

多线性 Dunkl 奇异积分交换子的有界性

王 艳¹ 刘宗光¹ 于 夏²

摘要 作者探讨了由 Lipschitz 函数与 Dunkl 奇异积分算子生成的两类多线性交换子的有界性. 首先, 证明了交换子在乘积加权 Lebesgue 空间 $L^{p_1}(\mathbb{R}^N, d\mu_\kappa) \times \cdots \times L^{p_m}(\mathbb{R}^N, d\mu_\kappa)$ 到 Dunkl 型 Triebel-Lizorkin 空间 $\dot{F}_{p,D}^{\beta,\infty}(\mathbb{R}^N)$ 的有界性. 进一步地, 通过引入 sharp 极大函数估计, 建立了其从上述乘积空间到加权 Lebesgue 空间 $L^q(\mathbb{R}^N, d\mu_\kappa)$ 的有界性.

关键词 Dunkl 型, Lipschitz 空间, 交换子

MR (2020) 主题分类 42B20, 47B34, 47B47, 47G10

中图法分类 O174.2

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2025)03-0247-18

§1 引 言

Calderón-Zygmund 奇异积分算子 T 与 BMO 函数 b 生成的交换子最早由 Coifman 等人^[1] 在其开创性工作中提出, 并被形式地定义为

$$[T, b](f)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} (b(x) - b(y))K(x, y)f(y)dy,$$

其中 $K(x, y)$ 是算子 T 的分布核, 属于标准的 Calderón-Zygmund 核. 文中证明了当 $1 < p < \infty$ 时, 该交换子在 $L^p(\mathbb{R}^N, dx)$ 有界当且仅当 $b \in \text{BMO}(\mathbb{R}^N)$. 随后, Janson^[2] 和 Paluszynski^[3] 将该结果推广至 Lipschitz 空间, 证明了当 $1 < p < \infty$, $0 < \beta < 1$ 时, 以下 3 个条件等价: (i) $b \in \dot{\Lambda}^\beta(\mathbb{R}^N)$; (ii) 当 $1 < p < q < \infty$ 且 $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\beta}{N}$ 时, $[T, b]$ 是从 $L^p(\mathbb{R}^N, dx)$ 到 $L^q(\mathbb{R}^N, dx)$ 上的有界算子; (iii) $[T, b]$ 是从 $L^p(\mathbb{R}^N, dx)$ 到齐次 Triebel-Lizorkin 空间 $\dot{F}_p^{\beta,\infty}(\mathbb{R}^N)$ 上的有界算子. 2001 年, m -线性交换子由 Pérez 和 Torres 在文 [4] 中提出. 在此基础上, Wang 和 Xu^[5] 考虑了多线性算子的广义交换子, 并给出了其与 Lipschitz 函数相关的有界性刻画. 近年来, 多线性交换子的研究进一步深化, 可参见文 [6–9], 在变指数情形下的进展详见文 [10–12].

Dunkl 理论起源于文 [13–15], 其中通过引入与反射群相关的 Dunkl 算子, 将经典的偏微分运算推广至含反射对称的情形. 具体而言, 设 $R \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ 为正则根系, 其所生成的有限反射群 (Coxeter 群) G 由如下反射构成:

$$\sigma_\alpha(x) = x - \langle x, \alpha \rangle \alpha, \quad x \in \mathbb{R}^N, \alpha \in R,$$

其中 R 满足 $R \cap \alpha R = \{\pm\alpha\}$, $\sigma_\alpha(R) = R$, 且对任意 $\alpha \in R$ 有 $\|\alpha\| = \sqrt{2}$, 这里 $\|\cdot\|$ 表示标

本文 2025 年 3 月 18 日收到, 2025 年 9 月 19 日收到修改稿.

¹中国矿业大学 (北京) 理学院, 北京 100083. E-mail: wangyan0726@yeah.net; liuzg@cumtb.edu.cn

²通信作者. 烟台大学数学与信息科学学院, 山东 烟台 264005. E-mail: yxia07@163.com

准 Euclidean 范数:

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^N |x_i|^2, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

随后, 文 [16–19] 等进一步推动了该理论的深化与拓展. 基于 Dunkl 变换的调和分析由 Thangavelu 和 Xu^[20–21] 发展起来, 其核心在于解决两个基本问题: (i) Bochner-Riesz 平均的几乎处处收敛性; (ii) Riesz 变换与 Riesz 位势的 L^p 有界性. 将 Dunkl 情形视为标准 Euclidean 空间上一类特殊的加权情形, Guliyev 等人^[22–23] 获得了带有 BMO 函数的极大交换子和分数次极大交换子在 Orlicz 空间中有界的充要条件. 近年来, 文 [24–25] 表明, 在 Dunkl 情形下, 空间 BMO 可以通过 BMO 函数与奇异积分算子生成的交换子的 L^p 有界性加以刻画. 随后, Han 等人^[26] 将该结果推广至 Lipschitz 空间, 在 Dunkl 情形下对 Riesz 变换和 Riesz 位势得到了类似结论. 与此同时, Mukherjee 和 Parui 在文 [27–28] 中引入了 Dunkl 情形下的多线性奇异积分.

借鉴文 [26, 28] 中的结果, 本文聚焦于研究多线性 Dunkl-Calderón-Zygmund 奇异积分交换子的有界性. 考虑空间 $(\mathbb{R}^N, d\mu_\kappa)$, 其中测度为 $d\mu_\kappa(x) = \mu_\kappa(x)dx$, 且

$$\mu_\kappa(x) = \prod_{\alpha \in R} |\langle x, \alpha \rangle|^{\kappa(\alpha)},$$

其中 $\kappa: R \rightarrow \mathbb{C}$ 是 G -不变函数, 本文固定为 $\kappa(x) \geq 0$ 对所有 $x \in R$ 成立. 首先, 本文得到与 Lipschitz 函数的多线性交换子及其迭代多线性交换子从

$$L^{p_1}(\mathbb{R}^N, d\mu_\kappa) \times \cdots \times L^{p_m}(\mathbb{R}^N, d\mu_\kappa)$$

到 $\dot{F}_{p,D}^{\beta,\infty}$ 的有界性, 其中 $\dot{F}_{p,D}^{\beta,\infty}$ 是文 [26] 中定义的 Dunkl 情形下的 Triebel-Lizorkin 空间. 进一步地, 通过引入 sharp 极大函数估计与 Kolmogorov 不等式, 得到这两类交换子从

$$L^{p_1}(\mathbb{R}^N, d\mu_\kappa) \times \cdots \times L^{p_m}(\mathbb{R}^N, d\mu_\kappa)$$

到 $L^q(\mathbb{R}^N, d\mu_\kappa)$ 的有界性, 其中 p_1, \dots, p_m 与 q 满足一定条件.

首先介绍本文中的一些符号. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. 设 C 表示一个常数, 其取值可能随上下文而变化, 但与主要参数无关. p 与 p' 为共轭指数, 即满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. $f \lesssim g$ 表示存在常数 $C > 0$, 使得 $f \leq Cg$, 而 $f \approx g$ 表示存在常数 $C > 0$, 使得

$$C^{-1}g \leq f \leq Cg.$$

对于 $1 \leq p < \infty$, 定义

$$L^p(\mathbb{R}^N, d\mu_\kappa) := \{f \text{ 为在 } \mathbb{R}^N \text{ 上的可测函数} : \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \infty\},$$

其中

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} := \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p d\mu_\kappa(x) \right)^{1/p}.$$

弱 L^p 空间定义为

$$L^{p,\infty}(\mathbb{R}^N, d\mu_\kappa) := \{f \text{ 为在 } \mathbb{R}^N \text{ 上的可测函数} : \|f\|_{L^{p,\infty}(\mathbb{R}^N)} < \infty\},$$

其中

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(\mathbb{R}^N)} := \sup_{\lambda > 0} \lambda \mu_\kappa(\{x \in \mathbb{R}^N : |f(x)| > \lambda\})^{1/p}.$$

为简便起见, 本文记 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 和 $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^N)$ 分别表示 $L^p(\mathbb{R}^N, d\mu_\kappa)$ 与 $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^N, d\mu_\kappa)$. 此外, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ 表示所有 Schwartz 函数构成的空间, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ 表示所有缓增分布构成的空间, $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ 表示所有无限可微且在 \mathbb{R}^N 上具有紧支集的函数构成的空间.

§2 预备知识与主要结果

本节简要概述 Dunkl 算子理论的一些基本概念和引理. 空间 $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|, d\mu_\kappa)$ 可视为 Coifman-Weiss^[29-30] 意义下的齐型空间. 定义 $B := B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^N : \|x - y\| < r\}$. 令 $\mathbf{N} = N + \sum_{\alpha \in R} \kappa(\alpha)$, 对于所有 $x \in \mathbb{R}^N$ 和 $t, r > 0$, 有

$$\mu_\kappa(B(tx, tr)) = t^{\mathbf{N}} \mu_\kappa(B(x, r)).$$

容易看出存在常数 $C \geq 1$, 使得对任意 $x \in \mathbb{R}^N$ 及 $r_2 \geq r_1 > 0$, 有

$$C^{-1} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\mathbf{N}} \leq \frac{\mu_\kappa(B(x, r_2))}{\mu_\kappa(B(x, r_1))} \leq C \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\mathbf{N}}.$$

记 $d(x, y)$ 为点 x, y 的 G -轨道之间的距离, 即 $d(x, y) = \min_{\sigma \in G} \|\sigma(x) - y\|$. 定义球 B 的轨道 $\mathcal{O}(B)$ 为

$$\mathcal{O}(B) = \{y \in \mathbb{R}^N : d(x, y) \leq r\} = \bigcup_{\sigma \in G} \sigma(B).$$

于是有

$$\mu_\kappa(B) \leq \mu_\kappa(\mathcal{O}(B)) \leq |G| \mu_\kappa(B).$$

函数 K 被称为 m -线性标准 Dunkl-Calderón-Zygmund 核, 记作 $\text{DCZK}(m, \varepsilon)$, 若其定义在 $(\mathbb{R}^N)^{m+1} \setminus \mathcal{O}(\Delta_{m+1})$ 上, 其中

$$\mathcal{O}(\Delta_{m+1}) := \{(y_0, y_1, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^N)^{m+1} : y_0 = \sigma_i(y_i), \sigma_i \in G, i = 1, \dots, m\},$$

且存在 $0 < \varepsilon \leq 1$, 使得对于所有的 $(y_0, y_1, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^N)^{m+1} \setminus \mathcal{O}(\Delta_{m+1})$, 有

$$|K(y_0, y_1, \dots, y_m)| \lesssim \left[\sum_{i=1}^m \mu_\kappa(B(y_0, d(y_0, y_i))) \right]^{-m} \left[\frac{\sum_{i=1}^m d(y_0, y_i)}{\sum_{i=1}^m \|y_0 - y_i\|} \right]^\varepsilon, \quad (2.1)$$

