

Fermat 型 q -差分微分方程组的整函数解*

龚翌晖¹ 杨 祺²

提要 作者研究了一类 Fermat 型 q -差分微分方程组整函数解的问题, 并得到了整函数解组的精确形式. 此外, 文章的结果推广了前人的结论.

关键词 微分-差分方程, 整函数解, Nevanlinna 理论, Fermat 型方程

MR (2020) 主题分类 39B32, 30D35

中图法分类 O174.52

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2025)03-0281-18

§1 引言和主要结果

形如

$$f(z)^2 + g(z)^2 = 1 \quad (1.1)$$

的方程是一个经典的 Fermat 型函数方程. Gross [1] 研究得到方程 (1.1) 整函数解的表达式为 $f(z) = \sin(h(z))$, $g(z) = \cos(h(z))$, 其中 $h(z)$ 是整函数.

此后, Fermat 型函数方程经过多次推广, 衍生出诸多特殊形式, 其中包括 Fermat 型微分方程 (见 [2–4]), Fermat 型微分-差分方程 (见 [5–7]) 等. 特别地, 随着 Nevanlinna 理论 (见 [4, 8–9]) 的发展, 在复域上研究微分-差分方程的方法取得了新的进展, 从而对 Fermat 型函数方程的研究取得了一些有意义的成果 (见 [10–13]). 刘凯 [14] 研究了带有微分项和差分项的 Fermat 型函数方程

$$f'(z)^2 + f(z+c)^2 = 1, \quad (1.2)$$

并得到其整函数解的形式为 $f(z) = \sin(z \pm Bi)$, 其中 B 是常数, k 是满足 $c = 2k\pi$ 或 $c = (2k+1)\pi$ 的整数.

2017 年, 高凌云 [15] 进一步研究由方程组 (1.2) 推广而来的 Fermat 型微分-差分方程组, 并证明下述定理.

定理 1.1 [15] 若方程组

$$\begin{cases} \omega_1'(z)^2 + \omega_2(z+c)^2 = Q_1(z), \\ \omega_2'(z)^2 + \omega_1(z+c)^2 = Q_2(z) \end{cases} \quad (1.3)$$

本文 2024 年 8 月 21 日收到, 2025 年 9 月 9 日收到修改稿.

¹新疆师范大学数学科学学院, 乌鲁木齐 830017. E-mail: 17599833665@163.com

²通信作者. 新疆师范大学数学科学学院, 乌鲁木齐 830017. E-mail: 20534183@qq.com

*本文受到新疆维吾尔自治区自然科学基金 (No. 2024D01A91) 和国家自然科学基金 (Nos. 11961068, 12561039) 的资助.

存在有限级超越整函数解, 则有 $Q_1(z) = c_{11}c_{22}$, $Q_2(z) = c_{21}c_{22}$, 且

$$\omega_1(z) = \frac{c_{11}e^{az+b_1} - c_{12}e^{-az-b_1}}{2a}, \quad \omega_2(z) = \frac{c_{21}e^{az+b_2} - c_{22}e^{-az-b_2}}{2a},$$

其中 a, b_1, b_2, c_{kj} 是满足 $a^4 = 1$ 和 $c_{kj} \neq 0$ 的常数, 并且解 (ω_1, ω_2) 的增长级为 $\rho(\omega_1, \omega_2) = \max\{\rho(\omega_1), \rho(\omega_2)\}$.

2022 年, 徐洪焱等人 [16] 研究了带有交叉项的二阶 Fermat 型微分-差分方程组的整函数解, 并证明了如下定理.

定理 1.2 [16] 令 $c (\neq 0)$, $\alpha^2 (\neq 0, 1)$ 是常数. 若方程组

$$\begin{cases} \omega_1''(z)^2 + 2\alpha\omega_1'(z)\omega_2(z+c) + \omega_2(z+c) = 1, \\ \omega_2''(z)^2 + 2\alpha\omega_2'(z)\omega_1(z+c) + \omega_1(z+c) = 1 \end{cases} \quad (1.4)$$

存在有限级整函数解, 则

(i)

$$\begin{cases} \omega_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\cos(az-ac+b_2)}{\sqrt{1+\alpha}} + \frac{\sin(az-ac+b_2)}{\sqrt{1-\alpha}} \right), \\ \omega_2(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\cos(az-ac+b_1)}{\sqrt{1+\alpha}} + \frac{\sin(az-ac+b_1)}{\sqrt{1-\alpha}} \right), \end{cases}$$

其中 a, b_1, b_2, c 是常数, 且满足关系 $a^4 = 1$, $e^{2i(b_1-b_2)} \equiv 1$, $e^{2iac} \equiv \frac{-\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}}{-\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}$;

(ii)

$$\begin{cases} \omega_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\cos(az-ac+b_2)}{\sqrt{1+\alpha}} - \frac{\sin(az-ac+b_2)}{\sqrt{1-\alpha}} \right), \\ \omega_2(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\cos(az-ac+b_1)}{\sqrt{1+\alpha}} + \frac{\sin(az-ac+b_1)}{\sqrt{1-\alpha}} \right), \end{cases}$$

其中 a, b_1, b_2, c 是常数, 且满足关系 $a^4 = 1$, $e^{2i(b_1-b_2)} \equiv 1$, $e^{2iac} \equiv 1$.

结合方程组 (1.3) 和方程组 (1.4), 我们得到高阶导数情形的 Fermat 型 q -差分微分方程组

$$\begin{cases} f_1^{(k)}(z)^2 + 2\alpha f_1^{(k)}(z)f_2(qz+c) + f_2(qz+c)^2 = Q_1(z), \\ f_2^{(k)}(z)^2 + 2\alpha f_2^{(k)}(z)f_1(qz+c) + f_1(qz+c)^2 = Q_2(z), \end{cases} \quad (1.5)$$

其中 $\alpha (\neq 0, \pm 1)$ 是常数. 受到吴琳琳和扈培培 [17] 研究思路的启发, 我们研究方程组 (1.5) 的有限级整函数解, 并得到了其有限级超越整函数解的形式.

定理 1.3 令 k 是正整数, q 和 c 是非零常数, 设 $Q_1(z), Q_2(z)$ 是两个非零多项式. 若方程组 (1.5) 存在有限级超越整函数解, 则 $Q_1(z) = q_1$, $Q_2(z) = q_2$, 其中 q_1, q_2 是非零常数, 并满足:

(i) 若 $q^2 = 1$, 则 $a^{4k} = 1$, $q_1 = \pm q_2$, 且

$$(f_1(z), f_2(z)) = \left(\frac{c_1e^{az} - c_2e^{-az}}{(\alpha_2 - \alpha_1)a^k}, \frac{d_1e^{az} - d_2e^{-az}}{(\alpha_2 - \alpha_1)a^k} \right);$$

(ii) 若 $q^2 = -1$, 则 $a^{4k} = (-1)^k$. 当 k 是偶数时 $q_1 = \pm q_2$, 当 k 是奇数时 $q_1 = \pm i q_2$, 且

$$(f_1(z), f_2(z)) = \left(\frac{c_1 e^{az} - c_2 e^{-az}}{(\alpha_2 - \alpha_1) a^k}, \frac{d_1 e^{iaz} - d_2 e^{-iaz}}{(\alpha_2 - \alpha_1) (ia)^k} \right),$$

其中 $c_1 = \alpha_2 q_{11} e^{b_1}$, $c_2 = (-1)^k \alpha_1 q_{12} e^{-b_1}$, $d_1 = \alpha_2 q_{21} e^{b_2}$ 或 $-\alpha_1 q_{22} e^{-b_2}$, $d_2 = -(-1)^k \alpha_2 q_{21} e^{b_2}$ 或 $(-1)^k \alpha_1 q_{22} e^{-b_2}$; b_1, b_2 是常数, 并且 $q_1 = q_{11} q_{12}$, $q_2 = q_{21} q_{22}$; $\alpha_1 = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}$, $\alpha_2 = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}$, $\alpha \neq 0, \pm 1$.

对于定理 1.3, 当 $k = 1, q = 1, \alpha = 0$ 时, 即为高凌云 [15] 证明的情形; 当 $k = 2, q = 1$ 且 $Q_1 = Q_2 = 1$ 时, 即为徐洪焱等人 [16] 证明的情形, 因此我们的结论推广了定理 1.1 和定理 1.2. 此外, 定理 1.3 还将吴琳琳和扈培础 [17] 讨论的方程组推广到带有交叉项的情形.

§2 引 理

假定读者已经熟悉 Nevanlinna 理论 (见文 [4, 9]) 中的基本定义, 例如特征函数 $T(r, f)$, 计数函数 $N(r, f)$ 等. 下面给出证明本文结论所需的关键引理.

引理 2.1 [9] 令 f 是一个有穷 $\lambda(f)$ 级整函数, $z = 0$ 为其 k 级零点, $\{z_1, z_2, \dots\}$ 为 f 的非零零点. 那么

$$f(z) = z^k P(z) e^{Q(z)},$$

其中 $P(z)$ 为 f 的非零零点的典型乘积, 且 $Q(z)$ 是一个次数不高于 $\lambda(f)$ 的多项式.

引理 2.2 [18] 令 f_1 和 f_2 是两个亚纯函数, 设 a, b_1, b_2 是函数 f_1 和 f_2 的小函数, 且满足 $ab_1 b_2 \neq 0$ 和 $b_1 f_1 + b_2 f_2 = a$. 那么有

$$T(r, f_1) \leq \bar{N}(r, f_1) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{f_1}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{f_2}\right) + S(r, f_1).$$

引理 2.3 [9] 令 f_1, f_2, f_3 是复平面 \mathbb{C} 上的亚纯函数且 f_1 不是常数. 若 $\sum_{j=1}^3 f_j \equiv 1$, 且对常数 $\lambda < 1$, 有

$$\sum_{j=1}^3 N\left(r, \frac{1}{f_j}\right) + 2 \sum_{j=1}^3 \bar{N}(r, f_j) \leq (\lambda + o(1))T(r),$$

这里 $r \rightarrow \infty$ 且 $T(r) = \max_{1 \leq j \leq 3} \{T(r, f_j)\}$. 那么 $f_2 \equiv 1$ 或 $f_3 \equiv 1$.

