 R 是含有单位元的结合环, $\varphi\in\mathrm{Aut}(R)$ 是阶为 n 的环自同构. 对任意的 $1\leqslant i\leqslant n$, 如果一个矩阵 A 的第 i 行元素为 $(a_{(1)\sigma^{i-1}})\varphi^{i-1},\cdots,(a_{(n)\sigma^{i-1}})\varphi^{i-1}$, 其中 $\sigma\in\sum_n$ 为置换 $(n,n-1,\cdots,2,1)$, 则称 A 为广义的循环矩阵. 特殊地, 如果 φ 等于恒等自同构, 则广义循环矩阵即为循环矩阵. 记 $C_n(\varphi,R)$ 为环 R 上所有广义循环矩阵构成的集合. 在下文中, 我们证明存在 $M_n(R)$ 到自身的三个双射 (仅仅作为集合映射), 使得 $C_n(\varphi,R)$ 为此三个自同

本文 2023 年 10 月 7 日收到, 2024 年 8 月 26 日收到修改稿.
[1]通信作者. 北京建筑大学理学院, 北京 102616. E-mail: huabo0567@163.com
[2]北京建筑大学理学院, 北京 102616. E-mail: wangliping@bucea.edu.cn
*本文受到北京市青年拔尖人才项目 (No. 21351918007) 和北京建筑大学研究能力提升计划 (No. X22026) 的资助.

构映射合成映射的不动点子集. 一般来说, 一个环关于其自身上双射的不动点子集不一定作成子环. 文中采用另外的方法证明 $C_n(\varphi, R)$ 的确是全矩阵环 $M_n(R)$ 的子环.

如果存在交换环 R 到环 Λ 的环同态 ψ, 使得像集 $\mathrm{Im}(\psi)$ 包含于 Λ 的中心, 则称 Λ 为环 R 上的 R- 代数. 易证此定义等价于下面的定义 2.3. 需要说明的是: 即使 R 为交换环, $C_n(\varphi, R)$ 一般也不是 R- 代数. 但 $C_n(\varphi, R)$ 为 R^φ - 代数, 其中 R^φ 是 R 关于 φ 的不动子环. 环 (或代数) 不动子环的研究具有悠久的历史, 最早可追溯到经典的不动点理论 (见文 [5]). 许多学者在不动子环研究方面都做出了非常有意义的结论 (如文 [4, 6–7]). 根据环的嵌入映射, R 作成左 R^φ - 模. 因此, R 的有限直和 R^n 也为 R^φ - 模. 从表面来看, $C_n(\varphi, R)$ 与 R^φ - 模 R^n 没有联系. 但事实上, $C_n(\varphi, R)$ 可以嵌入 ${}_{R^\varphi}R^n$ 的自同态环 $\mathrm{End}_{R^\varphi}(R^n)$ 中. 本文的第一个主要结果阐述了 $C_n(\varphi, R)$ 与 $\mathrm{End}_{R^\varphi}(R^n)$ 间的关系.

定理 1.1 $C_n(\varphi, R)$ 为自同态环 $\mathrm{End}_{R^\varphi}(R^n)$ 的子环.

假设 R 为交换含幺环, 循环矩阵环 $C_n(R)$ 具有很好的代数结构. 此时, 存在一个循环群 G, 使得循环矩阵环 $C_n(R)$ 同构于群代数 RG (见文 [8]). 这表明 $C_n(R)$ 作成 R 上交换的 Hopf 代数. 与循环矩阵环不同, $C_n(\varphi, R)$ 一般不可交换. 本文第二个主要目的是在广义循环矩阵环 $C_n(\varphi, R)$ 上推广循环矩阵环 $C_n(R)$ 的 Hopf 构造.

定理 1.2 若 R 是其不动子环 R^φ 上的交换 Hopf 代数, 则广义循环矩阵环 $C_n(\varphi, R)$ 为 R^φ 上的 Hopf 代数.

本文结构如下: 在第 2 节, 引入广义循环矩阵的定义, 给出广义循环矩阵的一些基本性质. 此外, 证明 $C_n(\varphi, R)$ 为 R^φ - 模 R^n 自同态环的子环. 在第 3 节, 主要给出 $C_n(\varphi, R)$ 上的 Hopf 构造, 即定理 3.2. 最后, 给出两个例子.

§2 预备知识

设 $\mathcal{C}$ 为加法范畴, $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$ 为 $\mathcal{C}$ 中的两个态射. 记态射 f 和 g 的合成为 fg, 即态射的合成采用的是从左到右合成. 如果 $h: M \to N$ 为范畴 $\mathcal{C}$ 中的态射, $x \in M$ 在 h 的像记作 $(x)h$. 符号 $\mathbb{Z}$ 表示所有整数构成的集合. 对任意的正整数 m, 用 $\sum_m$ 表示 $\{1, 2, \cdots, m\}$ 上的 m 次对称群, $\mathbb{Z}_m$ 表示整数环 $\mathbb{Z}$ 模 m 所得的剩余类环.

在本文中, R 表示含有单位元的结合环, φ 为环 R 满足 $\varphi^n = \mathrm{id}_R$ 的自同构. $G = \langle\varphi\rangle$ 表示 φ 生成的循环群. 假设 ϕ 为 R 到自身的映射, $R^\phi := \{r \in R | (r)\phi = r\}$ 表示 R 关于 ϕ 的不动点构成的集合. 特殊地, 如果 ϕ 为环 R 的自同态, 则 R^ϕ 为 R 关于 ϕ 的不动子环. R^ϕ 一般是 R 的真子环. 例如, 如果 R 为复数域 $\mathbb{C}$, ϕ 为复数域上的共轭运算, 则 R^ϕ 等于实数域 $\mathbb{R}$. 符号 $M_n(R)$ 表示 R 上所有 $n \times n$ 方阵构成的全矩阵环; I 表示 $M_n(R)$ 中的单位矩阵. 对任意的 $1 \leqslant i, j \leqslant n$, e_{ij} 表示矩阵单位. 如果 $i > n$ 或者 $j > n$, 则令 $e_{ij} = 0$. A^t 表示矩阵 A 的转置矩阵. 给定余代数 (C, Δ, ε) 以及元素 $c \in C$, 符号 $(c)\Delta = \sum c^{(1)} \otimes c^{(2)}$ 表示 Sweedler 加和.

根据给定的自同构 φ, 下面推广循环矩阵的概念, 引出广义循环矩阵的定义.

定义 2.1　如果一个矩阵 $A \in M_n(R)$ 可表示成下面的形式

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ (a_n)\varphi & (a_1)\varphi & \cdots & \cdots & (a_{n-1})\varphi \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ (a_3)\varphi^{n-2} & (a_4)\varphi^{n-2} & \cdots & (a_1)\varphi^{n-2} & (a_2)\varphi^{n-2} \\ (a_2)\varphi^{n-1} & (a_3)\varphi^{n-1} & \cdots & (a_n)\varphi^{n-1} & (a_1)\varphi^{n-1} \end{pmatrix},$$

则称 A 为由 φ 诱导的广义循环矩阵.

