数 学 年 刊 A 辑
2025, 46(3):299–306
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2025.0018

单连通区域上的渐近 Schwarzian 距离

张伯尧[1] 范金华[1]

提要 通过引入渐近 Schwarzian 范数, 定义了一个在单连通双曲区域商集上的伪度量. 在此基础上, 证明了这个伪度量并不能构成度量.

关键词 渐近共形, 渐近 Schwarzian 范数, 伪度量
MR (2020) 主题分类 30C62, 30C45, 30C55
中图法分类 O174.51, O174.55
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2025)03-0299-8

§1 引 言

设 $\mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}z>0\}$ 表示上半平面, 定义 $\mathscr{D}$ 为所有共形等价于上半平面 $\mathbb{H}$ 的单连通区域所构成的集合. 在本文中, 我们用不同的记号 D, $\widetilde{D}$, $\widetilde{\widetilde{D}}$ 来表示 $\mathscr{D}$ 中的不同元素. 设 D 上的双曲度量为

$$\eta_D(z)=\frac{|\pi_D'(z)|}{\operatorname{Im}\pi_D(z)},$$

这里 $\pi_D:D\to\mathbb{H}$ 是定义在 D 上的共形映射. 对于 D 上的局部单叶解析函数 f, 它在点 z 处的 Schwarzian 导数定义为

$$S_f(z)=\Big(\frac{f''(z)}{f'(z)}\Big)'-\frac{1}{2}\Big(\frac{f''(z)}{f'(z)}\Big)^2.$$

根据 Cayley 公式, 有

$$S_{g\circ f}(z)=S_g(f)f'(z)^2+S_f(z).$$

我们知道, 当且仅当 f 是 Möbius 变换时, f 的 Schwarzian 导数 $S_f(z)$ 等于 0. $S_f(z)$ 在单叶函数 (见 [1–4]) 和万有 Teichmüller 空间 (见 [5–7]) 的研究中起着重要的作用.

设 $f:D\to\widetilde{D}$ 是定义在区域 D 上的共形映射, 它的 Schwarzian 范数定义为

$$\|S_f\|_D=\sup_{z\in D}|S_f(z)|\eta_D^{-2}(z),$$

这个范数满足以下公式 (见 [8])

$$\|S_{g\circ f^{-1}}\|_{\widetilde{D}}=\|S_g-S_f\|_D,\quad \|S_f\|_D=\|S_{f^{-1}}\|_{\widetilde{D}}. \tag{1.1}$$

设 $D,\widetilde{D}\in\mathscr{D}$, 如果存在一个 Möbius 变换 M 使得 $M(D)=\widetilde{D}$, 则称 D 和 $\widetilde{D}$ 是等价的, 记为 $D\sim\widetilde{D}$. 由此, 我们将它的商空间表示为 $\Omega=\mathscr{D}/\sim$. 那么在 D 和 $\widetilde{D}$ 之间的 Lehto 距离 (见 [8]) 定义为

$$\delta(D,\widetilde{D})=\inf\{\|S_f\|_D,f:D\to\widetilde{D}\text{ 共形}\}.$$

本文 2024 年 7 月 10 日收到, 2025 年 9 月 18 日收到修改稿.
[1]南京理工大学数学与统计学院, 南京 210094. E-mail: 908632703@qq.com; jinhuafan@hotmail.com

容易验证 δ 是定义在 Ω 上的伪度量, 但是在文 [9–10] 中证明了, δ 并不是定义在 Ω 上的度量.

定理 A $D, \widetilde{D} \in \mathscr{D}$, 则 $\sigma(D, \widetilde{D}) = 0$ 并不能推出 D 和 $\widetilde{D}$ 是等价的.

