

关于 Monge-Ampère 形式的曲率和 存在性的注记*

刘洪伶¹

提要 在万学远和王煦的文章中, 他们证明了 Monge-Ampère 纤维化的基流形上广义 Weil-Petersson 度量的全纯双截面曲率的非正性. 在此基础上, 本文进一步刻画了全纯双截面曲率在等号成立时所需满足的条件; 另外, 对于具有相对 Kähler 纤维化的紧复曲面, 证明了当其 signature 为零时 Monge-Ampère 形式的存在性; 最后, 在射影丛纤维化的情况下, 证明了当且仅当在反典范丛的第一陈类中存在半正定的 Kähler 形式时, 它是一个 Monge-Ampère 纤维化.

关键词 全纯双截面曲率, Monge-Ampère 纤维化, 广义 Weil-Petersson 度量

MR (2020) 主题分类 32Q05, 32G05, 53C55

中图法分类 O18

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2025)03-0311-10

§1 引言

令 $p: (\mathcal{X}, \omega) \rightarrow \mathcal{B}$ 是一个 Kähler 纤维化, 即 p 是连接两个复流形 \mathcal{X} 和 \mathcal{B} 的逆紧的全纯浸没. 这里的 ω 是复流形 \mathcal{X} 上定义的实的、光滑的、 d -闭的 $(1, 1)$ 形式, 并且在每一根纤维 $X_t := p^{-1}(t)$ 都是正的. 如果 ω 满足等式 $\omega^{n+1} = 0$ (n 为每根纤维的维数), 则 ω 被定义为 Monge-Ampère 形式 (见 [1, 定义1.8]). 在这种情况下, $p: (\mathcal{X}, \omega) \rightarrow \mathcal{B}$ 就称为 Monge-Ampère 纤维化.

在万学远和王煦的文章 [1] 中, 用 ω_{WP} 表示广义 Weil-Petersson 度量, 它是基流形 \mathcal{B} 上的一个 Kähler 度量, 他们进一步推导出了该度量的陈曲率公式. 他们这篇论文的主要结果以及本文应用的结论是他们证明的广义 Weil-Petersson 度量 ω_{WP} 具有非正的全纯截面曲率, 且其全纯截面曲率小于一个负常数.

再看定义在 Teichmüller 空间上的经典的 Weil-Petersson 度量 ω_{WP} 也是 Kähler 度量 (见 [2, 定理4]), 且 Ricci 曲率、全纯截面曲率和数量曲率都是负的 (见 [3, §10, 定理]), 全纯双截面曲率也是负的 (见 [4, 定理1.3]). 此外, Wolpert 推导出了一个 Weil-Petersson 度量的显式公式, 并证明了它的全纯截面曲率、Ricci 曲率和数量曲率均小于一个负常数 (见 [5, 引理4.6]).

考虑到 ω_{WP} 和 ω_{WP} 这两个 Kähler 度量在曲率性质上的惊人相似性, 我们很自然地要问广义 Weil-Petersson 度量 ω_{WP} 是否也具有负的全纯双截面曲率的性质. 于是在本文中, 我们将证明它的全纯双截面曲率为零时所需满足的条件.

本文 2024 年 4 月 21 日收到, 2025 年 4 月 6 日收到修改稿.

¹重庆理工大学学院, 重庆 400054. E-mail: honglingliu@stu.cqut.edu.cn

*本文受到国家自然科学基金 (No. 12101093) 的资助.

定理 1.1 设 $p: (\mathcal{X}, \omega) \rightarrow \mathcal{B}$ 是一个紧的 Monge-Ampère 纤维化. 对于任意两个切向量 $\xi, \eta \in T_t \mathcal{B}$, 广义 Weil-Petersson 度量 ω_{WP} 的陈曲率沿 ξ, η 为零, 即 $R(\xi, \bar{\xi}, \eta, \bar{\eta}) = 0$, 当且仅当在纤维 X_t 上, 有

$$\kappa_\eta \overline{\kappa_\xi} \equiv 0, \quad H^\perp(L_{V_\eta} \kappa_\xi) \equiv 0,$$

这里的 κ_η 是与 η 相关的 ω -Kodaira-Spencer 张量, 见 (2.1) 式, H^\perp 表示从 $A^{0,1}(X_t, T_{X_t})$ 到 $\text{Span}\{\kappa_i\}^\perp$ 的正交投影.

我们还考虑了一类 Monge-Ampère 形式的存在性, 得到了其存在性的一些等价描述. 设总空间 \mathcal{X} 是紧的 Kähler 流形, 对于两个实的 $(1,1)$ -类, $[\alpha], [\beta] \in H_{dR}^{1,1}(\mathcal{X}, \mathbb{R})$. 如果在 $[\alpha - \beta]$ 类中存在半正定的相对的 Kähler 形式 ω , 则记为 $[\alpha] \geq_r [\beta]$.