以及对于所有 $j \in \{0, 1, \dots, m\}$, 当 $\|y_j - y'_j\| \leq \max_{1 \leq i \leq m} \frac{d(y_0, y_i)}{2}$ 时, 有

$$\begin{aligned} & |K(y_0, y_1, \dots, y_j, \dots, y_m) - K(y_0, y_1, \dots, y'_j, \dots, y_m)| \\ & \lesssim \left[\sum_{i=1}^m \mu_\kappa(B(y_0, d(y_0, y_i))) \right]^{-m} \left[\frac{\|y_n - y'_n\|}{\max_{1 \leq i \leq m} \|y_0 - y_i\|} \right]^\varepsilon. \end{aligned} \quad (2.2)$$

定义 2.1 (见 [28]) 设 T 是从 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \times \dots \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ 到 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ 的一个 m -线性算子. 对于任意 $f_i \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ 以及 $\sigma \in G$ 满足 $\sigma(x) \notin \bigcap_{i=1}^m \text{supp } f_i$, 算子 T 可表示为

$$T(\vec{f})(x) = \int_{(\mathbb{R}^N)^m} K(x, \vec{y}) \prod_{i=1}^m f_i(y_i) d\mu_\kappa(y_i),$$

其中 $K(x, \vec{y}) \in \text{DCZK}(m, \varepsilon)$ 是算子 T 的分布核. 对于某个 $1 \leq q_i < \infty$ 和 $\frac{1}{q} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{q_i}$, 若算子 T 能够拓展为从 $L^{q_1}(\mathbb{R}^N) \times \cdots \times L^{q_m}(\mathbb{R}^N)$ 到 $L^{q, \infty}(\mathbb{R}^N)$ 的有界算子, 则称其为 m -线性 Dunkl-Calderón-Zygmund 算子.

对于 $\beta \in (0, 1)$, 文 [26] 引入了一类 Lipschitz 空间 $\Lambda_d^\beta(\mathbb{R}^N)$, 其定义为所有在 \mathbb{R}^N 上的函数 f 的集合, 并满足

$$\|f\|_{\Lambda_d^\beta(\mathbb{R}^N)} := \sup_{d(x,y) \neq 0} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)^\beta} < \infty.$$

由 Dunkl 度量定义的空间 $\Lambda_d^\beta(\mathbb{R}^N)$ 是标准 Lipschitz 空间 $\Lambda^\beta(\mathbb{R}^N)$ 的一个真子空间, 其中后者的范数是将 Dunkl 度量替换为 Euclidean 距离得到的, 并且对于 $b \in \Lambda_d^\beta(\mathbb{R}^N)$, 有 $\|b\|_{\Lambda_d^\beta(\mathbb{R}^N)} \lesssim \|b\|_{\Lambda^\beta(\mathbb{R}^N)}$. 当 $b \in \Lambda^\beta(\mathbb{R}^N)$ 是 G -不变函数时, 则 $b \in \Lambda_d^\beta(\mathbb{R}^N)$ 且 $\|b\|_{\Lambda^\beta(\mathbb{R}^N)} \approx \|b\|_{\Lambda_d^\beta(\mathbb{R}^N)}$.

引理 2.1 (见 [26]) 对于 $\beta \in (0, 1)$ 和 $q \in [1, \infty)$. 若 $f \in \Lambda_d^\beta(\mathbb{R}^N)$, 则

$$\|f\|_{\Lambda_d^\beta(\mathbb{R}^N)} \approx \sup_{B \subseteq \mathbb{R}^N} \frac{1}{\ell(B)^\beta} \left(\frac{1}{\mu_\kappa(\mathcal{O}(B))} \int_{\mathcal{O}(B)} |f(x) - f_{\mathcal{O}(B)}|^q d\mu_\kappa(x) \right)^{1/q},$$

其中 $f_{\mathcal{O}(B)} := \frac{1}{\mu_\kappa(\mathcal{O}(B))} \int_{\mathcal{O}(B)} f(y) d\mu_\kappa(y)$.

引理 2.2 (见 [26]) 令 $b \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $1 \leq s < \infty$ 及 $r_1 > r > 0$. 对于所有的 $x \in \mathbb{R}^N$, 有

$$|b_{\mathcal{O}(B(x,r))} - b_{\mathcal{O}(B(x,r_1))}| \lesssim \ell(B(x,r_1))^\beta \log\left(\frac{r_1}{r}\right) \|b\|_{\Lambda_d^\beta(\mathbb{R}^N)}$$

及

$$\left(\frac{1}{\mu_\kappa(\mathcal{O}(B(x, 2^j r)))} \int_{\mathcal{O}(B(x, 2^j r))} |b(y) - b_{\mathcal{O}(B(x,r))}|^s d\mu_\kappa(y) \right)^{1/s} \lesssim \ell(B(x, 2^j r))^\beta j \|b\|_{\Lambda_d^\beta(\mathbb{R}^N)}.$$

对于任意 $b_i \in \Lambda_d^{\beta_i}(\mathbb{R}^N)$, $i = 1, \dots, m$, 记 $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m)$, 并令 T 为定义在 $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|, d\mu_\kappa)$ 上的 m -线性 Dunkl-Calderón-Zygmund 奇异积分算子, 则由 \vec{b} 和 T 生成的 m -线性交换子定义为

$$T_{\vec{b}}^\Sigma(\vec{f}) = \sum_{i=1}^m b_i T(\vec{f}) - T(f_1, \dots, b_i f_i, \dots, f_m) =: \sum_{i=1}^m T_{b_i}^i(f_1, \dots, f_m).$$

记 $[b_i, T]_i(\vec{f}) = b_i T(\vec{f}) - T(f_1, \dots, b_i f_i, \dots, f_m)$, 则迭代 m -线性交换子 $T_{\vec{b}}^\Pi$ 定义为

$$T_{\vec{b}}^\Pi(\vec{f}) = [b_1, [b_2, \dots [b_m, T]_m \cdots]_1](\vec{f}).$$

形式上有

$$T_{\vec{b}}^\Pi(\vec{f})(x) = \int_{(\mathbb{R}^N)^m} \prod_{i=1}^m (b_i(x) - b_i(y_i)) K(x, \vec{y}) f_i(y_i) d\mu_{\kappa^m}(\vec{y}),$$

其中 $d\mu_{\kappa^m}(\vec{y}) = d\mu_\kappa(y_1) \cdots d\mu_\kappa(y_m)$.

现在我们陈述下列主要结果. 在以下定理中, 假设算子 T 是定义 2.1 中的 m -线性 Dunkl-Calderón-Zygmund 算子.

定理 2.1 对于 $i = 1, \dots, m$, 若 $0 < \beta_i < 1$, $b_i \in \Lambda_d^{\beta_i}(\mathbb{R}^N)$ 且 $f_i \in L^{p_i}(\mathbb{R}^N)$, 其中 $1 < p_i < \infty$ 满足 $\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i}$, 则

$$\|T_b^\Sigma(\vec{f})\|_{\dot{F}_{p,D}^{\beta,\infty}(\mathbb{R}^N)} \lesssim \sum_{i=1}^m \|b_i\|_{\Lambda_d^{\beta_i}(\mathbb{R}^N)} \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^N)},$$

这里 $\dot{F}_{p,D}^{\beta,\infty}(\mathbb{R}^N)$ 是文 [26] 中引入的齐次 Triebel-Lizorkin 空间, 其范数等价于

$$\|f\|_{\dot{F}_{p,D}^{\beta,\infty}(\mathbb{R}^N)} \approx \left\| \sup_{r>0} \frac{1}{\mu_\kappa(B(\cdot, r)) \ell(B(\cdot, r))^\beta} \int_{B(\cdot, r)} |f(y) - f_{B(\cdot, r)}| d\mu_\kappa(y) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

定理 2.2 对于 $i = 1, \dots, m$, 若 $0 < \beta < 1$, $b_i \in \Lambda_d^\beta(\mathbb{R}^N)$ 且 $f_i \in L^{p_i}(\mathbb{R}^N)$, 其中 $1 < p_i < \infty$ 满足 $\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i}$ 以及 $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\beta}{N}$, 则

$$\|T_b^\Sigma(\vec{f})\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \lesssim \sum_{i=1}^m \|b_i\|_{\Lambda_d^\beta(\mathbb{R}^N)} \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^N)}.$$

定理 2.3 对于 $j = 1, \dots, m$, 若 $0 < \beta_j < 1$, $b_j \in \Lambda_d^{\beta_j}(\mathbb{R}^N)$ 且 $f_j \in L^{p_j}(\mathbb{R}^N)$, 其中 $\beta = \sum_{j=1}^m \beta_j$ 且 $1 < p_j < \infty$ 满足 $\frac{1}{p} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{p_j}$, 则

$$\|T_b^\Pi(\vec{f})\|_{\dot{F}_{p,D}^{\beta,\infty}(\mathbb{R}^N)} \lesssim \prod_{j=1}^m \|b_j\|_{\Lambda_d^{\beta_j}(\mathbb{R}^N)} \|f_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^N)}.$$

定理 2.4 对于 $j = 1, \dots, m$, 若 $0 < \beta_j < 1$, $b_j \in \Lambda_d^{\beta_j}(\mathbb{R}^N)$ 且 $f_j \in L^{p_j}(\mathbb{R}^N)$, 其中 $\beta = \sum_{j=1}^m \beta_j$ 且 $1 < p_j < q_j < \infty$ 满足 $\frac{1}{p} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{p_j}$, $\frac{1}{q} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{q_j}$ 以及 $\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} = \frac{\beta_j}{N}$, 则

$$\|T_b^\Pi(\vec{f})\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \lesssim \prod_{j=1}^m \|b_j\|_{\Lambda_d^{\beta_j}(\mathbb{R}^N)} \|f_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^N)}.$$

上述定理的证明主要依赖于极大函数的有界性. 为此, 我们引入一些记号. 在空间 $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|, d\mu_\kappa)$ 上, 对于 $f_j \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N)$, 定义非中心极大函数

$$M_{p,\beta}^\kappa f(x) = \sup_{\substack{B \subset \mathbb{R}^N \\ x \ni B}} \prod_{j=1}^m \frac{1}{\ell(B)^\beta} \left(\frac{1}{\mu_\kappa(B)} \int_B |f_j(y)|^p d\mu_\kappa(y) \right)^{1/p}.$$

当 $p = 1$ 时, 若 $\beta = 0$, 该算子对应于 Hardy-Littlewood 极大算子; 若 $0 < \beta < N$, 则对应于分数次极大算子. 对于 $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N)$, 定义 sharp 极大函数

$$M^{\kappa, \#} f(x) = \sup_{\substack{B \subset \mathbb{R}^N \\ x \ni B}} \frac{1}{\mu_\kappa(B)} \int_B |f(y) - f_B| d\mu_\kappa(y).$$

对于 $\delta > 0$, 定义

$$M_\delta^\kappa \vec{f}(x) := \sup_{\substack{B \subset \mathbb{R}^N \\ x \ni B}} \prod_{j=1}^m \left(\frac{1}{\mu_\kappa(B)} \int_B |f_j(y)|^\delta d\mu_\kappa(y) \right)^{1/\delta}$$

和

$$M_\delta^{\kappa, \#} f(x) := (M^{\kappa, \#}(|f|^\delta)(x))^{1/\delta} \approx \sup_{\substack{B \subset \mathbb{R}^N \\ x \ni B}} \inf_{c \in \mathbb{C}} \left[\frac{1}{\mu_\kappa(B)} \int_B \|f(y)^\delta - |c|^\delta\| d\mu_\kappa(y) \right]^{1/\delta}.$$

下列引理是文 [31] 中的一个特例.