设 $D \in \mathscr{D}$, 如果 D 的边界 ∂D 是一条解析曲线, 则称 D 为解析区域. 设集合 $\mathscr{A}$ 包含所有定义在 $\mathscr{D}$ 上的解析区域, 且有 $\Omega_A = \mathscr{A}/\sim$. 我们称一条简单闭曲线 J 是渐近共形的, 如果存在

$$\max_{w \in J(a,b)} \frac{|a-w| + |w-b|}{|a-b|} \to 1, \quad a, b \in J,\ |a-b| \to 0,$$

这里 $J(a, b)$ 表示在 J 上 a 和 b 之间较短的一条弧. 设集合 $\mathscr{AS}$ 包含所有定义在 $\mathscr{D}$ 上, 且边界是渐近共形曲线的区域, 同样 $\Omega_{AS} = \mathscr{AS}/\sim$, 容易验证 $\Omega_A \subset \Omega_{AS}$. Marković (见 [9]) 证明了 δ 是定义在 Ω_A 上的度量. 作为推广, 我们将证明 δ 也是 Ω_{AS} 上的一个度量.

定理 1.1 (Ω_{AS}, δ) 是一个度量空间.

在渐近 Teichmüller 空间 (见 [11–14]) 的研究中, 我们引入了 Schwarzian 范数的渐近形式, 称为渐近 Schwarzian 范数, 用 $\|S_f\|_D^{\wedge}$ 表示. 下面给出渐近 Schwarzian 范数的定义

$$\|S_f\|_D^{\wedge} = \inf_E \sup_{z \in D \setminus E} |S_f(z)| \eta_D^{-2}(z),$$

其中 E 是定义在 D 上的紧子集. 对于最近关于渐近 Teichmüller 空间的一些研究, 我们参考了文 [15–20]. 由定义, 容易验证以下公式成立

$$\|S_{g\circ f^{-1}}\|_{\widetilde{D}}^{\wedge} = \|S_g - S_f\|_D^{\wedge}, \quad \|S_f\|_D^{\wedge} = \|S_{f^{-1}}\|_{\widetilde{D}}^{\wedge}. \tag{1.2}$$

下面给出渐近等价的定义, 如果存在一个共形映射 $f: D \to \widetilde{D}$ 使得 $\|S_f\|_D^{\wedge} = 0$, 则称区域 $D, \widetilde{D} \in \mathscr{D}$ 是渐近等价的, 用 $D \approx \widetilde{D}$ 表示. 这样, 把它的商空间表示为 $\widehat{\Omega} = \mathscr{D}/\approx$. 与 Lehto 距离 δ 的定义类似, 对于 $D, \widetilde{D} \in \mathscr{D}$, 将 $\widehat{\delta}(D, \widetilde{D})$ 定义为

$$\widehat{\delta}(D, \widetilde{D}) = \inf\{\|S_f\|_D^{\wedge}, f: D \to \widetilde{D} \text{ 共形}\}.$$

根据 $\widehat{\delta}$ 的定义, 容易验证

$$\widehat{\delta}(D, \widetilde{D}) = \widehat{\delta}(\widetilde{D}, D), \quad \widehat{\delta}(D, \widetilde{D}) \leqslant \widehat{\delta}(D, \widetilde{\widetilde{D}}) + \widehat{\delta}(\widetilde{\widetilde{D}}, \widetilde{D}),$$

所以 $\widehat{\delta}$ 是一个定义在 $\widehat{\Omega}$ 上的伪度量. 类似于定理 A, 可以通过以下定理证明 $\widehat{\delta}$ 也不是定义在 $\widehat{\Omega}$ 上的度量.

定理 1.2 设 $D, \widetilde{D} \in \mathscr{D}$, 则 $\widehat{\delta}(D, \widetilde{D}) = 0$ 并不能推出 D 和 $\widetilde{D}$ 是渐近等价的.

§2 定理 1.1 的证明

在本节中, 我们将 Marković (见 [9]) 的处理方法进行一些改变, 给出定理 1.1 的证明.

证 设 $D, \widetilde{D} \in \mathscr{AS}$. 由于 δ 是一个伪度量, 所以只需要证明存在 Möbius 变换 M, 使得 $\delta(D, \widetilde{D}) = 0$, 可以推出 $\widetilde{D} = M(D)$ 成立. 分别用 f 和 $\widetilde{f}$ 表示从 $\mathbb{H}$ 到 D 和 $\widetilde{D}$ 的共形映射. 由 [21, 定理11.1] 可知 $\|S_f\|_{\mathbb{H}}^{\wedge} = 0$ 和 $\|S_{\widetilde{f}}\|_{\mathbb{H}}^{\wedge} = 0$.

