数 学 年 刊 A 辑
2025, 46(3):307–310
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2025.0019

多圆柱 Shilov 边界上的 Burns-Krantz 刚性*

李枫柏[1] 戎 锋[2]

提要 作者证明了多圆柱上全纯自映射在 Shilov 边界上的不动点处的 Burns-Krantz 刚性.

关键词 Burns-Krantz 刚性, Shilov 边界, 多圆柱
MR (2020) 主题分类 32H99, 32A40
中图法分类 O174.56
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2025)03-0307-4

§1 引 言

在文 [1] 中, Burns 和 Krantz 证明了如下基本的刚性结果.

定理 1.1 (见 [1, 定理 4.5]) 设 Ω 为 $\mathbb{C}^n$ 中具有 C^6 光滑边界的有界强拟凸域, 设 f 为 Ω 上的全纯自映射, $p \in \partial\Omega$. 如果当 $z \to p$ 时, $f(z) = z + o(|z-p|^3)$, 则 $f(z) \equiv z$.

在文 [2] 中, 黄孝军得到如下局部化的 Burns-Krantz 刚性定理.

定理 1.2 (见 [2, 定理 2.5]) 设 Ω 为有界域, $p \in \partial\Omega$ 为强拟凸点. 如果 f 为 Ω 上的全纯自映射, 使得当 $z \to p$ 时, $f(z) = z + o(|z-p|^3)$, 则 $f(z) \equiv z$.

在文 [2] 中, 黄孝军还得到如下关于有内部不动点的全纯自映射的边界刚性定理.

定理 1.3 (见 [2, 推论 2.7]) 设 Ω 为具有光滑边界的有界强凸域, $p \in \partial\Omega$, f 为 Ω 上的全纯自映射. 如果存在 $q \in \Omega$, 使得 $f(q) = q$, 且当 $z \to p$ 时, $f(z) = z + o(|z-p|^2)$, 则 $f(z) \equiv z$.

在 [2, 注 2.9] 中, 黄孝军猜想类似的结果在强拟凸域上也成立. 这个 "黄猜想" 的一个特殊情形在文 [3] 中被证明, 而后又在文 [4] 中被推广. 在文 [5] 中, 本文第二作者证明了一般情形的 "黄猜想".

以上结果均假设光滑边界, 近期也有一些关于非光滑边界点处 Burns-Krantz 型刚性定理的研究 (见文 [6–7]). 特别地, 在文 [6] 中, 作者宣称, 作为 [6, 定理 4] 的推论, 多圆柱 Shilov 边界上的 Burns-Krantz 刚性成立. 但是, 由 [6, 定理 4] 得不到这一推论, 因为 [6, 定理 4] 的证明中的关键一步用到了 [2, 定理 2.2], 而该定理需假设边界光滑.

本文的主要目的是纠正这一错误, 并证明多圆柱 Shilov 边界上的 Burns-Krantz 刚性的确成立. 记 Δ 为 $\mathbb{C}$ 中单位圆盘, Δ^n 为 $\mathbb{C}^n$ 中单位多圆柱, $n \geqslant 2$. 众所周知, Δ^n 的 Shilov 边界是 $(\partial\Delta)^n$.

本文 2024 年 5 月 3 日收到, 2025 年 9 月 9 日收到修改稿.
[1] 上海财经大学数学学院, 上海 200433. E-mail: li.fengbai@mail.shufe.edu.cn
[2] 上海交通大学数学科学学院, 上海 200240. E-mail: frong@sjtu.edu.cn
*本文受到国家自然科学基金 (No. 12471211, No. 12271350) 的资助.

定理 1.4 设 f 为 Δ^n 上的全纯自映射, $p \in (\partial\Delta)^n$. 如果当 $z \to p$ 时, $f(z) = z + o(|z-p|^3)$, 则 $f(z) \equiv z$.

定理 1.5 设 f 为 Δ^n 上的全纯自映射, $p \in (\partial\Delta)^n$. 如果存在 $q \in \Delta^n$ 使得 $f(q) = q$, 且当 $z \to p$ 时, $f(z) = z + o(|z-p|^2)$, 则 $f(z) \equiv z$.

在第 2 节中我们证明定理 1.4. 在第 3 节中我们证明定理 1.5.

