数 学 年 刊 A 辑
2025, 46(3):265–280
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2025.0016

五角投影格代数上 Lie n-导子的标准型*

安广宇[1] 苏 栋[2] 秦飞浪[2]

提要 假设 $\mathcal{H}$ 是无限维 Hilbert 空间, $\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{H}$ 上的五角投影格, $\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$ 是对应的五角投影格代数, 作者证明了 $\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$ 到 $B(\mathcal{H})$ 的每个 Lie n-导子都是标准的, 并且给出了一个关于 Kadison-Singer 代数的应用.

关键词 五角投影格代数, Lie n-导子, 标准型
MR (2020) 主题分类 47B47, 47L75, 47A15, 17B40
中图法分类 O177.1
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2025)03-0265-16

§1 引 言

假设 $\mathcal{A}$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的结合代数, $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{A}$-双边模. 对于任意的 $A, B \in \mathcal{A}$ 或者 $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{M}$, 记 $[A,B] = AB - BA$. 令 $\mathcal{Z}(\mathcal{M},\mathcal{A}) = \{M \in \mathcal{M} : 对于任意的A \in \mathcal{A}\ 有MA = AM\}$.

假设 δ 是 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{M}$ 的线性映射, 如果对于任意的 $A, B \in \mathcal{A}$, 有 $\delta(AB) = \delta(A)B + A\delta(B)$, 则称 δ 是导子. 在 [1] 中, Abdullaev 给出了 Lie n-导子的概念. 令 $n \geqslant 2$, 如果对于任意的 $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{A}$, 有

$$\delta(P_n(A_1, A_2, \cdots, A_n)) = \sum_{i=1}^{n} P_n(A_1, \cdots, A_{i-1}, \delta(A_i), A_{i+1}, \cdots, A_n),$$

其中 $P_n(A_1, A_2, \cdots, A_n) = [P_{n-1}(A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}), A_n]$, $P_2(A_1, A_2) = [A_1, A_2]$, 则称 δ 是 Lie n-导子. 根据定义可知每个 Lie n-导子必定是 Lie $(n+1)$-导子, Lie 2-导子和 Lie 3-导子一般分别称作 Lie 导子和 Lie 三重导子.

显然导子一定是 Lie n-导子, 然而反之一般不成立. 如果 Lie n-导子 δ 可以被分解为 $\delta = d + \tau$, 其中 d 是 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{M}$ 的导子, τ 是 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{Z}(\mathcal{M},\mathcal{A})$ 的线性映射, 同时满足对于任意的 $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{A}$, 有 $\tau(P_n(A_1, A_2, \cdots, A_n)) = 0$, 则称 Lie n-导子 δ 是标准的.

设 $\mathcal{H}$ 是 Hilbert 空间, $B(\mathcal{H})$ 和 $\mathcal{P}(B(\mathcal{H}))$ 分别表示 $\mathcal{H}$ 上的全体有界线性算子和全体投影构成的集合. 方便起见, 本文对 $\mathcal{H}$ 上的投影和其对应的值域空间不作区分. 令 $\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{H}$ 上的一族投影构成的集合, 满足以下两个条件:

(1) $0, I \in \mathcal{L}$;

(2) 对 $\mathcal{L}$ 中的任意一族投影 $\{P_\gamma\}$, 有 $\wedge P_\gamma$ 和 $\vee P_\gamma$ 均属于 $\mathcal{L}$,

则称 $\mathcal{L}$ 是投影格.

对于 $B(\mathcal{H})$ 的子代数 $\mathcal{A}$, 用

$$\mathrm{Lat}\,\mathcal{A} = \{P \in \mathcal{P}(B(\mathcal{H})) : 对于任意的A \in \mathcal{A},\ 有(I-P)AP = 0\}$$

本文 2024 年 11 月 23 日收到, 2025 年 5 月 21 日收到修改稿.
[1]通信作者. 陕西科技大学数学系, 西安 710021. E-mail: anguangyu310@163.com
[2]陕西科技大学数学系, 西安 710021. E-mail: 1461638919@qq.com; 231711043@sust.edu.cn
*本文受到陕西省自然科学基础研究计划项目 (No. 2023-JC-YB-043) 的资助.

表示 $\mathcal{A}$ 对应的投影格; 对于 $\mathcal{H}$ 上的投影格 $\mathcal{L}$, 用

$$\operatorname{Alg}\mathcal{L}=\{A\in B(\mathcal{H}):\text{对于任意的 } P\in\mathcal{L},\ \text{有}(I-P)AP=0\}$$

表示 $\mathcal{L}$ 对应的投影格代数. 如果 $\mathcal{L}=\operatorname{Lat}(\operatorname{Alg}\mathcal{L})$, 则称 $\mathcal{L}$ 为自反投影格; 如果 $\mathcal{A}=\operatorname{Alg}(\operatorname{Lat}\mathcal{A})$, 则称 $\mathcal{A}$ 为自反投影格代数. 如果 $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{H}$ 上的全序投影格, 则称 $\mathcal{N}$ 是套, 对应的 $\operatorname{Alg}\mathcal{N}$ 称作套代数. 令 $K,L,M\in\mathcal{P}(B(\mathcal{H}))$, 如果投影格 $\mathcal{L}=\{0,M,L,K,I\}$ 满足 $M\subsetneq L$, $K\wedge L=0$ 以及 $K\vee M=I$, 则称 $\mathcal{L}$ 是五角投影格, 对应的 $\operatorname{Alg}\mathcal{L}$ 称作五角投影格代数. 需要注意的是五角投影格只能在无限维空间上实现.

对于 Lie 导子, 在 [2] 中, Miers 证明了 von Neumann 代数上的 Lie 导子都是标准的; 在 [3] 中, 陆芳言等证明了套代数上的 Lie 导子都是标准的. 对于 Lie 三重导子, 在 [4] 中, Miers 证明了型分解中不含交换部分的 von Neumann 代数上的 Lie 三重导子都是标准的; 在 [5] 中, 孙善利等证明了套代数上的 Lie 三重导子都是标准的. 对于 Lie n-导子, 在 [6] 中, Fošner 证明了型分解中不含交换部分的 von Neumann 代数上的 Lie n-导子都是标准的; 在 [7] 中, 魏丰等证明了套代数上的 Lie n-导子都是标准的; 在 [8] 中, 齐霄霏对一类自反代数上的 Lie n-导子的标准性进行了刻画.

本文第 2 节介绍了一些预备知识; 第 3 节证明了无限维 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的五角投影格代数到 $B(\mathcal{H})$ 的 Lie n-导子都是标准的.

§2 预备知识

令 x 和 f 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 中的两个非零向量, 方便起见, 记 $f(x)=\langle x,f\rangle$, 定义秩一算子 $x\otimes f$, 满足对于任意的 $z\in\mathcal{H}$, 有 $(x\otimes f)(z)=f(z)x$. 关于秩一算子, 以下命题成立.

命题 2.1 假设 $\mathcal{H}$ 是 Hilbert 空间, 对于任意的 $x,y,f,g\in\mathcal{H}$, $A\in B(\mathcal{H})$ 和 $\lambda\in\mathbb{C}$, 有
(i) $(x\otimes f)A=x\otimes(A^*f)$ 和 $A(x\otimes f)=(Ax)\otimes f$;
(ii) $(x\otimes f)(y\otimes g)=f(y)(x\otimes g)$;
(iii) $\lambda(x\otimes f)=(\lambda x)\otimes f=x\otimes(\bar{\lambda}f)$.

假设 $\mathcal{L}$ 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的投影格, $E\in\mathcal{L}$, 定义 $E_-=\vee\{F\in\mathcal{L}:E\nsubseteq F\}(0_-=0)$, 令

$$\mathcal{J}(\mathcal{L})=\{E\in\mathcal{L}:E\neq 0\ \text{并且}\ E_-\neq I\},$$

秩一算子 $x\otimes f\in\operatorname{Alg}\mathcal{L}$ 当且仅当存在 $E\in\mathcal{J}(\mathcal{L})$, 满足 $x\in E$ 并且 $f\in E_-^\perp$.

令 $E\in\mathcal{P}(B(\mathcal{H}))$, $f_1,f_2\in\mathcal{H}$. 如果 f_1 和 f_2 线性无关, 并且两个子空间 $f_1^\perp\cap E$ 和 $f_2^\perp\cap E$ 互不包含, 则称 f_1 和 f_2 在 E 上满足条件 $\mathbb{D}$.