§3 定理 1.3 的证明

令 (f_1, f_2) 是方程组 (1.5) 的一对有限级超越整函数解. 显然, 由引理 2.1, 方程组可以改写为

$$\begin{cases} [f_1^{(k)}(z) + \alpha_1 f_2(qz + c)][f_1^{(k)}(z) + \alpha_2 f_2(qz + c)] = Q_1(z), \\ [f_2^{(k)}(z) + \alpha_1 f_1(qz + c)][f_2^{(k)}(z) + \alpha_2 f_1(qz + c)] = Q_2(z), \end{cases}$$

其中 $\alpha_1 = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}$, $\alpha_2 = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}$. 由上式可知

$$\begin{cases} f_1^{(k)}(z) + \alpha_1 f_2(qz + c) = Q_{11} e^{h_1(z)}, \\ f_1^{(k)}(z) + \alpha_2 f_2(qz + c) = Q_{12} e^{-h_1(z)}, \\ f_2^{(k)}(z) + \alpha_1 f_1(qz + c) = Q_{21} e^{h_2(z)}, \\ f_2^{(k)}(z) + \alpha_2 f_1(qz + c) = Q_{22} e^{-h_2(z)}, \end{cases} \quad (3.1)$$

其中 $h_1(z)$ 和 $h_2(z)$ 是非常数多项式, $Q_{11}, Q_{12}, Q_{21}, Q_{22}$ 是满足 $Q_{11}Q_{12} = Q_1$ 和 $Q_{21}Q_{22} = Q_2$ 的常数. 由 (3.1) 可知

$$\begin{cases} f_1^{(k)}(z) = \frac{\alpha_2 Q_{11} e^{h_1(z)} - \alpha_1 Q_{12} e^{-h_1(z)}}{\alpha_2 - \alpha_1}, \\ f_1(qz + c) = \frac{Q_{21} e^{h_2(z)} - Q_{22} e^{-h_2(z)}}{\alpha_1 - \alpha_2}, \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} f_2^{(k)}(z) = \frac{\alpha_2 Q_{21} e^{h_2(z)} - \alpha_1 Q_{22} e^{-h_2(z)}}{\alpha_2 - \alpha_1}, \\ f_2(qz + c) = \frac{Q_{11} e^{h_1(z)} - Q_{12} e^{-h_1(z)}}{\alpha_1 - \alpha_2}. \end{cases} \quad (3.3)$$

那么, 结合 (3.2) 和 (3.3), 经简单计算, 分别得到

$$\frac{D_{11}(z)}{D_{14}(z)} e^{h_1(z)+h_2(qz+c)} + \frac{D_{12}(z)}{D_{14}(z)} e^{h_2(qz+c)-h_1(z)} + \frac{D_{13}(z)}{D_{14}(z)} e^{2h_2(qz+c)} \equiv 1, \quad (3.4)$$

$$\frac{D_{21}(z)}{D_{24}(z)} e^{h_2(z)+h_1(qz+c)} + \frac{D_{22}(z)}{D_{24}(z)} e^{h_1(qz+c)-h_2(z)} + \frac{D_{23}(z)}{D_{24}(z)} e^{2h_1(qz+c)} \equiv 1, \quad (3.5)$$

其中

$$\begin{aligned} D_{11}(z) &= Q_{11}^{(k)}(z) + kQ_{11}^{(k-1)}(z)h_1'(z) + \cdots + Q_{11}(z)[(h_1'(z))^k + P_{k-1}(h_1'(z))], \\ D_{12}(z) &= -Q_{12}^{(k)}(z) - kQ_{12}^{(k-1)}(z)(-h_1'(z)) - \cdots - Q_{12}(z)[(-h_1'(z))^k + Q_{k-1}(-h_1'(z))], \\ D_{13}(z) &= \alpha_2 q^k Q_{21}(qz + c), \quad D_{14}(z) = \alpha_1 q^k Q_{22}(qz + c), \\ D_{21}(z) &= Q_{21}^{(k)}(z) + kQ_{21}^{(k-1)}(z)h_2'(z) + \cdots + Q_{21}(z)[(h_2'(z))^k + R_{k-1}(h_2'(z))], \\ D_{22}(z) &= -Q_{22}^{(k)}(z) - kQ_{22}^{(k-1)}(z)(-h_2'(z)) - \cdots - Q_{22}(z)[(-h_2'(z))^k + L_{k-1}(-h_2'(z))], \\ D_{23}(z) &= \alpha_2 q^k Q_{11}(qz + c), \quad D_{24}(z) = \alpha_1 q^k Q_{12}(qz + c), \end{aligned}$$

且 P_{k-1}, Q_{k-1} 是由 $h_1^{(k)}, \dots, h_1^{(1)}$ 组成的多项式, 并满足 $\deg P_{k-1} \leq k-1, \deg Q_{k-1} \leq k-1$. R_{k-1}, L_{k-1} 是由 $h_2^{(k)}, \dots, h_2^{(1)}$ 组成的多项式, 并满足 $\deg R_{k-1} \leq k-1, \deg L_{k-1} \leq k-1$.

接下来, 断言 $D_{1j} \not\equiv 0 (j = 1, 2, 3, 4)$. 易知在此情况下 $D_{13}(z) \not\equiv 0, D_{14}(z) \not\equiv 0$. 那么存在两种情形, 即 $D_{11}(z)$ 和 $D_{12}(z)$ 都恒为 0 或者 $D_{11}(z)$ 和 $D_{12}(z)$ 其中之一恒为 0. 显然, 前者与 h_2 是非常数多项式的事实矛盾. 对于后者, 不失一般性, 假设 $D_{11}(z) \equiv 0$. 那么 (3.4) 转化为

$$\frac{D_{12}(z)}{D_{14}(z)} e^{h_2(qz+c)-h_1(z)} + \frac{D_{13}(z)}{D_{14}(z)} e^{2h_2(qz+c)} \equiv 1.$$

因为 $h_1(z)$ 和 $h_2(z)$ 都是非常数多项式, 所以 $h_2(qz+c) - h_1(z)$ 不是常数. 若不然, 可得 $\frac{D_{13}(z)}{D_{14}(z)}e^{2h_2(qz+c)} \equiv C(z)$, 其中 $C(z)$ 是有理函数, 这与 $h_2(z)$ 是非常数多项式矛盾. 因此, 结合引理 2.2 可得

$$\begin{aligned} T(r, e^{2h_2(qz+c)}) &\leq \overline{N}(r, e^{2h_2(qz+c)}) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{e^{2h_2(qz+c)}}\right) \\ &\quad + \overline{N}\left(r, \frac{1}{e^{h_2(qz+c)-h_1(z)}}\right) + S(r, e^{2h_2(qz+c)}) \\ &= S(r, e^{2h_2(qz+c)}), \end{aligned}$$

矛盾, 断言得证.

因为 $D_{13}(z) \not\equiv 0$, $D_{14}(z) \not\equiv 0$, 且 $h_2(qz+c)$ 是非常数多项式, 显然 $\frac{D_{13}(z)}{D_{14}(z)}e^{2h_2(qz+c)}$ 不是常数. 那么由 Nevanlinna 理论容易得到

$$\begin{aligned} &N\left(r, \frac{D_{14}(z)}{D_{11}(z)e^{h_1(z)+h_2(qz+c)}}\right) + N\left(r, \frac{D_{14}(z)}{D_{12}(z)e^{h_2(qz+c)-h_1(z)}}\right) + N\left(r, \frac{D_{14}(z)}{D_{13}(z)e^{2h_2(qz+c)}}\right) \\ &+ 2\left\{\overline{N}\left(r, \frac{D_{11}(z)}{D_{14}(z)}e^{h_1(z)+h_2(qz+c)}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{D_{12}(z)}{D_{14}(z)}e^{h_2(qz+c)-h_1(z)}\right) \right. \\ &\left. + \overline{N}\left(r, \frac{D_{13}(z)}{D_{14}(z)}e^{2h_2(qz+c)}\right)\right\} \\ &= O(\log r) = o(T(r)), \end{aligned}$$

其中

$$T(r) = \max\{T(r, e^{h_1(z)+h_2(qz+c)}), T(r, e^{h_2(qz+c)-h_1(z)}), T(r, e^{2h_2(qz+c)})\}.$$

因此, 再结合引理 2.3 和 (3.4) 可得 $\frac{D_{12}(z)}{D_{14}(z)}e^{h_2(qz+c)-h_1(z)} \equiv 1$ 或 $\frac{D_{11}(z)}{D_{14}(z)}e^{h_1(z)+h_2(qz+c)} \equiv 1$, 这意味着

$$D_{12}(z)e^{h_2(qz+c)-h_1(z)} - D_{14}(z) \equiv 0 \quad \text{或} \quad D_{11}(z)e^{h_1(z)+h_2(qz+c)} - D_{14}(z) \equiv 0. \quad (3.6)$$

同样地, 由 (3.5) 可得

$$D_{22}(z)e^{h_1(qz+c)-h_2(z)} - D_{24}(z) \equiv 0 \quad \text{或} \quad D_{21}(z)e^{h_2(z)+h_1(qz+c)} - D_{24}(z) \equiv 0. \quad (3.7)$$

下面分四种情形证明定理 1.3.

情形 1 $D_{12}(z)e^{h_2(qz+c)-h_1(z)} - D_{14}(z) \equiv 0$ 且 $D_{22}(z)e^{h_1(qz+c)-h_2(z)} - D_{14}(z) \equiv 0$.