例如, 矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ (a_3)\varphi & (a_1)\varphi & (a_2)\varphi \\ (a_2)\varphi^2 & (a_3)\varphi^2 & (a_1)\varphi^2 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

为 $M_3(R)$ 中的广义循环矩阵. 显然, 单位矩阵和零矩阵为广义循环矩阵. 如果 φ 等于 R 上的恒等自同构 id_R, 广义循环矩阵即为通常的循环矩阵. 令

$$(a)f_k := \sum_{i=1}^{n-k+1} (a)\varphi^{i-1} e_{i,i+k-1} + \sum_{j=n-k+2}^{n} (a)\varphi^{j-1} e_{j,j+k-n-1}.$$

易知, A 是以 $a_1, \cdots, a_n$ 为第一行元素的广义循环矩阵当且仅当 $A = \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k) f_k$.

定义 2.2　称 $n \times n$ 矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

为主置换矩阵 (primary permutation matrix).

直接计算可得 P 为可逆矩阵且 $P^n = I$, $P^t = P^{-1}$. 利用主置换矩阵可以刻画循环矩阵: 一个 n 阶方阵 C 为循环矩阵当且仅当 $C = PCP^t$. 根据主置换矩阵 P 和自同构 φ , 可定义下面集合间的映射:

$$H_P : M_n(R) \longrightarrow M_n(R), \qquad A \mapsto PAP^t,$$

$$H_\varphi : M_n(R) \longrightarrow M_n(R), \qquad (a_{ij}) \mapsto ((a_{ij})\varphi^{n-i+1}),$$

以及

$$\widetilde{H}_\varphi : M_n(R) \longrightarrow M_n(R),$$
$$(a_{ij}) \mapsto ((a_{ij})\varphi^{n-j+1}).$$

由于 P 和 φ 均是可逆的, 故 H_P, H_φ 以及 $\widetilde{H}_\varphi$ 均为集合间的双射. 但 H_φ 和 $\widetilde{H}_\varphi$ 一般不是环 $M_n(R)$ 的自同构. 例如, 令 $R=\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, 定义 $(a+b\sqrt{2})\varphi = a-b\sqrt{2}$, 其中 $a,b\in\mathbb{Q}$. 很容易验证 φ 是 R 阶为 2 的自同构. 假设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

直接计算可知 $(A)H_\varphi(B)H_\varphi \neq (AB)H_\varphi$. 因此, H_φ 不是环同态.

引理 2.1 H_φ 为环 $M_n(R)$ 的自同构当且仅当 φ 等于恒等映射 id_R.

证 若 φ 等于恒等映射 id_R, 则 H_φ 为全矩阵环 $M_n(R)$ 上的恒等映射 $\mathrm{id}_{M_n(R)}$. 反之, 任取 $M_n(R)$ 中的两个矩阵 $A=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{ij})$. 若 H_φ 为环同态, 则对任意的 $1\leqslant i,j\leqslant n$, 有 $\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\Big)\varphi^{n-i+1} = (a_{i1})\varphi^{i-1}b_{1j} + (a_{i2})\varphi^{i-1}(b_{2j})\varphi + \cdots + (a_{in})\varphi^{i-1}(b_{nj})\varphi^{n-1}$. 特殊地, 如果令 $a_{21}=1, a_{22}=a_{23}=\cdots=a_{2n}=0$, 则 $(b_{1j})\varphi^{n-1}=b_{1j}$. 由 $b_{1j}\in R$ 的任意性以及 φ 的阶为 n 得 $\varphi=\mathrm{id}_R$.

下面给出广义循环矩阵的一些基本性质.

引理 2.2 一个 n 阶方阵 A 为 φ 诱导的广义循环矩阵 (即 $A\in C_n(\varphi,R)$) 当且仅当 $(A)H_\varphi = ((A)H_\varphi)H_P$, 即 $C_n(\varphi,R)=M_n(R)^{H_\varphi H_P H_\varphi^{-1}}$.

证 假设 $A\in C_n(\varphi,R)$. 由 H_φ 的定义知 $(A)H_\varphi$ 为循环矩阵. 从而 $(A)H_\varphi = ((A)H_\varphi)H_P$. 相反, 假设 A 满足关系 $(A)H_\varphi = ((A)H_\varphi)H_P$, 则 $(A)H_\varphi = ((a_{ij})\varphi^{n-i+1})$ 为循环矩阵. 从而

$$\begin{aligned}
a_{11} &= (a_{22})\varphi^{n-1} = \cdots = (a_{nn})\varphi,\\
&\vdots\\
a_{1,n-1} &= (a_{2n})\varphi^{n-1} = \cdots = (a_{n,n-2})\varphi,\\
a_{1n} &= (a_{21})\varphi^{n-1} = \cdots = (a_{n,n-1})\varphi.
\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{gathered}
a_{22}=(a_{11})\varphi,\quad a_{33}=(a_{11})\varphi^2,\quad \cdots,\quad a_{nn}=(a_{11})\varphi^{n-1},\\
\vdots\\
a_{2n}=(a_{1,n-1})\varphi,\quad a_{31}=(a_{1,n-1})\varphi^2,\quad \cdots,\quad a_{n,n-2}=(a_{1,n-1})\varphi^{n-1},\\
a_{21}=(a_{1n})\varphi,\quad a_{32}=(a_{1n})\varphi^2,\quad \cdots,\quad a_{n,n-1}=(a_{1n})\varphi^{n-1}.
\end{gathered}$$

由广义循环矩阵的定义知 A 为广义循环矩阵.

类似可得 $C_n(\varphi,R)=M_n(R)^{\widetilde{H}_\varphi H_P \widetilde{H}_\varphi^{-1}}$. 给定环 R 到自身的一个双射 ϕ, 不动子集 R^ϕ 不一定是 R 的子环. 下面的引理表明 $C_n(\varphi,R)$ 的确是环 $M_n(R)$ 的子环.

引理 2.3　$C_n(\varphi,R)$ 为全矩阵环 $M_n(R)$ 的子环.

证　只需证明 $C_n(\varphi,R)$ 关于矩阵乘法封闭即可. 设 $A=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{ij})$ 是由 φ 诱导的广义循环矩阵. 令 $C=AB=(c_{ij})$, 其中 $i,j\in\mathbb{Z}_n$. 根据矩阵乘法得

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{i,n-1}b_{n-1,j}+a_{in}b_{nj},$$

$$c_{i+1,j+1}=a_{i+1,1}b_{1,j+1}+a_{i+1,2}b_{2,j+1}+\cdots+a_{i+1,n-1}b_{n-1,j+1}+a_{i+1,n}b_{n,j+1}.$$

因为 A 和 B 均为广义循环矩阵, 所以

$$a_{i+1,2}=(a_{i1})\varphi, b_{2,j+1}=(b_{1j})\varphi,\cdots,a_{i+1,n}=(a_{i,n-1})\varphi,$$

$$b_{n,j+1}=(b_{n-1,j})\varphi, a_{i+1,1}=(a_{in})\varphi, b_{i,j+1}=(b_{n,j+1})\varphi.$$

因此, $(c_{ij})\varphi=c_{i+1,j+1}$. 根据广义循环矩阵的定义知 C 是由 φ 诱导的广义循环矩阵. 从而, $C_n(\varphi,R)$ 为 $M_n(R)$ 的子环.