引理 2.1 (见 [9, 引理3.3]) 假设 $\mathcal{H}$ 是 Hilbert 空间, $M,N,E\in\mathcal{P}(B(\mathcal{H}))$, 满足对于任意的 $0\neq f\in N$, 有 $E\nsubseteq f^\perp$, 并且 N 中任意的两个线性无关的元素 f_1 和 f_2 在 E 上均满足条件 $\mathbb{D}$. 令 $\Phi:M\times N\to B(\mathcal{H})$ 是共轭双线性映射, 满足对于任意的 $x\in M$ 和 $f\in N$, 有

$$\Phi(x,f)(f^\perp\cap E)\subseteq\mathbb{C}x,$$

则存在线性映射 $T:M\to\mathcal{H}$ 以及映射 $S:N\to\mathcal{H}$, 满足对于任意的 $x\in M$ 和 $f\in N$, 有

$$\Phi(x,f)|_E=(Tx\otimes f+x\otimes Sf)|_E.$$

进一步, S 满足对于任意的 $z\in E$, $f_1,f_2\in N$ 和 $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$, 有

$$(S(\lambda_1f_1+\lambda_2f_2))(z)=(\lambda_1Sf_1+\lambda_2Sf_2)(z).$$

§3 五角投影格代数上的 Lie n-导子

定义 3.1 假设 $\mathcal{L}$ 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的投影格, $E \in \mathcal{L}$, $\delta : \mathrm{Alg}\,\mathcal{L} \to B(\mathcal{H})$ 是 Lie n-导子. 如果对于任意的 $A \in \mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$, 有

$$\delta(A)|_E = (d(A) + \tau(A))|_E,$$

其中 $d : \mathrm{Alg}\,\mathcal{L} \to B(\mathcal{H})$ 是线性映射, 满足对于任意的 $A, B \in \mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$, 有

$$d(AB)|_E = (d(A)B + Ad(B))|_E,$$

$\tau : \mathrm{Alg}\,\mathcal{L} \to B(\mathcal{H})$ 是线性映射, 满足对于任意的 $A, B \in \mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$, 有

$$\tau(A)B|_E = B\tau(A)|_E,$$

以及对于任意的 $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$, 有

$$\tau(P_n(A_1, A_2, \cdots, A_n))|_E = 0,$$

则称 δ 在 E 上是标准的.

定理 3.1 假设 $\mathcal{L}$ 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的投影格, $F_1, F_2 \in \mathcal{L}$ 满足 $F_1 \vee F_2 = I$ 和 $F_1 \wedge F_2 = 0$. 令 $\delta : \mathrm{Alg}\,\mathcal{L} \to B(\mathcal{H})$ 是 Lie n-导子, 如果 δ 在 F_1 和 F_2 上均是标准的, 则 δ 是标准的.

证 因为 δ 在 F_i 上是标准的, 所以存在 $\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$ 到 $B(\mathcal{H})$ 的线性映射 d_i 和 τ_i, 满足定义 3.1 中的条件, 其中 $i = 1, 2$.

由于 $F_1 \vee F_2 = I$, $F_1 \wedge F_2 = 0$, 从而对于任意的 $x \in \mathcal{H}$, 存在唯一的元素 $x_1 \in F_1$ 和 $x_2 \in F_2$, 使得 $x = x_1 + x_2$. 对于任意的 $A \in \mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$, 通过

$$d(A)x = d_1(A)x_1 + d_2(A)x_2 \quad 和 \quad \tau(A)x = \tau_1(A)x_1 + \tau_2(A)x_2$$

定义两个映射 $d : \mathrm{Alg}\,\mathcal{L} \to B(\mathcal{H})$ 和 $\tau : \mathrm{Alg}\,\mathcal{L} \to B(\mathcal{H})$. 容易验证 d 和 τ 是定义无歧义的线性映射, 并且满足对于任意的 $A \in \mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$ 和 $x \in \mathcal{H}$, 有

$$\delta(A)x = \delta(A)x_1 + \delta(A)x_2 = (d_1(A) + \tau_1(A))x_1 + (d_2(A) + \tau_2(A))x_2 = (d(A) + \tau(A))x,$$

由此可知 $\delta = d + \tau$.

假设 $A, B \in \mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$, $x = x_1 + x_2 \in \mathcal{H}$, 其中 $x_1 \in F_1$, $x_2 \in F_2$, 通过投影格代数的定义可知 $Bx_i \in F_i$. 首先由

$$\begin{aligned} d(AB)x &= d_1(AB)x_1 + d_2(AB)x_2 \\ &= (d_1(A)B + Ad_1(B))x_1 + (d_2(A)B + Ad_2(B))x_2 \\ &= (d_1(A)Bx_1 + d_2(A)Bx_2) + (Ad_1(B)x_1 + Ad_2(B)x_2) \\ &= (d(A)B + Ad(B))x \end{aligned}$$

可知 d 是导子; 其次由

$$\tau(P_n(A_1, \cdots, A_n))x = \tau_1(P_n(A_1, \cdots, A_n))x_1 + \tau_2(P_n(A_1, \cdots, A_n))x_2 = 0$$

可知 $\tau(P_n(A_1, \cdots, A_n)) = 0$; 最后由

$$\begin{aligned} \tau(P_n(A_1, \cdots, A_n))Bx &= \tau(P_n(A_1, \cdots, A_n))(Bx_1 + Bx_2) \\ &= \tau_1(P_n(A_1, \cdots, A_n))Bx_1 + \tau_2(P_n(A_1, \cdots, A_n))Bx_2 \\ &= B\tau_1(P_n(A_1, \cdots, A_n))x_1 + B\tau_2(P_n(A_1, \cdots, A_n))x_2 \end{aligned}$$

$$= B\tau(P_n(A_1, \cdots, A_n))x$$

可知 $\tau(P_n(A_1,\cdots,A_n)) \in \mathcal{Z}(B(\mathcal{H}), \mathrm{Alg}\,\mathcal{L})$. 综上可得 δ 是标准的 Lie n-导子.

定理 3.2 假设 $\mathcal{H}$ 是无限维 Hilbert 空间, $\mathcal{L} = \{0, M, L, K, I\}$ 是 $\mathcal{H}$ 上的五角投影格, 满足 $M \subsetneq L, K \wedge L = 0$ 和 $K \vee M = I$. 如果 $\delta : \mathrm{Alg}\,\mathcal{L} \to B(\mathcal{H})$ 是 Lie n-导子, 则 δ 是标准的.

证 方便起见, 对于任意的 $A_1, \cdots, A_n \in \mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$, 记

$$g(P_n(A_1, A_2, \cdots, A_n))_j = P_n(A_1, \cdots, A_{j-1}, \delta(A_j), A_{j+1}, \cdots, A_n),$$

其中 $j = 1, 2, \cdots, n$.

由于 $M \subsetneq L$, $K \wedge L = 0$, 所以 $K \wedge M = 0$. 结合 $K \vee M = I$ 以及定理 3.1, 只需说明 δ 分别在 K 和 M 上均是标准的即可. 接下来仅证明 δ 在 K 上是标准的, 采用相同的方法也可以验证 δ 在 M 上是标准的.

构造泛函 $\psi : K \times K_-^\perp \to \mathbb{C}$, 满足对于任意的 $x \in K$ 和 $f \in K_-^\perp$, 有

$$\psi(x, f) = \begin{cases} \dfrac{1}{f(x)} f(\delta(x \otimes f)x), & f(x) \neq 0, \\ 0, & f(x) = 0. \end{cases}$$

断言 1 $(\delta(x \otimes f) - \psi(x, f)I)(f^\perp \cap K) \subseteq \mathbb{C}x$.

情形 1.1 $f(x) \neq 0$. 假设 $f(x) = \lambda \neq 0$. 对于任意的 $z \in f^\perp \cap K$, 有

$$\begin{aligned} \delta(P_n(z \otimes f, x \otimes f, \cdots, x \otimes f)) &= P_n(\delta(z \otimes f), x \otimes f, \cdots, x \otimes f) \\ &\quad + \sum_{j=2}^{n} g(P_n(z \otimes f, x \otimes f, \cdots, x \otimes f))_j. \end{aligned}$$

令 $A = \delta(x \otimes f)$, $B = \delta(z \otimes f)$, 当 n 为奇数时, 可以得到

$$\begin{aligned} \lambda^{n-1}B = {} & \lambda^{n-1}Bx \otimes f - 2\lambda^{n-3}f(Bx)(x \otimes f) + \lambda^{n-2}x \otimes B^*f + \lambda^{n-2}z \otimes A^*f \\ & - \lambda^{n-2}Az \otimes f + (n-2)(\lambda^{n-3}f(Ax)(z \otimes f) - \lambda^{n-2}(Az \otimes f) \\ & + \lambda^{n-3}f(Az)(x \otimes f)); \end{aligned} \tag{3.1}$$

当 n 为偶数时, 可以得到

$$\begin{aligned} \lambda^{n-1}B = {} & \lambda^{n-1}Bx \otimes f - \lambda^{n-2}x \otimes B^*f + \lambda^{n-2}z \otimes A^*f - \lambda^{n-2}Az \otimes f \\ & + (n-2)(\lambda^{n-3}f(Ax)(z \otimes f) - \lambda^{n-2}(Az \otimes f) + \lambda^{n-3}f(Az)(x \otimes f)). \end{aligned} \tag{3.2}$$