引理 2.3 (见 [31]) 令 $0 < p_0 \leq p < \infty$ 和 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. 若 $M^\kappa f \in L^{p_0, \infty}(\mathbb{R}^N)$, 则

(i) 当 $p_0 < p$ 时, 有

$$\|M^\kappa f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \lesssim \|M^{\kappa, \#} f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)};$$

(ii) 当 $p_0 \leq p$ 时, 有

$$\|M^\kappa f\|_{L^{p, \infty}(\mathbb{R}^N)} \lesssim \|M^{\kappa, \#} f\|_{L^{p, \infty}(\mathbb{R}^N)}.$$

§3 主要结果的证明

本节通过 sharp 极大函数估计建立定理 2.1–2.4 中交换子的有界性. 以下约定对任意球 B , 记 B^* 为与其同心、半径放大至 5 倍的球.

§3.1 定理 2.1 的证明

定理 2.1 的证明 由于线性性质, 只需在 $b \in \Lambda_d^\beta(\mathbb{R}^N)$ 的特殊情形下完成证明. 任取 $x \in \mathbb{R}^N$, 令 $B := B(x, r)$, 并取 $0 < t < p, 0 < t_1 s < p_1$ 以及 $1 < t_j < p_j (j = 1, \dots, m)$. 只需证明对于 $f_j \in L_c^\infty(\mathbb{R}^N), j = 1, \dots, m$, 有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu_\kappa(B)\ell(B)^\beta} \int_B |T_b^\Sigma(\vec{f})(z) - (T_b^\Sigma(\vec{f}))_B| d\mu_\kappa(z) \\ & \lesssim \|b\|_{\Lambda_d^\beta} \left(M_t^\kappa(T(\vec{f}))(x) + \sum_{\substack{(n_1, \dots, n_m) \\ \sigma_{n_s} \in G}} \prod_{j=1}^m M_{t_j}^\kappa(f_j \circ \sigma_{n_j})(x) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{\substack{(n_1, \dots, n_m) \\ \sigma_{n_s} \in G}} M_{t_1 s}^\kappa(f_1 \circ \sigma_{n_1})(x) \prod_{j=2}^m M_{t_j}^\kappa(f_j \circ \sigma_{n_j})(x) \right), \end{aligned} \tag{3.1}$$

当 $p > 1$ 时, 利用 Hardy-Littlewood 算子 M^κ 和算子 T 的 L^p 有界性, 以及测度 μ_κ 的 G -不变性, 即可得到所需结果. 随后通过稠密性, 该结果可以推广至 $f_j \in L^{p_j}(\mathbb{R}^N), j = 1, \dots, m$ 的情形.

下面验证 (3.1). 给定 $z \in \mathbb{R}^N$ 和 $b \in \Lambda_d^\beta(\mathbb{R}^N)$, 记

$$T_b^\Sigma(\vec{f})(z) = b(z)T(\vec{f})(z) - T(bf_1, \dots, f_m)(z).$$

令 $\lambda = b_{\mathcal{O}(B)}$, 整理可得

$$T_b^\Sigma(\vec{f})(z) = (b(z) - \lambda)T(\vec{f})(z) - T((b - \lambda)f_1, \dots, f_m)(z) =: I_1(z) + I_2(z),$$

则有

$$\frac{1}{\mu_\kappa(B)\ell(B)^\beta} \int_B |T_b^\Sigma(\vec{f})(z) - (T_b^\Sigma(\vec{f}))_B| d\mu_\kappa(z)$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{2}{\mu_\kappa(B)\ell(B)^\beta} \int_B |I_1(z)| d\mu_\kappa(z) + \frac{1}{\mu_\kappa(B)\ell(B)^\beta} \int_B |I_2(z) - (I_2(\cdot))_B| d\mu_\kappa(z) \\ &=: \Pi_1 + \Pi_2. \end{aligned}$$

通过引理 2.1 和 Hölder 不等式, 可得

$$\begin{aligned} \Pi_1 &\lesssim \frac{1}{\ell(B)^\beta} \left(\frac{1}{\mu_\kappa(B)} \int_B |b(z) - \lambda|^{t'} d\mu_\kappa(z) \right)^{1/t'} \left(\frac{1}{\mu_\kappa(B)} \int_B |T(\vec{f})(z)|^t d\mu_\kappa(z) \right)^{1/t} \\ &\lesssim \|b\|_{\Lambda_d^\beta(\mathbb{R}^N)} M_t^\kappa(T(\vec{f}))(x). \end{aligned}$$

为估计 Π_2 项, 将每个函数 f_j 分解为 $f_j = f_j^0 + f_j^\infty$, 其中 $f_j^0 := f_j \chi_{\mathcal{O}(B^*)}$, $j = 1, \dots, m$, 则

$$\prod_{j=1}^m f_j(y_j) = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \{0, \infty\}} f_1^{\alpha_1}(y_1) \cdots f_m^{\alpha_m}(y_m) = \prod_{j=1}^m f_j^0(y_j) + \sum^{(1)} f_1^{\alpha_1}(y_1) \cdots f_m^{\alpha_m}(y_m),$$

其中 $\sum^{(1)}$ 的每一项至少包含一个 $\alpha_j \neq 0$. 由此可以推出

$$\begin{aligned} \Pi_2 &\leq \frac{2}{\mu_\kappa(B)\ell(B)^\beta} \int_B |T((b - \lambda)f_1^{(1)}, \dots, f_m^{(1)})(z)| d\mu_\kappa(z) \\ &\quad + \sum^{(1)} \frac{2}{\mu_\kappa(B)\ell(B)^\beta} \\ &\quad \times \int_B |T((b - \lambda)f_1^{\alpha_1}, \dots, f_m^{\alpha_m})(z) - T((b - \lambda)f_1^{\alpha_1}, \dots, f_m^{\alpha_m})(x)| d\mu_\kappa(z) \\ &=: \Pi_2^{(1)} + \sum^{(1)} \Pi_2^{\alpha_1 \cdots \alpha_m}. \end{aligned}$$

由文 [28] 中定理 5.3 证明的算子有界性, 引理 2.1 以及 Hölder 不等式, 对 $\Pi_2^{(1)}$ 进行估计, 可得

$$\begin{aligned} \Pi_2^{(1)} &\lesssim \frac{1}{\mu_\kappa(B)^{1-1/t} \ell(B)^\beta} \|T((b - \lambda)f_1^{(1)}, \dots, f_m^{(1)})(z)\|_{L^t(B)} \\ &\lesssim \frac{1}{\ell(B)^\beta} \left(\frac{1}{\mu_\kappa(B)} \int_{\mathcal{O}(B^*)} |(b(z) - \lambda)f_1(z)|^{t_1} d\mu_\kappa(z) \right)^{1/t_1} \\ &\quad \times \prod_{j=2}^m \left(\frac{1}{\mu_\kappa(B)} \int_{\mathcal{O}(B^*)} |f_j(z)|^{t_j} d\mu_\kappa(z) \right)^{1/t_j} \\ &\lesssim \|b\|_{\Lambda_d^\beta(\mathbb{R}^N)} \sum_{\substack{(n_1, \dots, n_m) \\ \sigma_{n_s} \in G}} M_{t_1 s}^\kappa(f_1 \circ \sigma_{n_1})(x) \prod_{j=2}^m M_{t_j}^\kappa(f_j \circ \sigma_{n_j})(x), \end{aligned}$$

其中 $\frac{1}{t} = \frac{1}{t_1} + \dots + \frac{1}{t_m}$, $1 < t_1 s < p_1$, 且对于所有的 $i = 2, \dots, m$, 有 $1 < t_i < p_i$.

为了估计第二项 $\sum^{(1)} \Pi_2^{\alpha_1 \cdots \alpha_m}$, 首先对特定项 $\Pi_2^{\infty \cdots \infty}$ 进行估计. 此时, 当 $z \in B$ 且 $\vec{y} \in (\mathbb{R}^N \setminus \mathcal{O}(B^*))^m$ 时, 核函数满足 (2.2). 从而

$$\begin{aligned} \Pi_2^{\infty \cdots \infty} &= \frac{1}{\mu_\kappa(B)\ell(B)^\beta} \int_B |T((b - \lambda)f_1^\infty, \dots, f_m^\infty)(z) - T((b - \lambda)f_1^\infty, \dots, f_m^\infty)(x)| d\mu_\kappa(z) \\ &\lesssim \frac{1}{\mu_\kappa(B)\ell(B)^\beta} \int_B \int_{(\mathbb{R}^N \setminus \mathcal{O}(B^*))^m} \left[\sum_{n=1}^m \mu(B(z, d(z, y_n))) \right]^{-m} \left[\frac{\|z - x\|}{\max_{1 \leq n \leq m} \|z - y_n\|} \right]^\varepsilon \\ &\quad \times |(b(y_1) - \lambda)f_1(y_1)| \prod_{i=2}^m |f_i(y_i)| d\mu_{\kappa^m}(\vec{y}) d\mu_\kappa(z) \end{aligned}$$

$$\lesssim \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_{\kappa}(B)\ell(B)^{\beta}} \int_B \int_{(\mathcal{O}(2^j B^*))^m \setminus (\mathcal{O}(2^{j-1} B^*))^m} \left[\sum_{n=1}^m \mu(B(z, d(z, y_n))) \right]^{-m} \\ \times \left[\frac{\|z-x\|}{\max_{1 \leq n \leq m} \|z-y_n\|} \right]^{\varepsilon} |(b(y_1) - \lambda)f_1(y_1)| \prod_{i=2}^m |f_i(y_i)| d\mu_{\kappa^m}(\vec{y}) d\mu_{\kappa}(z),$$