定理 1.2 设 $p: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$ 是一个全纯纤维化, 每一根纤维和基流形都是紧的黎曼曲面, 且亏格都大于等于 2, 如果

$$c_1(K_{\mathcal{X}/\mathcal{B}}) \geq_r \frac{3\tau(\mathcal{X})}{2\chi(\mathcal{X})} c_1(p^* K_{\mathcal{B}}),$$

则 $p: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$ 为 Monge-Ampère 纤维化. 这里 $\tau(\mathcal{X})$ 表示 \mathcal{X} 的 signature, $\chi(\mathcal{X})$ 表示 \mathcal{X} 的欧拉示性数.

于是, 我们可以得到以下推论.

推论 1.1 在上述定理的假设下, 如果 $\tau(\mathcal{X}) = 0$, 则 $p: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$ 是 Monge-Ampère 纤维化.

对于射影丛纤维化, 我们也得到了 Monge-Ampère 形式存在的等价描述. 设 $\pi: E \rightarrow \mathcal{B}$ 是紧的 Kähler 流形 \mathcal{B} 上的全纯向量丛, 用 $\mathcal{X} = P(E)$ 表示其射影丛, 则可以得到以下定理.

定理 1.3 射影丛纤维化 $p: \mathcal{X} = P(E) \rightarrow \mathcal{B}$ 为 Monge-Ampère 纤维化当且仅当 $c_1(K_{\mathcal{X}/\mathcal{B}}^{-1}) \geq_r 0$. 特别地, $K_{P(E)/\mathcal{B}}^{-1}$ 是半正定的线丛.

本文的结构概述如下: 在第 2 节中, 回顾了 Monge-Ampère 纤维化的基本概念和定义、广义 Weil-Petersson 度量及其相关的曲率公式. 随后, 在第 3 节中, 全面地刻画了全纯双截面曲率为零的条件, 并给出了定理 1.1 的证明. 最后, 在第 4 节中, 给出了 Monge-Ampère 形式存在性的等价描述, 并给出了定理 1.2、推论 1.1 和定理 1.3 的证明.

§2 广义 Weil-Petersson 度量的曲率

该部分将回顾相对 Kähler 纤维化、Monge-Ampère 纤维化和广义 Weil-Petersson 度量及其曲率的基本概念和定义. 更多详情参考文 [1].

设 $p: (\mathcal{X}, \omega) \rightarrow \mathcal{B}$ 为相对 Kähler 纤维化, 即 p 是两个复流形 \mathcal{X} 和 \mathcal{B} 之间的逆紧全纯浸没, ω 是 \mathcal{X} 上的实的、光滑的、 d -闭的 $(1,1)$ -形式, 它在纤维 $X_t := p^{-1}(t)$ 上是正的. 从局部看, 我们可以假设

$$\omega = i\partial\bar{\partial}\phi.$$

设 $\{t^j, \zeta^\alpha\}$ 表示 \mathcal{X} 上的全纯局部坐标系, 使得 $p(t, \zeta) = t$, 则

$$\omega = i(\phi_{\alpha\bar{\beta}} d\zeta^\alpha \wedge d\bar{\zeta}^\beta + \phi_{j\bar{k}} dt^j \wedge d\bar{t}^k + \phi_{\alpha\bar{k}} d\zeta^\alpha \wedge d\bar{t}^k + \phi_{j\bar{k}} dt^j \wedge d\bar{t}^k),$$

这里 $\phi_{A\bar{B}} := \partial_A \partial_{\bar{B}} \phi$, 在本节中, 我们将使用爱因斯坦求和约定. $\frac{\partial}{\partial t^j}$ 的水平提升为

$$V_j := \frac{\partial}{\partial t^j} - \phi_{j\bar{\beta}} \phi^{\bar{\beta}\alpha} \frac{\partial}{\partial \zeta^\alpha},$$

并且纤维 X_t 上的 ω -Kodaira-Spencer 张量为

$$\kappa_j := (\bar{\partial} V_j)|_{X_t}. \quad (2.1)$$

广义 Weil-Petersson 度量 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{WP}}$ 定义为

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t^j}, \frac{\partial}{\partial t^k} \right\rangle_{\mathcal{WP}}(t) := \int_{X_t} \langle \kappa_j, \kappa_k \rangle_{\omega_t} \frac{\omega_t^n}{n!}, \quad \omega_t = \omega|_{X_t},$$

这里 n 为纤维的维数, 于是

$$\omega_{\mathcal{WP}} = iG_{j\bar{k}} dt^j \wedge d\bar{t}^k, \quad G_{j\bar{k}} := \left\langle \frac{\partial}{\partial t^j}, \frac{\partial}{\partial t^k} \right\rangle_{\mathcal{WP}}.$$

关于 ω , 其测地曲率形式为

$$c(\omega) = ic_{j\bar{k}} dt^j \wedge d\bar{t}^k, \quad c_{j\bar{k}} := \langle V_j, V_k \rangle_\omega = \phi_{j\bar{k}} - \phi_{j\bar{\beta}} \phi^{\alpha\bar{\beta}} \phi_{\alpha\bar{k}}.$$

于是, Monge-Ampère 纤维化定义如下.