将等式 (3.1) 和 (3.2) 左右两边同时作用于 x, 可以得到

$$\Big(A - \frac{f(Az)}{\lambda}\Big)z = \Big(\frac{(n-2)f(Az)}{(n-1)\lambda} - \frac{f(Bx)}{(n-1)\lambda}\Big)x,$$

意味着

$$\Big(\delta(x \otimes f) - \frac{1}{f(x)} f(\delta(x \otimes f)x)\Big)z = \Big(\frac{(n-2)f(Az)}{(n-1)\lambda} - \frac{f(Bx)}{(n-1)\lambda}\Big)x.$$

根据 $\psi(x, f)$ 的定义可知, 此时有

$$(\delta(x \otimes f) - \psi(x, f)I)(f^\perp \cap K) \subseteq \mathbb{C}x.$$

情形 1.2 $f(x)=0$, 此时只需验证对于任意的 $z\in f^{\perp}\cap K$, 有 $\delta(x\otimes f)z\subseteq\mathbb{C}x$ 即可. 当 $f=0$ 或 $x=0$ 时, 结果显然成立. 当 $f\neq 0$ 且 $x\neq 0$ 时, 存在元素 $z_f\in K$, 使得 $f(z_f)=1$ 成立. 事实上, 如果对于任意的 $z\in K$, 都有 $f(z)=0$, 则意味着 $f\in K^{\perp}$. 因此

$$f\in(K^{\perp}\wedge K_{-}^{\perp})=(K^{\perp}\wedge L^{\perp})=(K\vee L)^{\perp}=I^{\perp}=0$$

与 $f\neq 0$ 矛盾. 令 $z_{f_1}=z_f+x$, $A=\delta(x\otimes f)$, $B=\delta(z_f\otimes f)$ 并且 $C=\delta(z_{f_1}\otimes f)$. 当 n 为奇数时, 类似于情形 1.1 的论述, 对 $\delta(P_n(x\otimes f,z_f\otimes f,\cdots,z_f\otimes f))$ 和 $\delta(P_n(x\otimes f,z_{f_1}\otimes f,\cdots,z_{f_1}\otimes f))$ 展开计算, 可得

$$\begin{aligned}A=&Az_f\otimes f+z_f\otimes A^*f-2f(Az_f)z_f\otimes f+x\otimes B^*f-(n-1)Bx\otimes f\\&+(n-2)f(Bz_f)x\otimes f+(n-2)f(Bx)z_f\otimes f\end{aligned}\tag{3.3}$$

和

$$\begin{aligned}A=&Az_{f_1}\otimes f+z_{f_1}\otimes A^*f-2f(Az_{f_1})z_{f_1}\otimes f+x\otimes C^*f-(n-1)Cx\otimes f\\&+(n-2)f(Cz_{f_1})x\otimes f+(n-2)f(Cx)z_{f_1}\otimes f,\end{aligned}\tag{3.4}$$

将等式 (3.3) 和 (3.4) 的左右两边同时作用于 $z\in f^{\perp}\cap K$, 可以得到

$$Az=f(Az)z_f+f(Bz)x\tag{3.5}$$

和

$$Az=f(Az)z_{f_1}+f(Cz)x=f(Az)z_f+2f(Az)x+f(Bz)x.\tag{3.6}$$

比较等式 (3.5) 和 (3.6) 可得 $f(Az)x=0$. 又因为 $x\neq 0$, 所以 $f(Az)=f(\delta(x\otimes f)z)=0$. 结合 (3.5) 可知 $Az=f(Bz)x$, 即 $\delta(x\otimes f)z\subseteq\mathbb{C}x$. 当 n 为偶数时, 对 $\delta(P_n(x\otimes f,z_f\otimes f,\cdots,z_f\otimes f))$ 展开计算, 可得

$$\begin{aligned}A=&Az_f\otimes f-z_f\otimes A^*f-2f(Az_f)z_f\otimes f+x\otimes B^*f\\&-(n-1)Bx\otimes f+(n-2)f(Bz_f)x\otimes f+(n-2)f(Bx)z_f\otimes f,\end{aligned}\tag{3.7}$$

将等式 (3.7) 的左右两边同时作用于 $z\in f^{\perp}\cap K$, 可知

$$Az=-f(Az)z_f+f(Bz)x.\tag{3.8}$$

将 f 同时作用在等式 (3.8) 的左右两边, 可得 $f(Az)=-f(Az)=0$. 结合 (3.8) 可知 $Az=f(Bz)x$, 即 $\delta(x\otimes f)z\subseteq\mathbb{C}x$.

断言 2 ψ 是共轭双线性映射. 通过 ψ 的定义容易验证 ψ 关于第一个变量是齐次的, 关于第二个变量是共轭齐次的, 所以只需要说明 ψ 的可加性即可.

情形 2.1 $x_1,x_2\in f^{\perp}$. 由此可得

$$\psi(x_1+x_2,f)=\psi(x_1,f)+\psi(x_2,f)=0.$$

情形 2.2 $x_1\in f^{\perp}$, $x_2\notin f^{\perp}$. 不妨假设 $f(x_2)=1$, 则有 $\psi(x_1,f)=0$ 和 $\psi(x_2,f)=\frac{1}{f(x_2)}f(\delta(x_2\otimes f)x_2)$, 进而可得

$$\begin{aligned}\psi(x_1+x_2,f)&=\frac{1}{f(x_2)}f(\delta((x_1+x_2)\otimes f)(x_1+x_2))\\&=\frac{1}{f(x_2)}(f(\delta(x_1\otimes f)x_1)+f(\delta(x_1\otimes f)x_2)\\&\quad+f(\delta(x_2\otimes f)x_1)+f(\delta(x_2\otimes f)x_2)).\end{aligned}$$

由 $\delta(x_1\otimes f)x_1\subseteq\mathbb{C}x_1$ 可知 $f(\delta(x_1\otimes f)x_1)=0$. 由 $f(x_2)=1$, 可得

$$\delta(x_1\otimes f)=\delta(P_n(x_1\otimes f,x_2\otimes f,\cdots,x_2\otimes f))=\sum_{j=1}^{n}g(P_n(x_1\otimes f,x_2\otimes f,\cdots,x_2\otimes f))_j.$$

当 n 为奇数时, 有

$$\begin{aligned}\delta(x_1\otimes f)=&\ \delta(x_1\otimes f)(x_2\otimes f)+(x_2\otimes f)\delta(x_1\otimes f)-2(x_2\otimes f)\delta(x_1\otimes f)(x_2\otimes f)\\&+(n-2)((x_1\otimes f)\delta(x_2\otimes f)(x_2\otimes f)-\delta(x_2\otimes f)(x_1\otimes f)\\&+(x_2\otimes f)\delta(x_2\otimes f)(x_1\otimes f))+(x_1\otimes f)\delta(x_2\otimes f)-\delta(x_2\otimes f)(x_1\otimes f);\end{aligned}\tag{3.9}$$

当 n 为偶数时, 有

$$\begin{aligned}\delta(x_1\otimes f)=&\ \delta(x_1\otimes f)(x_2\otimes f)-(x_2\otimes f)\delta(x_1\otimes f)\\&+(n-2)((x_1\otimes f)\delta(x_2\otimes f)(x_2\otimes f)-\delta(x_2\otimes f)(x_1\otimes f)\\&+(x_2\otimes f)\delta(x_2\otimes f)(x_1\otimes f))+(x_1\otimes f)\delta(x_2\otimes f)-\delta(x_2\otimes f)(x_1\otimes f).\end{aligned}\tag{3.10}$$

将等式 (3.9) 和 (3.10) 的左右两边同时作用于 x_2, 可以得到

$$(f(\delta(x_1\otimes f)x_2)-(n-2)f(\delta(x_2\otimes f)x_1))x_2=(n-1)f(\delta(x_2\otimes f)x_2)x_1-(n-1)\delta(x_2\otimes f)x_1,$$

将 f 同时作用在上述等式的左右两边可得

$$f(\delta(x_1\otimes f)x_2)=-f(\delta(x_2\otimes f)x_1).$$

因此当 $x_1\in f^{\perp}$ 和 $x_2\notin f^{\perp}$ 时, 有

$$\psi(x_1+x_2,f)=\psi(x_1,f)+\psi(x_2,f).$$

情形 2.3 $x_1,x_2\notin f^{\perp}$. 记 $f(x_1)=\lambda_1\neq 0$ 和 $f(x_2)=\lambda_2\neq 0$, 则有 $\frac{x_1}{\lambda_1}-\frac{x_2}{\lambda_2}\in f^{\perp}$, 此时根据情形 2.2, 可以得到

$$\psi\Big(\frac{x_1}{\lambda_1}-\frac{x_2}{\lambda_2},f\Big)+\psi\Big(\frac{x_1}{\lambda_2}+\frac{x_2}{\lambda_2},f\Big)=\psi\Big(\frac{x_1}{\lambda_1}+\frac{x_1}{\lambda_2},f\Big)$$

和

$$\psi\Big(\frac{x_1}{\lambda_1}-\frac{x_2}{\lambda_2},f\Big)+\psi\Big(\frac{x_2}{\lambda_2},f\Big)=\psi\Big(\frac{x_1}{\lambda_1},f\Big).$$

将上述两个等式相减, 并且两边同时乘以 λ_2, 可得

$$\psi(x_1+x_2,f)=\psi(x_1,f)+\psi(x_2,f).$$

通过相同的方式可知 ψ 关于第二个变量上也是可加的.