显然, $h_2(qz+c) - h_1(z)$ 和 $h_1(qz+c) - h_2(z)$ 都是常数. 因此设 $h_2(qz+c) - h_1(z) \equiv C_1$, $h_1(qz+c) - h_2(z) \equiv C_2$, 其中 C_1, C_2 是常数. 那么可得 $\deg D_{12}(z) = \deg D_{14}(z)$, $\deg D_{22}(z) = \deg D_{24}(z)$. 结合 (3.4) 和 (3.5) 可知

$$\deg Q_{12} + k \deg h'_1 = \deg Q_{22}, \quad \deg Q_{22} + k \deg h'_2 = \deg Q_{12},$$

这意味着 $k \deg h'_1 + k \deg h'_2 = 0$. 又因为 h_1, h_2 都是非常数多项式, 所以 $\deg h_1 = \deg h_2 = 1$. 因此设 $h_1(z) = a_1z + b_1$, $h_2(z) = a_2z + b_2$, 其中 $a_1 (\neq 0), a_2 (\neq 0), b_1, b_2$ 是常数. 因为 $h_2(qz+c) - h_1(z) \equiv C_1$ 和 $h_1(qz+c) - h_2(z) \equiv C_2$, 所以 $a_2q = a_1, a_1q = a_2$. 那么 $a_1a_2q^2 = a_1a_2$. 所以可以得到 $q = 1$ 或 $q = -1$. 下面再分为两种子情形.

情形 1.1 $q = 1$. 此时易知 $a_1 = a_2 = a$. 因此可设 $h_1(z) = az + b_1$, $h_2(z) = az + b_2$. 那么结合 (3.4)–(3.7) 可得

$$\begin{cases} -(-a)^k Q_{12}(z) - k(-a)^{k-1} Q'_{12}(z) - \cdots - Q_{12}^{(k)}(z) = \alpha_1 e^{-ac+b_1-b_2} Q_{22}(z+c), \\ -(-a)^k Q_{22}(z) - k(-a)^{k-1} Q'_{22}(z) - \cdots - Q_{22}^{(k)}(z) = \alpha_1 e^{-ac-b_1+b_2} Q_{12}(z+c), \\ a^k Q_{11}(z) + ka^{k-1} Q'_{11}(z) + \cdots + Q_{11}^{(k)}(z) = -\alpha_2 e^{ac-b_1+b_2} Q_{21}(z+c), \\ a^k Q_{21}(z) + ka^{k-1} Q'_{21}(z) + \cdots + Q_{21}^{(k)}(z) = -\alpha_2 e^{ac+b_1-b_2} Q_{11}(z+c). \end{cases} \quad (3.8)$$

由 (3.8) 易知 $\deg Q_{12}(z) = \deg Q_{22}(z)$ 和 $\deg Q_{21}(z) = \deg Q_{11}(z)$. 下面证明 $Q_{11}(z)$, $Q_{12}(z)$, $Q_{21}(z)$, $Q_{22}(z)$ 都是非零常数.

令

$$\begin{cases} Q_{11}(z) = a_s z^s + a_{s-1} z^{s-1} + \cdots + a_0, & a_s \neq 0, \\ Q_{12}(z) = b_t z^t + a_{t-1} z^{t-1} + \cdots + b_0, & b_t \neq 0, \\ Q_{21}(z) = l_s z^s + l_{s-1} z^{s-1} + \cdots + l_0, & l_s \neq 0, \\ Q_{22}(z) = m_t z^t + m_{t-1} z^{t-1} + \cdots + m_0, & m_t \neq 0, \end{cases} \quad (3.9)$$

其中 s, t 是非负整数, 且 $a_i, l_i (i = 0, \dots, s-1, s)$, $b_j, m_j (j = 0, \dots, t-1, t)$ 是常数. 将 (3.9) 代入 (3.8) 并比较其中 $z^s, z^{s-1}, z^t, z^{t-1}$ 项的系数, 可得

$$\begin{cases} -(-a)^k b_t = \alpha_1 e^{-ac+b_1-b_2} m_t, \\ -(-a)^k m_t = \alpha_1 e^{-ac-b_1+b_2} b_t, \\ a^k a_s = -\alpha_2 e^{ac-b_1+b_2} l_s, \\ a^k l_s = -\alpha_2 e^{ac+b_1-b_2} a_s, \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\begin{cases} -(-a)^k b_{t-1} - kt(-a)^{k-1} b_t = \alpha_1 e^{-ac+b_1-b_2} (m_t c t + m_{t-1}), \\ -(-a)^k m_{t-1} - kt(-a)^{k-1} m_t = \alpha_1 e^{-ac-b_1+b_2} (b_t c t + b_{t-1}), \\ a^k a_{s-1} + ksa^{k-1} a_s = -\alpha_2 e^{ac-b_1+b_2} (l_s c s + l_{s-1}), \\ a^k l_{s-1} + ksa^{k-1} l_s = -\alpha_2 e^{ac+b_1-b_2} (a_s c s + a_{s-1}). \end{cases} \quad (3.11)$$

那么由方程组 (3.10) 的第一式和第二式可得 $a^{2k} = \alpha_1^2 e^{-2ac}$, 由方程组 (3.10) 的第三式和第四式可得 $a^{2k} = \alpha_2^2 e^{2ac}$, 因此易知 $a^{4k} = (\alpha_1 \alpha_2)^2 = 1$.

结合 (3.10)–(3.11), 经简单计算, 可得

$$\begin{cases} am_t b_{t-1} - ktm_t b_t = am_t b_t c t + am_{t-1} b_t, \\ am_{t-1} b_t - ktm_t b_t = am_t b_t c t + am_t b_{t-1}, \\ aa_{s-1} l_s + ksa_s l_s = aa_s l_s c s + aa_s l_{s-1}, \\ al_{s-1} a_s + ksa_s l_s = aa_s l_s c s + al_s a_{s-1}. \end{cases} \quad (3.12)$$

那么由 (3.12) 的第一式和第二式可得 $m_t b_t t(k+ac) = 0$, 所以 $t = 0$ 或 $ac+k = 0$. 若 $ac = -k$, 则 $a^{2k} = -e^{-2ac} = -e^{2k} = \pm 1$, 这与 k 是正整数矛盾. 因此 $t = 0$. 同样地, $s = 0$ 可由 (3.12) 的第三式和第四式得到. 综上, 可知 $Q_{11}(z), Q_{12}(z), Q_{21}(z), Q_{22}(z)$ 是非零常数. 因此设 $Q_{11}(z) = q_{11}, Q_{12}(z) = q_{12}, Q_{21}(z) = q_{21}, Q_{22}(z) = q_{22}$. 那么, 结合方程组 (3.2) 和方程组 (3.3), 可得

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{\alpha_2 q_{11} e^{az+b_1} - \alpha_1 q_{12} (-1)^k e^{-az-b_1}}{(\alpha_2 - \alpha_1) a^k} + J_{k-1}(z), \\ f_2(z) &= \frac{\alpha_2 q_{21} e^{az+b_2} - \alpha_1 q_{22} (-1)^k e^{-az-b_2}}{(\alpha_2 - \alpha_1) a^k} + K_{k-1}(z), \end{aligned}$$

其中 $J_{k-1}(z), K_{k-1}(z)$ 是 z 的多项式且 $\deg J_{k-1}(z) \leq k-1, \deg K_{k-1}(z) \leq k-1$. 同理, 由方程组 (3.2) 和方程组 (3.3), 可得

$$\begin{aligned} f_1(z+c) &= \frac{q_{21} e^{az+b_2} - q_{22} e^{-az-b_2}}{\alpha_1 - \alpha_2}, \\ f_2(z+c) &= \frac{q_{11} e^{az+b_1} - q_{12} e^{-az-b_1}}{\alpha_1 - \alpha_2}. \end{aligned}$$

结合上述四式中 $f_1(z)$ 和 $f_1(z+c)$ 的形式, 可得

$$\begin{cases} \alpha_2 q_{11} e^{ac+b_1} = -a^k q_{21} e^{b_2}, \\ \alpha_1 q_{12} (-1)^k e^{-ac-b_1} = -a^k q_{22} e^{-b_2}, \\ J_{k-1}(z) \equiv 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

同样地, 由 $f_2(z)$ 和 $f_2(z+c)$ 的形式可得 $K_{k-1}(z) \equiv 0$. 结合 (3.13) 的第一式和第二式知 $q_1(-1)^k = a^{2k} q_2$, 其中 $q_1 = q_{11} q_{12}, q_2 = q_{21} q_{22}$. 又由于 $a^{4k} = 1$, 可得 $q_2 = \pm q_1$.

情形 1.2 $q = -1$. 此时易知 $a_1 = -a_2 = a$. 因此设 $h_1(z) = az + b_1, h_2(z) = -az + b_2$. 那么, 结合 (3.4)–(3.7), 可得

$$\begin{cases} -(-a)^k Q_{12}(z) - k(-a)^{k-1} Q'_{12}(z) - \cdots - Q_{12}^{(k)}(z) = (-1)^k \alpha_1 e^{ac+b_1-b_2} Q_{22}(-z+c), \\ -a^k Q_{22}(z) - ka^{k-1} Q'_{22}(z) - \cdots - Q_{22}^{(k)}(z) = (-1)^k \alpha_1 e^{-ac-b_1+b_2} Q_{12}(-z+c), \\ a^k Q_{11}(z) + ka^{k-1} Q'_{11}(z) + \cdots + Q_{11}^{(k)}(z) = -(-1)^k \alpha_2 e^{-ac-b_1+b_2} Q_{21}(-z+c), \\ (-a)^k Q_{21}(z) + k(-a)^{k-1} Q'_{21}(z) + \cdots + Q_{21}^{(k)}(z) = (-1)^k \alpha_2 e^{ac+b_1-b_2} Q_{11}(-z+c). \end{cases} \quad (3.14)$$

由 (3.14) 可知 $\deg Q_{12}(z) = \deg Q_{22}(z)$ 和 $\deg Q_{21}(z) = \deg Q_{11}(z)$. 下面证明 $Q_{11}(z), Q_{12}(z), Q_{21}(z), Q_{22}(z)$ 是非零常数.