定义 2.1 (见[1, 定义1.8]) 如果 $\omega^{n+1} = 0$, 则 $p : (\mathcal{X}, \omega) \rightarrow \mathcal{B}$ 被称为 Monge-Ampère 纤维化, 等价于 $c(\omega) = 0$, 其中 ω 称为 Monge-Ampère 形式. 如果 \mathcal{X} 上存在 Monge-Ampère 形式 ω , 则 $p : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$ 称为 Monge-Ampère 纤维化.

现在假设 Kodaira-Spencer 映射是单射, 则 Weil-Petersson 度量一定是非退化的, 于是 $\omega_{\mathcal{WP}}$ 是基流形 \mathcal{B} 上的 Kähler 度量. 对于具有紧的纤维的 Monge-Ampère 纤维化 $p : (\mathcal{X}, \omega) \rightarrow \mathcal{B}$, 广义度量 $\omega_{\mathcal{WP}}$ 的陈曲率由下式给出 (见 [1, 定理2.4])

$$\begin{aligned} R_{j\bar{k}l\bar{m}} &= -\frac{\partial^2 G_{j\bar{k}}}{\partial t^l \partial \bar{t}^m} + G^{p\bar{q}} \frac{\partial G_{j\bar{q}}}{\partial t^l} \frac{\partial G_{p\bar{k}}}{\partial \bar{t}^m} \\ &= -\langle \bar{\kappa}_m \kappa_j, \bar{\kappa}_l \kappa_k \rangle - \langle \kappa_j \bar{\kappa}_m, \kappa_k \bar{\kappa}_l \rangle - \langle H^\perp(L_{V_l} \kappa_j), H^\perp(L_{V_m} \kappa_k) \rangle. \end{aligned} \quad (2.2)$$

这里 H^\perp 表示从 $A^{0,1}(X_t, T_{X_t})$ 到 $\text{Span}\{\kappa_i\}^\perp$ 的正交投影.

§3 全纯双截面曲率为零的性质

在本节中, 我们将讨论陈曲率为零的情形.

对于在 $T_t \mathcal{B}$ 中的任意两个向量 $\xi = \xi^j \frac{\partial}{\partial t^j}$, $\eta = \eta^j \frac{\partial}{\partial t^j}$, 有

$$\kappa_\xi = \kappa_j \xi^j, \quad \kappa_\eta = \kappa_j \eta^j, \quad V_\xi = V_j \xi^j, \quad V_\eta = V_j \eta^j.$$

由陈曲率公式 (2.2) 可知, 全纯双截面曲率满足

$$\begin{aligned} &R(\xi, \bar{\xi}, \eta, \bar{\eta}) + \|H^\perp(L_{V_\eta} \kappa_\xi)\|^2 \\ &= (R_{j\bar{k}l\bar{m}} + \langle H^\perp(L_{V_l} \kappa_j), H^\perp(L_{V_m} \kappa_k) \rangle) \xi^j \bar{\xi}^k \eta^l \bar{\eta}^m \\ &= -\langle \bar{\kappa}_\eta \kappa_\xi, \bar{\kappa}_\eta \kappa_\xi \rangle - \langle \kappa_\xi \bar{\kappa}_\eta, \kappa_\xi \bar{\kappa}_\eta \rangle \end{aligned}$$

$$= -2\langle \overline{\kappa_\eta \kappa_\xi}, \overline{\kappa_\eta \kappa_\xi} \rangle. \quad (3.1)$$

注意到

$$\langle \overline{\kappa_\eta \kappa_\xi}, \overline{\kappa_\eta \kappa_\xi} \rangle \geq \frac{1}{n} \left| \sum_{\beta=1}^n (\kappa_\eta \overline{\kappa_\xi})_\beta \right|^2 = \frac{1}{n} |\text{Tr}(\kappa_\eta \overline{\kappa_\xi})|^2. \quad (3.2)$$

事实上, 通过一个固定点周围取一个法坐标系, 可以假设在该点有 $\phi_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, 则有

$$\begin{aligned} \langle \overline{\kappa_\eta \kappa_\xi}, \overline{\kappa_\eta \kappa_\xi} \rangle &= (\overline{\kappa_\eta \kappa_\xi})_{\overline{\beta}}^{\overline{\gamma}} (\kappa_\eta \overline{\kappa_\xi})_{\alpha}^{\tau} \phi^{\alpha\beta} \phi_{\tau\overline{\gamma}} \\ &= \sum_{\beta, \gamma=1}^n (\overline{\kappa_\eta \kappa_\xi})_{\overline{\beta}}^{\overline{\gamma}} (\kappa_\eta \overline{\kappa_\xi})_{\beta}^{\gamma} \geq \sum_{\beta=1}^n |(\kappa_\eta \overline{\kappa_\xi})_{\beta}^{\beta}|^2 \\ &\geq \frac{1}{n} \left(\sum_{\beta=1}^n |(\kappa_\eta \overline{\kappa_\xi})_{\beta}^{\beta}| \right)^2 \geq \frac{1}{n} \left| \sum_{\beta=1}^n (\kappa_\eta \overline{\kappa_\xi})_{\beta}^{\beta} \right|^2 = \frac{1}{n} |\text{Tr}(\kappa_\eta \overline{\kappa_\xi})|^2. \end{aligned}$$