下面说明 $K_{-}^{\perp}$ 中的任意两个非零元素 f_1 和 f_2 在 K 上均满足条件 $\mathbb{D}$, 并且对于任意的 $0\neq f\in K_{-}^{\perp}$, 都有 $K\nsubseteq f^{\perp}$. 假设 f_1 和 f_2 在 $K_{-}^{\perp}$ 中是线性无关的. 通过 $K\vee L=I$ 和 $K\wedge L=0$ 可知任意的 $x\in f_1^{\perp}$ 都可以唯一地表示为 $x=y_1+y_2$, 其中 $y_1\in K$, $y_2\in L$, 结合 $K_{-}=L$ 可知 $f_1(y_2)=f_2(y_2)=0$. 如果 $f_1^{\perp}\cap K\subseteq f_2^{\perp}\cap K$, 则有 $y_1=x-y_2\in K\cap f_1^{\perp}\subseteq K\cap f_2^{\perp}$, 进而

$$f_2(x)=f_2(y_1+y_2)=f_2(y_1)+f_2(y_2)=0,$$

所以 $x\in f_2^{\perp}$, 即 $f_1^{\perp}\subseteq f_2^{\perp}$, 与 f_1 和 f_2 线性无关相矛盾. 因此 $f_1^{\perp}\cap E$ 和 $f_2^{\perp}\cap E$ 互不包含. 假设 $0\neq f\in K_{-}^{\perp}$ 满足 $K\leqslant f^{\perp}$, 由于 $f|_K=0$, 结合 $K_{-}=L$ 和 $K\vee L=I$ 可知 $f=0$, 与假设矛盾.

定义共轭双线性映射 $\Phi: K\times K_{-}^{\perp}\to B(\mathcal{H})$, 满足对于任意的 $x\in K, f\in K_{-}^{\perp}$, 有

$$\Phi(x,f)=\delta(x\otimes f)-\psi(x,f)I.$$

根据第一部分可得 $\Phi(x,f)(f^{\perp}\cap K)\subseteq\mathbb{C}x$, 进而由引理 2.1 可知存在线性映射 $T:K\to\mathcal{H}$ 和映射 $S:K_{-}^{\perp}\to\mathcal{H}$, 满足

$$\delta(x\otimes f)|_K=(Tx\otimes f+x\otimes Sf+\psi(x,f)I)|_K. \tag{3.11}$$

断言 3　在 K 中选取元素 y 以及在 $K_{-}^{\perp}$ 中选取元素 f, 满足 $f(y)=1$, 令 $\alpha=(n-2)(f(Ty)+(Sf)y)$, 断言存在 $\operatorname{Alg}\mathcal{L}$ 上的泛函 β, 满足对于任意的 $x\in K$ 和 $A\in\operatorname{Alg}\mathcal{L}$, 有

$$\delta(A)x=((TA-AT)+\alpha A+\beta(A)I)x.$$

情形 3.1　$f(x)=0$. 由 $f(y)=1$ 可知

$$P_n(A,y\otimes f,y\otimes f,\cdots,y\otimes f)=\begin{cases}Ay\otimes f-y\otimes A^*f, & n\text{ 是偶数},\\ Ay\otimes f-2f(Ay)y\otimes f+y\otimes A^*f, & n\text{ 是奇数}.\end{cases} \tag{3.12}$$

情形 3.1.1　n 是偶数. 通过等式 (3.11)–(3.12), 可得

$$\begin{aligned}&\delta(P_n(A,y\otimes f,y\otimes f,\cdots,y\otimes f))|_K\\ &=(TAy\otimes f+Ay\otimes Sf-Ty\otimes A^*f-y\otimes SA^*f+(\psi(Ay,f)-\psi(y,A^*f))I)|_K;\end{aligned} \tag{3.13}$$

类似地, 通过等式 (3.12) 可得

$$P_n(\delta(A),y\otimes f,y\otimes f,\cdots,y\otimes f)|_K=(\delta(A)y\otimes f-y\otimes\delta(A)^*f)|_K; \tag{3.14}$$

通过等式 (3.11) 可得

$$\begin{aligned}&g(P_n(A,y\otimes f,\cdots,y\otimes f))_2|_K\\ &=P_n(A,Ty\otimes f+y\otimes Sf,y\otimes f,\cdots,y\otimes f)|_K\\ &=\begin{cases}(ATy\otimes f+Ay\otimes Sf-Ty\otimes A^*f-y\otimes A^*Sf)|_K, & n=2,\\ (V_1y\otimes f+((W_1f)(y)-f(V_1y))y\otimes f-y\otimes W_1f)|_K, & n>2,\end{cases}\end{aligned} \tag{3.15}$$

其中 $V_1=AT+(Sf)(y)A-f(Ay)T$ 和 $W_1=A^*S+f(Ty)A^*-f(Ay)S$; 同时当 $3\leqslant j\leqslant n-1$ 时, 可得

$$\begin{aligned}&g(P_n(A,y\otimes f,\cdots,y\otimes f))_j|_K\\ &=P_n(A,y\otimes f,\cdots,y\otimes f,Ty\otimes f+y\otimes Sf,y\otimes f,\cdots,y\otimes f)|_K\\ &=((f(Ty)+(Sf)(y))(Ay\otimes f-y\otimes A^*f))|_K\end{aligned} \tag{3.16}$$

以及

$$\begin{aligned}&g(P_n(A,y\otimes f,\cdots,y\otimes f))_n|_K\\ &=P_n(A,y\otimes f,\cdots,y\otimes f,Ty\otimes f+y\otimes Sf)|_K\\ &=((f(Ty)A+f(Ay)T)y\otimes f+Ay\otimes Sf-Ty\otimes A^*f\\ &\quad-y\otimes(f(Ay)S+(Sf)(y)A^*)f+\mu y\otimes f)|_K,\end{aligned} \tag{3.17}$$

其中 $\mu=(W_1f)(y)-f(V_1y)$. 结合 Lie n-导子的定义以及等式 (3.13)–(3.17), 可得

$$(\delta(A)-TA+AT+(n-2)(f(Ty)+(Sf)(y))A)y\otimes f|_K$$

$$
\begin{aligned}
&- y\otimes(\delta(A)^*+A^*S-SA^*+(n-2)(f(Ty)+(Sf)(y))A^*)f|_K\\
&=(\psi(Ay,f)-\psi(y,A^*f))I|_K.
\end{aligned}
$$

因为 K 是无限维空间, 所以由上式可得 $\psi(Ay,f)-\psi(y,A^*f)=0$, 从而有

$$
\begin{aligned}
&(\delta(A)-TA+AT+(n-2)(f(Ty)+(Sf)(y))A)y\otimes f|_K\\
&=y\otimes(\delta(A)^*+A^*S-SA^*+(n-2)(f(Ty)+(Sf)(y))A^*)f|_K. \qquad (3.18)
\end{aligned}
$$

注意到 $f(x)=0$, $f(y)=1$, 所以对于任意的 $\lambda\in\mathbb{R}$, 有 $f(\lambda x+y)=1$. 类似于等式 (3.18), 有

$$
\begin{aligned}
&(\delta(A)-TA+AT+(n-2)(f(T(\lambda x+y))+(Sf)(\lambda x+y))A)(\lambda x+y)\otimes f|_K\\
&=(\lambda x+y)\otimes(\delta(A)^*+A^*S-SA^*+(n-2)(f(T(\lambda x+y)+(Sf)(\lambda x+y))A^*))f|_K.
\end{aligned}
$$

整理上述等式, 可得

$$
\begin{aligned}
0=&(\lambda^2(n-2)(f(Tx)+(Sf)(x))(Ax\otimes f-x\otimes A^*f)\\
&+\lambda((\delta(A)-TA+AT)x\otimes f+(n-2)(f(Ty)+(Sf)(y))Ax\otimes f\\
&+(n-2)(f(Tx)+(Sf)(x))Ay\otimes f-x\otimes(\delta(A)^*+A^*S-SA^*)f\\
&-(n-2)(f(Ty)+(Sf)(y))x\otimes A^*f-(n-2)(f(Tx)+(Sf)(x))y\otimes A^*f))|_K.
\end{aligned}
$$