既然 $\sigma(D, \widetilde{D}) = 0$, 那么就存在一列共形映射 $g_n: D \to \widetilde{D}$, 使得当 $n \to \infty$ 时, 有 $\|S_{g_n}\|_D \to 0$ 成立. 对于每一个 g_n, 有 $A_n = f^{-1} \circ g_n^{-1} \circ \widetilde{f}: \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ 是一个 Möbius 变换,

所以有 $g_n = \widetilde{f} \circ A_n^{-1} \circ f^{-1} = \widetilde{f} \circ (f \circ A_n)^{-1}$, 故得到

$$\|S_{\widetilde{f}} - S_{f\circ A_n}\|_{\mathbb{H}} = \|S_{g_n}\|_D \to 0, \quad n \to \infty. \tag{2.1}$$

根据紧性原理, 可以假设 A_n 在 $\mathbb{H}$ 中局部收敛至一个 Möbius 变换 $A : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, 或者一个常数 $c \in \overline{\mathbb{R}} = \partial\mathbb{H}$.

如果 A_n 在 $\mathbb{H}$ 中局部收敛至一个 Möbius 变换 A, 根据 (2.1), 得到

$$\|S_{\widetilde{f}} - S_{f\circ A}\|_{\mathbb{H}} = 0, \tag{2.2}$$

且 $g_n = \widetilde{f} \circ (f \circ A_n)^{-1}$ 在 $\mathbb{H}$ 中局部收敛至 $\widetilde{f} \circ (f \circ A)^{-1}$. 由 (2.2) 可知, $\widetilde{f} \circ (f \circ A)^{-1}$ 是一个 Möbius 变换 M. 则 $g_n = \widetilde{f} \circ (f \circ A_n)^{-1}$ 在 $\mathbb{H}$ 中局部收敛至 M, 即有 $\widetilde{D} = M(D)$. 如果 A_n 在 $\mathbb{H}$ 中局部收敛至一个常数 $c \in \overline{\mathbb{R}} = \partial\mathbb{H}$, 对任意的 $z \in \mathbb{H}$, 由条件 $\|S_f\|_{\mathbb{H}}^{\wedge} = 0$ 和 (2.1), 得到

$$S_{\widetilde{f}}(z)\eta_{\mathbb{H}}^{-2}(z) = \lim_{n\to\infty} S_{f\circ A_n}(z)\eta_{\mathbb{H}}^{-2}(z) = 0. \tag{2.3}$$

故从 (2.3) 得知, $\widetilde{f}(z)$ 是一个 Möbius 变换 $B(z)$. 由于 $\widetilde{f}(z) = B(z)$, $\|S_f\|_{\mathbb{H}} = \|S_{f\circ A_n}\|_{\mathbb{H}}$ 和 (2.1), 得到 $\|S_f\|_{\mathbb{H}} = 0$ 以及 $f(z)$ 是一个 Möbius 变换 $C(z)$. 设 $M(z)$ 是一个 Möbius 变换, 定义为 $C \circ B^{-1}(z)$, 则有 $\widetilde{D} = M(D)$.

§3　定理 1.2 的证明

在本节中, 我们将构造一个反例来证明 $\widehat{\delta}$ 不是 $\widehat{\Omega}$ 上的度量. 在具体证明之前, 我们先引入几个引理.

引理 3.1 (见 [8]) 如果 φ 是定义在 $\mathbb{H}$ 上的全纯函数, 且有 $\|\varphi\|_{\mathbb{H}} < \frac{1}{2}$ 成立, 则存在一个定义在 $\mathbb{H}$ 上的共形映射 f, 使得 $S_f = \varphi$.