将 (3.9) 代入 (3.14), 并比较 $z^s, z^{s-1}, z^t, z^{t-1}$ 项的系数, 显然可以得出

$$\begin{cases} -(-a)^k b_t = (-1)^{t+k} \alpha_1 e^{ac+b_1-b_2} m_t, \\ -a^k m_t = (-1)^{t+k} \alpha_1 e^{-ac-b_1+b_2} b_t, \\ a^k a_s = -(-1)^{s+k} \alpha_2 e^{-ac-b_1+b_2} l_s, \\ (-a)^k l_s = -(-1)^{s+k} \alpha_2 e^{ac+b_1-b_2} a_s, \end{cases} \quad (3.15)$$

$$\begin{cases} -(-a)^k b_{t-1} - kt(-a)^{k-1} b_t = (-1)^{t+k-1} \alpha_1 e^{ac+b_1-b_2} (m_t ct + m_{t-1}), \\ -a^k m_{t-1} - kta^{k-1} m_t = (-1)^{t+k-1} \alpha_1 e^{-ac-b_1+b_2} (b_t ct + b_{t-1}), \\ a^k a_{s-1} + ksa^{k-1} a_s = -(-1)^{s+k-1} \alpha_2 e^{-ac-b_1+b_2} (l_s cs + l_{s-1}), \\ (-a)^k l_{s-1} + ks(-a)^{k-1} l_s = -(-1)^{s+k-1} \alpha_2 e^{ac+b_1-b_2} (a_s cs + a_{s-1}). \end{cases} \quad (3.16)$$

那么由方程组 (3.15) 的第一式和第二式可得 $(-1)^k a^{2k} = \alpha_1^2$, 由方程组 (3.15) 的第三式和第四式可得 $(-1)^k a^{2k} = \alpha_2^2$, 因此 $a^{4k} = 1$.

结合方程组 (3.15) 和方程组 (3.16), 经简单计算, 可得

$$\begin{cases} -am_t b_{t-1} + ktm_t b_t = am_t b_t ct + am_{t-1} b_t, \\ am_{t-1} b_t + ktm_t b_t = -am_t b_t ct - am_t b_{t-1}, \\ -aa_{s-1} l_s - ksa_s l_s = aa_s l_s cs + aa_s l_{s-1}, \\ al_{s-1} a_s - ksa_s l_s = -aa_s l_s cs - al_s a_{s-1}. \end{cases} \quad (3.17)$$

由方程组 (3.17) 的第一式和第二式易知 $am_t b_t ct + am_{t-1} b_t = -am_t b_{t-1}$, 进一步可以算出 $m_t b_t kt = 0$, 这意味着 $t = 0$. 同样地, 由方程组 (3.17) 的第三式和第四式可得 $s = 0$. 因此可知 $Q_{11}(z), Q_{12}(z), Q_{21}(z), Q_{22}(z)$ 是非零常数. 因此可设 $Q_{11}(z) = q_{11}, Q_{12}(z) = q_{12}, Q_{21}(z) = q_{21}, Q_{22}(z) = q_{22}$. 那么, 结合 (3.2) 和 (3.3), 可得

$$f_1(z) = \frac{\alpha_2 q_{11} e^{az+b_1} - \alpha_1 q_{12} (-1)^k e^{-az-b_1}}{(\alpha_2 - \alpha_1) a^k} + J_{k-1}(z),$$

$$f_2(z) = \frac{\alpha_2 q_{21} (-1)^k e^{-az+b_2} - \alpha_1 q_{22} e^{az-b_2}}{(\alpha_2 - \alpha_1) a^k} + K_{k-1}(z),$$

其中 $J_{k-1}(z), K_{k-1}(z)$ 是 z 的多项式且 $\deg J_{k-1}(z) \leq k-1, \deg K_{k-1}(z) \leq k-1$. 同样地, 由 (3.2) 和 (3.3), 可得

$$f_1(-z+c) = \frac{q_{21} e^{-az+b_2} - q_{22} e^{az-b_2}}{\alpha_1 - \alpha_2},$$

$$f_2(-z+c) = \frac{q_{11} e^{az+b_1} - q_{12} e^{-az-b_1}}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

结合上述四式中 $f_1(z)$ 和 $f_1(-z+c)$ 的形式, 可得

$$\begin{cases} \alpha_2 q_{11} e^{ac+b_1} = a^k q_{21} e^{b_2}, \\ \alpha_1 q_{12} (-1)^k e^{-ac-b_1} = a^k q_{22} e^{-b_2}, \\ J_{k-1}(z) \equiv 0, \end{cases} \quad (3.18)$$

并由 $f_2(z)$ 和 $f_2(-z+c)$ 的形式可得 $K_{k-1}(z) \equiv 0$. 结合方程组 (3.18) 的第一式和第二式可以算出 $q_1 (-1)^k = a^{2k} q_2$, 其中 $q_1 = q_{11} q_{12}, q_2 = q_{21} q_{22}$. 又因为 $a^{4k} = 1$, 所以 $q_2 = \pm q_1$.

情形 2 $D_{22}(z) e^{h_1(qz+c)-h_2(z)} - D_{24}(z) \equiv 0$ 且 $D_{11}(z) e^{h_1(z)+h_2(qz+c)} - D_{14}(z) \equiv 0$.

显然, $h_1(qz+c)-h_2(z)$ 和 $h_1(z)+h_2(qz+c)$ 是常数. 因此设 $h_1(qz+c)-h_2(z) \equiv C_1$ 和 $h_1(z)+h_2(qz+c) \equiv C_2$, 其中 C_1, C_2 是常数. 因此 $\deg D_{22}(z) = \deg D_{24}(z), \deg D_{11}(z) =$

$\deg D_{14}(z)$. 结合 (3.4) 和 (3.5), 可得

$$\deg Q_{22} + k \deg h_2' = \deg Q_{12}, \quad \deg Q_{11} + k \deg h_1' = \deg Q_{22},$$

这意味着

$$\begin{aligned} D_{23}(z) &= -D_{21}(z)e^{h_2(z)-h_1(qz+c)} = -D_{21}(z)e^{-c_1}, \\ D_{13}(z) &= -D_{12}(z)e^{-h_2(qz+c)-h_1(z)} = -D_{12}(z)e^{-c_2}, \end{aligned}$$

因此

$$\deg Q_{21} + k \deg h_2' = \deg Q_{11}, \quad \deg Q_{12} + k \deg h_1' = \deg Q_{21}.$$

综上, 可以得到 $2k \deg h_1' + 2k \deg h_2' = 0$, 即 $\deg h_1' = \deg h_2' = 0$. 所以可知 $h_1(z)$ 和 $h_2(z)$ 是一次多项式. 因此设 $h_1(z) = a_1z + b_1$, $h_2(z) = a_2z + b_2$, 其中 $a_1 (\neq 0)$, $a_2 (\neq 0)$, b_1, b_2 是常数. 因为 $h_1(qz+c) - h_2(z) \equiv C_1$ 和 $h_1(z) + h_2(qz+c) \equiv C_2$, 所以 $a_1q = a_2$, $a_2q = -a_1$, 那么 $a_1a_2q^2 = -a_1a_2$. 故可以得到 $q = i$ 或 $q = -i$.

情形 2.1 $q = i$. 此时有 $a_1 = -ia_2 = a$. 因此设 $h_1(z) = az + b_1$, $h_2(z) = iaz + b_2$. 结合式 (3.4)–(3.7), 可得

$$\begin{cases} -(-ia)^k Q_{22}(z) - k(-ia)^{k-1} Q_{22}'(z) - \cdots - Q_{22}^{(k)}(z) = \alpha_1 i^k e^{-ac-b_1+b_2} Q_{12}(iz+c), \\ a^k Q_{11}(z) + ka^{k-1} Q_{11}'(z) + \cdots + Q_{11}^{(k)}(z) = \alpha_1 i^k e^{-iac-b_1-b_2} Q_{22}(iz+c), \\ (ia)^k Q_{21}(z) + k(ia)^{k-1} Q_{21}'(z) + \cdots + Q_{21}^{(k)}(z) = -\alpha_2 i^k e^{ac+b_1-b_2} Q_{11}(iz+c), \\ -(-a)^k Q_{12}(z) - k(-a)^{k-1} Q_{12}'(z) - \cdots - Q_{12}^{(k)}(z) = -\alpha_2 i^k e^{iac+b_1+b_2} Q_{21}(iz+c). \end{cases} \quad (3.19)$$

由 (3.19) 易知 $\deg Q_{11}(z) = \deg Q_{12}(z) = \deg Q_{21}(z) = \deg Q_{22}(z)$. 因此由 (3.9) 定义的 t 和 s 满足关系 $t = s$. 下面证明 $Q_{11}(z)$, $Q_{12}(z)$, $Q_{21}(z)$, $Q_{22}(z)$ 是非零常数.