由上述估算可知, (3.2) 中的等号成立当且仅当

$$(\kappa_\eta \overline{\kappa_\xi})_{\alpha}^{\tau} = \text{Tr}(\kappa_\eta \overline{\kappa_\xi}) \frac{1}{n} \delta_{\alpha\tau}. \quad (3.3)$$

通过 (3.2), 有

$$\begin{aligned} \langle \overline{\kappa_\eta \kappa_\xi}, \overline{\kappa_\eta \kappa_\xi} \rangle &= \int_{X_t} \langle \overline{\kappa_\eta \kappa_\xi}, \overline{\kappa_\eta \kappa_\xi} \rangle \frac{\omega_t^n}{n!} \\ &\geq \int_{X_t} \frac{1}{n} |\text{Tr}(\kappa_\eta \overline{\kappa_\xi})|^2 \frac{\omega_t^n}{n!} \\ &\geq \frac{1}{n} \left(\int_{X_t} |\text{Tr}(\kappa_\eta \overline{\kappa_\xi})| \frac{\omega_t^n}{n!} \right)^2 \left(\int_{X_t} \frac{\omega_t^n}{n!} \right)^{-1} \\ &\geq \frac{1}{n} |\langle \eta, \xi \rangle_{\mathcal{WP}}|^2 |X_t|^{-1}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

这里 $|X_t| := \int_{X_t} \frac{\omega_t^n}{n!}$ 代表每根纤维的体积. 通过 (3.3), 在 (3.4) 中所有等式都成立, 当且仅当

$$(\kappa_\eta \overline{\kappa_\xi})_{\alpha}^{\tau} = \text{Tr}(\kappa_\eta \overline{\kappa_\xi}) \frac{1}{n} \delta_{\alpha\tau}, \quad \text{Tr}(\kappa_\eta \overline{\kappa_\xi}) \equiv \text{constant}. \quad (3.5)$$

从 (3.1) 和 (3.4), 可以得到

$$R(\xi, \overline{\xi}, \eta, \overline{\eta}) + \|\mathbb{H}^\perp(L_{V_\eta} \kappa_\xi)\|^2 \leq -\frac{2}{n} |X_t|^{-1} |\langle \eta, \xi \rangle_{\mathcal{WP}}|^2. \quad (3.6)$$

由 (3.6), 得到广义 Weil-Petersson 度量的全纯双截面曲率是非正的, 如果 ξ 和 η 不正交时是负的. 特别地, (3.6) 中的等号成立当且仅当 (3.5) 成立.

下面我们将给出陈曲率为零的情况.

定理 3.1 设两个切向量 $\xi, \eta \in T_t \mathcal{B}$, 则 $R(\xi, \overline{\xi}, \eta, \overline{\eta}) = 0$ 当且仅当在 X_t 纤维上

$$\kappa_\eta \overline{\kappa_\xi} \equiv 0, \quad \mathbb{H}^\perp(L_{V_\eta} \kappa_\xi) \equiv 0.$$

证 由 (3.6), $R(\xi, \overline{\xi}, \eta, \overline{\eta}) = 0$ 当且仅当 $\mathbb{H}^\perp(L_{V_\eta} \kappa_\xi) \equiv 0$ 和

$$\langle \eta, \xi \rangle_{\mathcal{WP}} = \int_{X_t} \text{Tr}(\kappa_\eta \overline{\kappa_\xi}) \frac{\omega_t^n}{n!} = 0.$$

在这种情况下, (3.6) 中的等号成立, 由 (3.5), 在纤维 X_t 上就有

$$\kappa_\eta \overline{\kappa_\xi} \equiv 0.$$

§4 Monge-Ampère 形式存在的等价性条件

本节将讨论关于紧复曲面、紧的直纹曲面和一般相对 Kähler 纤维化上的 Monge-Ampère 纤维化的一些结论.

§4.1 紧复曲面

设 $p: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$ 是两个紧复流形 \mathcal{X} 和 \mathcal{B} 之间的逆紧全纯浸没, 且 $\dim \mathcal{X} = 2$ 和 $\dim \mathcal{B} = 1$. 我们假设每根纤维是亏格 $g \geq 2$ 的黎曼曲面, 并且基流形 \mathcal{B} 也是亏格 $g_0 \geq 2$ 的黎曼曲面, 则根据 Gauss-Bonnet 定理, 有

$$\int_{\mathcal{B}} c_1(K_{\mathcal{B}}) = 2g_0 - 2, \quad \int_{\mathcal{X}/\mathcal{B}} c_1(K_{\mathcal{X}/\mathcal{B}}) = 2g - 2. \quad (4.1)$$

由于 N 足够大时, $K_{\mathcal{X}/\mathcal{B}} \otimes p^* K_{\mathcal{B}}^N$ 是正的, 所以这里的 \mathcal{X} 是射影流形.