其中 $2^j B^* := B(x, 2^j \cdot 5r)$. 注意到 $z \in B$ 和 $y_n \in \mathcal{O}(2^j B^*) \setminus \mathcal{O}(2^{j-1} B^*)$, $n = 1, \dots, m$, 则有 $\max_{1 \leq n \leq m} \|z - y_n\| \geq \max_{1 \leq n \leq m} d(z, y_n) \gtrsim 2^j r$ 和 $B(z, d(z, y_n)) \approx B(x, d(z, y_n))$. 通过测度 μ_{κ} 的逆倍测度条件, 有 $\sum_{n=1}^m \mu_{\kappa}(B(z, d(z, y_n))) \gtrsim \mu_{\kappa}(2^j B)$. 因此, 可得

$$\Pi_2^{\infty \dots \infty} \lesssim \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j\varepsilon} \frac{1}{\mu_{\kappa}(B)\ell(B)^{\beta}} \int_B \int_{(\mathcal{O}(2^j B^*))^m \setminus (\mathcal{O}(2^{j-1} B^*))^m} (\mu(2^j B))^{-m} |(b(y_1) - \lambda)f_1(y_1)| \\ \times \prod_{i=2}^m |f_i(y_i)| d\mu_{\kappa^m}(\vec{y}) d\mu_{\kappa}(z) \\ \lesssim \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j\varepsilon} \frac{1}{(\mu_{\kappa}(2^j B))^m \ell(B)^{\beta}} \int_{(\mathcal{O}(2^j B^*))^m} |(b(y_1) - \lambda)f_1(y_1)| \prod_{i=2}^m |f_i(y_i)| d\mu_{\kappa^m}(\vec{y}) \\ \lesssim \|b\|_{\Lambda_d^{\beta}(\mathbb{R}^N)} \sum_{\substack{(n_1, \dots, n_m) \\ \sigma_{n_s} \in G}} \prod_{j=1}^m M_{t_j}^{\kappa}(f_j \circ \sigma_{n_j})(x).$$

仍需考察满足 $\alpha_{j_1} = \dots = \alpha_{j_l} = 0$ 的 $\Pi_2^{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ 项, 其中 $\{j_1, \dots, j_l\} \subset \{1, \dots, m\}$ 且 $1 \leq l < m$. 不妨设 $1 \in \{j_1, \dots, j_l\}$, 其余情形可类推. 当 $z \in B$ 且 $j \notin \{j_1, \dots, j_l\}$ 时, 有 $\|z-x\| \leq \frac{d(x, y_j)}{2}$. 于是结合 (2.2), 引理 2.2 以及对 $\Pi_2^{\infty \dots \infty}$ 的类似估计, 可得

$$\Pi_2^{\alpha_1 \dots \alpha_m} \lesssim \frac{1}{\mu_{\kappa}(B)\ell(B)^{\beta}} \\ \times \int_B |T((b-\lambda)f_1^{\alpha_1}, \dots, f_m^{\alpha_m})(z) - T((b-\lambda)f_1^{\alpha_1}, \dots, f_m^{\alpha_m})(x)| d\mu_{\kappa}(z) \\ \lesssim \int_{B^*} |(b(y_1) - \lambda)f_1(y_1)| d\mu_{\kappa}(y_1) \prod_{j \in \{j_1, \dots, j_l\} \setminus \{1\}} \int_{B^*} |f_j(y_j)| d\mu_{\kappa}(y_j) \\ \times \frac{1}{\mu_{\kappa}(B)\ell(B)^{\beta}} \int_B \int_{(\mathbb{R}^N \setminus \mathcal{O}(B^*))^{m-l}} \left[\sum_{n=1}^m \mu_{\kappa}(B(z, d(z, y_n))) \right]^{-m} \\ \times \left[\frac{\|z-x\|}{\max_{1 \leq n \leq m} \|z-y_n\|} \right]^{\varepsilon} \prod_{j \notin \{j_1, \dots, j_l\}} |f_j(y_j)| d\mu_{\kappa}(y_j) d\mu_{\kappa}(z) \\ \lesssim \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j\varepsilon} \frac{1}{(\mu_{\kappa}(2^j B))^m \ell(B)^{\beta}} \int_{B^*} |(b(y_1) - \lambda)f_1(y_1)| d\mu_{\kappa}(y_1) \\ \times \prod_{j \in \{j_1, \dots, j_l\} \setminus \{1\}} \int_{B^*} |f_j(y_j)| d\mu_{\kappa}(y_j) \prod_{j \notin \{j_1, \dots, j_l\}} \int_{(\mathcal{O}(2^j B^*))^{m-l}} |f_j(y_j)| d\mu_{\kappa}(y_j) \\ \lesssim \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j\varepsilon} \frac{1}{(\mu_{\kappa}(2^j B))^m \ell(B)^{\beta}} \int_{(\mathcal{O}(2^j B^*))^m} |(b(y_1) - \lambda)f_1(y_1)| \prod_{i=2}^m |f_i(y_i)| d\mu_{\kappa^m}(\vec{y})$$

$$\lesssim \|b\|_{\Lambda_d^\beta(\mathbb{R}^N)} \sum_{\substack{(n_1, \dots, n_m) \\ \sigma_{n_s} \in G}} \prod_{j=1}^m M_{t_j}^\kappa(f_j \circ \sigma_{n_j})(x).$$

结合上述 Π_1 和 Π_2 的估计, 从而得到目标不等式.

§3.2 定理 2.2 的证明

回顾 Kolmogorov 不等式: 对于 $0 < p < q < \infty$ 和任意可测函数 f , 有

$$\|f\|_{L^p(B, \frac{d\mu_\kappa}{\mu_\kappa(B)})} \leq C \|f\|_{L^q, \infty(B, \frac{d\mu_\kappa}{\mu_\kappa(B)})}.$$

该不等式在关于 δ 的处理中起着关键作用.

定理 2.2 的证明 对于 $0 < \delta < \min\{\varepsilon, \frac{1}{m}\}$ 和 $b_j \in \Lambda_d^\beta(\mathbb{R}^N)$. 当 $0 < \delta < 1$ 时, 利用不等式 $|a|^\delta - |b|^\delta \leq |a - b|^\delta$, 仿照定理 2.1 的证明过程, 并结合 Kolmogorov 不等式, 可知对于所有 $\vec{f} \in (L_c^\infty(\mathbb{R}^N))^m$, 有

$$\begin{aligned} M_\delta^{\kappa, \#}(T_b^\Sigma(\vec{f}))(x) &\lesssim \sum_{i=1}^m \|b_i\|_{\Lambda_d^\beta(\mathbb{R}^N)} \left(\sum_{\substack{(n_1, \dots, n_m) \\ \sigma_{n_s} \in G}} M_{t_i, \beta}^\kappa(f_i \circ \sigma_{n_i})(x) \prod_{j \neq i}^m M_{t_j}^\kappa(f_j \circ \sigma_{n_j})(x) \right. \\ &\quad \left. + M_{\varepsilon, \beta}^\kappa(T(\vec{f}))(x) \right). \end{aligned}$$

根据文 [32] 中定理 3.19 (另见文 [33] 中定理 3.5.6) 的类似讨论可知, 对于 $q < q_0 < \infty$, 有 $\|M_\delta^\kappa(T_b^\Sigma(\vec{f}))\|_{L^{q_0}(\mathbb{R}^N)} < \infty$, 并结合引理 2.3, 得到

$$\begin{aligned} \|T_b^\Sigma(\vec{f})\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} &\lesssim \|M_\delta^{\kappa, \#}(T_b^\Sigma(\vec{f}))\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \\ &\lesssim \sum_{i=1}^m \|b_i\|_{\Lambda_d^\beta(\mathbb{R}^N)} \left(\|M_{t_i, \beta}^\kappa(f_i \circ \sigma_{n_i})\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \prod_{j \neq i}^m \|M_{t_j}^\kappa(f_j \circ \sigma_{n_j})\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^N)} \right. \\ &\quad \left. + \|M_{\varepsilon, \beta}^\kappa(T(\vec{f}))\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \right) \\ &\lesssim \sum_{i=1}^m \|b_i\|_{\Lambda_d^\beta(\mathbb{R}^N)} \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^N)}, \end{aligned}$$

其中 $t_i(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{r}) = \frac{\beta}{N}$, $\frac{1}{q} = \sum_{j \neq i} \frac{1}{p_j} + \frac{1}{r}$ 以及当 $i \neq j$ 时, 有 $t_j < p_j$.

由于当 $1 < p < \infty$ 时, $L_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ 在 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 中稠密, 因此该结论可自然推广至 $f_j \in L^{p_j}(\mathbb{R}^N)$, $j = 1, \dots, m$ 的情形. 至此, 定理 2.2 得证.

§3.3 定理 2.3 的证明

为简洁起见, 本小节仅对 $m = 2$ 的情形加以论证, 其余情形可作类似推广.

定理 2.3 的证明 固定 $i = 1, 2$, 取 $b_i \in \Lambda_d^{\beta_i}$, 并对任意 $x_0 \in \mathbb{R}^N$, 取球 $B := B(x_0, r)$. 由 $\dot{F}_{p, D}^{\beta, \infty}(\mathbb{R})$ 的定义, 只需证明

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\mu_\kappa(B)\ell(B)^\beta} \int_B |T_b^\Pi(f_1, f_2)(z) - (T_b^\Pi(f_1, f_2))_B| d\mu_\kappa(z) \\ &\lesssim \|b_1\|_{\Lambda_d^{\beta_1}(\mathbb{R}^N)} \|b_2\|_{\Lambda_d^{\beta_2}(\mathbb{R}^N)} \left(M_r^\kappa(T(f_1, f_2))(x) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{\sigma_{n_1}, \sigma_{n_2} \in G} M_{q_1}^\kappa(f_1 \circ \sigma_{n_1})(x) M_{q_2}^\kappa(f_2 \circ \sigma_{n_2})(x) \\
 & + \sum_{\sigma_{n_1}, \sigma_{n_2} \in G} M^\kappa(f_1 \circ \sigma_{n_1})(x) M^\kappa(f_2 \circ \sigma_{n_2})(x) \Big). \tag{3.2}
 \end{aligned}$$

为此, 设 $\lambda_i = (b_i)_{\mathcal{O}(B)}$, $i = 1, 2$. 记

$$\begin{aligned}
 T_b^\Pi(\vec{f})(z) &= (b_1(z) - \lambda_1)(b_2(z) - \lambda_2)T(f_1, f_2)(z) - (b_1(z) - \lambda_1)T(f_1, (b_2 - \lambda_2)f_2)(z) \\
 & \quad - (b_2(z) - \lambda_2)T((b_1 - \lambda_1)f_1, f_2)(z) + T((b_1 - \lambda_1)f_1, (b_2 - \lambda_2)f_2)(z) \\
 & =: H_1(z) + H_2(z) + H_3(z) + H_4(z).
 \end{aligned}$$