将 (3.9) 代入 (3.19) 并比较 z^s 和 z^{s-1} 项的系数, 经简单计算, 可得

$$\begin{cases} -(-ia)^k m_s = i^{k+s} \alpha_1 e^{-ac-b_1+b_2} b_s, \\ a^k a_s = i^{k+s} \alpha_1 e^{-iac-b_1-b_2} m_s, \\ (ia)^k l_s = -i^{k+s} \alpha_2 e^{ac+b_1-b_2} a_s, \\ -(-a)^k b_s = -i^{k+s} \alpha_2 e^{iac+b_1+b_2} l_s, \end{cases} \quad (3.20)$$

$$\begin{cases} -(-ia)^k m_{s-1} - k s m_s (-ia)^{k-1} = i^{k+s-1} \alpha_1 e^{-ac-b_1+b_2} (c s b_s + b_{s-1}), \\ a^k a_{s-1} + k s a_s a^{k-1} = i^{k+s-1} \alpha_1 e^{-iac-b_1-b_2} (c s m_s + m_{s-1}), \\ (ia)^k l_{s-1} + k s l_s (ia)^{k-1} = -i^{k+s-1} \alpha_2 e^{ac+b_1-b_2} (c s a_s + a_{s-1}), \\ -(-a)^k b_{s-1} - k s b_s (-a)^{k-1} = -i^{k+s-1} \alpha_2 e^{-iac+b_1+b_2} (c s l_s + l_{s-1}). \end{cases} \quad (3.21)$$

显然, 由 (3.20) 可知 $(-1)^k a^{4k} = 1$. 比较 (3.20) 和 (3.21), 可得

$$\begin{cases} sb_s m_s(k+ac) = iam_{s-1} b_s - am_s b_{s-1}, \\ sa_s m_s(ik-ac) = -iaa_{s-1} m_s + aa_s m_{s-1}, \\ sa_s l_s(k-ac) = -ial_{s-1} a_s + al_s a_{s-1}, \\ sb_s l_s(ik+ac) = iab_{s-1} l_s - ab_s l_{s-1}. \end{cases} \quad (3.22)$$

那么由方程组 (3.22) 的第一式和第二式, 可得

$$sa_s b_s m_s(2ik+iac-ac) = -iam_s(a_s b_{s-1} + a_{s-1} b_s),$$

由方程组 (3.22) 的第三式和第四式, 可得

$$sa_s b_s l_s(2ik-iac+ac) = ial_s(a_s b_{s-1} + a_{s-1} b_s).$$

故 $s=0$, 所以 $Q_{11}(z), Q_{12}(z), Q_{21}(z), Q_{22}(z)$ 是非零常数. 因此设 $Q_{11}(z) = q_{11}, Q_{12}(z) = q_{12}, Q_{21}(z) = q_{21}, Q_{22}(z) = q_{22}$.

结合 (3.2) 和 (3.3), 可得

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{\alpha_2 q_{11} e^{az+b_1} - \alpha_1 q_{12} (-1)^k e^{-az-b_1}}{(\alpha_2 - \alpha_1) a^k} + J_{k-1}(z), \\ f_2(z) &= \frac{\alpha_2 q_{21} e^{iaz+b_2} - \alpha_1 q_{22} (-1)^k e^{-iaz-b_2}}{(\alpha_2 - \alpha_1) (ia)^k} + K_{k-1}(z), \end{aligned}$$

其中 $J_{k-1}(z), K_{k-1}(z)$ 是 z 的多项式且 $\deg J_{k-1}(z) \leq k-1, \deg K_{k-1}(z) \leq k-1$. 同样地, 由 (3.2) 和 (3.3) 可得

$$f_1(iz+c) = \frac{q_{21} e^{iaz+b_2} - q_{22} e^{-iaz-b_2}}{\alpha_1 - \alpha_2}, \quad f_2(iz+c) = \frac{q_{11} e^{az+b_1} - q_{12} e^{-az-b_1}}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

那么, 在上述四式中结合 $f_1(z)$ 和 $f_1(iz+c)$ 的形式, 容易算出

$$\begin{cases} \alpha_2 q_{11} e^{ac+b_1} = -a^k q_{21} e^{b_2}, \\ \alpha_1 q_{12} (-1)^k e^{-ac-b_1} = -a^k q_{22} e^{-b_2}, \\ J_{k-1}(z) \equiv 0, \end{cases} \quad (3.23)$$

且由 $f_2(z)$ 和 $f_2(iz+c)$ 的形式有 $K_{k-1}(z) \equiv 0$. 结合方程组 (3.23) 的第一式和第二式可得 $q_1(-1)^k = a^{2k} q_2$, 其中 $q_1 = q_{11} q_{12}, q_2 = q_{21} q_{22}$. 又因为 $a^{4k} = (-1)^k$, 所以若 k 是奇数, 则 $q_2 = \pm i q_1$, 若 k 是偶数, 则 $q_2 = \pm q_1$.

情形 2.2 $q = -i$. 此时易知 $a_1 = ia_2 = a$. 因此设 $h_1(z) = az + b_1, h_2(z) = -iaz + b_2$. 那么结合 (3.4)–(3.7), 可得

$$\begin{cases} -(ia)^k Q_{22}(z) - k(ia)^{k-1} Q'_{22}(z) - \cdots - Q_{22}^{(k)}(z) = \alpha_1 (-i)^k e^{-ac-b_1+b_2} Q_{12}(-iz+c), \\ a^k Q_{11}(z) + ka^{k-1} Q'_{11}(z) + \cdots + Q_{11}^{(k)}(z) = \alpha_1 (-i)^k e^{iac+b_1-b_2} Q_{22}(-iz+c), \\ (-ia)^k Q_{21}(z) + k(ia)^{k-1} Q'_{21}(z) + \cdots + Q_{21}^{(k)}(z) = -\alpha_2 (-i)^k e^{ac+b_1-b_2} Q_{11}(-iz+c), \\ -(-a)^k Q_{12}(z) - k(-a)^{k-1} Q'_{12}(z) - \cdots - Q_{12}^{(k)}(z) = -\alpha_2 (-i)^k e^{-iac+b_1+b_2} Q_{21}(-iz+c). \end{cases} \quad (3.24)$$

由 (3.24) 可知 $\deg Q_{11}(z) = \deg Q_{12}(z) = \deg Q_{21}(z) = \deg Q_{22}(z)$. 因此由 (3.9) 定义的 t 和 s 满足关系 $t = s$. 下面证明 $Q_{11}(z), Q_{12}(z), Q_{21}(z), Q_{22}(z)$ 是非零常数.

将 (3.9) 代入 (3.24) 并比较 z^s 和 z^{s-1} 项的系数, 经简单计算, 可得

$$\begin{cases} -(\mathrm{i}a)^k m_s = (-\mathrm{i})^{k+s} \alpha_1 e^{-ac-b_1+b_2} b_s, \\ a^k a_s = (-\mathrm{i})^{k+s} \alpha_1 e^{\mathrm{i}ac+b_1-b_2} m_s, \\ (-\mathrm{i}a)^k l_s = -(-\mathrm{i})^{k+s} \alpha_2 e^{ac+b_1-b_2} a_s, \\ -(-a)^k b_s = -(-\mathrm{i})^{k+s} \alpha_2 e^{-\mathrm{i}ac+b_1+b_2} l_s, \end{cases} \quad (3.25)$$

$$\begin{cases} -(\mathrm{i}a)^k m_{s-1} - k s m_s (\mathrm{i}a)^{k-1} = (-\mathrm{i})^{k+s-1} \alpha_1 e^{-ac-b_1+b_2} (c s b_s + b_{s-1}), \\ a^k a_{s-1} + k s a_s a^{k-1} = (-\mathrm{i})^{k+s-1} \alpha_1 e^{\mathrm{i}ac+b_1-b_2} (c s m_s + m_{s-1}), \\ (-\mathrm{i}a)^k l_{s-1} + k s l_s (-\mathrm{i}a)^{k-1} = -(-\mathrm{i})^{k+s-1} \alpha_2 e^{ac+b_1-b_2} (c s a_s + a_{s-1}), \\ -(-a)^k b_{s-1} - k s b_s (-a)^{k-1} = -(-\mathrm{i})^{k+s-1} \alpha_2 e^{-\mathrm{i}ac+b_1+b_2} (c s l_s + l_{s-1}). \end{cases} \quad (3.26)$$

显然, 由 (3.25) 可知 $(-1)^k a^{4k} = 1$. 接下来, 采取与情形 2.1 相似的讨论方法, 可得 $s = 0$, 且 $Q_{11}(z), Q_{12}(z), Q_{21}(z), Q_{22}(z)$ 是非零常数. 因此设 $Q_{11}(z) = q_{11}, Q_{12}(z) = q_{12}, Q_{21}(z) = q_{21}, Q_{22}(z) = q_{22}$. 那么, 结合 (3.2) 和 (3.3), 可得

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{\alpha_2 q_{11} e^{az+b_1} - \alpha_1 q_{12} (-1)^k e^{-az-b_1}}{(\alpha_2 - \alpha_1) a^k} + J_{k-1}(z), \\ f_2(z) &= \frac{\alpha_2 q_{21} (-1)^k e^{-iaz+b_2} - \alpha_1 q_{22} e^{\mathrm{i}az-b_2}}{(\alpha_2 - \alpha_1) (\mathrm{i}a)^k} + K_{k-1}(z), \end{aligned}$$

其中 $J_{k-1}(z), K_{k-1}(z)$ 是 z 的多项式且 $\deg J_{k-1}(z) \leq k-1, \deg K_{k-1}(z) \leq k-1$. 同理, 由 (3.2) 和 (3.3), 可知

$$\begin{aligned} f_1(-iz+c) &= \frac{q_{21} e^{-iaz+b_2} - q_{22} e^{\mathrm{i}az-b_2}}{\alpha_1 - \alpha_2}, \\ f_2(-iz+c) &= \frac{q_{11} e^{az+b_1} - q_{12} e^{-az-b_1}}{\alpha_1 - \alpha_2}. \end{aligned}$$

在上述四式中, 结合 $f_1(z)$ 和 $f_1(-iz+c)$ 的形式, 可知

$$\begin{cases} \alpha_2 q_{11} e^{ac+b_1} = -a^k q_{21} e^{b_2}, \\ \alpha_1 q_{12} (-1)^k e^{-ac-b_1} = -a^k q_{22} e^{-b_2}, \\ J_{k-1}(z) \equiv 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

由 $f_2(z)$ 和 $f_2(-iz+c)$ 的形式可知 $K_{k-1}(z) \equiv 0$. 结合方程组 (3.27) 的第一式和第二式可以算出 $q_1(-1)^k = a^{2k} q_2$, 其中 $q_1 = q_{11} q_{12}, q_2 = q_{21} q_{22}$. 又因为 $a^{4k} = (-1)^k$, 可得若 k 是奇数, 则 $q_2 = \pm i q_1$, 若 k 是偶数, 则 $q_2 = \pm q_1$.

情形 3 $D_{21}(z) e^{h_1(qz+c)+h_2(z)} - D_{24}(z) \equiv 0$ 且 $D_{12}(z) e^{h_2(qz+c)-h_1(z)} - D_{14}(z) \equiv 0$.