§2 定理 1.4 的证明

设 $\iota : \Delta \to \Delta^n$ 为对角嵌入, 即 $\iota(\tau) = (\tau, \cdots, \tau)$, $\tau \in \Delta$. 任给 $1 \leqslant j \leqslant n$, 设 $\pi_j : \Delta^n \to \Delta$ 为到第 j 个分量的正交投影, 即 $\pi_j(z) = z_j$, $z = (z_1, \cdots, z_n) \in \Delta^n$. 令 $g_j := \pi_j \circ f \circ \iota : \Delta \to \Delta$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$.

因为 Δ^n 是齐性域, 不失一般性, 假设 $p = (1, \cdots, 1)$. 因为 ι 和 π_j 均为 Lipschitz, 且当 $z \to p$ 时 $f(z) = z + o(|z-p|^3)$, 所以当 $\tau \to 1$ 时 $g_j(\tau) = \tau + o(|1-\tau|^3)$. 因此, 由 Δ 上的 Burns-Krantz 刚性, 我们有 $g_j(\tau) \equiv \tau$, 任给 $1 \leqslant j \leqslant n$. 也就是说 f 逐点固定 $\iota(\Delta)$.

以下的证明借鉴 [2, 定理 2.2] 的证明.

记 $f = (f_1, \cdots, f_n)$. 考察 Δ 上的全纯函数 λ 定义如下:

$$\lambda(\tau) = \Big(\frac{\partial f_1}{\partial z_1} + \frac{\partial f_2}{\partial z_2} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial z_n}\Big) \circ \iota(\tau),$$

即 $\lambda(\tau)$ 是 f 在 $\iota(\tau)$ 处的 Jacobi 矩阵的特征根之和. 因为 f 固定 $\iota(\Delta)$, 由 Carathéodory-Cartan-Kaup-Wu 定理 (见文 [8]), $\operatorname{Re}\lambda(\tau) \leqslant n$, 其中等号在某一点成立当且仅当 $f \equiv \mathrm{id}$.

记 $\delta(z)$ 为 z 到 $\partial\Delta^n$ 的距离. 令

$$E(1,1) = \Big\{\tau \in \Delta :\ \frac{1-|\tau|^2}{|1-\tau|^2} > 1\Big\}.$$

则对 $\tau \in E(1,1)$, 有 $\delta \circ \iota(\tau) = 1 - |\tau| > \frac{1}{2}|1-\tau|^2$.

对 $1 \leqslant j \leqslant n$, 设

$$U_j = \Big\{z_j :\ |z_j - \tau| < \frac{1}{4}|1-\tau|^2\Big\},$$

同时设 $U = U_1 \times \cdots \times U_n \subset\subset \Delta^n$. 则对每一个点 $z \in U$, 以下估计成立:

$$|z-p| \leqslant |z - \iota(\tau)| + |\iota(\tau) - p| \leqslant C_1|1-\tau|^2 + C_2|1-\tau| \approx C_2|1-\tau|.$$

因此, 利用 Cauchy 积分公式和关于 f 的假设, 得到

$$\begin{aligned}\Big|\frac{\partial f_j}{\partial z_j} \circ \iota(\tau) - 1\Big| &\leqslant \Big|\frac{1}{2\pi}\oint_{\partial U_j} \frac{f_j(\tau, \cdots, \xi, \cdots, \tau) - \xi}{(\xi-\tau)^2}\mathrm{d}\xi\Big| \\ &\leqslant C_3 \sup_{\xi \in \partial U_j} \frac{|f_j(\cdots, \xi, \cdots) - \xi|}{|1-\tau|^2} \\ &= \frac{o(|1-\tau|^3)}{|1-\tau|^2} \\ &= o(|1-\tau|), \quad \tau \in E(1,1) \to 1. \end{aligned} \tag{2.1}$$

因此当 $\tau \in E(1,1) \to 1$ 时, $\operatorname{Re}\lambda(\tau) = n + o(|1-\tau|)$. 在 $E(1,1)$ 上对 $\operatorname{Re}\lambda(\tau)$ 在 1 处用 Hopf 引理 (见文 [8]), 知 $\operatorname{Re}\lambda(\tau) \equiv n$. 这就完成了定理 1.4 的证明.

§3　定理 1.5 的证明

因为 Δ^n 是齐性域, 不失一般性假设 $p=(1,\cdots,1)$ 和 $q=(0,\cdots,0)$.