由 λ 的任意性, 可知

$$
(f(Tx)+(Sf)(x))(Ax\otimes f-x\otimes A^*f)|_K=0 \qquad (3.19)
$$

和

$$
\begin{aligned}
0=&((\delta(A)-TA+AT)x\otimes f+(n-2)(f(Ty)+(Sf)(y))Ax\otimes f)|_K\\
=&((n-2)(f(Tx)+(Sf)(x))Ay\otimes f-x\otimes(\delta(A)^*+A^*S-SA^*)f\\
&-(n-2)(f(Ty)+(Sf)(y))x\otimes A^*f-(n-2)(f(Tx)+(Sf)(x))y\otimes A^*f)|_K. \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

结合 $A\in\operatorname{Alg}\mathcal{L}$ 的任意性以及 K 是无限维空间, 由等式 (3.19) 可知 $f(Tx)+(Sf)(x)=0$. 因此等式 (3.20) 可化简为

$$
\begin{aligned}
&((\delta(A)-TA+AT)x\otimes f+(n-2)(f(Ty)+(Sf)(y))Ax\otimes f)|_K\\
&=(-x\otimes(\delta(A)^*+A^*S-SA^*)f-(n-2)(f(Ty)+(Sf)(y))x\otimes A^*f)|_K,
\end{aligned}
$$

将上式左右两边同时作用在 y 上, 可知存在 $\operatorname{Alg}\mathcal{L}$ 上的泛函 β, 满足对于任意的 $A\in\operatorname{Alg}\mathcal{L}$, 有

$$
\delta(A)x=((TA-AT)+\alpha A+\beta(A)I)x.
$$

情形 3.1.2 n 是奇数. 通过等式 (3.11)–(3.12), 可得

$$
\begin{aligned}
&\delta(P_n(A,y\otimes f,\cdots,y\otimes f))|_K\\
&=(TAy\otimes f+Ay\otimes Sf-2f(Ay)Ty\otimes f-2f(Ay)y\otimes Sf+Ty\otimes A^*f+y\otimes SA^*f\\
&\quad+(\psi(Ay,f)+\psi(y,A^*f)-2f(Ay)\psi(y,f))I)|_K; \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

类似地, 通过等式 (3.12), 可得

$$
P_n(\delta(A),y\otimes f,\cdots,y\otimes f)|_K=(\delta(A)y\otimes f-2f(\delta(A)y)y\otimes f+y\otimes\delta(A)^*f)|_K; \qquad (3.22)
$$

通过等式 (3.11) 可得

$$\begin{aligned}
&g(P_n(A,y\otimes f,\cdots,y\otimes f))_2|_K\\
=&P_n(A,Ty\otimes f+y\otimes Sf,y\otimes f,\cdots,y\otimes f)|_K\\
=&\begin{cases}(V_1y\otimes f+y\otimes W_1f-((Sf)(Ay)+f(ATy))y\otimes f)|_K, & n=3,\\(V_1y\otimes f+y\otimes W_1f-((W_1f)(y)+f(V_1y))y\otimes f)|_K, & n>3,\end{cases}
\end{aligned}\tag{3.23}$$

其中 $V_1=AT+(Sf)(y)A-f(Ay)T$ 和 $W_1=A^*S+f(Ty)A^*-f(Ay)S$; 同时当 $3\leqslant j\leqslant n-1$ 时, 可得

$$\begin{aligned}
&g(P_n(A,y\otimes f,\cdots,y\otimes f))_j|_K\\
=&P_n(A,y\otimes f,\cdots,y\otimes f,Ty\otimes f+y\otimes Sf,y\otimes f,\cdots,y\otimes f)|_K\\
=&(f(Ty)+(Sf)(y))(Ay\otimes f-2f(Ay)y\otimes f+y\otimes A^*f)|_K
\end{aligned}\tag{3.24}$$

以及

$$\begin{aligned}
&g(P_n(A,y\otimes f,\cdots,y\otimes f))_n|_K\\
=&P_n(A,y\otimes f,\cdots,y\otimes f,Ty\otimes f+y\otimes Sf)|_K\\
=&((f(Ty)A-f(Ay)T)y\otimes f+Ay\otimes Sf+Ty\otimes A^*f\\
&-y\otimes(f(Ay)S-(Sf)(y)A^*)f-(f(ATy)+(Sf)(Ay))y\otimes f)|_K.
\end{aligned}\tag{3.25}$$

结合 Lie n-导子的定义以及等式 (3.21)–(3.25), 可得

$$\begin{aligned}
&(\delta(A)-TA+AT+(n-2)(f(Ty)+(Sf)(y))A)y\otimes f|_K\\
&+y\otimes(\delta(A)^*+A^*S-SA^*+(n-2)(f(Ty)+(Sf)(y))A^*\\
&-2(f(Ay)f(Ty)+f(Ay)(Sf)(y)+f(\delta(A)y))I)f|_K\\
=&(\psi(Ay,f)+\psi(y,A^*f)-2f(Ay)\psi(y,f))I|_K.
\end{aligned}$$

因为 K 是无限维空间, 所以由上式可得 $\psi(Ay,f)+\psi(y,A^*f)-2f(Ay)\psi(y,f)=0$, 从而有

$$\begin{aligned}
0=&(\delta(A)-TA+AT+(n-2)(f(Ty)+(Sf)(y))A)y\otimes f|_K\\
&+y\otimes(\delta(A)^*+A^*S-SA^*+(n-2)(f(Ty)+(Sf)(y))A^*\\
&-2(f(Ay)f(Ty)+f(Ay)(Sf)(y)+f(\delta(A)y))I)f|_K.
\end{aligned}\tag{3.26}$$

注意到 $f(x)=0$, $f(y)=1$, 所以对于任意的 $\lambda\in\mathbb{R}$, 有 $f(\lambda x+y)=1$. 类似于等式 (3.26), 有

$$\begin{aligned}
0=&(\delta(A)-TA+AT+(n-2)(f(T(\lambda x+y))+(Sf)(\lambda x+y))A)(\lambda x+y)\otimes f|_K\\
&+(\lambda x+y)\otimes(\delta(A)^*+A^*S-SA^*+(n-2)(f(T(\lambda x+y))+(Sf)(\lambda x+y))A^*\\
&-2(f(A(\lambda x+y))f(T(\lambda x+y))+f(A(\lambda x+y))(Sf)(\lambda x+y)+f(\delta(A)(\lambda x+y)))I)f|_K.
\end{aligned}$$

整理上述等式, 可得

$$\begin{aligned}
0=&2\lambda^3(f(Ax)f(Tx)+f(Ax)(Sf)(x))x\otimes f|_K+\lambda^2(2(f(Ax)f(Tx)+f(Ax)(Sf)(x))y\otimes f\\
&+2(f(Ax)f(Ty)+f(Ax)(Sf)(y)+f(Ay)f(Tx)+f(Ay)(Sf)(y)+f(\delta(A)x))x\otimes f\\
&-(n-2)(f(Tx)Ax\otimes f+f(Tx)x\otimes A^*f+(Sf)(x)Ax\otimes f+(Sf)(x)x\otimes A^*f))|_K
\end{aligned}$$

$$+\lambda(2(f(Ax)f(Ty)+f(Ax)(Sf)(y)+f(Ay)f(Tx)+f(Ay)(Sf)(x)+f(\delta(A)x))y\otimes f$$
$$+2(f(Ay)f(Ty)+f(Ay)(Sf)(y)+f(\delta(A)y))x\otimes f-(n-2)(f(Tx)Ay\otimes f$$
$$+f(Tx)y\otimes A^*f+f(Ty)Ax\otimes f+f(Ty)x\otimes A^*f+(Sf)(x)Ay\otimes f+(Sf)(x)y\otimes A^*f$$
$$+(Sf)(y)Ax\otimes f+(Sf)(y)x\otimes A^*f)-(\delta(A)-TA+AT)x\otimes f$$
$$-x\otimes(\delta(A)^*+A^*S-SA^*)f)|_K.$$

由 λ 的任意性, 可知

$$f(Ax)(f(Tx)+(Sf)(x))|_K=0, \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}&(2(f(Ax)f(Tx)+f(Ax)(Sf)(x))y+2(f(Ax)f(Ty)\\&+f(Ax)(Sf)(y)+f(Ay)f(Tx)+f(Ay)(Sf)(x)+f(\delta(A)x))x)\otimes f|_K\\=&((n-2)(f(Tx)Ax\otimes f+f(Tx)x\otimes A^*f+(Sf)(x)Ax\otimes f+(Sf)(x)x\otimes A^*f))|_K\end{aligned} \tag{3.28}$$