定义 2.3[9] 设 R 是交换含幺环, Λ 为 R - 模. 如果存在 R - 模态射 $m:\Lambda\otimes\Lambda\to\Lambda$ 以及 $\mu:R\to\Lambda$, 使得下面的图可换

$$\begin{tikzcd}
\Lambda\otimes\Lambda\otimes\Lambda \arrow[r, "m\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes m"'] & \Lambda\otimes\Lambda \arrow[d, "m"] \\
\Lambda\otimes\Lambda \arrow[r, "m"'] & \Lambda
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Lambda\otimes\Lambda & R\otimes\Lambda \arrow[l, "\mu\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\simeq"] \\
\Lambda\otimes R \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\mu"] \arrow[r, "\simeq"'] & \Lambda
\end{tikzcd},$$

则称 (Λ,m,μ) 为 R - 代数, 且称 m 为 Λ 的乘法, 称 μ 为 Λ 的单位.

下面的引理给出了广义循环矩阵环 $C_n(\varphi,R)$ 的一些基本性质.

引理 2.4　(1) 矩阵转置是环 $C_n(\varphi,R)$ 阶为 2 的反自同构.

(2) 设 $r\in R^\varphi$, $A\in C_n(\varphi,R)$, 则 $rA\in C_n(\varphi,R)$.

(3) 若 R 为交换环, 那么 $C_n(\varphi,R)$ 作成 R^φ - 代数.

(4) 若 R 为整环, 那么 $C_n(\varphi,R)$ 作为 $C_n(\varphi,R)$ - 模是不可分解的.

证　(1) 只需证明广义循环矩阵的转置仍是广义循环矩阵即可. 设 $A=(a_{ij})\in M_n(R)$. 根据 H_φ 和 $\widetilde{H}_\varphi$ 的定义, 得 $(A^t)H_\varphi=((A)\widetilde{H}_\varphi)^t$. 如果 $A\in C_n(\varphi,R)$, 则

$$\begin{aligned}
&a_{22}=(a_{11})\varphi, &&\cdots, &&a_{nn}=(a_{11})\varphi^{n-1},\\
&a_{23}=(a_{12})\varphi, &&\cdots, &&a_{n-1,n}=(a_{12})\varphi^{n-1},\\
&\quad\vdots && && \quad\vdots\\
&a_{21}=(a_{1n})\varphi, &&\cdots, &&a_{n2}=(a_{1n})\varphi^{n-1}.
\end{aligned}$$

因此,

$$(A)\widetilde{H}_\varphi=\begin{pmatrix} (a_{11})\varphi^n & (a_{12})\varphi^{n-1} & \cdots & (a_{1,n-1})\varphi^2 & (a_{1n})\varphi \\ (a_{1n})\varphi^{n+1} & (a_{11})\varphi^n & \cdots & \cdots & (a_{1,n-1})\varphi^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ (a_{1,n-1})\varphi^{2n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & (a_{11})\varphi^n \end{pmatrix}.$$

由于 $\varphi^n=\mathrm{id}_R$, 故 $(A)\widetilde{H}_\varphi$ 为循环矩阵, 进而 $(A)\widetilde{H}_\varphi=P(A)\widetilde{H}_\varphi P^t$. 即 $(A^t)H_\varphi=P(A^t)H_\varphi P^t$. 根据引理 2.2 得 $A^t\in C_n(\varphi,R)$.

(2) 和 (3) 显然成立.

(4) 只需证明单位元 $1_{C_n(\varphi,R)}$ 不存在非平凡的幂等元分解即可. 假设 $(ae_{11}+(a)\varphi e_{22}+\cdots+(a)\varphi^{n-1}e_{nn})^2=ae_{11}+(a)\varphi e_{22}+\cdots+(a)\varphi^{n-1}e_{nn}$. 由矩阵乘法得到 $a^2=a$. 因为 R 无零因子, 所以 $a=0$ 或 $a=1_R$. 从而, $C_n(\varphi,R)$ 的单位元 $1_{C_n(\varphi,R)}$ 没有非平凡的幂等元分解.

由于 R^φ 是 R 的子环, 故 R 为左 R^φ - 模. 进而得到 R^n 也为 R^φ - 模. 下面的定理表明环 $C_n(\varphi,R)$ 可以实现为 R^φ - 模 R^n 自同态环的子环.

定理 2.1 广义循环矩阵环 $C_n(\varphi,R)$ 是 $\mathrm{End}_{R^\varphi}(R^n)$ 的子环.

证 设 $r=(r_1,r_2,\cdots,r_n)\in R^n$. 定义 $(r)\sigma=((r_n)\varphi,(r_1)\varphi,\cdots,(r_{n-1})\varphi)$, 容易验证 σ 是 R^φ - 模 R^n 的自同构, 并且 σ 的阶等于 φ 的阶 n. 设 σ 生成的循环群为 $U_n=\langle\sigma\rangle$. 如果定义 $\sigma\cdot r=(r)\sigma$, 则 R^n 作成 $R^\varphi U_n$- 模. 假设 $\theta=(\theta_{ij})\in\mathrm{End}({}_{R^\varphi U_n}R^n)$. 由于 $\sigma\in U_n$, 故对任意的 $r\in R^n$, 有 $(\sigma\cdot r)\theta=\sigma\cdot((r)\theta)$. 特殊地, 对 $r=(0,\cdots,0,r_i,0,\cdots,0)\in R^n$, 其中 r_i 位于第 i 个位置, 得到

$$\begin{aligned}((r_i)\varphi)\theta_{i+1,1}&=((r_i)\theta_{in})\varphi,\\((r_i)\varphi)\theta_{i+1,2}&=((r_i)\theta_{i1})\varphi,\\&\ \ \vdots\\((r_i)\varphi)\theta_{i+1,n}&=((r_i)\theta_{i,n-1})\varphi.\end{aligned}$$

由 $r_i\in R$ 的任意性得下列关系式:

$$\begin{aligned}\varphi\theta_{i+1,1}&=\theta_{in}\varphi,\\\varphi\theta_{i+1,2}&=\theta_{i1}\varphi,\\&\ \ \vdots\\\varphi\theta_{i+1,n}&=\theta_{i,n-1}\varphi.\end{aligned}\tag{2.2}$$

因此,

$$\mathrm{End}({}_{R^\varphi}R^n)=\{\theta=(\theta_{ij})\in M_n(\mathrm{End}({}_{R^\varphi}R))\mid \text{对任意的}1\leqslant i,j\leqslant n,\theta_{ij}\ \text{满足}(2.2)\}.$$

若令 θ_{ij} 等于 a_{ij} 诱导的右乘, 则

$$\begin{aligned}
a_{11} &= (a_{22})\varphi^{n-1} = \cdots = (a_{nn})\varphi, \\
&\ \ \vdots \\
a_{1,n-1} &= (a_{2n})\varphi^{n-1} = \cdots = (a_{n,n-2})\varphi, \\
a_{1n} &= (a_{21})\varphi^{n-1} = \cdots = (a_{n,n-1})\varphi.
\end{aligned}$$

从而 $C_n(\varphi, R)$ 可看作自同态环 $\mathrm{End}_{R^\varphi}(R^n)$ 的子环.