引理 3.2 设 $D, \widetilde{D} \in \mathscr{D}$, f 和 $\widetilde{f}$ 分别是从 $\mathbb{H}$ 到 D 和 $\widetilde{D}$ 的共形映射. 那么 $\widehat{\delta}(D, \widetilde{D}) = 0$ 当且仅当存在一列 Möbius 变换 $A_n : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, 使得当 $n \to \infty$ 时, 有 $\|S_{\widetilde{f}} - S_{f_n}\|_{\mathbb{H}}^{\wedge} \to 0$ 成立, 其中 $f_n = f \circ A_n$.

证　如果 $\widehat{\delta}(D, \widetilde{D}) = 0$, 由定义, 存在一列共形映射 $g_n : D \to \widetilde{D}$, 使得当 $n \to \infty$ 时, 有 $\|S_{g_n}\|_D^{\wedge} \to 0$ 成立. 对每一个 g_n, 有 $A_n = f^{-1} \circ g_n^{-1} \circ \widetilde{f} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ 是一个 Möbius 变换, 且 $g_n = \widetilde{f} \circ A_n^{-1} \circ f^{-1} = \widetilde{f} \circ (f \circ A_n)^{-1}$. 由 (1.2) 知, 当 $n \to \infty$ 时, 有 $\|S_{\widetilde{f}} - S_{f_n}\|_{\mathbb{H}}^{\wedge} = \|S_{g_n}\|_D^{\wedge} \to 0$ 成立.

另一方面, 如果存在一列 Möbius 变换 $A_n : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, 使得当 $n \to \infty$ 时, 有 $\|S_{\widetilde{f}} - S_{f_n}\|_{\mathbb{H}}^{\wedge} \to 0$ 成立. 由 (1.2) 知, $\|S_{\widetilde{f}} - S_{f_n}\|_{\mathbb{H}}^{\wedge} = \|S_{\widetilde{f}\circ f_n^{-1}}\|_D^{\wedge} \to 0$. 由于 $\widetilde{f} \circ f_n^{-1} = \widetilde{f} \circ (f \circ A_n)^{-1} = \widetilde{f} \circ A_n^{-1} \circ f^{-1}$ 是一列从 D 到 $\widetilde{D}$ 的共形映射, 故 $\widehat{\delta}(D, \widetilde{D}) = 0$. 即证.

利用引理 3.2 的证明过程和渐近等价的定义, 我们得到了以下引理.

引理 3.3 设 $D, \widetilde{D} \in \mathscr{D}$, f 和 $\widetilde{f}$ 分别是从 $\mathbb{H}$ 到 D 和 $\widetilde{D}$ 共形映射. 那么 D 和 $\widetilde{D}$ 是渐近等价的当且仅当存在一个 Möbius 变换 $A : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, 使得 $\|S_{\widetilde{f}} - S_{f\circ A}\|_{\mathbb{H}}^{\wedge} = 0$.

证　如果 D 和 $\widetilde{D}$ 是渐近等价的, 由定义, 存在一个共形映射 $g : D \to \widetilde{D}$, 使得 $\|S_g\|_D^{\wedge} = 0$. 由于 $A^{-1} = \widetilde{f}^{-1} \circ g \circ f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ 是一个 Möbius 变换, 则有 $g = \widetilde{f} \circ A^{-1} \circ f^{-1} = \widetilde{f} \circ (f \circ A)^{-1}$. 由 (1.2) 知, $\|S_{\widetilde{f}} - S_{f\circ A}\|_{\mathbb{H}}^{\wedge} = \|S_g\|_D^{\wedge} = 0$.

另一方面, 如果存在一个 Möbius 变换 $A:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$, 使得 $\|S_{\widetilde{f}}-S_{f\circ A}\|_{\mathbb{H}}^{\wedge}=0$. 由 (1.2) 知, $\|S_{\widetilde{f}}-S_{f\circ A}\|_{\mathbb{H}}^{\wedge}=\|S_{\widetilde{f}\circ(f\circ A)^{-1}}\|_{D}^{\wedge}=0$. 由于 $\widetilde{f}\circ(f\circ A)^{-1}=\widetilde{f}\circ A^{-1}\circ f^{-1}:D\to\widetilde{D}$ 是一个共形映射, 所以 D 和 $\widetilde{D}$ 是渐近等价的. 即证.