对于一个给定的常数 c , 有

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\mu_\kappa(B)\ell(B)^\beta} \int_B |T_b^\Pi(f_1, f_2)(z) - (T_b^\Pi(f_1, f_2))_B| d\mu_\kappa(z) \\
 & \lesssim \frac{2}{\mu_\kappa(B)\ell(B)^\beta} \int_B |T_b^\Pi(f_1, f_2)(z) - c| d\mu_\kappa(z) \\
 & \lesssim \frac{1}{\mu_\kappa(B)\ell(B)^\beta} \int_B |H_1| d\mu_\kappa(z) + \frac{1}{\mu_\kappa(B)\ell(B)^\beta} \int_B |H_2 - c_1| d\mu_\kappa(z) \\
 & \quad + \frac{1}{\mu_\kappa(B)\ell(B)^\beta} \int_B |H_3 - c_2| d\mu_\kappa(z) + \frac{1}{\mu_\kappa(B)\ell(B)^\beta} \int_B |H_4 - c_3| d\mu_\kappa(z) \\
 & =: \text{I} + \text{II} + \text{III} + \text{IV}.
 \end{aligned}$$

首先估计 I 项. 取 $1 < r < p$, 并应用 Hölder 不等式, 可得

$$\begin{aligned}
 \text{I} & \leq \frac{1}{\ell(B)^{\beta_1}} \left(\frac{1}{\mu_\kappa(B)} \int_B |b_1(z) - \lambda_1|^{r_1} d\mu_\kappa(z) \right)^{1/r_1} \\
 & \quad \times \frac{1}{\ell(B)^{\beta_2}} \left(\frac{1}{\mu_\kappa(B)} \int_B |b_2(z) - \lambda_2|^{r_2} d\mu_\kappa(z) \right)^{1/r_2} \\
 & \quad \times \left(\frac{1}{\mu_\kappa(B)} \int_B |T(f_1, f_2)(z)|^r d\mu_\kappa(z) \right)^{1/r} \\
 & \lesssim \|b_1\|_{\Lambda_d^{\beta_1}(\mathbb{R}^N)} \|b_2\|_{\Lambda_d^{\beta_2}(\mathbb{R}^N)} M_r^\kappa(T(f_1, f_2))(x),
 \end{aligned}$$

其中 $r_1, r_2 > 1$ 满足 $\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 1$.

下面我们处理 II 项. 设 $f_i = f_i \chi_{\mathcal{O}(B^*)} + f_i \chi_{(\mathcal{O}(B^*))^c} =: f_i^0 + f_i^\infty$ 和

$$c_1 = \|b_1\|_{\Lambda_d^{\beta_1}(\mathbb{R}^N)} \ell(B)^{\beta_1} (T(f_1^0, f_2^0)(x_0) + T(f_1^\infty, f_2^0)(x_0) + T(f_1^\infty, f_2^\infty)(x_0)).$$

注意到对于任意 $y \in B$, 有 $|b_1(y) - \lambda_1| \lesssim \|b_1\|_{\Lambda_d^{\beta_1}(\mathbb{R}^N)} \ell(B)^{\beta_1}$, 则

$$\begin{aligned}
 \text{II} & \lesssim \frac{1}{\ell(B)^\beta} \frac{1}{\mu_\kappa(B)} \int_B \| \|b_1\|_{\Lambda_d^{\beta_1}(\mathbb{R}^N)} \ell(B)^{\beta_1} T(f_1, (b_2 - \lambda_2)f_2)(z) - c_1 | d\mu_\kappa(z) \\
 & \lesssim \|b_1\|_{\Lambda_d^{\beta_1}(\mathbb{R}^N)} \frac{1}{\ell(B)^{\beta_2}} \frac{1}{\mu_\kappa(B)} \left(\int_B |T(f_1^0, (b_2 - \lambda_2)f_2^0)(z)| d\mu_\kappa(z) \right. \\
 & \quad + \int_B |T(f_1^0, (b_2 - \lambda_2)f_2^\infty)(z) - T(f_1^0, (b_2 - \lambda_2)f_2^\infty)(x_0)| d\mu_\kappa(z) \\
 & \quad \left. + \int_B |T(f_1^\infty, (b_2 - \lambda_2)f_2^0)(z) - T(f_1^\infty, (b_2 - \lambda_2)f_2^0)(x_0)| d\mu_\kappa(z) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_B |T(f_1^\infty, (b_2 - \lambda_2)f_2^\infty)(z) - T(f_1^\infty, (b_2 - \lambda_2)f_2^\infty)(x_0)| d\mu_\kappa(z) \\
& =: \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4.
\end{aligned}$$

通过应用 Hölder 不等式, 引理 2.1 和文 [28] 中定理 5.3, 有

$$\begin{aligned}
\Pi_1 & \lesssim \|b_1\|_{\Lambda_d^{\beta_1}(\mathbb{R}^N)} \frac{1}{\ell(B)^{\beta_2}} \frac{1}{\mu_\kappa(B)^{1/p}} \left(\int_B |T(f_1^0, (b_2(\cdot) - \lambda_2)f_2^0)(z)|^q d\mu_\kappa(z) \right)^{1/q} \\
& \lesssim \|b_1\|_{\Lambda_d^{\beta_1}(\mathbb{R}^N)} \frac{1}{\ell(B)^{\beta_2}} \frac{1}{\mu_\kappa(B)^{1/q}} \left(\int_{\mathcal{O}(B^*)} |f_1(z)|^{q_1} d\mu_\kappa(z) \right)^{1/q_1} \\
& \quad \times \left(\int_{\mathcal{O}(B^*)} |(b_2(z) - \lambda_2)f_2(z)|^{q_2} d\mu_\kappa(z) \right)^{1/q_2} \\
& \lesssim \|b_1\|_{\Lambda_d^{\beta_1}(\mathbb{R}^N)} \|b_2\|_{\Lambda_d^{\beta_2}(\mathbb{R}^N)} \sum_{\sigma_{n_1}, \sigma_{n_2} \in G} M_{q_1}^\kappa(f_1 \circ \sigma_{n_1})(x) M_{q_2}^\kappa(f_2 \circ \sigma_{n_2})(x),
\end{aligned}$$

其中对于 $i = 1, 2$, 有 $1 < q_i < p_i$ 以及 $1 < q < \infty$ 满足 $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$.

注意到 $z \in B$ 且对任意 $k \in \mathbb{N}$, $y_1 \in \mathcal{O}(2^{k+1}B^*) \setminus \mathcal{O}(2^k B^*)$, 因此有 $\|z - y_1\| \gtrsim 2^k r$ 以及 $B(z, d(z, y_1)) \approx B(x_0, d(x_0, y_1))$. 通过测度 μ_κ 的逆倍测度条件, 可以得到

$$\begin{aligned}
\Pi_2 & \lesssim \|b_1\|_{\Lambda_d^{\beta_1}(\mathbb{R}^N)} \frac{1}{\ell(B)^{\beta_2}} \frac{1}{\mu_\kappa(B)} \int_B \int_{\mathcal{O}(B^*)^c} \int_{\mathcal{O}(B^*)} |K(z, y_1, y_2) - K(x_0, y_1, y_2)| \\
& \quad \times |f_1(y_1)| |(b_2(y_2) - \lambda_2)f_2(y_2)| d\mu_\kappa(y_1) d\mu_\kappa(y_2) d\mu_\kappa(z) \\
& \lesssim \|b_1\|_{\Lambda_d^{\beta_1}(\mathbb{R}^N)} \frac{1}{\mu_\kappa(B)} \frac{1}{\ell(B)^{\beta_2}} \int_B \int_{\mathcal{O}(B^*)^c} \int_{\mathcal{O}(B^*)} \mu_\kappa(B(x_0, d(x_0, y_2)))^{-2} \left(\frac{\|z - x_0\|}{\|y_2 - x_0\|} \right)^\varepsilon \\
& \quad \times |f_1(y_1)| |(b_2(y_2) - \lambda_2)f_2(y_2)| d\mu_\kappa(y_1) d\mu_\kappa(y_2) d\mu_\kappa(z) \\
& \lesssim \|b_1\|_{\Lambda_d^{\beta_1}(\mathbb{R}^N)} \frac{1}{\ell(B)^{\beta_2}} \sum_{\sigma_{n_1}, \sigma_{n_2} \in G} M^\kappa(f_1 \circ \sigma_{n_1})(x) \\
& \quad \times \sum_{k=0}^{\infty} \int_B \int_{2^{k \cdot 5r} \leq \|\sigma_{n_2}(x) - y_2\| \leq 2^{k+1 \cdot 5r}} \frac{|(b_2(y_2) - b_{2,k} + b_{2,k} - \lambda_2)f_2(y_2)|}{\mu_\kappa(B(\sigma_{n_2}(z), d(z, y_2)))^2} d\mu_\kappa(y_2) d\mu_\kappa(z) \\
& \lesssim \|b_1\|_{\Lambda_d^{\beta_1}(\mathbb{R}^N)} \|b_2\|_{\Lambda_d^{\beta_2}(\mathbb{R}^N)} \sum_{\sigma_{n_1}, \sigma_{n_2} \in G} M^\kappa(f_1 \circ \sigma_{n_1})(x) M^\kappa(f_2 \circ \sigma_{n_2})(x) \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(N-\beta_2)} \\
& \lesssim \|b_1\|_{\Lambda_d^{\beta_1}(\mathbb{R}^N)} \|b_2\|_{\Lambda_d^{\beta_2}(\mathbb{R}^N)} \sum_{\sigma_{n_1}, \sigma_{n_2} \in G} M^\kappa(f_1 \circ \sigma_{n_1})(x) M^\kappa(f_2 \circ \sigma_{n_2})(x),
\end{aligned}$$

其中

$$b_{2,k} = \frac{1}{\mu_\kappa(B(\sigma_{n_2}(x), 2^{k+1} \cdot 5r))} \int_{B(\sigma_{n_2}(x), 2^{k+1} \cdot 5r)} b_2(x) d\mu_\kappa(x), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3.3)$$

并且在倒数第二个不等式的推导中, 对于所有 $y_2 \in \mathcal{O}(2^{k+1}B^*) \setminus \mathcal{O}(2^k B^*)$, 依据以下事实:

$$|b_2(y_2) - \lambda_2| \leq |b(y_2) - b_{2,k}| + |b_{2,k} - \lambda_2| \lesssim \|b_2\|_{\Lambda_d^{\beta_2}(\mathbb{R}^N)} d(y_2, x_0)^{\beta_2}. \quad (3.4)$$