注 2.1　给定 R 一个 m 阶的自同构映射 φ , 以及对称群 $\sum_n$ 中的一个置换 τ, 定义 $(r)\varphi^\tau = ((r_1)\varphi, (r_2)\varphi, \cdots, (r_n)\varphi)\tau$, 容易验证 φ^τ 是 R^φ - 模 R^n 的自同构态射. 因此得到 φ^τ 在 R^n 上的作用, 即 R^n 作成 $R^\varphi\langle\varphi^\tau\rangle$ - 模, 则以右乘 $(\cdot a_{ij}) \in \mathrm{End}_{R^\varphi}(R^n)$ 为元素的集合构成全矩阵环 $M_n(R)$ 的子环, 其中 $a_{ij} \in R$, $\cdot a_{ij}$ 是由 a_{ij} 诱导的右乘. 例如, 若 $m = 2$ 和

$$\tau = \begin{cases} (1\ n)(2\ \ n-1)\cdots(\frac{n}{2}\ \frac{n}{2}+1), & n \text{ 为偶数}; \\ (1\ n)(2\ \ n-1)\cdots(\frac{n+1}{2}\ \ \frac{n+1}{2}), & n \text{ 为奇数}. \end{cases}$$

记由 φ 和 τ 确定的子环为 $S_n(\varphi, R)$. 作者在文 [10] 中称 $S_n(\varphi, R)$ 中的元素为 φ - 中心对称矩阵, 并且证明了 $S_n(\varphi, R) \subseteq M_n(R)$ 是可分的 Frobenius 扩张. 如果进一步假设 R 是交换的胞腔 R^φ - 代数, 则 $S_n(\varphi, R)$ 是 R^φ 上的胞腔代数.

引理 2.5　设 $\widetilde{B}$ 是 R^φ - 模 R 的生成元集, B 是由元素

$$\begin{aligned}
& b_1e_{11} + (b_1)\varphi e_{22} + \cdots + (b_1)\varphi^{n-1}e_{nn}, \\
& b_2e_{12} + (b_2)\varphi e_{23} + \cdots + (b_2)\varphi^{n-2}e_{n-1,n} + (b_2)\varphi^{n-1}e_{n1}, \\
& \qquad\qquad \vdots \\
& b_{n-1}e_{1,n-1} + (b_{n-1})\varphi e_{2n} + \cdots + (b_{n-1})\varphi^{n-2}e_{n-1,n-3} + (b_{n-1})\varphi^{n-1}e_{n,n-2}, \\
& b_ne_{1n} + (b_n)\varphi e_{21} + (b_n)\varphi^2e_{32} + \cdots + (b_n)\varphi^{n-1}e_{n,n-1}
\end{aligned}$$

构成的集合, 其中 $b_i \in \widetilde{B}, 1 \leqslant i \leqslant n$, 则 B 是 R^φ - 代数 $C_n(\varphi, R)$ 的生成元集.

证 根据生成元集的定义易知结论成立.

Hopf 代数是重要的代数类, 包括许多重要的代数. 例如群代数, 特征 0 域上有限维李代数的包络代数, 以及其量子形变 (见 [9, 例1.5.3–1.5.4, 10.1.19]). 下面回顾 Hopf 代数的定义.

定义 2.4 [9] 设 R 是交换环, C 为 R - 模. 如果存在 R - 模态射 $\Delta: C \to C \otimes C$ 和 $\varepsilon: C \to R$, 使得下面的图可换

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\Delta"] \\
C \otimes C \arrow[r, "\Delta\otimes\mathrm{id}"'] & C \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "1\otimes-"] \arrow[d, "-\otimes 1"'] \arrow[dr, "\Delta"] & R \otimes C \\
C \otimes R & C \otimes C \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\varepsilon"] \arrow[u, "\varepsilon\otimes\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}
,$$

则称 (C, Δ, ε) 为 R 上的余代数, 并且称 Δ 为 C 的余乘, ε 为 C 的余单位.

如果 $\Delta\tau=\Delta$, 其中 τ 为扭映射 (twist map), 则称余代数 C 是余可换的. 如果 C 既是余代数又是代数, 并且 Δ 和 ε 均为代数同态, 称 C 为双代数.

设 C 是 R 上的余代数, Λ 是 R 上的代数. 任取 $f,g\in \mathrm{Hom}_R(C,\Lambda)$ 和 $c\in C$, 定义 $f*g:=\sum(c^{(1)})f(c^{(2)})g$, 称 $*$ 为 $\mathrm{Hom}_R(C,\Lambda)$ 上的卷积 (convolution product). 根据 R - 代数的定义可知 $\mathrm{Hom}_R(C,\Lambda)$ 以卷积为乘法作成一个 R - 代数. 设 $(H,m,\mu,\Delta,\varepsilon)$ 为 R 上的双代数, 如果存在 $S\in \mathrm{Hom}_R(H,H)$, 满足 S 是 id_H 的卷积逆 (即 S 与 id_H 关于卷积互逆), 则称 H 为 R 上的 Hopf 代数, 并且称 S 为 H 的对极 (antipode).

§3 广义循环矩阵诱导的 Hopf 代数

本节中, 总假设 R 是交换环. 众所周知, 如果定义 $(\varphi)\Delta=\varphi\otimes\varphi, (\varphi)\varepsilon=1$ 和 $(\varphi)S=\varphi^{n-1}$, 群代数 $R^{\varphi}G$ 作成 R^{φ} 上的 Hopf 代数. 在本节假设 R 满足某些条件, 证明 $C_n(\varphi,R)$ 在 R^{φ} 上存在 Hopf 结构. 为构造 $C_n(\varphi,R)$ 上的余代数结构, 需修改 $C_n(\varphi,R)\otimes_{R^{\varphi}}C_n(\varphi,R)$ 中两个元素相等 “ = ” 的定义. 对任意的 $1\leqslant i,j\leqslant n$, 如果 $a_{ij}\otimes b_{ij}=a'_{ij}\otimes b'_{ij}$, 则约定在 $C_n(\varphi,R)\otimes_{R^{\varphi}}C_n(\varphi,R)$ 中有 $A\otimes B=A'\otimes B'$ 成立. 易知, “ = ” 为等价关系.