注 4.1 对于类 $[\alpha] \in H_{dR}^{1,1}(\mathcal{X}, \mathbb{R})$, 如果存在相对 Kähler 形式 $\omega \in [\alpha]$, 使得 ω 是半正的, 则记作 $[\alpha] \geq_r 0$.

那么, 接下来我们将给出有关 Monge-Ampère 纤维化的相关定理.

定理 4.1 $p: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$ 是 Monge-Ampère 纤维化当且仅当存在类 $[\omega_0] \in H_{dR}^{1,1}(\mathcal{X}, \mathbb{R})$, 使得

$$[\omega_0] \geq_r p^*[\alpha], \quad (4.2)$$

其中类 $[\alpha]$ 是 $H_{dR}^{1,1}(\mathcal{B}, \mathbb{R})$ 中的生成元且 $[\alpha](\mathcal{B}) = 1$, $[\omega_0]$ 满足归一化条件 $\int_{\mathcal{X}/\mathcal{B}} [\omega_0] = \int_{\mathcal{X}} \frac{[\omega_0]^2}{2}$.

证 如果 (4.2) 成立, 则存在相对 Kähler 形式 ω , 使得

$$[\omega] = [\omega_0] - p^*[\alpha]$$

和 $\omega \geq 0$. 则

$$\int_{\mathcal{X}} \omega^2 \geq 0, \quad (4.3)$$

并且等号成立当且仅当 $\omega^2 = 0$. 通过直接验算, 可以得到 $\int_{\mathcal{X}} \omega^2 = 0$. 因此, ω 是 Monge-Ampère 形式.

反之, 若在 \mathcal{X} 存在 Monge-Ampère 形式 ω , 则 $\omega \geq 0$ 和 $\omega^2 = 0$. 这表示

$$\omega_0 = \omega + \alpha,$$

其中 α 是 \mathcal{B} 上的 Kähler 度量且 $\int_{\mathcal{B}} \alpha = 1$, 则 $\omega_0 > 0$ 和 $[\omega_0] \geq_r p^*[\alpha]$. 此外, $\int_{\mathcal{X}} ([\omega_0] - [\alpha])^2 = 0$ 得到了归一化条件为 $\int_{\mathcal{X}/\mathcal{B}} [\omega_0] = \int_{\mathcal{X}} \frac{[\omega_0]^2}{2}$.

命题 4.1 如果下式成立

$$c_1(K_{\mathcal{X}/\mathcal{B}}) \geq_r \frac{\int_{\mathcal{X}} \frac{c_1(K_{\mathcal{X}/\mathcal{B}})^2}{2}}{(2g-2)(2g_0-2)} c_1(p^* K_{\mathcal{B}}), \quad (4.4)$$

则 $p: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$ 是 Monge-Ampère 纤维化.

证 如果 (4.4) 成立, 则存在相对 Kähler 形式 ω , 使得

$$[\omega] = c_1(K_{\mathcal{X}/\mathcal{B}}) - \frac{\int_{\mathcal{X}} \frac{c_1(K_{\mathcal{X}/\mathcal{B}})^2}{2}}{(2g-2)(2g_0-2)} c_1(p^*K_{\mathcal{B}})$$

和 $\omega \geq 0$, 则

$$\int_{\mathcal{X}} \omega^2 \geq 0, \quad (4.5)$$

并且等号成立当且仅当 $\omega^2 = 0$. 通过直接验算, 可以得到 $\int_{\mathcal{X}} \omega^2 = 0$. 因此, ω 是 Monge-Ampère 形式.

注意

$$\int_{\mathcal{X}} c_2(\mathcal{X}) = \chi(\mathcal{X}) = \chi(X)\chi(\mathcal{B}) = (2g-2)(2g_0-2),$$

并考虑以下 \mathcal{X} 上的正合序列:

$$0 \rightarrow T_{\mathcal{X}/\mathcal{B}} \rightarrow T_{\mathcal{X}} \rightarrow p^*T_{\mathcal{B}} \rightarrow 0,$$

全空间的全纯切丛 $T_{\mathcal{X}}$ 的第一陈类由下式给出

$$c_1(\mathcal{X}) = c_1(T_{\mathcal{X}}) = -c_1(K_{\mathcal{X}/\mathcal{B}}) - p^*c_1(K_{\mathcal{B}}).$$