以及

$$\begin{aligned}&(2f(Ax)(f(Ty)+(Sf)(y))y\otimes f+2f(Ay)(f(Tx)+(Sf)(x))y\otimes f+2f(\delta(A)x)y\otimes f\\&+2(f(Ay)f(Ty)+f(Ay)(Sf)(y)+f(\delta(A)y))x\otimes f)|_K\\=&((n-2)(f(Tx)Ay\otimes f+f(Tx)y\otimes A^*f+f(Ty)Ax\otimes f+f(Ty)x\otimes A^*f\\&+(Sf)(x)Ay\otimes f+(Sf)(x)y\otimes A^*f+(Sf)(y)Ax\otimes f+(Sf)(y)x\otimes A^*f)\\&+(\delta(A)-TA+AT)x\otimes f+x\otimes(\delta(A)^*+A^*S-SA^*)f)|_K.\end{aligned} \tag{3.29}$$

结合 $A\in\operatorname{Alg}\mathcal{L}$ 的任意性以及 K 是无限维空间, 由等式 (3.27) 可知 $f(Tx)+(Sf)(x)=0$. 因此等式 (3.28) 可化简为

$$f(Ax)(f(Ty)+(Sf)(y)+f(\delta(A)x))|_K=0,$$

结合等式 (3.29), 可以得出

$$\begin{aligned}&(\delta(A)-TA+AT+(n-2)(f(Ty)+(Sf)(y))A)x\otimes f|_K\\=&-x\otimes(\delta(A)^*+A^*S-SA^*-(n-2)\overline{(f(Ty)+(Sf)(y))}A^*\\&+2\overline{(f(Ay)f(Ty)+(Sf)(y)+f(\delta(A)(y)))}I)f|_K.\end{aligned}$$

将上式左右两边同时作用在 y 上, 可知存在 $\operatorname{Alg}\mathcal{L}$ 上的泛函 β, 满足对于任意的 $A\in\operatorname{Alg}\mathcal{L}$, 有

$$\delta(A)x=((TA-AT)+\alpha A+\beta(A)I)x.$$

情形 3.2 $f(x)\neq 0$. 不失一般性, 令 $f(x)=1$, 由于 K 是无限维空间, 所以可以选取 $z\in K$ 满足 $f(z)=0$, 并且 z 无法由 x 和 y 线性表示, 对于 $i=1,2$, 令 $y_1=y,\ y_2=y_1+z$.

情形 3.2.1 n 是奇数. 通过等式 (3.11) 可得以下 6 个等式

$$\begin{aligned}&\delta(P_n(A,x\otimes f,y_i\otimes f,\cdots,y_i\otimes f))|_K\\=&((TA-f(Ay_i)T)x\otimes f+(A-f(Ay_i)I)x\otimes Sf-f(Ax)Ty_i\otimes f-f(Ax)y_i\otimes Sf\\&+Ty_i\otimes A^*f+y_i\otimes SA^*f)|_K+(\psi(Ax,f)-f(Ay_i)\psi(x,f)\end{aligned}$$

$$- f(Ax)\psi(y_i, f) + \psi(y_i, A^*f))I|_K, \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}
&g(P_n(A, x\otimes f, y_i\otimes f, \cdots, y_i\otimes f))_1|_K\\
&= (\delta(A)x\otimes f - f(\delta(A)y_i)x\otimes f - f(\delta(A)x)y_i\otimes f + y_i\otimes\delta^*(A)f)|_K,
\end{aligned}\tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}
&g(P_n(A, x\otimes f, y_i\otimes f, \cdots, y_i\otimes f))_2|_K\\
&= (ATx\otimes f + (Sf)(y_i)Ax\otimes f - f(Ay_i)Tx\otimes f - (Sf)(Ay_i)x\otimes f - f(ATx)y_i\otimes f\\
&\quad - f(Ax)y_i\otimes Sf + f(Tx)y_i\otimes A^*f + y_i\otimes A^*Sf)|_K
\end{aligned}\tag{3.32}$$

和

$$\begin{aligned}
&g(P_n(A, x\otimes f, y_i\otimes f, \cdots, y_i\otimes f))_3|_K\\
&= (f(Ty_i)A - f(ATy_i)I + (Sf)(y_i)A - (Sf)(y_i)f(Ay_i)I)x\otimes f|_K + (Sf)(x)y_i\otimes A^*f|_K\\
&\quad + (f(Ay_i)T - f(Ax)T + f(ATy_i)I - f(Ay_i)(Sf)(x)I - 2(Sf)(y_i)f(Ax)I\\
&\quad + 2(Sf)(y_i)f(Ay_i)I - 2f(Ay_i)f(Ty_i)I)y_i\otimes f|_K + (f(Ax)\\
&\quad - f(Ay_i))y_i\otimes Sf|_K + f(Ty_i)y_i\otimes A^*f|_K;
\end{aligned}\tag{3.33}$$

同时当 $4\leqslant j\leqslant n-1$ 时, 可得

$$\begin{aligned}
&g(P_n(A, x\otimes f, y_i\otimes f, \cdots, y_i\otimes f))_j|_K\\
&= -(f(Ty_i)f(Ax) + (Sf)(y_i)f(Ax))y_i\otimes f|_K + f(Ty_i)y_i\otimes A^*f|_K + (Sf)(y_i)x\otimes A^*f|_K\\
&\quad + (f(Ty_i)A - f(Ty_i)f(Ay_i)I + (Sf)(y_i)A - (Sf)(y_i)f(Ay_i)I)x\otimes f|_K
\end{aligned}\tag{3.34}$$

以及

$$\begin{aligned}
&g(P_n(A, x\otimes f, y_i\otimes f, \cdots, y_i\otimes f))_n|_K\\
&= (f(Ty_i)A - f(Ty_i)f(Ay_i)I)x\otimes f|_K + (A - f(Ay_i)I)x\otimes Sf|_K\\
&\quad + (T + (Sf)(y_i)I)y_i\otimes A^*f|_K + (2f(Ty_i)f(Ay_i)I - f(Ty_i)f(Ax)I - f(ATy_i)I\\
&\quad - f(Ay_i)T - (Sf)(Ax)I + (Sf)(x)f(Ay_i)I - 2(Sf)(y_i)f(Ay_i)I\\
&\quad + (Sf)(y_i)f(Ax)I)y_i\otimes f|_K + (f(Ay_i) - f(Ax))y_i\otimes Sf|_K.
\end{aligned}\tag{3.35}$$

结合 Lie n-导子的定义以及等式 (3.30)–(3.35), 可得

$$\begin{aligned}
&((\delta(A) + AT - TA + (n-2)((Sf)(y_i) + f(Ty_i))A)x\otimes f - W_2(y_i)x\otimes f - V_2(y_i)y_i\otimes f\\
&+ (f(Tx) + (Sf)(x) + (n-3)(f(Ty_i) + (Sf)(y_i)))y_i\otimes A^*f + y_i\otimes A^*Sf - y_i\otimes SA^*f\\
&+ y_i\otimes\delta^*(A)f)|_K\\
&= (\psi(Ax, f) - f(Ay_i)\psi(x, f) - f(Ax)\psi(y_i, f) + \psi(y_i, A^*f))I|_K,
\end{aligned}$$

其中

$$W_2(y_i) = f(\delta(A)y_i) + (Sf)(Ay_i) + f(ATy_i) + (n-3)((Sf)(y_i)f(Ay_i) + f(Ty_i)f(Ay_i))$$

以及

$$V_2(y_i) = f(\delta(A)x) + f(ATx) + (Sf)(Ax) + (n-3)((Sf)(y_i)f(Ax) + f(Ty_i)f(Ax)).$$

因为 K 是无限维空间, 所以可得 $\psi(Ax,f)-f(Ay_i)\psi(x,f)-f(Ax)\psi(y_i,f)+\psi(y_i,A^*f)=0$, 从而有

$$\begin{aligned}&(\delta(A)+AT-TA+(n-2)((Sf)(y_i)+f(Ty_i))A)x\otimes f|_K\\&=(W_2(y_i)x\otimes f+V_2(y_i)y_i\otimes f-y_i\otimes A^*Sf+y_i\otimes SA^*f-y_i\otimes\delta^*(A)f)|_K\\&\quad-(f(Tx)+(Sf)(x)+(n-3)(f(Ty_i)+(Sf)(y_i)))y_i\otimes A^*f|_K.\end{aligned}$$

将上式左右两边同时作用在 y_i 上, 可以得出

$$(\delta(A)+AT-TA+(n-2)((Sf)(y_i)+f(Ty_i))A)x=W_2(y_i)x+Q_1(y_i)y_i,\tag{3.36}$$

其中

$$\begin{aligned}Q_1(y_i)&=V_2(y_i)-f(Ay_i)f(Tx)-f(\delta(A)y_i)-f(Ay_i)(Sf)(x)\\&\quad-(n-3)(f(Ay_i)f(Ty_i)+f(Ay_i)(Sf)(y_i))+(SA^*f)(y_i)-(Sf)(Ay_i).\end{aligned}$$