定理 3.1 若 R 为 R^{φ} 上的双代数, 则 $C_n(\varphi,R)$ 为 R^{φ} 上的双代数.

证 假设 $(R,\widetilde{\Delta},\widetilde{\varepsilon})$ 为 R^{φ} 上的余代数. 根据引理 2.5, 只需考虑 Δ 和 ε 在生成元集上的作用即可. 对任意 $1\leqslant k\leqslant n$, 定义

$$
\begin{aligned}
&\Big(\sum_{i=1}^{n-k+1}(b)\varphi^{i-1}e_{i,i+k-1}+\sum_{j=n-k+2}^{n}(b)\varphi^{j-1}e_{j,j+k-n-1}\Big)\Delta\\
=&\Big(\sum_{i=1}^{n-k+1}\sum(b^{(1)})\varphi^{i-1}e_{i,i+k-1}+\sum_{j=n-k+2}^{n}\sum(b^{(1)})\varphi^{j-1}e_{j,j+k-n-1}\Big)\\
&\otimes\Big(\sum_{i=1}^{n-k+1}\sum(b^{(2)})\varphi^{i-1}e_{i,i+k-1}+\sum_{j=n-k+2}^{n}\sum(b^{(2)})\varphi^{j-1}e_{j,j+k-n-1}\Big),
\end{aligned}
$$

其中 $(b)\widetilde{\Delta}=\sum b^{(1)}\otimes b^{(2)}$. 故有

$$
\begin{aligned}
&\Big(\sum_{i=1}^{n-k+1}(b)\varphi^{i-1}e_{i,i+k-1}+\sum_{j=n-k+2}^{n}(b)\varphi^{j-1}e_{j,j+k-n-1}\Big)\Delta(\Delta\otimes\mathrm{id})\\
=&\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n-k+1}\sum(b^{(1)})\varphi^{i-1}e_{i,i+k-1}+\sum_{j=n-k+2}^{n}\sum(b^{(1)})\varphi^{j-1}e_{j,j+k-n-1}\Big)\\
&\otimes\Big(\sum_{i=1}^{n-k+1}\sum(b^{(2)})\varphi^{i-1}e_{i,i+k-1}+\sum_{j=n-k+2}^{n}\sum(b^{(2)})\varphi^{j-1}e_{j,j+k-n-1}\Big)\Big)(\Delta\otimes\mathrm{id})\\
=&\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n-k+1}\sum(b^{(11)})\varphi^{i-1}e_{i,i+k-1}+\sum_{j=n-k+2}^{n}\sum(b^{(11)})\varphi^{j-1}e_{j,j+k-n-1}\Big)\\
&\otimes\Big(\sum_{i=1}^{n-k+1}\sum(b^{(12)})\varphi^{i-1}e_{i,i+k-1}+\sum_{j=n-k+2}^{n}\sum(b^{(12)})\varphi^{j-1}e_{j,j+k-n-1}\Big)\Big)
\end{aligned}
$$

$$\otimes\Big(\sum_{i=1}^{n-k+1}\sum(b^{(2)})\varphi^{i-1}e_{i,i+k-1}+\sum_{j=n-k+2}^{n}\sum(b^{(2)})\varphi^{j-1}e_{j,j+k-n-1}\Big).$$

另一方面,

$$\begin{aligned}&\Big(\sum_{i=1}^{n-k+1}(b)\varphi^{i-1}e_{i,i+k-1}+\sum_{j=n-k+2}^{n}(b)\varphi^{j-1}e_{j,j+k-n-1}\Big)\Delta(\mathrm{id}\otimes\Delta)\\
=&\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n-k+1}\sum(b^{(1)})\varphi^{i-1}e_{i,i+k-1}+\sum_{j=n-k+2}^{n}\sum(b^{(1)})\varphi^{j-1}e_{j,j+k-n-1}\Big)\\
&\otimes\Big(\sum_{i=1}^{n-k+1}\sum(b^{(2)})\varphi^{i-1}e_{i,i+k-1}+\sum_{j=n-k+2}^{n}\sum(b^{(2)})\varphi^{j-1}e_{j,j+k-n-1}\Big)\Big)(\mathrm{id}\otimes\Delta)\\
=&\Big(\sum_{i=1}^{n-k+1}\sum(b^{(1)})\varphi^{i-1}e_{i,i+k-1}+\sum_{j=n-k+2}^{n}\sum(b^{(1)})\varphi^{j-1}e_{j,j+k-n-1}\Big)\\
&\otimes\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n-k+1}\sum(b^{(21)})\varphi^{i-1}e_{i,i+k-1}+\sum_{j=n-k+2}^{n}\sum(b^{(21)})\varphi^{j-1}e_{j,j+k-n-1}\Big)\\
&\otimes\Big(\sum_{i=1}^{n-k+1}\sum(b^{(22)})\varphi^{i-1}e_{i,i+k-1}+\sum_{j=n-k+2}^{n}\sum(b^{(22)})\varphi^{j-1}e_{j,j+k-n-1}\Big)\Big).\end{aligned}$$

因为 $\widetilde{\Delta}(\widetilde{\Delta}\otimes\mathrm{id})=\widetilde{\Delta}(\mathrm{id}\otimes\widetilde{\Delta})$, 所以 $\sum b^{11}\otimes b^{12}\otimes b^{2}=\sum b^{1}\otimes b^{21}\otimes b^{22}$. 从而得 $\Delta(\Delta\otimes\mathrm{id})=\Delta(\mathrm{id}\otimes\Delta)$. 根据 $\widetilde{\varepsilon}$ 的定义, 定义

$$\Big(\sum_{i=1}^{n-k+1}(b)\varphi^{i-1}e_{i,i+k-1}+\sum_{j=n-k+2}^{n}(b)\varphi^{j-1}e_{j,j+k-n-1}\Big)\varepsilon=(b)\widetilde{\varepsilon},$$