显然可知 $h_1(qz+c) + h_2(z) \equiv C_1$ 和 $h_2(qz+c) - h_1(z) \equiv C_2$, 其中 C_1, C_2 是常数. 与情形 2 的讨论相似, 可得 $h_1(z), h_2(z)$ 是一次多项式. 因此设 $h_1(z) = a_1 z + b_1, h_2(z) = a_2 z + b_2$, 其中 $a_1 (\neq 0), a_2 (\neq 0), b_1, b_2$ 是常数. 因为 $h_1(qz+c) + h_2(z) \equiv C_1$,

$h_2(qz+c) - h_1(z) \equiv C_2$, 所以 $a_1q = -a_2$, $a_2q = a_1$, 故 $a_1a_2q^2 = -a_1a_2$. 那么易知 $q = i$ 或 $q = -i$.

情形 3.1 $q = i$. 此时易知 $a_1 = ia_2 = a$. 因此设 $h_1(z) = az + b_1$, $h_2(z) = -iaz + b_2$. 那么结合 (3.4)–(3.7), 可得

$$\begin{cases} -(-a)^k Q_{12}(z) - k(-a)^{k-1} Q'_{12}(z) - \cdots - Q_{12}^{(k)}(z) = \alpha_1 i^k e^{iac+b_1-b_2} Q_{22}(iz+c), \\ (-ia)^k Q_{21}(z) + k(-ia)^{k-1} Q'_{21}(z) + \cdots + Q_{21}^{(k)}(z) = \alpha_1 i^k e^{-ac-b_1-b_2} Q_{12}(iz+c), \\ a^k Q_{11}(z) + ka^{k-1} Q'_{11}(z) - \cdots - Q_{11}^{(k)}(z) = -\alpha_2 i^k e^{-iac-b_1+b_2} Q_{21}(iz+c), \\ -(ia)^k Q_{22}(z) - k(ia)^{k-1} Q'_{22}(z) - \cdots - Q_{22}^{(k)}(z) = -\alpha_2 i^k e^{ac+b_1+b_2} Q_{11}(iz+c). \end{cases} \quad (3.28)$$

由 (3.28) 易知 $\deg Q_{11}(z) = \deg Q_{12}(z) = \deg Q_{21}(z) = \deg Q_{22}(z)$. 因此 (3.9) 定义的 t 和 s 满足关系 $t = s$. 下面证明 $Q_{11}(z)$, $Q_{12}(z)$, $Q_{21}(z)$, $Q_{22}(z)$ 是非零常数.

将 (3.9) 代入 (3.28) 并比较 z^s 和 z^{s-1} 项的系数, 经简单计算, 可得

$$\begin{cases} -(-a)^k b_s = i^{k+s} \alpha_1 e^{iac+b_1-b_2} m_s, \\ (-ia)^k l_s = i^{k+s} \alpha_1 e^{-ac-b_1-b_2} b_s, \\ a^k a_s = -i^{k+s} \alpha_2 e^{-iac-b_1+b_2} l_s, \\ -(ia)^k m_s = -i^{k+s} \alpha_2 e^{ac+b_1+b_2} a_s, \\ -(-a)^k b_{s-1} - ks b_s (-a)^{k-1} = i^{k+s-1} \alpha_1 e^{iac+b_1-b_2} (csm_s + m_{s-1}), \\ (-ia)^k l_{s-1} + ksl_s (-ia)^{k-1} = i^{k+s-1} \alpha_1 e^{-ac-b_1-b_2} (csb_s + b_{s-1}), \\ a^k a_{s-1} + ksa_s a^{k-1} = -i^{k+s-1} \alpha_2 e^{-iac-b_1+b_2} (csl_s + l_{s-1}), \\ -(ia)^k m_{s-1} - ksm_s (ia)^{k-1} = -i^{k+s-1} \alpha_2 e^{ac+b_1+b_2} (csa_s + a_{s-1}). \end{cases} \quad (3.29)$$

$$\begin{cases} -(-a)^k b_{s-1} - ks b_s (-a)^{k-1} = i^{k+s-1} \alpha_1 e^{iac+b_1-b_2} (csm_s + m_{s-1}), \\ (-ia)^k l_{s-1} + ksl_s (-ia)^{k-1} = i^{k+s-1} \alpha_1 e^{-ac-b_1-b_2} (csb_s + b_{s-1}), \\ a^k a_{s-1} + ksa_s a^{k-1} = -i^{k+s-1} \alpha_2 e^{-iac-b_1+b_2} (csl_s + l_{s-1}), \\ -(ia)^k m_{s-1} - ksm_s (ia)^{k-1} = -i^{k+s-1} \alpha_2 e^{ac+b_1+b_2} (csa_s + a_{s-1}). \end{cases} \quad (3.30)$$

显然, 由 (3.29) 可得 $(-1)^k a^{4k} = 1$. 采取与情形 2.1 相似的讨论方式, 可得 $ksa_s b_s = 0$, 所以 $s = 0$. 因此 $Q_{11}(z)$, $Q_{12}(z)$, $Q_{21}(z)$, $Q_{22}(z)$ 是非零常数. 设 $Q_{11}(z) = q_{11}$, $Q_{12}(z) = q_{12}$, $Q_{21}(z) = q_{21}$, $Q_{22}(z) = q_{22}$. 那么, 结合 (3.2) 和 (3.3), 可得

$$f_1(z) = \frac{\alpha_2 q_{11} e^{az+b_1} - \alpha_1 q_{12} (-1)^k e^{-az-b_1}}{(\alpha_2 - \alpha_1) a^k} + J_{k-1}(z),$$

$$f_2(z) = \frac{\alpha_2 q_{21} (-1)^k e^{-iaz+b_2} - \alpha_1 q_{22} e^{iaz-b_2}}{(\alpha_2 - \alpha_1) (ia)^k} + K_{k-1}(z),$$

其中 $J_{k-1}(z)$, $K_{k-1}(z)$ 是 z 的多项式且 $\deg J_{k-1}(z) \leq k-1$, $\deg K_{k-1}(z) \leq k-1$. 同理

$$f_1(iz+c) = \frac{q_{21} e^{-iaz+b_2} - q_{22} e^{iaz-b_2}}{\alpha_1 - \alpha_2}, \quad f_2(iz+c) = \frac{q_{11} e^{az+b_1} - q_{12} e^{-az-b_1}}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

结合上述四式中 $f_1(z)$ 和 $f_1(iz+c)$ 的形式, 可得

$$\begin{cases} \alpha_2 q_{11} e^{ac+b_1} = a^k q_{22} e^{-b_2}, \\ \alpha_1 q_{12} (-1)^k e^{-ac-b_1} = a^k q_{21} e^{b_2}, \\ J_{k-1}(z) \equiv 0, \end{cases} \quad (3.31)$$

且由 $f_2(z)$ 和 $f_2(iz+c)$ 的形式, 可得 $K_{k-1}(z) \equiv 0$. 结合方程组 (3.31) 的第一式和第二式可以算出 $q_1(-1)^k = a^{2k}q_2$, 其中 $q_1 = q_{11}q_{12}$, $q_2 = q_{21}q_{22}$. 又因为 $a^{4k} = (-1)^k$, 所以若 k 是奇数, 则 $q_2 = \pm iq_1$, 若 k 是偶数, 则 $q_2 = \pm q_1$.

情形 3.2 $q = -i$. 此时易知 $a_1 = -ia_2 = a$. 因此设 $h_1(z) = az + b_1$, $h_2(z) = iaz + b_2$. 那么结合 (3.4)–(3.7), 可得

$$\begin{cases} -(-a)^k Q_{12}(z) - k(-a)^{k-1} Q'_{12}(z) - \cdots - Q_{12}^{(k)}(z) = \alpha_1 (-i)^k e^{-iac+b_1-b_2} Q_{22}(-iz+c), \\ (-ia)^k Q_{21}(z) + k(-ia)^{k-1} Q'_{21}(z) + \cdots + Q_{21}^{(k)}(z) = \alpha_1 (-i)^k e^{-ac-b_1-b_2} Q_{12}(-iz+c), \\ a^k Q_{11}(z) + ka^{k-1} Q'_{11}(z) + \cdots + Q_{11}^{(k)}(z) = -\alpha_2 (-i)^k e^{iac-b_1+b_2} Q_{21}(-iz+c), \\ -(-ia)^k Q_{22}(z) - k(-ia)^{k-1} Q'_{22}(z) - \cdots - Q_{22}^{(k)}(z) = -\alpha_2 (-i)^k e^{ac+b_1+b_2} Q_{11}(-iz+c). \end{cases} \quad (3.32)$$

由 (3.32) 易得 $\deg Q_{11}(z) = \deg Q_{12}(z) = \deg Q_{21}(z) = \deg Q_{22}(z)$. 因此由 (3.9) 定义的 t 和 s 满足关系 $t = s$. 接下来证明 $Q_{11}(z)$, $Q_{12}(z)$, $Q_{21}(z)$, $Q_{22}(z)$ 是非零常数.