类似地, 有

$$\Pi_3 \lesssim \|b_1\|_{\Lambda_d^{\beta_1}(\mathbb{R}^N)} \|b_2\|_{\Lambda_d^{\beta_2}(\mathbb{R}^N)} \sum_{\sigma_{n_1}, \sigma_{n_2} \in G} M^\kappa(f_1 \circ \sigma_{n_1})(x) M^\kappa(f_2 \circ \sigma_{n_2})(x).$$

当 $z \in B$ 且对所有 $i = 1, 2$ 与任意 $k \in \mathbb{N}$, 当 $y_i \in \mathcal{O}(2^{k+1}B^*) \setminus \mathcal{O}(2^k B^*)$ 时, 有 $\|z - y_i\| \gtrsim 2^k r$ 以及 $B(z, d(z, y_i)) \approx B(x_0, d(z, y_i))$. 由 (3.4) 可得

$$\begin{aligned}
 \text{II}_4 &\lesssim \|b_1\|_{\Lambda_d^{\beta_1}(\mathbb{R}^N)} \frac{1}{\ell(B)^{\beta_2}} \frac{1}{\mu_\kappa(B)} \\
 &\quad \times \int_B \int_{\mathbb{R}^N \setminus \mathcal{O}(B^*)} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \mathcal{O}(B^*)} |K(z, y_1, y_2) - K(x, y_1, y_2)| |f_1(y_1)| \\
 &\quad \times |(b_2(y_2) - \lambda_2) f_2(y_2)| d\mu_\kappa(y_2) d\mu_\kappa(y_1) d\mu_\kappa(z) \\
 &\lesssim \|b_1\|_{\Lambda_d^{\beta_1}(\mathbb{R}^N)} \frac{1}{\ell(B)^{\beta_2}} \frac{1}{\mu_\kappa(B)} \\
 &\quad \times \int_B \int_{\mathbb{R}^N \setminus \mathcal{O}(B^*)} \left(\frac{\|z - x_0\|}{\|x_0 - y_1\|} \right)^{\varepsilon_1} \frac{1}{\mu_\kappa(B(z, d(z, y_1)))} |f_1(y_1)| d\mu_\kappa(y_1) \\
 &\quad \times \int_{\mathbb{R}^N \setminus \mathcal{O}(B^*)} \left(\frac{\|z - x_0\|}{\|x_0 - y_2\|} \right)^{\varepsilon_2} \frac{1}{\mu_\kappa(B(z, d(z, y_2)))} |(b_2(y_2) - \lambda_2) f_2(y_2)| d\mu_\kappa(y_2) d\mu_\kappa(z) \\
 &\lesssim \|b_1\|_{\Lambda_d^{\beta_1}(\mathbb{R}^N)} \|b_2\|_{\Lambda_d^{\beta_2}(\mathbb{R}^N)} \frac{1}{\mu_\kappa(B)} \\
 &\quad \times \int_B \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{-k\varepsilon_1}}{\mu_\kappa(B(x_0, 2^k \cdot 5r))} \int_{\mathcal{O}(2^{k+1}B^*) \setminus \mathcal{O}(2^k B^*)} |f_1(y_1)| d\mu_\kappa(y_1) \\
 &\quad \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{-k(\varepsilon_2 - \beta_2)}}{\mu_\kappa(B(x_0, 2^k \cdot 5r))} \int_{\mathcal{O}(2^{k+1}B^*) \setminus \mathcal{O}(2^k B^*)} |f_2(y_2)| d\mu_\kappa(y_2) d\mu_\kappa(z) \\
 &\lesssim \|b_1\|_{\Lambda_d^{\beta_1}(\mathbb{R}^N)} \|b_2\|_{\Lambda_d^{\beta_2}(\mathbb{R}^N)} \sum_{\sigma_{n_1}, \sigma_{n_2} \in G} M^\kappa(f_1 \circ \sigma_{n_1})(x) M^\kappa(f_2 \circ \sigma_{n_2})(x),
 \end{aligned}$$

其中 $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ 和 $\beta_2 < \varepsilon_2$.

结合 II₁–II₄ 的估计, 可知

$$\begin{aligned}
 \text{II} &\lesssim \|b_1\|_{\Lambda_d^{\beta_1}(\mathbb{R}^N)} \|b_2\|_{\Lambda_d^{\beta_2}(\mathbb{R}^N)} \\
 &\quad \times \left(M_r^\kappa(T(f_1, f_2))(x) + \sum_{\sigma_{n_1}, \sigma_{n_2} \in G} M_{q_1}^\kappa(f_1 \circ \sigma_{n_1})(x) M_{q_2}^\kappa(f_2 \circ \sigma_{n_2})(x) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{\sigma_{n_1}, \sigma_{n_2} \in G} M^\kappa(f_1 \circ \sigma_{n_1})(x) M^\kappa(f_2 \circ \sigma_{n_2})(x) \right).
 \end{aligned}$$

类似地, 对于 III, 得到与 II 相同的估计.

对于 IV, 类似 II₄ 中的讨论, 可得

$$\begin{aligned}
 \text{IV} &\lesssim \|b_1\|_{\Lambda_d^{\beta_1}(\mathbb{R}^N)} \|b_2\|_{\Lambda_d^{\beta_2}(\mathbb{R}^N)} \left(M_r^\kappa(T(f_1, f_2))(x) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{\sigma_{n_1}, \sigma_{n_2} \in G} M_{q_1}^\kappa(f_1 \circ \sigma_{n_1})(x) M_{q_2}^\kappa(f_2 \circ \sigma_{n_2})(x) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{\sigma_{n_1}, \sigma_{n_2} \in G} M^\kappa(f_1 \circ \sigma_{n_1})(x) M^\kappa(f_2 \circ \sigma_{n_2})(x) \right).
 \end{aligned}$$

因此, 通过 (3.2), Hölder 不等式以及文 [28] 中定理 5.3, 可得

$$\begin{aligned} \|T_b^\Pi(\vec{f})\|_{\dot{F}_{p,D}^{\beta,\infty}(\mathbb{R}^N)} &\approx \left\| \sup_{r>0} \frac{1}{\mu_\kappa(B(\cdot, r))\ell(B(\cdot, r))^\beta} \int_{B(\cdot, r)} |f(y) - f_{B(\cdot, r)}| d\mu_\kappa(y) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &\lesssim \|b_1\|_{\Lambda_d^{\beta_1}(\mathbb{R}^N)} \|b_2\|_{\Lambda_d^{\beta_2}(\mathbb{R}^N)} \left(\|M_r^\kappa(T(f_1, f_2))\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \right. \\ &\quad + \sum_{\sigma_{n_1}, \sigma_{n_2} \in G} \|M_{q_1}^\kappa(f_1 \circ \sigma_{n_1}) M_{q_2}^\kappa(f_2 \circ \sigma_{n_2})\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &\quad \left. + \sum_{\sigma_{n_1}, \sigma_{n_2} \in G} \|M^\kappa(f_1 \circ \sigma_{n_1}) M^\kappa(f_2 \circ \sigma_{n_2})\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \right) \\ &\lesssim \|b_1\|_{\Lambda_d^{\beta_1}(\mathbb{R}^N)} \|b_2\|_{\Lambda_d^{\beta_2}(\mathbb{R}^N)} \|f_1\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^N)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

从而完成了定理 2.3 的证明.

§3.4 定理 2.4 的证明

不失一般性, 以下仅分析 $m = 2$ 的情形, 一般情形可通过形式归纳或递归推理获得, 其论证思路与定理 2.3 相仿.

定理 2.4 的证明 固定 $i = 1, 2$, 取 $b_i \in \Lambda_d^{\beta_i}$, 对任意 $x \in \mathbb{R}^N$, 取球 $B := B(x, r)$ 以及与 B 相关的给定常数 c . 对于 $f_j \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $j = 1, 2$, 断言

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{\mu_\kappa(B)} \int_B \|T_b^\Pi(\vec{f})(z)\|^\delta - |c|^\delta d\mu_\kappa(z) \right)^{1/\delta} \\ &\lesssim \|b_1\|_{\Lambda_d^{\beta_1}(\mathbb{R}^N)} \|b_2\|_{\Lambda_d^{\beta_2}(\mathbb{R}^N)} \left(\sum_{\sigma_{n_1}, \sigma_{n_2} \in G} M_{\varepsilon, \beta_1}^\kappa(f_1 \circ \sigma_{n_1})(x) M_{\varepsilon, \beta_2}^\kappa(f_2 \circ \sigma_{n_2})(x) \right) \\ &\quad + \|b_1\|_{\Lambda_d^{\beta_1}(\mathbb{R}^N)} M_{\varepsilon, \beta_1}^\kappa \circ T_{b_2}^2(f_1, f_2)(x) + \|b_2\|_{\Lambda_d^{\beta_2}(\mathbb{R}^N)} M_{\varepsilon, \beta_2}^\kappa \circ T_{b_1}^1(f_1, f_2)(x). \quad (3.5) \end{aligned}$$

一旦得到 (3.5), 利用分数次极大函数 M_β^κ 从 L^s 到 L^t 的有界性, 其中 $\frac{1}{s} - \frac{1}{t} = \frac{\beta}{N}$, 可得下列所需结论:

$$\begin{aligned} &\|T_b^\Pi(\vec{f})\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \\ &\lesssim \|M_\delta^{\kappa, \#}(T_b^\Pi(\vec{f}))\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \\ &\lesssim \|b_1\|_{\Lambda_d^{\beta_1}(\mathbb{R}^N)} \|b_2\|_{\Lambda_d^{\beta_2}(\mathbb{R}^N)} \\ &\quad \times \left(\sum_{\sigma_{n_1}, \sigma_{n_2} \in G} \|M_{\varepsilon, \beta_1}^\kappa(f_1 \circ \sigma_{n_1})\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^N)} \|M_{\varepsilon, \beta_2}^\kappa(f_2 \circ \sigma_{n_2})\|_{L^{q_2}(\mathbb{R}^N)} + \|M_{\varepsilon, \beta}^\kappa(T(\vec{f}))\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \right) \\ &\quad + \|b_1\|_{\Lambda_d^{\beta_1}(\mathbb{R}^N)} \|M_{\varepsilon, \beta_1}^\kappa \circ T_{b_2}^2(f_1, f_2)\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} + \|b_2\|_{\Lambda_d^{\beta_2}(\mathbb{R}^N)} \|M_{\varepsilon, \beta_2}^\kappa \circ T_{b_1}^1(f_1, f_2)\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \\ &\lesssim \|b_1\|_{\Lambda_d^{\beta_1}(\mathbb{R}^N)} \|b_2\|_{\Lambda_d^{\beta_2}(\mathbb{R}^N)} \|f_1\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^N)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\mathbb{R}^N)} + \|b_1\|_{\Lambda_d^{\beta_1}(\mathbb{R}^N)} \|T_{b_2}^2(f_1, f_2)\|_{L^{r_1}(\mathbb{R}^N)} \\ &\quad + \|b_2\|_{\Lambda_d^{\beta_2}(\mathbb{R}^N)} \|T_{b_1}^1(f_1, f_2)\|_{L^{r_2}(\mathbb{R}^N)} \\ &\lesssim \|b_1\|_{\Lambda_d^{\beta_1}(\mathbb{R}^N)} \|b_2\|_{\Lambda_d^{\beta_2}(\mathbb{R}^N)} \|f_1\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^N)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\mathbb{R}^N)}, \end{aligned}$$

其中最后一个不等式由定理 2.2 及 $\frac{1}{r_1} = \frac{1}{p} - \frac{\beta_2}{N}$ 和 $\frac{1}{r_2} = \frac{1}{p} - \frac{\beta_1}{N}$ 得到. 随后, 定理 2.4 可通过迭代过程及稠密性推广至所有 $f_j \in L^{p_j}(\mathbb{R}^N)$, $j = 1, \dots, m$.