则

$$\begin{aligned}&\Big(\sum_{i=1}^{n-k+1}(b)\varphi^{i-1}e_{i,i+k-1}+\sum_{j=n-k+2}^{n}(b)\varphi^{j-1}e_{j,j+k-n-1}\Big)\Delta(\varepsilon\otimes\mathrm{id})\\
=&\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n-k+1}\sum(b^{(1)})\varphi^{i-1}e_{i,i+k-1}+\sum_{j=n-k+2}^{n}\sum(b^{(1)})\varphi^{j-1}e_{j,j+k-n-1}\Big)\\
&\otimes\Big(\sum_{i=1}^{n-k+1}\sum(b^{(2)})\varphi^{i-1}e_{i,i+k-1}+\sum_{j=n-k+2}^{n}\sum(b^{(2)})\varphi^{j-1}e_{j,j+k-n-1}\Big)\Big)(\varepsilon\otimes\mathrm{id})\\
=&1\otimes\Big(\sum_{i=1}^{n-k+1}\sum(b^{(1)})\widetilde{\varepsilon}(b^{(2)})\varphi^{i-1}e_{i,i+k-1}+\sum_{j=n-k+2}^{n}\sum(b^{(1)})\widetilde{\varepsilon}(b^{(2)})\varphi^{j-1}e_{j,j+l}\Big)\\
=&1\otimes\Big(\sum_{i=1}^{n-k+1}\Big(\sum(b^{(1)})\widetilde{\varepsilon}b^{(2)}\Big)\varphi^{i-1}e_{i,i+k-1}+\sum_{j=n-k+2}^{n}\Big(\sum(b^{(1)})\widetilde{\varepsilon}b^{(2)}\Big)\varphi^{j-1}e_{j,j+l}\Big),\end{aligned}$$

其中 $l=k-n-1$. 由于 $\widetilde{\Delta}(\widetilde{\varepsilon}\otimes\mathrm{id})=1\otimes -$, 故有 $\sum\big(b^{(1)}\big)\widetilde{\varepsilon}b^{(2)}=b$. 从而 $\Delta(\varepsilon\otimes\mathrm{id})=1\otimes -$. 类似的计算可知 $\Delta(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)=-\otimes 1$. 从而 $C_n(\varphi,R)$ 为 R^{φ} 上的余代数. 设 $(a)f_r$ 和 $(b)f_s$

是 $C_n(\varphi,R)$ 的两个生成元. 根据引理 2.5, 不妨假设

$$\begin{aligned}(a)f_r &= \sum_{i=1}^{n-r+1}(a)\varphi^{i-1}e_{i,i+r-1}+\sum_{j=n-r+2}^{n}(a)\varphi^{j-1}e_{j,j+r-n-1}\\ &= ae_{1r}+(a)\varphi e_{2,r+1}+\cdots+(a)\varphi^{n-r}e_{n-r+1,n}+(a)\varphi^{n-r+1}e_{n-r+2,1}\\ &\quad+\cdots+(a)\varphi^{n-1}e_{n,r-1},\\ (b)f_s &= \sum_{i=1}^{n-s+1}(b)\varphi^{i-1}e_{i,i+s-1}+\sum_{j=n-s+2}^{n}(b)\varphi^{j-1}e_{j,j+s-n-1}\\ &= be_{1s}+(b)\varphi e_{2,s+1}+\cdots+(b)\varphi^{n-s}e_{n-s+1,n}+(b)\varphi^{n-s+1}e_{n-s+2,1}\\ &\quad+\cdots+(b)\varphi^{n-1}e_{n,s-1}.\end{aligned}$$

因此得到

$$\begin{aligned}&(a)f_r(b)f_s\\ =\ &a(b)\varphi^{r-1}e_{1,r+1}+\cdots+(a)\varphi^{n-r}(b)\varphi^{n-1}e_{n-r+1,s-1}+(a)\varphi^{n-r+1}be_{n-r+2,s}\\ &+\cdots+(a)\varphi^{n-1}(b)\varphi^{r-2}e_{nr}.\end{aligned}$$

进而得到

$$\begin{aligned}&((a)f_r(b)f_s)\Delta\\ =\ &(a(b)\varphi^{r-1}e_{1,r+1}+\cdots+(a)\varphi^{n-r}(b)\varphi^{n-1}e_{n-r+1,s-1}+(a)\varphi^{n-r+1}be_{n-r+2,s}\\ &+\cdots+(a)\varphi^{n-1}(b)\varphi^{r-2}e_{nr})\Delta\\ =\ &\Big(\sum a^{(1)}(b^{(1)})\varphi^{r-1}e_{1,r+1}+\cdots+\sum(a^{(1)})\varphi^{n-r}(b^{(1)})\varphi^{n-1}e_{n-r+1,s-1}\\ &+\sum(a^{(1)})\varphi^{n-r+1}b^{(1)}e_{n-r+2,s}+\cdots+\sum(a^{(1)})\varphi^{n-1}(b^{(1)})\varphi^{r-2}e_{nr}\Big)\\ &\otimes\Big(\sum a^{(2)}(b^{(2)})\varphi^{r-1}e_{1,r+1}+\cdots+\sum(a^{(2)})\varphi^{n-r}(b^{(2)})\varphi^{n-1}e_{n-r+1,s-1}\\ &+\sum(a^{(2)})\varphi^{n-r+1}b^{(2)}e_{n-r+2,s}+\cdots+\sum(a^{(2)})\varphi^{n-1}(b^{(2)})\varphi^{r-2}e_{nr}\Big).\end{aligned}$$