注意到 $y_2-y_1=z$, 结合等式 (3.36), 可以得出

$$(n-2)((Sf)(z)+f(Tz))Ax=(W_2(y_2)-W_2(y_1))x+Q_1(y_2)z+(Q_1(y_2)-Q_1(y_1))y_1.$$

由于 $f(z)=0$, 类似情形 3.1.2 中的等式 (3.27) 可知 $(Sf)(z)+f(Tz)=0$, 因此上述等式可以化简为

$$0=(W_2(y_2)-W_2(y_1))x+Q_1(y_2)z+(Q_1(y_2)-Q_1(y_1))y_1.$$

由于 z 无法由 x 和 y 线性表示, 从而可得 $Q_1(y_2)=0$. 同理 $Q_1(y_1)=0$, 在等式 (3.36) 中令 $i=1$, 则可知存在 $\operatorname{Alg}\mathcal{L}$ 上的泛函 β, 满足对于任意的 $A\in\operatorname{Alg}\mathcal{L}$, 有

$$\delta(A)x=((TA-AT)+\alpha A+\beta(A)I)x.$$

情形 3.2.2 n 是偶数. 当 $n=2$ 时, 对于任意的 $A\in\operatorname{Alg}\mathcal{L}$ 以及 $x\in K$, 有

$$\delta([A,x\otimes f])=\delta(Ax\otimes f-x\otimes A^*f)=[\delta(A),x\otimes f]+[A,\delta(x\otimes f)].$$

通过等式 (3.11), 可得

$$\begin{aligned}(\delta(A)+AT-TA)x\otimes f|_K&=(x\otimes(\delta(A)^*+A^*S-SA^*)f)|_K\\&\quad+((\psi(Ax,f)-\psi(x,A^*f))I)|_K.\end{aligned}$$

因为 K 是无限维空间, 所以由上式可得 $\psi(Ax,f)-\psi(x,A^*f)=0$, 从而有

$$(\delta(A)+AT-TA)x\otimes f|_K=x\otimes(\delta(A)^*+A^*S-SA^*)f|_K.$$

将上式左右两边同时作用在 y 上, 可知存在 $\operatorname{Alg}\mathcal{L}$ 上的泛函 β, 满足对于任意的 $A\in\operatorname{Alg}\mathcal{L}$, 有

$$\delta(A)x=((TA-AT)+\alpha A+\beta(A)I)x,$$

其中 $\alpha=(n-2)(f(Ty)+(Sf)y)=0$. 当 $n>2$ 时, 通过等式 (3.11), 可得以下 6 个等式

$$\begin{aligned}&\delta(P_n(A,x\otimes f,y_i\otimes f,\cdots,y_i\otimes f))|_K\\&=((TA-f(Ay_i)T)x\otimes f+(A-f(Ay_i)I)x\otimes Sf+(2f(Ay_i)T-f(Ax)T)y_i\otimes f\\&\quad+(2f(Ay_i)-f(Ax))y_i\otimes Sf-Ty_i\otimes A^*f-y_i\otimes SA^*f)|_K+(\psi(Ax,f)\\&\quad-f(Ay_i)\psi(x,f)+2f(Ay_i)\psi(y_i,f)-f(Ax)\psi(y_i,f)-\psi(y_i,A^*f))I|_K,\end{aligned}\tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}&g(P_n(A,x\otimes f,y_i\otimes f,\cdots,y_i\otimes f))_1|_K\\&=(\delta(A)x\otimes f-f(\delta(A)y_i)x\otimes f+2f(\delta(A)y_i)y_i\otimes f-f(\delta(A)x)y_i\otimes f\\&\quad+y_i\otimes\delta^*(A)f)|_K,\end{aligned}\tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}&g(P_n(A,x\otimes f,y_i\otimes f,\cdots,y_i\otimes f))_2|_K\\&=((AT+(Sf)(y_i)A-f(Ay_i)T-(Sf)(Ay_i)I)x\otimes f-f(Tx)y_i\otimes A^*f-y_i\otimes A^*Sf\\&\quad+(2f(Ay_i)f(Tx)-2f(Ax)(Sf)(y_i)+2(Sf)(Ay_i)-f(ATx))y_i\otimes f\\&\quad+f(Ax)y_i\otimes Sf)|_K\end{aligned}\tag{3.39}$$

和

$$\begin{aligned}&g(P_n(A,x\otimes f,y_i\otimes f,\cdots,y_i\otimes f))_3|_K\\&=((f(Ty_i)A-f(ATy_i)I+(Sf)(y_i)A-(Sf)(y_i)f(Ay_i)I)x\otimes f+(f(Ay_i)T-f(Ax)T\\&\quad+f(ATy_i)I+f(Ay_i)(Sf)(x)I)y_i\otimes f+(f(Ay_i)-f(Ax))y_i\otimes Sf-f(Ty_i)y_i\otimes A^*f\\&\quad-(Sf)(x)y_i\otimes A^*f)|_K;\end{aligned}\tag{3.40}$$

同时当 $4\leqslant j\leqslant n-1$ 时, 可得

$$\begin{aligned}&g(P_n(A,x\otimes f,y_i\otimes f,\cdots,y_i\otimes f))_j|_K\\&=((f(Ty_i)A-f(Ty_i)f(Ay_i)I+(Sf)(y_i)A-(Sf)(y_i)f(Ay_i)I)x\otimes f+(2(Sf)(y_i)f(Ay_i)\\&\quad+2f(Ty_i)f(Ay_i)-f(Ty_i)f(Ax)-(Sf)(y_i)f(Ax))y_i\otimes f-(f(Ty_i)\\&\quad+(Sf)(y_i))y_i\otimes A^*f)|_K\end{aligned}\tag{3.41}$$

以及

$$\begin{aligned}&g(P_n(A,x\otimes f,y_i\otimes f,\cdots,y_i\otimes f))_n|_K\\&=((f(Ty_i)A-f(Ty_i)f(Ay_i)I)x\otimes f+(A-f(Ay_i)I)x\otimes Sf+(f(ATy_i)I\\&\quad-f(Ty_i)f(Ax)I+f(Ay_i)T-(Sf)(Ax)I+(Sf)(x)f(Ay_i)I+(Sf)(y_i)f(Ax)I)y_i\otimes f\\&\quad+(f(Ay_i)-f(Ax))y_i\otimes Sf-Ty_i\otimes A^*f-(Sf)(y_i)y_i\otimes A^*f)|_K.\end{aligned}\tag{3.42}$$

结合 Lie n-导子的定义以及等式 (3.37)–(3.42), 可得

$$\begin{aligned}&((\delta(A)+AT-TA+(n-2)((Sf)(y_i)+f(Ty_i))A)x\otimes f-(W_2(y_i))x\otimes f-y_i\otimes SA^*f\\&-y_i\otimes\delta^*(A)f-(V_2(y_i)+(n-4)(2((Sf)(y_i)f(Ay_i)-f(Ty_i)f(Ay_i)))-2(f(\delta(A)y_i)\\&+f(Ay_i)f(Tx)+(Sf)(Ay_i)+f(ATy_i)+f(Ay_i)(Sf)(x)))y_i\otimes f-y_i\otimes A^*Sf\\&-(f(Tx)+(Sf)(x)+(n-3)(f(Ty_i)+(Sf)(y_i)))y_i\otimes A^*f)|_K\\&=(\psi(Ax,f)-f(Ay_i)\psi(x,f)+2f(Ay_i)\psi(y_i,f)-f(Ax)\psi(y_i,f)-\psi(y_i,A^*f))I|_K,\end{aligned}$$

其中

$$W_2(y_i)=f(\delta(A)y_i)+(Sf)(Ay_i)+f(ATy_i)+(n-3)((Sf)(y_i)f(Ay_i)+f(Ty_i)f(Ay_i))$$

以及

$$V_2(y_i) = f(\delta(A)x) + f(ATx) + (Sf)(Ax) + (n-3)((Sf)(y_i)f(Ax) + f(Ty_i)f(Ax)).$$

因为 K 是无限维空间, 所以可得

$$\psi(Ax, f) - f(Ay_i)\psi(x, f) + 2f(Ay_i)\psi(y_i, f) - f(Ax)\psi(y_i, f) - \psi(y_i, A^*f) = 0,$$

从而有

$$\begin{aligned}&(\delta(A) + AT - TA + (n-2)((Sf)(y_i) + f(Ty_i))A)x \otimes f|_K\\
&= ((W_2(y_i))x \otimes f + (V_2(y_i) + (n-4)(2((Sf)(y_i)f(Ay_i) - f(Ty_i)f(Ay_i))) - 2(f(ATy_i)\\
&\quad + f(\delta(A)y_i) + f(Ay_i)f(Tx) + (Sf)(Ay_i) + f(Ay_i)(Sf)(x)))y_i \otimes f + y_i \otimes A^*Sf\\
&\quad + y_i \otimes SA^*f + y_i \otimes \delta^*(A)f + (f(Tx) + (Sf)(x) + (n-3)(f(Ty_i)\\
&\quad + (Sf)(y_i)))y_i \otimes A^*f)|_K.\end{aligned}$$