于是

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X}} c_1(\mathcal{X})^2 &= \int_{\mathcal{X}} (c_1(K_{\mathcal{X}/\mathcal{B}}) + p^*c_1(K_{\mathcal{B}}))^2 \\ &= 2 \left(\int_{\mathcal{X}} \frac{c_1(K_{\mathcal{X}/\mathcal{B}})^2}{2} + (2g-2)(2g_0-2) \right). \end{aligned}$$

则其 signature 由下式给出

$$\tau(\mathcal{X}) = \frac{1}{3} \left(\int_{\mathcal{X}} c_1(\mathcal{X})^2 - 2 \int_{\mathcal{X}} c_2(\mathcal{X}) \right) = \frac{1}{3} \int_{\mathcal{X}} c_1(K_{\mathcal{X}/\mathcal{B}})^2 \geq 0,$$

其中第一个等号由 Hirzebruch 符号定理 (见文 [6]) 得到. 因此, 可以得到下面结论.

推论 4.1 如果下式成立

$$c_1(K_{\mathcal{X}/\mathcal{B}}) \geq_r \frac{3\tau(\mathcal{X})}{2\chi(\mathcal{X})} c_1(p^*K_{\mathcal{B}}),$$

则 $p: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$ 是 Monge-Ampère 纤维化.

例 4.1 我们考虑平凡纤维化 $p: \mathcal{X} = \Sigma_g \times \Sigma_{g_0} \rightarrow \Sigma_{g_0}$, 则 $\tau(\mathcal{X}) = 0$ 和

$$c_1(K_{\mathcal{X}/\mathcal{B}}) = \pi^*c_1(K_{\Sigma_g}) \geq_r 0,$$

其中 $\pi: \Sigma_g \times \Sigma_{g_0} \rightarrow \Sigma_{g_1}$. 根据推论 4.1, $p: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$ 是 Monge-Ampère 纤维化.

根据 [7, 定理1], 有

$$c_1(K_{\mathcal{X}/\mathcal{B}}) \geq_r 0.$$

因此, 可以得到以下推论.

推论 4.2 如果 $\tau(\mathcal{X}) = 0$, 则 $p: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$ 是 Monge-Ampère 纤维化.

注 4.2 若假设基本群 $\pi_1(\mathcal{B})$ 平凡地作用于 X 上的上同调环 $H^*(X)$, 通过 [8, 定理], 则

$$\tau(\mathcal{X}) = \tau(X)\tau(\mathcal{B}) = 0.$$

在这种情况下, $p: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$ 是 Monge-Ampère 纤维化.

§4.2 紧的直纹曲面

接下来, 我们考虑紧的黎曼面上的射影丛纤维化. 假设 $\pi: E \rightarrow \mathcal{B}$ 是紧的黎曼曲面 \mathcal{B} 上秩为 2 的全纯向量丛. 记 $\mathcal{X} = P(E)$, 称为直纹曲面. 那么每个实的 $(1, 1)$ 形式的 ω 有如下形式

$$[\omega] = k_1 c_1(\mathcal{O}_{P(E)}(1)) + k_2 [\alpha] = k_1 x + k_2 [\alpha], \quad (4.6)$$

其中 $x := c_1(\mathcal{O}_{P(E)}(1))$, $[\alpha]$ 是 $H_{dR}^{1,1}(\mathcal{B}, \mathbb{R})$ 中的生成元. 通过 $[\omega]$ 的如下标准化

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{X}} (k_1 x + k_2 \alpha)^2 - \int_{\mathcal{X}/\mathcal{B}} (k_1 x + k_2 \alpha) \\ &= k_1 \left(-\frac{1}{2} k_1 \deg E + k_2 \right) - k_1, \end{aligned}$$

于是有

$$k_2 = \frac{1}{2} k_1 \deg E + 1.$$

所以

$$[\omega - \alpha] = k_1 \left(c_1(\mathcal{O}_{P(E)}(1)) + \frac{1}{2} \deg E \cdot p^*[\alpha] \right). \quad (4.7)$$

由定理 4.1 可知, $p: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$ 是 Monge-Ampère 纤维化当且仅当

$$c_1(\mathcal{O}_{P(E)}(1)) + \frac{1}{2} \deg E \cdot p^*[\alpha] \geq_r 0.$$

注意 $\deg E \cdot [\alpha] = c_1(E)$, 所以有以下结论.

定理 4.2 紧的直纹曲面 $p: \mathcal{X} = P(E) \rightarrow \mathcal{B}$ 是 Monge-Ampère 纤维化当且仅当

$$c_1(\mathcal{O}_{P(E)}(1)) + \frac{1}{2} p^* c_1(E) \geq_r 0.$$

在这种情况下, 有

$$K_{\mathcal{X}/\mathcal{B}} = p^* \det E^* \otimes \mathcal{O}_{P(E)}(-2),$$

其 signature 是

$$\tau(\mathcal{X}) = \frac{1}{3} \int_{\mathcal{X}} c_1(K_{\mathcal{X}/\mathcal{B}})^2 = 0.$$

推论 4.3 紧的直纹曲面 $p: \mathcal{X} = P(E) \rightarrow \mathcal{B}$ 是 Monge-Ampère 纤维化当且仅当

$$c_1(K_{\mathcal{X}/\mathcal{B}}^{-1}) \geq_r 0.$$

特别地, $K_{\mathcal{X}/\mathcal{B}}^{-1}$ 是半正线丛.