设 g_j $(1\leqslant j\leqslant n)$ 为上节给出的单位圆盘上的全纯自映射. 则 $g_j(0)=0$, 且当 $\tau\to 1$ 时, $g_j(\tau)=\tau+o(|1-\tau|^2)$. 因此, 由黄孝军的刚性定理 ([2, 推论 1.5]), 我们有 $g_j(\tau)\equiv\tau$, 任给 $1\leqslant j\leqslant n$. 也就是说 f 逐点固定 $\iota(\Delta)$.

下面的证明与上节几乎一样, 除了在 (2.1) 中, 我们有

$$\left|\frac{\partial f_j}{\partial z_j}\circ\iota(\tau)-1\right|\leqslant\frac{o(|1-\tau|^2)}{|1-\tau|^2}=o(1),\quad \tau\in E(1,1)\to 1.$$

因此, 当 $\tau\in E(1,1)\to 1$ 时, $\operatorname{Re}\lambda(\tau)$ 逼近其最大值 n.

另一方面, 当限制 τ 在区间 $(0,1)$ 上时, 有 $\delta\circ\iota(\tau)=|1-\tau|$, 而不是 $\delta\circ\iota(\tau)>\frac{1}{2}|1-\tau|^2$. 从而, 在 (2.1) 中, 有

$$\left|\frac{\partial f_j}{\partial z_j}\circ\iota(\tau)-1\right|\leqslant\frac{o(|1-\tau|^2)}{|1-\tau|}=o(|1-\tau|),\quad \tau\in(0,1)\to 1.$$

因此, 当 τ 径向趋向于 1 时, $\operatorname{Re}\lambda(\tau)=n+o(|1-\tau|)$. 在 $E(1,1)$ 上对 $\operatorname{Re}\lambda(\tau)$ 在 1 处用 Hopf 引理, 知 $\operatorname{Re}\lambda(\tau)\equiv n$. 这就完成了定理 1.5 的证明.

注 3.1　在定理 1.4 和 1.5 中, 我们仅需假设 “当 z 非切向趋近于 p”. 这方面更多的细节可参见文 [9].

参　考　文　献

[1] Burns D M, Krantz S G. Rigidity for holomorphic mappings and a new Schwarz lemma at the boundary [J]. *J Amer Math Soc*, 1994, 7:661–676.

[2] Huang X. A boundary rigidity problem for holomorphic mappings on some weakly pseudoconvex domains [J]. *Canad J Math*, 1995, 47:405–420.

[3] Huang X. A preservation principle of extremal mappings near a strongly pseudoconvex point and its applications [J]. *Illinois J Math*, 1994, 38:283–302.

[4] Fornæss J E, Rong F. On the boundary rigidity at strongly pseudoconvex points [J]. *Math Z*, 2021, 297:453–458.

[5] Rong F. The Burns-Krantz rigidity with an interior fixed point [J]. *J Math Anal Appl*, 2023, 524:127109, 4 pp.

[6] Fornæss J E, Rong F. The boundary rigidity for holomorphic self-maps of some fibered domains [J]. *Math Res Lett*, 2021, 28:697–706.

[7] Rong F. The Burns-Krantz type rigidity for domains with corners [J]. *J Geom Anal*, 2024, 34:143, 7 pp.

[8] Krantz S G. Function theory of several complex variables [M]. 2nd ed, Providence, RI: AMS Chelsea Publishing, 2001.

[9] Rong F. Non-tangential Burns-Krantz rigidity [J]. *J Geom Anal*, 2023, 33:72, 10 pp.

The Burns-Krantz Rigidity on the Shilov Boundary of Polydisks

LI Fengbai[1] RONG Feng[2]

[1]School of Mathematics, Shanghai University of Finance and Economics, Shanghai 200433, China. E-mail: li.fengbai@mail.shufe.edu.cn

[2]School of Mathematical Sciences, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China. E-mail: frong@sjtu.edu.cn

Abstract In this paper, the authors prove the Burns-Krantz rigidity for holomorphic self-maps of polydisks with a fixed point on the Shilov boundary.

Keywords Burns-Krantz rigidity, Shilov boundary, Polydisk

2020 MR Subject Classification 32H99, 32A40

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 46 No. 3, 2025
by ALLERTON PRESS, INC., USA