下面开始证明定理 1.2.

定理1.2 的证明 选取一列不为 0 的数 $\{\lambda_k\}$, 其中 $k\in\mathbb{N}$, 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|3^{2k}\mathrm{e}^{-2}\pi^{-2}<\frac{1}{2\pi^2} \tag{3.1}$$

和

$$|\lambda_1|>\frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{k=2}^{\infty}|\lambda_k|, \tag{3.2}$$

定义两个在 $\mathbb{H}$ 上的全纯函数

$$\varphi(z)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z}}{(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z})^2}+\frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi z/3^k}}{(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z})^2},$$

$$\widetilde{\varphi}(z)=\frac{-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z}}{(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z})^2}+\frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi z/3^k}}{(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z})^2}.$$

通过一些直接计算, 得到

$$\|\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi z/3^k}\|_{\mathbb{H}}=\frac{3^{2k}}{\mathrm{e}^2\pi^2}. \tag{3.3}$$

我们通过以下三个步骤来证明定理.

步骤 1 $\|\varphi(z)\|_{\mathbb{H}}<\frac{1}{2}$, $\|\widetilde{\varphi}(z)\|_{\mathbb{H}}<\frac{1}{2}$.

由 φ 的定义以及文 [9] 中的结论 $\left\|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z}}{(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z})^2}\right\|_{\mathbb{H}}=\frac{1}{\pi^2}$, 我们得到

$$\begin{aligned}\|\varphi(z)\|_{\mathbb{H}}&\leqslant\left\|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z}}{(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z})^2}\right\|_{\mathbb{H}}+\left\|\frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi z/3^k}}{(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z})^2}\right\|_{\mathbb{H}}\\&=\frac{1}{\pi^2}+\sup_{z=x+\mathrm{i}y\in\mathbb{H}}\left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi z/3^k}}{(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z})^2}\right|y^2.\end{aligned} \tag{3.4}$$

设 $z=x+\mathrm{i}y\in\mathbb{H}$, 由 (3.1) 和 (3.3) 得知

$$\begin{aligned}\sup_{y\geqslant1}\left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi z/3^k}}{(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z})^2}\right|y^2&\leqslant\sup_{y\geqslant1}y^2\left|\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi z/3^k}\right|\cdot\sup_{y\geqslant1}\frac{1}{|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z}|^2}\\&\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|\|\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi z/3^k}\|_{\mathbb{H}}\cdot\sup_{y\geqslant1}\frac{1}{|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z}|^2}\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{(1-\mathrm{e}^{-\pi})^2} \leqslant \frac{1}{2\pi^2}\Big(\frac{\mathrm{e}^{\pi}}{\mathrm{e}^{\pi}-1}\Big)^2 < \frac{1}{2}, \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}\sup_{0<y\leqslant 1}\left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi z/3^k}}{(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z})^2}\right| y^2 &\leqslant \sup_{0<y\leqslant 1}\frac{y^2}{|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z}|^2}\cdot \sup_{0<y\leqslant 1}\Big|\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi z/3^k}\Big| \\ &\leqslant \sup_{0<y\leqslant 1}\frac{y^2}{(1-\mathrm{e}^{-\pi y})^2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k| \sup_{0<y\leqslant 1}|\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi z/3^k}| \\ &\leqslant \frac{1}{(1-\mathrm{e}^{-\pi})^2}\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k| \leqslant \Big(\frac{\mathrm{e}^{\pi}}{\mathrm{e}^{\pi}-1}\Big)^2\frac{\mathrm{e}^2}{18} < \frac{1}{2}. \end{aligned}\tag{3.6}$$

结合 (3.4)–(3.6), 我们得到 $\|\varphi(z)\|_{\mathbb{H}} < \frac{1}{2}$. 同理可知 $\|\widetilde{\varphi}(z)\|_{\mathbb{H}} < \frac{1}{2}$.