将 (3.9) 代入 (3.32) 并比较 z^s 和 z^{s-1} 项的系数, 经简单计算, 可得

$$\begin{cases} -(-a)^k b_s = (-i)^{k+s} \alpha_1 e^{-iac+b_1-b_2} m_s, \\ (-ia)^k l_s = (-i)^{k+s} \alpha_1 e^{-ac-b_1-b_2} b_s, \\ a^k a_s = -(-i)^{k+s} \alpha_2 e^{iac-b_1+b_2} l_s, \\ -(-ia)^k m_s = -(-i)^{k+s} \alpha_2 e^{ac+b_1+b_2} a_s, \\ -(-a)^k b_{s-1} - k s b_s (-a)^{k-1} = (-i)^{k+s-1} \alpha_1 e^{-iac+b_1-b_2} (c s m_s + m_{s-1}), \\ (-ia)^k l_{s-1} + k s l_s (-ia)^{k-1} = (-i)^{k+s-1} \alpha_1 e^{-ac-b_1-b_2} (c s b_s + b_{s-1}), \\ a^k a_{s-1} + k s a_s a^{k-1} = -(-i)^{k+s-1} \alpha_2 e^{iac-b_1+b_2} (c s l_s + l_{s-1}), \\ -(-ia)^k m_{s-1} - k s m_s (ia)^{k-1} = -(-i)^{k+s-1} \alpha_2 e^{ac+b_1+b_2} (c s a_s + a_{s-1}). \end{cases} \quad (3.33)$$

显然, 由 (3.33) 可知 $(-1)^k a^{4k} = 1$. 接下来, 采取与情形 2.1 相似的讨论, 可得 $s = 0$, 因此 $Q_{11}(z)$, $Q_{12}(z)$, $Q_{21}(z)$, $Q_{22}(z)$ 是非零常数. 设 $Q_{11}(z) = q_{11}$, $Q_{12}(z) = q_{12}$, $Q_{21}(z) = q_{21}$, $Q_{22}(z) = q_{22}$. 那么, 结合 (3.2) 和 (3.3), 可知

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{\alpha_2 q_{11} e^{az+b_1} - \alpha_1 q_{12} (-1)^k e^{-az-b_1}}{(\alpha_2 - \alpha_1) a^k} + J_{k-1}(z), \\ f_2(z) &= \frac{\alpha_2 q_{21} e^{iaz+b_2} - \alpha_1 q_{22} (-1)^k e^{-iaz-b_2}}{(\alpha_2 - \alpha_1) (ia)^k} + K_{k-1}(z), \end{aligned}$$

其中 $J_{k-1}(z)$, $K_{k-1}(z)$ 是 z 的多项式且 $\deg J_{k-1}(z) \leq k-1$, $\deg K_{k-1}(z) \leq k-1$. 同理, 由 (3.2) 和 (3.3), 可得

$$f_1(-iz+c) = \frac{q_{21} e^{iaz+b_2} - q_{22} e^{-iaz-b_2}}{\alpha_1 - \alpha_2}, \quad f_2(-iz+c) = \frac{q_{11} e^{az+b_1} - q_{12} e^{-az-b_1}}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

结合上述四式中 $f_1(z)$ 和 $f_1(-iz+c)$ 的形式, 可得

$$\begin{cases} \alpha_2 q_{11} e^{ac+b_1} = a^k q_{22} e^{-b_2}, \\ \alpha_1 q_{12} (-1)^k e^{-ac-b_1} = a^k q_{21} e^{b_2}, \\ J_{k-1}(z) \equiv 0, \end{cases} \quad (3.35)$$

且由 $f_2(z)$ 和 $f_2(-iz+c)$ 的形式, 可得 $K_{k-1}(z) \equiv 0$. 结合方程组 (3.35) 的第一式和第二式, 可以算出 $q_1(-1)^k = a^{2k} q_2$, 其中 $q_1 = q_{11} q_{12}$, $q_2 = q_{21} q_{22}$. 又因为 $a^{4k} = (-1)^k$, 所以若 k 是奇数, 则 $q_2 = \pm i q_1$, 若 k 是偶数, 则 $q_2 = \pm q_1$.

情形 4 $D_{11}(z) e^{h_2(qz+c)+h_1(z)} - D_{14}(z) \equiv 0$ 且 $D_{21}(z) e^{h_1(qz+c)+h_2(z)} - D_{24}(z) \equiv 0$.

显然, $h_2(qz+c) + h_1(z)$ 和 $h_1(qz+c) + h_2(z)$ 是常数. 因此有 $h_2(qz+c) + h_1(z) \equiv C_1$, $h_1(qz+c) + h_2(z) \equiv C_2$, 其中 C_1, C_2 是常数. 与情形 1 的讨论方式相似, 可知 h_1, h_2 是一次多项式. 因此设 $h_1(z) = a_1 z + b_1$, $h_2(z) = a_2 z + b_2$, 其中 $a_1 (\neq 0), a_2 (\neq 0), b_1, b_2$ 是常数. 因为 $h_1(z) + h_2(qz+c) \equiv C_1$, $h_1(qz+c) + h_2(z) \equiv C_2$, 所以 $a_2 q = -a_1, a_1 q = -a_2$. 那么 $a_1 a_2 q^2 = a_1 a_2$, 显然有 $q = 1$ 或 $q = -1$. 下面再分为两种情形.

情形 4.1 $q = 1$. 此时易知 $a_1 = -a_2 = a$. 因此设 $h_1(z) = az + b_1, h_2(z) = -az + b_2$. 再结合 (3.4)–(3.7), 可知

$$\begin{cases} a^k Q_{11}(z) + k a^{k-1} Q'_{11}(z) + \cdots + Q_{11}^{(k)}(z) = \alpha_1 e^{ac-b_1-b_2} Q_{22}(z+c), \\ (-a)^k Q_{21}(z) + k(-a)^{k-1} Q'_{21}(z) + \cdots + Q_{21}^{(k)}(z) = \alpha_1 e^{-ac-b_1-b_2} Q_{12}(z+c), \\ -(-a)^k Q_{12}(z) - k(-a)^{k-1} Q'_{12}(z) - \cdots - Q_{12}^{(k)}(z) = -\alpha_2 e^{-ac+b_1+b_2} Q_{21}(z+c), \\ -a^k Q_{22}(z) - k a^{k-1} Q'_{22}(z) - \cdots - Q_{22}^{(k)}(z) = -\alpha_2 e^{ac+b_1+b_2} Q_{11}(z+c). \end{cases} \quad (3.36)$$

由 (3.36) 易得 $\deg Q_{11}(z) = \deg Q_{22}(z), \deg Q_{21}(z) = \deg Q_{12}(z)$. 下面证明 $Q_{11}(z), Q_{12}(z), Q_{21}(z), Q_{22}(z)$ 是非常数多项式. 令

$$\begin{cases} Q_{11}(z) = a_s z^s + a_{s-1} z^{s-1} + \cdots + a_0, & a_s \neq 0, \\ Q_{12}(z) = b_t z^t + b_{t-1} z^{t-1} + \cdots + b_0, & b_t \neq 0, \\ Q_{21}(z) = l_t z^t + l_{t-1} z^{t-1} + \cdots + l_0, & l_t \neq 0, \\ Q_{22}(z) = m_s z^s + m_{s-1} z^{s-1} + \cdots + m_0, & m_s \neq 0, \end{cases} \quad (3.37)$$

其中 s, t 是非负整数, 且 $a_i, m_i (i = 0, \dots, s-1, s), b_j, l_j (j = 0, \dots, t-1, t)$ 是常数. 比较方程组 (3.36) 中 z^s 和 z^{s-1} 项的系数, 经简单计算, 可得

$$\begin{cases} a^k a_s = \alpha_1 e^{ac-b_1-b_2} m_s, \\ (-a)^k l_t = \alpha_1 e^{-ac-b_1-b_2} b_t, \\ -(-a)^k b_t = -\alpha_2 e^{-ac+b_1+b_2} l_t, \\ -a^k m_s = -\alpha_2 e^{ac+b_1+b_2} a_s, \end{cases} \quad (3.38)$$

$$\begin{cases} a^k a_{s-1} + k s a^{k-1} a_s = \alpha_1 e^{ac-b_1-b_2} (m_s c s + m_{s-1}), \\ (-a)^k l_{t-1} + k t (-a)^{k-1} l_t = \alpha_1 e^{-ac-b_1-b_2} (b_t c t + b_{t-1}), \\ -(-a)^k b_{t-1} - k t (-a)^{k-1} b_t = -\alpha_2 e^{-ac+b_1+b_2} (l_t c t + l_{t-1}), \\ -a^k m_{s-1} - k s a^{k-1} m_s = -\alpha_2 e^{ac+b_1+b_2} (a_s c s + a_{s-1}). \end{cases} \quad (3.39)$$

显然 $a^{4k} = 1$. 与情形 1.1 的讨论相似, 结合 (3.38) 和 (3.39) 可知 $s a_s b_s (k - ac) = 0$, 所以 $s = 0$ 或 $ac = k$. 若 $ac = k$, 则由方程组 (3.38) 的第一式和第四式, 可知 $a^{2k} = e^{2ac}$, 所以 $e^{2ac} = e^{2k} = a^{2k}$. 另一方面, 由方程组 (3.38) 的第二式和第三式可知 $a^{2k} e^{-2ac}$, 所以 $e^{-2ac} = e^{-2k} = a^{-2k}$, 故 $e^{2k} = \pm 1$. 这与 k 是正整数矛盾. 因此 $s = 0$. 同理 $t = 0$. 综上所述可得 $Q_{11}(z), Q_{12}(z), Q_{21}(z), Q_{22}(z)$ 是非零常数. 因此可设 $Q_{11}(z) = q_{11}, Q_{12}(z) = q_{12}, Q_{21}(z) = q_{21}, Q_{22}(z) = q_{22}$. 那么, 结合 (3.2) 和 (3.3), 可得

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{\alpha_2 q_{11} e^{az+b_1} - \alpha_1 q_{12} (-1)^k e^{-az-b_1}}{(\alpha_2 - \alpha_1) a^k} + J_{k-1}(z), \\ f_2(z) &= \frac{\alpha_2 q_{21} (-1)^k e^{-az+b_2} - \alpha_1 q_{22} e^{az-b_2}}{(\alpha_2 - \alpha_1) a^k} + K_{k-1}(z), \end{aligned}$$

其中 $J_{k-1}(z), K_{k-1}(z)$ 是 z 的多项式且 $\deg J_{k-1}(z) \leq k-1, \deg K_{k-1}(z) \leq k-1$. 同样地, 由 (3.2) 和 (3.3), 可得

$$f_1(z+c) = \frac{q_{21} e^{-az+b_2} - q_{22} e^{az-b_2}}{\alpha_1 - \alpha_2}, \quad f_2(z+c) = \frac{q_{11} e^{az+b_1} - q_{12} e^{-az-b_1}}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

结合上述四式中 $f_1(z)$ 和 $f_1(z+c)$ 的形式, 可知

$$\begin{cases} \alpha_2 q_{11} e^{ac+b_1} = a^k q_{22} e^{-b_2}, \\ \alpha_1 q_{12} (-1)^k e^{-ac-b_1} = a^k q_{21} e^{b_2}, \\ J_{k-1}(z) \equiv 0, \end{cases} \quad (3.40)$$

又由 $f_2(z)$ 和 $f_2(z+c)$ 的形式可得 $K_{k-1}(z) \equiv 0$. 结合方程组 (3.40) 的第一式和第二式可以算出 $q_1 (-1)^k = a^{2k} q_2$, 其中 $q_1 = q_{11} q_{12}, q_2 = q_{21} q_{22}$. 又因为 $a^{4k} = 1$, 所以 $q_2 = \pm q_1$.