另一方面, 由 Δ 的定义, 可得

$$\begin{aligned}((a)f_r)\Delta &= (ae_{1r}+(a)\varphi e_{2,r+1}+\cdots+(a)\varphi^{n-r}e_{n-r+1,n}+(a)\varphi^{n-r+1}e_{n-r+2,1}\\ &\quad+\cdots+(a)\varphi^{n-1}e_{n,r-1})\Delta\\ &= \Big(\sum a^{(1)}e_{1r}+\sum(a^{(1)})\varphi e_{2,r+1}+\cdots+\sum(a^{(1)})\varphi^{n-r}e_{n-r+1,n}\\ &\quad+\sum(a^{(1)})\varphi^{n-r+1}e_{n-r+2,1}+\cdots+\sum(a^{(1)})\varphi^{n-1}e_{n,r-1}\Big)\\ &\quad\otimes\Big(\sum a^{(2)}e_{1r}+\sum(a^{(2)})\varphi e_{2,r+1}+\cdots+\sum(a^{(2)})\varphi^{n-r}e_{n-r+1,n}\\ &\quad+\sum(a^{(2)})\varphi^{n-r+1}e_{n-r+2,1}+\cdots+\sum(a^{(2)})\varphi^{n-1}e_{n,r-1}\Big),\\ ((b)f_s)\Delta &= (be_{1s}+(b)\varphi e_{2,s+1}+\cdots+(b)\varphi^{n-s}e_{n-s+1,n}+(b)\varphi^{n-s+1}e_{n-s+2,1}\\ &\quad+\cdots+(b)\varphi^{n-1}e_{n,s-1})\Delta\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big(\sum b^{(1)}e_{1s} + \sum (b^{(1)})\varphi e_{2,s+1} + \cdots + \sum (b^{(1)})\varphi^{n-s}e_{n-s+1,n} \\
&\quad + \sum (b^{(1)})\varphi^{n-s+1}e_{n-s+2,1} + \cdots + \sum (b^{(1)})\varphi^{n-1}e_{n,s-1}\Big) \\
&\quad \otimes \Big(\sum b^{(2)}e_{1s} + \sum (b^{(2)})\varphi e_{2,s+1} + \cdots + \sum (b^{(2)})\varphi^{n-s}e_{n-s+1,n} \\
&\quad + \sum (b^{(2)})\varphi^{n-s+1}e_{n-s+2,1} + \cdots + \sum (b^{(2)})\varphi^{n-1}e_{n,s-1}\Big).
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
&((a)f_r)\Delta((b)f_s)\Delta \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{n-r+1}\sum (a^{(1)})\varphi^{i-1}e_{i,i+r-1} + \sum_{j=n-r+2}^{n}\sum (a^{(1)})\varphi^{j-1}e_{j,j+r-n-1}\Big) \\
&\quad \otimes \Big(\sum_{i=1}^{n-r+1}\sum (a^{(2)})\varphi^{i-1}e_{i,i+r-1} + \sum_{j=n-r+2}^{n}\sum (a^{(2)})\varphi^{j-1}e_{j,j+r-n-1}\Big) \\
&\quad \Big(\sum_{i=1}^{n-s+1}\sum (b^{(1)})\varphi^{i-1}e_{i,i+s-1} + \sum_{j=n-s+2}^{n}\sum (b^{(1)})\varphi^{j-1}e_{j,j+s-n-1}\Big) \\
&\quad \otimes \Big(\sum_{i=1}^{n-s+1}\sum (b^{(2)})\varphi^{i-1}e_{i,i+s-1} + \sum_{j=n-s+2}^{n}\sum (b^{(2)})\varphi^{j-1}e_{j,j+s-n-1}\Big) \\
&= \Big(\sum a^{(1)}(b^{(1)})\varphi^{r-1}e_{1,r+1} + \cdots + \sum (a^{(1)})\varphi^{n-r}(b^{(1)})\varphi^{n-1}e_{n-r+1,s-1} \\
&\quad + \sum (a^{(1)})\varphi^{n-r+1}b^{(1)}e_{n-r+2,s} + \cdots + \sum (a^{(1)})\varphi^{n-1}(b^{(1)})\varphi^{r-2}e_{nr}\Big) \\
&\quad \otimes \Big(\sum a^{(2)}(b^{(2)})\varphi^{r-1}e_{1,r+1} + \cdots + \sum (a^{(2)})\varphi^{n-r}(b^{(2)})\varphi^{n-1}e_{n-r+1,s-1} \\
&\quad + \sum (a^{(2)})\varphi^{n-r+1}b^{(2)}e_{n-r+2,s} + \cdots + \sum (a^{(2)})\varphi^{n-1}(b^{(2)})\varphi^{r-2}e_{nr}\Big).
\end{aligned}
$$

因此, Δ 为 R^φ - 代数同态. 由 ε 的定义得

$$((a)f_r(b)f_s)\varepsilon = (ab)\widetilde{\varepsilon} = (a)\widetilde{\varepsilon}(b)\widetilde{\varepsilon} = ((a)f_r)\varepsilon((b)f_s)\varepsilon.$$

故 ε 为 R^φ - 代数同态. 因此, 根据上面定义的 Δ, ε 以及通常的矩阵乘法 m, $C_n(\varphi, R)$ 作成 R^φ - 双代数.

注 3.1 设 $(C, \overline{\Delta}, \overline{\varepsilon})$ 为余代数, $0 \neq c, d \in C$. 如果

$$(c)\overline{\Delta} = c \otimes c,$$

则称 c 为类群元. 如果 $(d)\overline{\Delta} = d \otimes 1 + 1 \otimes d$, 则称 d 为本原元. 根据 Δ 和 ε 的定义, 如果 b 为余代数 R 中的类群元 (或本原元), $(b)f_k$ 为 $C_n(\varphi, R)$ 中的类群元 (或本原元).

假设 R 为 R^φ 上 Hopf 代数, $\widetilde{S}$ 是其对极. 定义 $C_n(\varphi, R)$ 到自身的映射 S 如下:

$$((b)f_k)S = \Big(\sum_{i=1}^{n-k+1}((b)\widetilde{S})\varphi^{i-1}e_{i+k-1,i} + \sum_{j=n-k+2}^{n}((b)\widetilde{S})\varphi^{j-1}e_{j+k-n-1,j}\Big).$$

下面的定理表明以 S 为对极, $C_n(\varphi, R)$ 作成 R^φ 上的 Hopf 代数.

定理 3.2 以 S 作为对极, 双代数 $C_n(\varphi, R)$ 作成 R^φ 上的 Hopf 代数.

证 由 S 的定义得

$$\begin{aligned}
&\Big(\sum_{i=1}^{n-k+1}(b)\varphi^{i-1}e_{i,i+k-1}+\sum_{j=n-k+2}^{n}(b)\varphi^{j-1}e_{j,j+k-n-1}\Big)\Delta(S\otimes\mathrm{id})\mu\\
&=\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n-k+1}(b^{(1)})\varphi^{i-1}e_{i,i+k-1}+\sum_{j=n-k+2}^{n}(b^{(1)})\varphi^{j-1}e_{j,j+k-n-1}\Big)\\
&\quad\otimes\Big(\sum_{i=1}^{n-k+1}(b^{(2)})\varphi^{i-1}e_{i,i+k-1}+\sum_{j=n-k+2}^{n}(b^{(2)})\varphi^{j-1}e_{j,j+k-n-1}\Big)\Big)(S\otimes\mathrm{id})\mu\\
&=\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n-k+1}((b^{(1)})\widetilde{S})\varphi^{i-1}e_{i+k-1,i}+\sum_{j=n-k+2}^{n}((b^{(1)})\widetilde{S})\varphi^{j-1}e_{j+k-n-1,j}\Big)\\
&\quad\otimes\Big(\sum_{i=1}^{n-k+1}(b^{(2)})\varphi^{i-1}e_{i,i+k-1}+\sum_{j=n-k+2}^{n}(b^{(2)})\varphi^{j-1}e_{j,j+k-n-1}\Big)\Big)\mu\\
&=(b)\widetilde{\varepsilon}(e_{11}+e_{22}+\cdots+e_{nn})\\
&=\Big(\sum_{i=1}^{n-k+1}(b)\varphi^{i-1}e_{i,i+k-1}+\sum_{j=n-k+2}^{n}(b)\varphi^{j-1}e_{j,j+k-n-1}\Big)\varepsilon(e_{11}+\cdots+e_{nn}).
\end{aligned}$$