由引理 3.1, 存在两个共形映射 $f:\mathbb{H}\to D$, $\widetilde{f}:\mathbb{H}\to\widetilde{D}$, 使得 $S_f=\varphi$ 和 $S_{\widetilde{f}}=\widetilde{\varphi}$ 成立.

步骤 2 $\widehat{\delta}(D,\widetilde{D})=0$.

设 $z=x+\mathrm{i}y\in\mathbb{H}$, 对任意给定的 $k\in\mathbb{N}$, 由 (3.3), 有

$$\begin{aligned}\sup_{y\geqslant 1}\Big|\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi z/3^k}}{(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z})^2}\Big|\eta_{\mathbb{H}}^{-2}(z) &\leqslant \sup_{y\geqslant 1}\frac{1}{|1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z}|^2}\cdot\sup_{y\geqslant 1}|\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi z/3^k}|\eta_{\mathbb{H}}^{-2}(z) \\ &\leqslant \frac{1}{(1-\mathrm{e}^{-\pi})^2}\|\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi z/3^k}\|_{\mathbb{H}} = \Big(\frac{\mathrm{e}^{\pi}}{\mathrm{e}^{\pi}-1}\Big)^2\frac{3^{2k}}{\mathrm{e}^2\pi^2}, \\ \sup_{0<y\leqslant 1}\Big|\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi z/3^k}}{(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z})^2}\Big|\eta_{\mathbb{H}}^{-2}(z) &\leqslant \sup_{0<y\leqslant 1}\frac{1}{|1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z}|^2}\eta_{\mathbb{H}}^{-2}(z)\cdot\sup_{0<y\leqslant 1}|\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi z/3^k}| \\ &\leqslant \sup_{0<y\leqslant 1}\frac{y^2}{(1-\mathrm{e}^{-\pi y})^2} \leqslant \Big(\frac{\mathrm{e}^{\pi}}{\mathrm{e}^{\pi}-1}\Big)^2. \end{aligned}$$

然后, 对于 $k\leqslant 2$ 时,

$$\Big\|\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi z/3^k}}{(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z})^2}\Big\|_{\mathbb{H}}^{\wedge} \leqslant \Big\|\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi z/3^k}}{(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z})^2}\Big\|_{\mathbb{H}} \leqslant \Big(\frac{\mathrm{e}^{\pi}}{\mathrm{e}^{\pi}-1}\Big)^2\frac{3^{2k}}{\mathrm{e}^2\pi^2}. \tag{3.7}$$

设 $A_n(z)=z+3^n$, 由 (3.1) 和 (3.7), 我们得到

$$\begin{aligned}\|S_{\widetilde{f}}-S_{f\circ A_n}\|_{\mathbb{H}}^{\wedge} &= \left\|\frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi z/3^k}(1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi 3^n/3^k})}{(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z})^2}\right\|_{\mathbb{H}}^{\wedge} \\ &\leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty}(|\lambda_k||1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi 3^n/3^k}|)\cdot\left\|\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi z/3^k}}{(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z})^2}\right\|_{\mathbb{H}}^{\wedge} \\ &\leqslant 2\Big(\frac{\mathrm{e}^{\pi}}{\mathrm{e}^{\pi}-1}\Big)^2\sum_{k=n+1}^{\infty}|\lambda_k|\frac{3^{2k}}{\mathrm{e}^2\pi^2}\to 0 \quad (n\to\infty). \end{aligned}$$

由引理 3.2, $\widehat{\delta}(D,\widetilde{D})=0$.

步骤 3 D 和 $\widetilde{D}$ 不是渐近等价的.