将上式左右两边同时作用在 y_i 上, 可以得出

$$(\delta(A) + AT - TA + (n-2)((Sf)(y_i) + f(Ty_i))A)x = (W_2(y_i))x + (Q_2(y_i))y_i, \qquad (3.43)$$

其中

$$\begin{aligned}Q_2(y_i) = {}& V_2(y_i) + (n-4)(2((Sf)(y_i)f(Ay_i) - f(Ty_i)f(Ay_i)))\\
&- 2(f(ATy_i) + f(\delta(A)y_i) + f(Ay_i)f(Tx) + (Sf)(Ay_i) + f(Ay_i)(Sf)(x))\\
&+ (Sf)(Ay_i) + (SA^*f)(y_i) + f(\delta(A)y_i) + f(Ay_i)(f(Tx) + (Sf)(x)\\
&+ (n-3)(f(Ty_i) + (Sf)(y_i)).\end{aligned}$$

注意到 $y_2 - y_1 = z$, 结合等式 (3.43), 可以得出

$$(n-2)((Sf)(z) + f(Tz))Ax = (W_2(y_2) - W_2(y_1))x + Q_2(y_2)z + (Q_2(y_2) - Q_2(y_1))y_1.$$

由于 $f(z) = 0$, 类似情形 3.1.1 中的等式 (3.19) 可知 $(Sf)(z) + f(Tz) = 0$, 因此上述等式可以化简为

$$0 = (W_2(y_2) - W_2(y_1))x + Q_2(y_2)z + (Q_2(y_2) - Q_2(y_1))y_1.$$

由于 z 无法由 x 和 y 线性表示, 从而可得 $Q_2(y_2) = 0$. 同理 $Q_2(y_1) = 0$. 在等式 (3.43) 中令 $i = 1$, 可知存在 $\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$ 上的泛函 β, 满足对于任意的 $A \in \mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$, 有

$$\delta(A)x = ((TA - AT) + \alpha A + \beta(A)I)x.$$

综上所述, 结合情形 3.1 和情形 3.2 可知, 存在 $\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$ 上的线性泛函 β, 满足对于任意的 $A \in \mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$, 有

$$\delta(A)|_K = ((TA - AT) + \alpha A + \beta(A)I)|_K. \qquad (3.44)$$

断言 4 $\alpha = 0$, 并且对于任意的 $A_1, \cdots, A_n \in \mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$, 有 $\beta(P_n(A_1, \cdots, A_n)) = 0$. 由等式 (3.44), 可得

$$\begin{aligned}\delta\ (P_n(A_1, \cdots, A_n))|_K = {}& ([T, P_n(A_1, \cdots, A_n)] + \alpha P_n(A_1, \cdots, A_n)\\
&+ \beta(P_n(A_1, \cdots, A_n))I)|_K,\end{aligned}$$

同时由 Lie n-导子定义, 可得

$$\delta(P_n(A_1, \cdots, A_n))|_K$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{n} P_n(A_1, \cdots, A_{j-1}, \delta(A_j), A_{j+1}, \cdots, A_n)|_K \\
&= \sum_{j=1}^{n} P_n(A_1, \cdots, A_{j-1}, [T, A_j] + \alpha A_j, A_{j+1}, \cdots, A_n)|_K \\
&= \sum_{j=1}^{n} P_n(A_1, \cdots, A_{j-1}, [T, A_j], A_{j+1}, \cdots, A_n)|_K + \sum_{j=1}^{n} \alpha P_n(A_1, \cdots, A_n)|_K \\
&= [T, P_n(A_1, \cdots, A_n)]|_K + \sum_{j=1}^{n} \alpha P_n(A_1, \cdots, A_n)|_K.
\end{aligned}
$$

结合上面两个等式, 可得

$$(n-1)\alpha P_n(A_1, \cdots, A_n)|_K = \beta(P_n(A_1, \cdots, A_n))I|_K.$$

由于 $I|_K$ 不是换位子, 所以由上式可知

$$\alpha = \beta(P_n(A_1, \cdots, A_n)) = 0.$$

因此 δ 在 K 上是标准的.

在三角代数、自反代数和 von Neumann 代数的基础上, 葛力明和袁巍于 2010 年在 [10–11] 中引入了一类新的非自伴代数: Kadison-Singer 代数.

定义 3.2　设 $\mathcal{H}$ 是 Hilbert 空间, $\mathcal{A}$ 是 $B(\mathcal{H})$ 中的代数. 如果 $\mathcal{A}$ 相对于其对角代数 $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}^*$ 在所有包含 $\mathcal{A}$ 的自反代数中具有极大性, 即满足以下两个条件:

(1)　$\mathcal{A}$ 是自反代数;

(2)　若 $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}$ 是 $B(\mathcal{H})$ 中的自反代数且 $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}^* = \mathcal{A} \cap \mathcal{A}^*$, 则 $\mathcal{A} = \mathcal{B}$,

那么 $\mathcal{A}$ 称为 Kadison-Singer 代数.

结合定理 3.2 和 [12, 定理2.2], 可以得到以下结论.

推论 3.1　设 $\mathcal{L} = \{0, M, L, K, I\}$ 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的五角投影格, 其中 x_0 属于 $K^\perp$ 但不属于 $K + M$ 的值域, $L = M \vee \{\mathbb{C}x_0\}$, 则 $\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$ 是半单的 Kadison-Singer 代数; 若 $\delta : \mathrm{Alg}\,\mathcal{L} \to B(\mathcal{H})$ 是 Lie n-导子, 那么 δ 是标准的.

致谢　结合审稿人提出的宝贵意见和建议, 我们对论文结构进行了优化, 提高了论文可读性, 在此对审稿人表示感谢.

参　考　文　献

[1] Abdullaev I. n-Lie derivations on von Neumann algebras [J]. *Uzbek Mat Zh*, 1992, (5–6):3–9 (in Russian).

[2] Miers C. Lie derivations of von Neumann algebras [J]. *Duke Math J*, 1973, 40:403–409.

[3] Lu F, Liu B. Lie derivations of reflexive algebras [J]. *Integral Equation Operartor Theory*, 2009, 64(2):261–271.

[4] Miers C. Lie triple derivations of von Neumann algebras [J]. *Proc Amer Math Soc*, 1978, 71:57–61.

[5] Sun S, Ma X. Lie triple derivations of nest algebras on Banach spaces [J]. *Linear Algebra Appl*, 2012, 436:3443–3462.

[6] Fošner A. Nonlinear Lie-type derivations of von Neumann algebras and related topics [J]. *Colloq Math*, 2013, 132:53–71.

[7] Wei F, Zhang Y. Lie-type derivations of nest algebras on Banach spaces and related topics [J]. *J Aust Math Soc*, 2022, 112:391–430.

[8] Qi X. Characterizing Lie n-derivations for reflexive algebras [J]. *Linear Multilinear Algebra*, 2015, 63:1693–1706.

[9] An G, Zhang R, He J, Cheng X. Characterizations of Lie derivations on Kadison-Singer algebras [J]. *Banach J Math Anal*, 2023, 17, 22 pp.

[10] Ge L, Yuan W. Kadison-Singer algebras: Hyperfinite case [J]. *Proc Natl Acad Sci USA*, 2010, 107:1838–1843.

[11] Ge L, Yuan W. Kadison-Singer algebras. II. General case [J]. *Proc Natl Acad Sci USA*, 2010, 107:4840–4844.

[12] 于嘉琪, 李建奎. 一些 Kadison-Singer 代数的例子 [J]. 华东理工大学学报 (自然科学版), 2018, 44(6):945–949.

Standard Form of Lie n-Derivations on Pentagon Projection Lattice Algebras

AN Guangyu[1] SU Dong[2] QIN Feilang[2]

[1]Corresponding author. Department of Mathematics, Shaanxi University of Science and Technology, Xi'an 710021, China.
E-mail: anguangyu310@163.com

[2]Department of Mathematics, Shaanxi University of Science and Technology, Xi'an 710021, China. E-mail: 1461638919@qq.com;
231711043@sust.edu.cn

Abstract Let $\mathcal{H}$ be an infinite dimensional Hilbert space, $\mathcal{L}$ be a pentagon projection lattice on $\mathcal{H}$, and $\operatorname{Alg}\mathcal{L}$ be the pentagon projection lattice algebra. In this paper, the authors prove that every Lie n-derivation from $\operatorname{Alg}\mathcal{L}$ into $B(\mathcal{H})$ is standard, and give an application of Kadison-Singer algebras.

Keywords Pentagon projection lattice algebra, Lie n-derivation, Standard form

2020 MR Subject Classification 47B47, 47L75, 47A15, 17B40

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 46 No. 3, 2025
by ALLERTON PRESS, INC., USA