更进一步, 我们有

$$\begin{aligned}
&\Big(\sum_{i=1}^{n-k+1}(b)\varphi^{i-1}e_{i,i+k-1}+\sum_{j=n-k+2}^{n}(b)\varphi^{j-1}e_{j,j+k-n-1}\Big)\Delta(\mathrm{id}\otimes S)\mu\\
&=\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n-k+1}(b^{(1)})\varphi^{i-1}e_{i,i+k-1}+\sum_{j=n-k+2}^{n}(b^{(1)})\varphi^{j-1}e_{j,j+k-n-1}\Big)\\
&\quad\otimes\Big(\sum_{i=1}^{n-k+1}(b^{(2)})\varphi^{i-1}e_{i,i+k-1}+\sum_{j=n-k+2}^{n}(b^{(2)})\varphi^{j-1}e_{j,j+k-n-1}\Big)\Big)(\mathrm{id}\otimes S)\mu\\
&=\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n-k+1}(b^{(1)})\varphi^{i-1}e_{i,i+k-1}+\sum_{j=n-k+2}^{n}(b^{(1)})\varphi^{j-1}e_{j,j+k-n-1}\Big)\\
&\quad\otimes\Big(\sum_{i=1}^{n-k+1}((b^{(2)})\widetilde{S})\varphi^{i-1}e_{i+k-1,i}+\sum_{j=n-k+2}^{n}((b^{(2)})\widetilde{S})\varphi^{j-1}e_{j+k-n-1,j}\Big)\Big)\mu\\
&=(b)\widetilde{\varepsilon}(e_{11}+e_{22}+\cdots+e_{nn})\\
&=\Big(\sum_{i=1}^{n-k+1}(b)\varphi^{i-1}e_{i,i+k-1}+\sum_{j=n-k+2}^{n}(b)\varphi^{j-1}e_{j,j+k-n-1}\Big)\varepsilon(e_{11}+\cdots+e_{nn}).
\end{aligned}$$

因此, S 是id 在卷积 $*$ 下的逆. 从而 $C_n(\varphi,R)$ 作成 R^φ 上的 Hopf 代数.

注 3.2 (1) 由 S 的定义知 S 的阶等于 $\widetilde{S}$ 的阶与 2 的最小公倍数.

(2) 一般来说, $C_n(\varphi,R)$ 不是交换的 R^φ - 代数. 例如在 (2.1) 中假设 R 是整环, $a\in R\backslash R^\varphi$, $0\neq b\in R$, 则有

$$(ae_{11}+(a)\varphi e_{22}+(a)\varphi^2e_{33})(be_{12}+(b)\varphi e_{23}+(b)\varphi^2e_{31})$$

$$\neq (be_{12} + (b)\varphi e_{23} + (b)\varphi^2 e_{31})(ae_{11} + (a)\varphi e_{22} + (a)\varphi^2 e_{33}).$$

但如果 R 是余交换的 R^φ- 余代数, 则 $C_n(\varphi, R)$ 是余交换余代数, 并且由 $\widetilde{S}^2 = \mathrm{id}$ 易知 S 的阶等于 2.

最后给出两个例子, 其中例 3.2 表明 R 有可能不是 R^φ -Hopf 代数, 甚至都不是 R^φ 上的余代数.

例 3.1　设 R 是整数环 $\mathbb{Z}$ (或有理数域 $\mathbb{Q}$) 上的多项式环 $\mathbb{Z}[x]$ (或 $\mathbb{Q}[x]$). 定义映射 $(x)\varphi = -x$, 易知 φ 为 R 上的自同构且满足 $\varphi^2 = \mathrm{id}$ 以及 $R^\varphi = \mathbb{Z}$ (或 $\mathbb{Q}$). 如果定义 $(x)\widetilde{\Delta} = x \otimes 1 + 1 \otimes x, (x)\widetilde{\varepsilon} = 0$ 和 $(x)\widetilde{S} = -x$, 则 R 是 $\mathbb{Z}$ (或 $\mathbb{Q}$) 上的 Hopf 代数. 由定理 3.2 知 $C_3(\varphi, R)$ 是 $\mathbb{Z}$ (或 $\mathbb{Q}$) 上的 Hopf 代数. 而且 $\mathbb{Z}[x]$ (或 $\mathbb{Q}[x]$) 是 $\mathbb{Z}$ (或 $\mathbb{Q}$) 上无限维的自由模, 从而 $C_3(\varphi, R)$ 为 R^φ 上无限维的 Hopf 代数.

例 3.2　设 R 等于复数域 $\mathbb{C}$, φ 是复数的共轭运算. 显然, φ 是阶为 2 的自同构且 $R^\varphi = \mathbb{R}$. 因为 ε 是代数同态, 所以 ε 的核为 R 的理想. 由于 R 是单环, 故 $\ker(\varepsilon) = 0$ 或 R. 因此 R 上不存在非平凡的余代数结构, 进而 R 不是 R^φ 上的 Hopf 代数.

参　考　文　献

[1] Zhang F Z. Matrix theory:basic results and techniques [M]. New York: Springer-Verlag, 2011.

[2] Kasatkina D V, Nekorkin V I. Transient circulant clusters in two-population network of Kuramoto oscillators with different rules of coupling adaptation [J]. *Chaos*, 2021, 31, 073112.

[3] Elspas B, Turner J. Graphs with circulant adjacency matrices [J]. *J Combin Theory*, 1970, 9:297–307.

[4] Xi C C, Zhang J B. Centralizer matrix algebras and symmetric polynomials of partitions [J]. *J Algebra*, 2022, 609:688–717.

[5] Hermann W. The classical groups. Their invariants and representations [M]. Princeton: Princeton University Press, 1939.

[6] Montgomery S. Fixed rings of finite automorphism groups of associative rings [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1980.

[7] Stuart J L. Inflation matrices and ZME-matrices that commute with a permutation matrix [J]. *SIAM J Matrix Anal Appl*, 1988, 9(3):408–418.

[8] Hurley T. Group rings and rings of matrices [J]. *Int J Pure Appl Math*, 2006, 31(3):319–335.

[9] Montgomery S. Hopf algebras and their actions on rings [M]. Rhode Island: American Mathematical Society, 1993.

[10] Xu H B. Generalized centrosymmetric matrix algebras induced by automorphisms [J]. *Algebr Colloq*, 2022, 29(4):607–618.

Generalized Circulant Matrices Related to Automorphisms

XU Huabo[1] WANG Liping[2]

[1]Corresponding author. School of Science, Beijing University of Civil Engineering and Architecture, Beijing 102616, China. E-mail: huabo0567@163.com

[2]School of Science, Beijing University of Civil Engineering and Architecture, Beijing 102616, China. E-mail: wangliping@bucea.edu.cn

Abstract The authors introduce the definition of generalized circulant matrices which is the generalization of circulant matrices. Let R be an associative ring with an automorphism φ of order n. They consider the set $C_n(\varphi, R)$ of all the generalized circulant $n\times n$ matrices over R for any positive integer n. It is shown that $C_n(\varphi, R)$ is a subring of the endomorphism ring of the R^φ -module R^n, where R^φ is the invariant subring of R with respect to φ. Moreover, if R is a commutative Hopf algebra over R^φ, then $C_n(\varphi, R)$ is also a Hopf algebra over R^φ.

Keywords Generalized circulant matrix, Hopf algebra, Invariant subring

2000 MR Subject Classification 16W20, 16W30, 16S50

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 45 No. 4, 2024

by ALLERTON PRESS, INC., USA