设 $z=x+\mathrm{i}y$, 对任意的 $l\in\mathbb{Z}$ 和 $r\in\mathbb{R}$, 通过一些计算, 得到

$$\lim_{z\to r\neq 2l}|\varphi(z)|\eta_{\mathbb{H}}^{-2}(z)=0, \tag{3.8}$$

且有

$$\begin{aligned}\lim_{2l+\mathrm{i}y\to 2l}|\varphi(z)|\eta_{\mathbb{H}}^{-2}(z)&\geqslant \lim_{2l+\mathrm{i}y\to 2l}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\pi y}}{(1-\mathrm{e}^{-\pi y})^2}y^2-\frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k\mathrm{e}^{-2\pi y/3^k}}{(1-\mathrm{e}^{-\pi y})^2}y^2\right)\\&\geqslant\frac{1}{\pi^2}\Big(1-\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|\Big)\geqslant\frac{1}{\pi^2}\Big(1-\frac{\mathrm{e}^2}{18}\Big).\end{aligned}\tag{3.9}$$

同样地, 对于 $\widetilde{\varphi}$, 得到

$$\lim_{z\to r\neq 2l}|\widetilde{\varphi}(z)|\eta_{\mathbb{H}}^{-2}(z)=0,\qquad \lim_{2l+1+\mathrm{i}y\to 2l+1}|\widetilde{\varphi}(z)|\eta_{\mathbb{H}}^{-2}(z)\geqslant\frac{1}{\pi^2}\Big(1-\frac{\mathrm{e}^2}{18}\Big).\tag{3.10}$$

从 (3.8)–(3.10) 得知, 对于所有的 $r\in\mathbb{R}\backslash 2\mathbb{Z}$ ($r\in\mathbb{R}\backslash 2\mathbb{Z}+1$), 有

$$|\varphi(z)|\eta_{\mathbb{H}}^{-2}(z)(|\widetilde{\varphi}(z)|\eta_{\mathbb{H}}^{-2}(z))=0$$

并且对于所有的 $r\in\mathbb{R}\backslash 2\mathbb{Z}+1$ ($r\in\mathbb{R}\backslash 2\mathbb{Z}$),

$$|\varphi(z)|\eta_{\mathbb{H}}^{-2}(z)(|\widetilde{\varphi}(z)|\eta_{\mathbb{H}}^{-2}(z))\neq 0.$$

因此 Möbius 变换 $A:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ 满足

$$\|S_{\widetilde{f}}-S_{f\circ A}\|_{\mathbb{H}}^{\wedge}=\|\widetilde{\varphi}-\varphi\circ A\cdot A'^2\|_{\mathbb{H}}^{\wedge}=0,\tag{3.11}$$

而它必须是奇整数的平移. 当 $A=z+2l+1$, $l\in\mathbb{Z}$ 时, 由 (3.2) 以及 φ 和 $\widetilde{\varphi}$ 的定义可以得到

$$\begin{aligned}\|S_{\widetilde{f}}-S_{f\circ A}\|_{\mathbb{H}}^{\wedge}&=\left\|\frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi z/3^k}(1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi(2l+1)/3^k})}{(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z})^2}\right\|_{\mathbb{H}}^{\wedge}\\&\geqslant\lim_{z=1+\mathrm{i}y\to 1}\frac{y^2}{(1-\mathrm{e}^{-\pi y})^2}\Big|\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi z/3^k}(1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi(2l+1)/3^k})\Big|\\&\geqslant\lim_{z=1+\mathrm{i}y\to 1}\frac{y^2}{(1-\mathrm{e}^{-\pi y})^2}|\lambda_1\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi z/3}(1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi(2l+1)/3})|\\&\quad-\lim_{z=1+\mathrm{i}y\to 1}\frac{y^2}{(1-\mathrm{e}^{-\pi y})^2}\Big|\sum_{k=2}^{\infty}\lambda_k\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi z/3^k}(1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi(2l+1)/3^k})\Big|\\&\geqslant\frac{\sqrt{3}}{\pi^2}|\lambda_1|-\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=2}^{\infty}2|\lambda_k|>0.\end{aligned}\tag{3.12}$$

参 考 文 献

[1] Anderson J M, Hinkkanen A. Univalent functions and domains bounded by quasicircles [J]. *J London Math Soc* (2), 1982, 25(2):253–260.

[2] Bazilevic I E. A criterion for univalence of regular functions and for dispersion of their coefficients [J]. *Mat Sb* (*N S*), 1967, 74(116):133–146 (in Russian).