为了证明 (3.5), 给定 $z \in \mathbb{R}^N$ 和常数 $\lambda_i = (b_i)_{\mathcal{O}(B)}$, $i = 1, 2$, 记

$$T_b^\Pi(\vec{f})(z) =: H_1(z) + H_2(z) + H_3(z) + H_4(z),$$

其中 H_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 沿用定理 2.3 证明中的定义. 设给定常数 c (将在后文定义), 则可观察到

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\mu_\kappa(B)} \int_B |T_b^\Pi(\vec{f})(z)|^\delta - |c|^\delta d\mu_\kappa(z) \right)^{1/\delta} \\ & \lesssim \left(\frac{1}{\mu_\kappa(B)} \int_B |H_1(z)|^\delta d\mu_\kappa(z) \right)^{1/\delta} + \left(\frac{1}{\mu_\kappa(B)} \int_B |H_2(z)|^\delta d\mu_\kappa(z) \right)^{1/\delta} \\ & \quad + \left(\frac{1}{\mu_\kappa(B)} \int_B |H_3(z)|^\delta d\mu_\kappa(z) \right)^{1/\delta} + \left(\frac{1}{\mu_\kappa(B)} \int_B |H_4(z) - c|^\delta d\mu_\kappa(z) \right)^{1/\delta} \\ & =: \text{I} + \text{II} + \text{III} + \text{IV}. \end{aligned}$$

对于 I, 由 Hölder 不等式及引理 2.1, 可得

$$\begin{aligned} \text{I} & \leq \frac{1}{\ell(B)^{\beta_1}} \left(\frac{1}{\mu_\kappa(B)} \int_B |b_1(z) - \lambda_1|^{\varepsilon_1} d\mu_\kappa(z) \right)^{1/\varepsilon_1} \\ & \quad \times \frac{1}{\ell(B)^{\beta_2}} \left(\frac{1}{\mu_\kappa(B)} \int_B |b_2(z) - \lambda_2|^{\varepsilon_2} d\mu_\kappa(z) \right)^{1/\varepsilon_2} \\ & \quad \times \ell(B)^\beta \left(\frac{1}{\mu_\kappa(B)} \int_B |T(f_1, f_2)(z)|^\varepsilon d\mu_\kappa(z) \right)^{1/\varepsilon} \\ & \lesssim \|b_1\|_{\Lambda_d^{\beta_1}(\mathbb{R}^N)} \|b_2\|_{\Lambda_d^{\beta_2}(\mathbb{R}^N)} M_{\varepsilon, \beta}^\kappa(T(f_1, f_2))(x), \end{aligned}$$

其中 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 1$ 满足 $\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} = \frac{1}{\delta}$.

下面估计 II. 应用 Hölder 不等式以及文 [28] 中定理 5.3, 可得

$$\begin{aligned} \text{II} & = \left(\frac{1}{\mu_\kappa(B)} \int_B |(b_1(z) - \lambda_1)T(f_1, (b_2 - \lambda_2)f_2)(z)|^\delta d\mu_\kappa(z) \right)^{1/\delta} \\ & \leq \left(\frac{1}{\mu_\kappa(B)} \int_B |b_1(z) - \lambda_1|^s d\mu_\kappa(z) \right)^{1/s} \left(\frac{1}{\mu_\kappa(B)} \int_B |T(f_1, (b_2 - \lambda_2)f_2)(z)|^\varepsilon d\mu_\kappa(z) \right)^{1/\varepsilon} \\ & \leq \|b_1\|_{\Lambda_d^{\beta_1}(\mathbb{R}^N)} M_{\varepsilon, \beta_1}^\kappa \circ T_{b_2}^2(f_1, f_2)(x), \end{aligned}$$

其中 $\frac{1}{s} + \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\delta}$ 和 $s > 1$.

由于 II 和 III 是对称的, 则 III 得到与 II 相同的估计.

最后, 对于 IV, 分解 $f_i = f_i^0 + f_i^\infty$, $i = 1, 2$, 其中 $f_i^0 := f_i \chi_{\mathcal{O}(B^*)}$. 对于任意 $z \in \mathbb{R}^N$, 令

$$U(f, g)(z) := T((b_1 - \lambda_1)f, (b_2 - \lambda_2)g)(z),$$

并取 $c = U(f_1^\infty, f_2^\infty)(x)$, 则

$$\begin{aligned} \text{IV} & \leq \left(\frac{1}{\mu_\kappa(B)} \int_B |U(f_1^0, f_2^0)(z)|^\delta d\mu_\kappa(z) \right)^{1/\delta} + \left(\frac{1}{\mu_\kappa(B)} \int_B |U(f_1^0, f_2^\infty)(z)|^\delta d\mu_\kappa(z) \right)^{1/\delta} \\ & \quad + \left(\frac{1}{\mu_\kappa(B)} \int_B |U(f_1^\infty, f_2^0)(z)|^\delta d\mu_\kappa(z) \right)^{1/\delta} \\ & \quad + \left(\frac{1}{\mu_\kappa(B)} \int_B |U(f_1^\infty, f_2^\infty)(z) - U(f_1^\infty, f_2^\infty)(x)|^\delta d\mu_\kappa(z) \right)^{1/\delta} \\ & =: \text{IV}_1 + \text{IV}_2 + \text{IV}_3 + \text{IV}_4. \end{aligned}$$

应用 Kolmogorov 不等式, 引理 2.1 和 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned} \text{IV}_1 &\lesssim \|T((b_1(\cdot) - \lambda_1)f_1^0, (b_2(\cdot) - \lambda_2)f_2^0)\|_{L^{1/2, \infty}(B, \frac{d\mu_\kappa(x)}{\mu_\kappa(B)})} \\ &\lesssim \frac{1}{\mu_\kappa(B)} \int_{\mathcal{O}(B^*)} |(b_1(z) - \lambda_1)f_1(z)| d\mu_\kappa(z) \frac{1}{\mu_\kappa(B)} \int_{\mathcal{O}(B^*)} |(b_2(z) - \lambda_2)f_2(z)| d\mu_\kappa(z) \\ &\lesssim \|b_1\|_{\Lambda_d^{\beta_1}(\mathbb{R}^N)} \|b_2\|_{\Lambda_d^{\beta_2}(\mathbb{R}^N)} \sum_{\sigma_{n_1}, \sigma_{n_2} \in G} M_{\varepsilon, \beta_1}^\kappa(f_1 \circ \sigma_{n_1})(x) M_{\varepsilon, \beta_2}^\kappa(f_2 \circ \sigma_{n_2})(x). \end{aligned}$$

对于 IV_2 和 IV_3 , 采用类似的方法. 利用 (2.1) 和 (3.4), 可得

$$\begin{aligned} \text{IV}_2 &\lesssim \frac{1}{\mu_\kappa(B)} \int_B \int_{\mathcal{O}(B^*)} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \mathcal{O}(B^*)} \left(\frac{d(z, y_1) + d(z, y_2)}{\|z - y_1\| + \|z - y_2\|} \right)^\varepsilon \\ &\quad \times \frac{|(b_1(y_1) - \lambda_1)f_1(y_1)|(b_2(y_2) - \lambda_2)f_2(y_2)|}{(\mu_\kappa(B(z, d(z, y_1))) + \mu_\kappa(B(z, d(z, y_2))))^2} d\mu_\kappa(y_2) d\mu_\kappa(y_1) d\mu_\kappa(z) \\ &\lesssim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_\kappa(B)} \int_B \int_{\mathcal{O}(B^*)} \int_{2^{k \cdot 5r} \leq d(x, y_2) \leq 2^{k+1 \cdot 5r}} \frac{|(b_1(y_1) - \lambda_1)f_1(y_1)|}{\mu_\kappa(B(z, d(z, y_2)))^2} \\ &\quad \times |(b_2(y_2) - \lambda_2)f_2(y_2)| d\mu_\kappa(y_2) d\mu_\kappa(y_1) d\mu_\kappa(z) \\ &\lesssim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\sigma_{n_1}, \sigma_{n_2} \in G} \|b_1\|_{\Lambda_d^{\beta_1}(\mathbb{R}^N)} M_{\varepsilon, \beta_1}^\kappa(f_1 \circ \sigma_{n_1})(x) \\ &\quad \times \int_B \int_{2^{k \cdot 5r} \leq \| \sigma_{n_2}(x) - y_2 \| \leq 2^{k+1 \cdot 5r}} \frac{|(b_2(y_2) - b_{2,k} + b_{2,k} - \lambda_2)f_2(y_2)|}{\mu_\kappa(B(\sigma_{n_2}(z), d(z, y_2)))^2} d\mu_\kappa(y_2) d\mu_\kappa(z) \\ &\lesssim \|b_1\|_{\Lambda_d^{\beta_1}(\mathbb{R}^N)} \|b_2\|_{\Lambda_d^{\beta_2}(\mathbb{R}^N)} \sum_{\sigma_{n_1}, \sigma_{n_2} \in G} M_{\varepsilon, \beta_1}^\kappa(f_1 \circ \sigma_{n_1})(x) M_{\varepsilon, \beta_2}^\kappa(f_2 \circ \sigma_{n_2})(x) \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-kN} k \\ &\lesssim \|b_1\|_{\Lambda_d^{\beta_1}(\mathbb{R}^N)} \|b_2\|_{\Lambda_d^{\beta_2}(\mathbb{R}^N)} \sum_{\sigma_{n_1}, \sigma_{n_2} \in G} M_{\varepsilon, \beta_1}^\kappa(f_1 \circ \sigma_{n_1})(x) M_{\varepsilon, \beta_2}^\kappa(f_2 \circ \sigma_{n_2})(x), \end{aligned}$$

其中 $b_{2,k}$ 是定义如 (3.3) 的常数.