§4.3 一般相对 Kähler 纤维化

在本节中, 假设 $p: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$ 是两个紧的 Kähler 流形 \mathcal{X} 和 \mathcal{B} 之间的一般相对 Kähler 纤维化, 其中 $\dim \mathcal{B} = m$, $\dim \mathcal{X} = n + m$, 则有以下结论.

定理 4.3 $p: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$ 是 Monge-Ampère 纤维化当且仅当存在 $[\omega_0] \in H_{dR}^{1,1}(\mathcal{X}, \mathbb{R})$, 使得

$$\begin{cases} [\omega_0] \geq_r 0, \\ \int_{\mathcal{X}/\mathcal{B}} [\omega_0]^{n+1} = 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

证 如果存在类 $[\omega_0]$ 满足 (4.8), 则存在一个相对的 Kähler 形式 ω , 使得

$$[\omega] = [\omega_0]$$

和 $\omega \geq 0$. 因此

$$\int_{\mathcal{X}/\mathcal{B}} \omega^{n+1} \geq 0, \quad (4.9)$$

并且当且仅当 $c(\omega) = 0$ 时等号成立. 从 (4.8) 的第二个等式可以得到

$$\partial\bar{\partial}\varphi = \int_{\mathcal{X}/\mathcal{B}} \omega^{n+1} \geq 0, \quad (4.10)$$

这意味着 $\varphi = \text{constant}$, 所以 $c(\omega) = 0$. 因此, ω 是 Monge-Ampère 形式.

反之, 若 \mathcal{X} 上存在 Monge-Ampère 形式 ω , 则 $\omega \geq 0$ 且 $\omega^{n+1} = 0$, 它满足 (4.8).

推论 4.4 设 \mathcal{X} 为 $\tau(\mathcal{X}) = 0$ 的紧复曲面, 且每根纤维为 $g \geq 2$ 的黎曼曲面, 则 $p: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$ 为 Monge-Ampère 纤维化.

证 由于 $\tau(\mathcal{X}) = \frac{1}{3} \int_{\mathcal{X}} c_1(K_{\mathcal{X}/\mathcal{B}})^2$ 和 $c_1(K_{\mathcal{X}/\mathcal{B}}) \geq_r 0$, 如果 $\tau(\mathcal{X}) = 0$, 则

$$\int_{\mathcal{X}/\mathcal{B}} c_1(K_{\mathcal{X}/\mathcal{B}})^2 = 0.$$

注 4.3 相较于推论 4.2, 上述结果没有使用 \mathcal{B} 的亏格 ≥ 2 的假设.

若设 $\pi: E \rightarrow \mathcal{B}$ 是秩为 r 的全纯向量丛, 令 $\mathcal{X} = P(E)$, 则有以下命题.

命题 4.2 射影丛纤维化 $p: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$ 为 Monge-Ampère 纤维化, 当且仅当 $c_1(K_{\mathcal{X}/\mathcal{B}}^{-1}) \geq_r 0$.

证 从

$$c_1(K_{\mathcal{X}/\mathcal{B}}^{-1}) = r c_1(\mathcal{O}_{P(E)}(1)) + p^* \det E, \quad (4.11)$$

有

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X}/\mathcal{B}} c_1(K_{\mathcal{X}/\mathcal{B}}^{-1})^r &= r^r \int_{\mathcal{X}/\mathcal{B}} c_1(\mathcal{O}_{P(E)}(1))^r + r \cdot r^{r-1} \int_{\mathcal{X}/\mathcal{B}} c_1(\mathcal{O}_{P(E)}(1))^{r-1} p^* c_1(E) \\ &= r^r (-c_1(E)) + r^r c_1(E) = 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

由定理 4.3, 若 $c_1(K_{\mathcal{X}/\mathcal{B}}^{-1}) \geq_r 0$, 则 $p: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$ 为 Monge-Ampère 纤维化.

反之, 如果 $p: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$ 是 Monge-Ampère 纤维化, 则 $[\omega_0]$ 满足 (4.8). 因为对于一些 $[\beta] \in H_{dR}^{1,1}(\mathcal{B}, \mathbb{R})$, 若令

$$[\omega_0] = k_1 (c_1(K_{\mathcal{X}/\mathcal{B}}^{-1}) + p^*[\beta]), \quad k_1 > 0. \quad (4.13)$$

通过 (4.8) 和 (4.12), 可以得到

$$[\beta] = 0.$$

因此

$$c_1(K_{X/B}^{-1}) = \frac{1}{k}[\omega_0] \geq_r 0.$$

综上, 根据 [1, 定理0.3], 有下面推论.