情形 4.2 $q = -1$. 此时易知 $a_1 = a_2 = a$. 因此可设 $h_1(z) = az + b_1, h_2(z) = az + b_2$. 那么结合 (3.4)–(3.7), 可知

$$\begin{cases} a^k Q_{11}(z) + k a^{k-1} Q'_{11}(z) + \cdots + Q_{11}^{(k)}(z) = (-1)^k \alpha_1 e^{-ac-b_1-b_2} Q_{22}(-z+c), \\ a^k Q_{21}(z) + k a^{k-1} Q'_{21}(z) + \cdots + Q_{21}^{(k)}(z) = (-1)^k \alpha_1 e^{-ac-b_1-b_2} Q_{12}(-z+c), \\ -(-a)^k Q_{12}(z) - k(-a)^{k-1} Q'_{12}(z) - \cdots - Q_{12}^{(k)}(z) = -(-1)^k \alpha_2 e^{ac+b_1+b_2} Q_{21}(-z+c), \\ -(-a)^k Q_{22}(z) - k(-a)^{k-1} Q'_{22}(z) - \cdots - Q_{22}^{(k)}(z) = -(-1)^k \alpha_2 e^{ac+b_1+b_2} Q_{11}(-z+c). \end{cases} \quad (3.41)$$

由方程组 (3.41) 易知 $\deg Q_{12}(z) = \deg Q_{21}(z), \deg Q_{22}(z) = \deg Q_{11}(z)$. 接下来证明 $Q_{11}(z), Q_{12}(z), Q_{21}(z), Q_{22}(z)$ 是非零常数.

将 (3.37) 代入 (3.41) 并比较 z^s , z^{s-1} 项的系数, 经简单计算, 可得

$$\begin{cases} a^k a_s = (-1)^{s+k} \alpha_1 e^{-ac-b_1-b_2} m_s, \\ a^k l_t = (-1)^{t+k} \alpha_1 e^{-ac-b_1-b_2} b_t, \\ -(-a)^k b_t = -(-1)^{t+k} \alpha_2 e^{ac+b_1+b_2} l_t, \\ -(-a)^k m_s = -(-1)^{s+k} \alpha_2 e^{ac+b_1+b_2} a_s, \end{cases} \quad (3.42)$$

$$\begin{cases} a^k a_{s-1} + k s a^{k-1} a_s = (-1)^{s+k-1} \alpha_1 e^{-ac-b_1-b_2} (m_s c s + m_{s-1}), \\ a^k l_{t-1} + k t a^{k-1} l_t = (-1)^{t+k-1} \alpha_1 e^{-ac-b_1-b_2} (b_t c t + b_{t-1}), \\ -(-a)^k b_{t-1} - k t (-a)^{k-1} b_t = -(-1)^{t+k-1} \alpha_2 e^{ac+b_1+b_2} (l_t c t + l_{t-1}), \\ -(-a)^k m_{s-1} - k s (-a)^{k-1} m_s = -(-1)^{s+k-1} \alpha_2 e^{ac+b_1+b_2} (a_s c s + a_{s-1}). \end{cases} \quad (3.43)$$

那么由 (3.42) 可得 $a^{4k} = 1$. 与情形 1.2 的讨论类似, 结合 (3.42) 和 (3.43) 可知 $k t b_t l_t = 0$, $k s a_s m_s = 0$, 这意味着 $s = 0$ 和 $t = 0$. 综上可得 $Q_{11}(z)$, $Q_{12}(z)$, $Q_{21}(z)$, $Q_{22}(z)$ 是非零常数. 因此设

$$Q_{11}(z) = q_{11}, \quad Q_{12}(z) = q_{12}, \quad Q_{21}(z) = q_{21}, \quad Q_{22}(z) = q_{22}.$$

那么, 结合 (3.2) 和 (3.3), 可得

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{\alpha_2 q_{11} e^{az+b_1} - \alpha_1 q_{12} (-1)^k e^{-az-b_1}}{(\alpha_2 - \alpha_1) a^k} + J_{k-1}(z), \\ f_2(z) &= \frac{\alpha_2 q_{21} e^{az+b_2} - \alpha_1 q_{22} (-1)^k e^{-az-b_2}}{(\alpha_2 - \alpha_1) a^k} + K_{k-1}(z), \end{aligned}$$

其中 $J_{k-1}(z)$, $K_{k-1}(z)$ 是 z 的多项式且 $\deg J_{k-1}(z) \leq k-1$, $\deg K_{k-1}(z) \leq k-1$. 同样地, 由 (3.2) 和 (3.3), 有

$$\begin{aligned} f_1(-z+c) &= \frac{q_{21} e^{az+b_2} - q_{22} e^{-az-b_2}}{\alpha_1 - \alpha_2}, \\ f_2(-z+c) &= \frac{q_{11} e^{az+b_1} - q_{12} e^{-az-b_1}}{\alpha_1 - \alpha_2}. \end{aligned}$$

结合上述四式中 $f_1(z)$ 和 $f_1(-z+c)$ 的形式, 可知

$$\begin{cases} \alpha_1 q_{11} e^{ac+b_1} = a^k q_{22} e^{-b_2}, \\ \alpha_1 q_{12} (-1)^k e^{-ac-b_1} = a^k q_{21} e^{b_2}, \\ J_{k-1}(z) \equiv 0, \end{cases} \quad (3.44)$$

且由 $f_2(z)$ 和 $f_2(-z+c)$ 的形式可得

$$K_{k-1}(z) \equiv 0.$$

结合方程组 (3.44) 的第一式和第二式可以算出

$$q_1 (-1)^k = a^{2k} q_2,$$

其中 $q_1 = q_{11} q_{12}$, $q_2 = q_{21} q_{22}$. 又因为 $a^{4k} = 1$, 所以 $q_2 = \pm q_1$.

致谢 感谢编辑与审稿人提出的宝贵建议.

参 考 文 献

- [1] Gross F. On the functional equation $f^n + g^n = h^n$ [J]. *The American Mathematical Monthly*, 1966, 73(10):1093–1096.
- [2] Chen W, Hu P C, Zhang Y. On solutions to some nonlinear difference and differential equations [J]. *Journal of the Korean Mathematical Society*, 2016, 53(4):835–846.
- [3] Hu B, Yang L. Entire solutions of two certain Fermat-type ordinary differential equations [J]. *Open Mathematics*, 2023, 21(1):20230120.
- [4] Laine I. Nevanlinna theory and complex differential equations [M]. Berlin: Walter de Gruyter, 1993.
- [5] Chen J F, Lin S Q. On the existence of solutions of Fermat-type differential-difference equations [J]. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 2021, 58(4):983–1002.
- [6] Gao Z, Gao L, Liu M. Entire solutions of two certain types of quadratic trinomial q -difference differential equations [J]. *AIMS Mathematics*, 2023, 8(11):27659–27669.
- [7] Hu P C, Wang Q. On meromorphic solutions of functional equations of Fermat type [J]. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 2019, 42:2497–2515.
- [8] Hayman W K. Meromorphic functions [M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.
- [9] Yang C C, Yi H X. Uniqueness theory of meromorphic functions [M]. Dordrecht: Kluwer, 2003.
- [10] Hu P C, Wang W B, Wu L L. Entire solutions of differential-difference equations of Fermat type [J]. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 2022, 59(1):83–99.
- [11] Li Y, Liu K. Meromorphic solutions of nonlinear systems of Fermat type [J]. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 2023, 46:196.
- [12] Long J, Qin D. On entire solutions of some Fermat type differential-difference equations [J]. *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, 2024, 39(1):69–88.
- [13] Wang Q, Chen W, Hu P. On entire solutions of two certain Fermat-type differential-difference equations [J]. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 2020, 43:2951–2965.
- [14] Liu K, Cao T, Cao H. Entire solutions of Fermat type differential-difference equations [J]. *Archiv der Mathematik*, 2012, 99(2):147–155.
- [15] Gao L Y. On entire solutions of two types of systems of complex differential-difference equations [J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2017, 37(1):187–194.
- [16] Xu H Y, Li H, Ding X. Entire and meromorphic solutions for systems of the differential difference equations [J]. *Demonstratio Mathematica*, 2022, 55(1):676–694.

- [17] Wu L L, Hu P C. Entire solutions on a system of Fermat type q -difference-differential equations [J]. *Analysis Mathematica*, 2022, 48(4):1257–1280.
- [18] Yang C C, Li P. On the transcendental solutions of a certain type of nonlinear differential equations [J]. *Archiv der Mathematik*, 2004, 82(5):442–448.

Entire Solutions to a System of Fermat-Type q -Difference-Differential Equations

GONG Yihui¹ YANG Qi²

¹School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi 830017, China. E-mail: 17599833665@163.com

²Corresponding author. School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi 830017, China. E-mail: 20534183@qq.com

Abstract In this paper, the authors investigate the existence of entire solutions to a system of Fermat-type q -difference-differential equations and obtain the exact form of the entire solutions. In addition, the results generalise the conclusions obtained by the previous.

Keywords Difference-differential equations, Entire solutions, Nevanlinna theory, Fermat-type equations

2020 MR Subject Classification 39B32, 30D35

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 46 No. 3, 2025

by ALLERTON PRESS, INC., USA