同样地, 有

$$\text{IV}_3 \lesssim \|b_1\|_{\Lambda_d^{\beta_1}(\mathbb{R}^N)} \|b_2\|_{\Lambda_d^{\beta_2}(\mathbb{R}^N)} \sum_{\sigma_{n_1}, \sigma_{n_2} \in G} M_{\varepsilon, \beta_1}^\kappa(f_1 \circ \sigma_{n_1})(x) M_{\varepsilon, \beta_2}^\kappa(f_2 \circ \sigma_{n_2})(x).$$

对于 IV_4 , 有

$$\begin{aligned} \text{IV}_4 &\lesssim \frac{1}{\mu_\kappa(B)} \int_B \int_{\mathbb{R}^N \setminus \mathcal{O}(B^*)} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \mathcal{O}(B^*)} |K(z, y_1, y_2) - K(x, y_1, y_2)| |(b_1(y_1) - \lambda_1)f_1(y_1)| \\ &\quad \times |(b_2(y_2) - \lambda_2)f_2(y_2)| d\mu_\kappa(y_2) d\mu_\kappa(y_1) d\mu_\kappa(z) \\ &\lesssim \frac{1}{\mu_\kappa(B)} \int_B \int_{\mathbb{R}^N \setminus \mathcal{O}(B^*)} \left(\frac{\|z - x\|}{\|x - y_1\|} \right)^{\varepsilon_1} \frac{1}{\mu_\kappa(B(z, d(z, y_1)))} |(b_1(y_1) - \lambda_1)f_1(y_1)| d\mu_\kappa(y_1) \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^N \setminus \mathcal{O}(B^*)} \left(\frac{\|z - x\|}{\|x - y_2\|} \right)^{\varepsilon_2} \frac{1}{\mu_\kappa(B(z, d(z, y_2)))} |(b_2(y_2) - \lambda_2)f_2(y_2)| d\mu_\kappa(y_2) d\mu_\kappa(z) \\ &\lesssim \frac{1}{\mu_\kappa(B)} \int_B \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{-k\varepsilon_2}}{\mu_\kappa(B(x, 2^k \cdot 5r))} \int_{\mathcal{O}(2^{k+1}B^*) \setminus \mathcal{O}(2^k B^*)} |(b_1(y_1) - \lambda_1)f_1(y_1)| d\mu_\kappa(y_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{-k\varepsilon_2}}{\mu_{\kappa}(B(x, 2^k \cdot 5r))} \int_{\mathcal{O}(2^{k+1}B^*) \setminus \mathcal{O}(2^k B^*)} |(b_2(y_2) - \lambda_2)f_2(y_2)| d\mu_{\kappa}(y_2) d\mu_{\kappa}(z) \\ & \lesssim \|b_1\|_{\Lambda_d^{\beta_1}(\mathbb{R}^N)} \|b_2\|_{\Lambda_d^{\beta_2}(\mathbb{R}^N)} \sum_{\sigma_{n_1}, \sigma_{n_2} \in G} M_{\varepsilon, \beta_1}^{\kappa}(f_1 \circ \sigma_{n_1})(x) M_{\varepsilon, \beta_2}^{\kappa}(f_2 \circ \sigma_{n_2})(x). \end{aligned}$$

至此, 定理 2.4 的证明完成.

致谢 作者谨向各位评审专家提出的宝贵意见和建议表示诚挚的谢意.

参 考 文 献

- [1] Coifman R R, Rochberg R, Weiss G. Factorization theorems for Hardy spaces in several variables [J]. *Ann of Math* (2), 1976, 103(3):611–635.
- [2] Janson S. Mean oscillation and commutators of singular integral operators [J]. *Ark Mat*, 1978, 16(2):263–270.
- [3] Paluszynski M. Characterization of the Besov spaces via the commutator operator of Coifman, Rochberg and Weiss [J]. *Indiana Univ Math J*, 1995, 44(1):1–17.
- [4] Pérez C, Torres R H. Sharp maximal function estimates for multilinear singular integrals [C]// Beckner W, Nagel A, Seeger A, Smith H F eds. *Harmonic analysis at Mount Holyoke*, Providence, RI: Amer Math Soc, 2003:323–331.
- [5] Wang W, Xu J S. Commutators of multilinear singular integrals with Lipschitz functions [J]. *Commun Math Res*, 2009, 25(4):318–328.
- [6] Pérez C, Pradolini G, Torres R H, Trujillo-González R. End-point estimates for iterated commutators of multilinear singular integrals [J]. *Bull Lond Math Soc*, 2014, 46(1):26–42.
- [7] Lu G, Zhang P. Multilinear Calderón-Zygmund operators with kernels of Dini's type and applications [J]. *Nonlinear Anal*, 2014, 107:92–117.
- [8] Sun J, Zhang P. Commutators of multilinear Calderón-Zygmund operators with Dini type kernels on some function spaces [J]. *J Nonlinear Sci Appl*, 2017, 10(9):5002–5019.
- [9] Zhang J, Liu Z. Characterizations of Lipschitz space via commutators of some bilinear integral operators [J]. *Ann Funct Anal*, 2017, 8(3):291–302.
- [10] Tan J, Liu Z, Zhao J. On some multilinear commutators in variable Lebesgue spaces [J]. *J Math Inequal*, 2017, 11(3):715–734.
- [11] Pradolini G G, Ramos W A. Characterization of Lipschitz functions via the commutators of singular and fractional integral operators in variable Lebesgue spaces [J]. *Potential Anal*, 2017, 46(3):499–525.
- [12] Wu J, Zhang P. Characterization of Lipschitz functions via commutators of multilinear singular integral operators in variable Lebesgue spaces [J]. *Acta Math Sin (Engl Ser)*, 2023, 39(12):2465–2488.

- [13] Dunkl C. Differential-difference operators associated to reflection groups [J]. *Trans Amer Math Soc*, 1989, 311(1):167–183.
- [14] Dunkl C. Reflection groups and orthogonal polynomials on the sphere [J]. *Math Z*, 1988, 197(1):33–60.
- [15] Dunkl C. Hankel transforms associated to finite reflection groups [C]// Richards D St P (ed). *Hypergeometric functions on domains of positivity, Jack polynomials, and applications*, Providence, RI: Amer Math Soc, 1992:123–138.
- [16] De Jeu M F E. The Dunkl transform [J]. *Invent Math*, 1993, 113(1):147–162.
- [17] Rösler M. Dunkl operators: Theory and applications [C]// Koelink E, Van Assche W (eds). *Orthogonal polynomials and special functions*, Berlin: Springer-Verlag, 2003:93–135.
- [18] Rösler M, Voit M. Markov processes related with Dunkl operators [J]. *Adv in Appl Math*, 1998, 21(4):575–643.
- [19] Rösler M. Positivity of Dunkl’s intertwining operator [J]. *Duke Math J*, 1999, 98(3):445–463.
- [20] Thangavelu S, Xu Y. Convolution operator and maximal function for the Dunkl transform [J]. *J Anal Math*, 2005, 97:25–55.
- [21] Thangavelu S, Xu Y. Riesz transform and Riesz potentials for Dunkl transform [J]. *J Comput Appl Math*, 2007, 199(1):181–195.
- [22] Guliyev V, Mammadov Y, Muslumova F. Boundedness characterization of maximal commutators on Orlicz spaces in the Dunkl setting [J]. *J Math Study*, 2020, 53(1):45–65.
- [23] Guliyev V, Mammadov Y, Muslumova F. Characterization of fractional maximal operator and its commutators on Orlicz spaces in the Dunkl setting [J]. *J Pseudo-Differ Oper Appl*, 2020, 11(4):1699–1717.
- [24] Han Y, Lee M Y, Li J, Wick B D. Riesz transform and commutators in the dunkl setting [J]. *Anal Math Phys*, 2024, 14(3):Paper Number 46.
- [25] Dziubański J, Hejna A. A note on commutators of singular integrals with BMO and VMO functions in the Dunkl setting [J]. *Math Nachr*, 2024, 297(2):629–643.
- [26] Han Y, Lee M Y, Li J, Wick B D. Lipschitz and Triebel-Lizorkin spaces, commutators in Dunkl setting [J]. *Nonlinear Anal*, 2023, 237:Paper Number 113365.
- [27] Mukherjee S, Parui S. Weighted inequalities for multilinear fractional operators in Dunkl setting [J]. *J Pseudo-Differ Oper Appl*, 2022, 13(3):Paper Number 34.
- [28] Mukherjee S, Parui S. Weighted bilinear multiplier theorems in dunkl setting via singular integrals [J]. *Forum Math*, 2025, 37(2):663–692.
- [29] Coifman R R, Weiss G. *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes* [M]. Berlin, New York: Springer-Verlag, 1971.

- [30] Coifman R R, Weiss G. Extensions of Hardy spaces and their use in analysis [J]. *Bull Amer Math Soc*, 1977, 83(4):569–645.
- [31] Grafakos L, Liu L, Maldonado D, Yang D. Multilinear analysis on metric spaces [J]. *Dissertationes Math*, 2014, 497:121 pp.
- [32] Lerner A K, Ombrosi S, Pérez C, et al. New maximal functions and multiple weights for the multilinear Calderón-Zygmund theory [J]. *Adv Math*, 2009, 220(4):1222–1264.
- [33] Grafakos L. Modern Fourier analysis [M], New York: Springer-Verlage, 2014.

Boundedness of Commutators of Multilinear Singular Integrals in the Dunkl Setting

WANG Yan¹ LIU Zongguang¹ YU Xia²

¹School of Science, China University of Mining and Technology, Beijing 100083, China. E-mail: wangyan0726@yeah.net; liuzg@cumtb.edu.cn

²Corresponding author. School of Mathematics and Information Sciences, Yantai University, Yantai 264005, Shandong, China. E-mail: yxia07@163.com

Abstract In this paper, the authors study the boundedness of two classes of multilinear commutators generated by Lipschitz functions and singular integral operators in the Dunkl setting. First, the authors prove the boundedness of the commutators from the product weighted Lebesgue space $L^{p_1}(\mathbb{R}^N, d\mu_{\kappa}) \times \cdots \times L^{p_m}(\mathbb{R}^N, d\mu_{\kappa})$ to Dunkl-type Triebel-Lizorkin space $\dot{F}_{p,D}^{\beta,\infty}(\mathbb{R}^N)$. Furthermore, by introducing sharp maximal function estimates, the authors establish the boundedness of the commutators from the same product space to weighted Lebesgue spaces $L^q(\mathbb{R}^N, d\mu_{\kappa})$.

Keywords Dunkl setting, Lipschitz space, Commutator

2020 MR Subject Classification 42B20, 47B34, 47B47, 47G10

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 46 No. 3, 2025

by ALLERTON PRESS, INC., USA