推论 4.5 设 $\pi : E \rightarrow B$ 是紧的 Kähler 流形 B 上的全纯向量丛, 则以下三条是等价的:

- (1) E 有一个射影平坦的 Hermitian 度量;
- (2) $p : P(E) \rightarrow B$ 是 Monge-Ampère 纤维化;
- (3) $c_1(K_{P(E)/B}^{-1}) \geq_r 0$.

特别地, $K_{P(E)/B}^{-1}$ 是半正的线丛.

推论 4.6 如果 E 是丰沛的 (ample) 且 $p : P(E) \rightarrow B$ 是 Monge-Ampère 纤维化, 则 E 是 Nakano 正的.

证 由于

$$E = p_*(\mathcal{O}_{P(E^*)}(1)) = p_*(\mathcal{O}_{P(E^*)}(1) \otimes K_{P(E^*)/B}^{-1} \otimes K_{P(E^*)/B}),$$

并当且仅当 $\mathcal{O}_{P(E^*)}(1)$ 为正时, E 是丰沛的. 又因为 $p : P(E) \rightarrow B$ 是 Monge-Ampère 纤维化, 因此 E 满足有一个射影平坦的 Hermitian 度量, 所以 E^* 也有射影平坦的 Hermitian 度量, 即 $p : P(E^*) \rightarrow B$ 也是 Monge-Ampère 纤维化. 因此 $K_{P(E^*)/B}^{-1}$ 是一个半正的线丛, 则 $\mathcal{O}_{P(E^*)}(1) \otimes K_{P(E^*)/B}^{-1}$ 是一个丰沛的线丛. 根据 Berndtsson [9-10] 的结果, 在 E 上 L^2 -度量的曲率为 Nakano 正的.

推论 4.7 如果 $p : P(E) \rightarrow B$ 是一个 Monge-Ampère 纤维化, 那么在 $K_{P(E)/B}^{-1}$ 上存在度量 $e^{-\phi}$, 使得

$$i\partial\bar{\partial} \log \int_{P(E)/B} e^{-\phi} \leq 0.$$

证 通过假设, 知道 $K_{P(E)/B}^{-1}$ 是一个半正的线丛, 再考虑直像线丛

$$p_*(K_{P(E)/B}^{-1} \otimes K_{P(E)/B}),$$

可知这个线丛是半正的, 见 [10, 定理1.2].

参 考 文 献

- [1] Wan X, Wang X. Curvature of the base manifold of a Monge-Ampère fibration and its existence [J]. *Math Ann*, 2023, 387(1-2):353-387.
- [2] Ahlfors L V. Some remarks on Teichmüller's space of Riemann surfaces [J]. *Ann of Math* (2), 1961, 74:171-191.
- [3] Ahlfors L V. Curvature properties of Teichmüller's space [J]. *J Analyse Math*, 1961, 9:161-176.
- [4] Liu K, Sun X, Yang X, Yau S T. Curvatures of moduli space of curves and applications [J]. *Asian J Math*, 2017, 21(5):841-854.

- [5] Wolpert S. Chern forms and the Riemann tensor for the moduli space of curves [J]. *Invent Math*, 1986, 85(1):119–145.
- [6] Kodaira K. A certain type of irregular algebraic surfaces [J]. *J Anal Math*, 1967, 19:207–215.
- [7] Schumacher G. Positivity of relative canonical bundles and applications [J]. *Invent Math*, 2012, 190(1):1–56.
- [8] Chern S S, Hirzebruch F, Serre J P. On the index of a fibered manifold [J]. *Proc Amer Math Soc*, 1957, 8(3):587–596.
- [9] Berndtsson B. Curvature of vector bundles associated to holomorphic fibrations [J]. *Ann of Math (2)*, 2009, 169:531–560.
- [10] Berndtsson B. Strict and non strict positivity of direct image bundles [J]. *Math Z*, 2011, 269(3–4):1201–1218.

Remarks on the Curvature and Existence of a Monge-Ampère Form

LIU Hongling¹

¹School of Science, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054,
China. E-mail: honglingliu@stu.cqut.edu.cn

Abstract In their paper, Wan and Wang established the non-positivity of the holomorphic bisectional curvature of a generalized Weil-Petersson metric on the base manifold of a Monge-Ampère fibration. This paper presents a precise characterization of the vanishing of the holomorphic bisectional curvature. On the other hand, for a compact complex surface admitting a relative Kähler fibration, the author demonstrates the existence of a Monge-Ampère form whenever its signature vanishes. Furthermore, in the context of a projective bundle fibration, the author establishes that it is a Monge-Ampère fibration if and only if there exists a semi-positive relative Kähler form in the first Chern class of the relative anti-canonical bundle.

Keywords Holomorphic bisectional curvature, Monge-Ampère fibration,
Generalized Weil-Petersson metric

2020 MR Subject Classification 32Q05, 32G05, 53C55

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 46 No. 3, 2025
by ALLERTON PRESS, INC., USA