[3] Harmelin R. Bergman kernel function and univalence criteria [J]. *J Analyse Math*, 1982, 41:249–258.

[4] Žuravlev I V. Some sufficient conditions for the quasiconformal extension of analytic functions [J]. *Soviet Math Dokl*, 1978, 19:1549–1552.

[5] Shen Y. Faber polynomials with applications to univalent functions with quasiconformal extensions [J]. *Sci China Ser A*, 2009, 52(10):2121–2131.

[6] Shen Y, Wei H. Universal Teichmüller space and BMO [J]. *Adv Math*, 2013, 234:129–148.

[7] Takhtajan L, Teo L. Weil-Petersson metric on the universal Teichmüller space [J]. *Mem Amer Math Soc*, 2006, 183(861):viii+119.

[8] Lehto O. Univalent functions and Teichmüller spaces [M]. Graduate Texts in Mathematics, 109, New York: Springer-Verlag, 1987.

[9] Božin V, Marković V. Distance between domains in the sense of Lehto is not a metric [J]. *Ann Acad Sci Fenn Math*, 1999, 24(1):3–10.

[10] Osgood B, Stowe D. The Schwarzian distance between domains: A question of O. Lehto [J]. *Ann Acad Sci Fenn Math*, 1987, 12(2):313–318.

[11] Earle C J, Gardiner F P, Lakic N. Asymptotic Teichmüller space. I. The complex structure [M]// In the tradition of Ahlfors and Bers, 17–38, Contemp Math, 256, Providence, RI: Amer Math Soc, 2000.

[12] Earle C J, Gardiner F P, Lakic N. Asymptotic Teichmüller space. II. The metric structure [M]// In the tradition of Ahlfors and Bers, III, 187–219, Contemp Math, 355, Providence, RI: Amer Math Soc, 2004.

[13] Earle C J, Marković V, Saric D. Barycentric extension and the Bers embedding for asymptotic Teichmüller space [M]// Complex manifolds and hyperbolic geometry, 87–105, Contemp Math, 311, Providence, RI: Amer Math Soc, 2002.

[14] Gardiner F P, Lakic N. Quasiconformal Teichmüller theory [M]. Mathematical Surveys and Monographs, 76, Providence, RI: Amer Math Soc, 2000.

[15] Fletcher A. On asymptotic Teichmüller space [J]. *Trans Amer Math Soc*, 2010, 362(5):2507–2523.

[16] Gardiner F P, Sullivan D P. Symmetric structures on a closed curve [J]. *Amer J Math*, 1992, 114(4):683–736.

[17] Miyachi H. On invariant distances on asymptotic Teichmüller spaces [J]. *Proc Amer Math Soc*, 2006, 134(7):1917–1925.

[18] Miyachi H. Image of asymptotic Bers map [J]. *J Math Soc Japan*, 2008, 60(4):1255–1276.

[19] Miyachi H. The inner and outer radii of asymptotic Teichmüller spaces [J]. *Complex Var Elliptic Equ*, 2008, 53(2):139–158.

[20] Miyachi H. Spirals and the asymptotic Teichmüller space [J]. *Comput Methods Funct Theory*, 2014, 14(2–3):609–622.

[21] Pommerenke Ch. Boundary behaviour of conformal maps [M]. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 299, Berlin: Springer-Verlag, 1992.

The Asymptotic Schwarzian Distances Between the Simply Connected Domains

ZHANG Boyao[1] FAN Jinhua[1]

[1]Department of Mathematics and Statistics, School of Science, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China.
E-mail: 908632703@qq.com; jinhuafan@hotmail.com

Abstract By asymptotic Schwarzian norm, the authors define a pseudometric on the quotient of the set of simply connected hyperbolic domains. As a result, the authors prove this pseudometric is not a metric.

Keywords Asymptotic conformal, Asymptotic Schwarzain norm, Pseudometric
2020 MR Subject Classification 30C62, 30C45, 30C55, 31A05

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 46 No. 3, 2025
by ALLERTON PRESS, INC., USA