

一类非线性差分方程亚纯解与亚纯函数 分担值的唯一性*

陈创鑫¹ 张然然² 陈宝琴³

摘要 作者讨论了起源于 q - P_V 方程簇的一类非线性差分方程, 其形式为

$$(f(z+1)f(z)-1)(f(z)f(z-1)-1) = \frac{M(z)}{N(z)},$$

其中 $M(z)$ 和 $N(z)$ 是两个互异的非零多项式, 证明了其有穷级超越亚纯解可由其零点、1 值点和极点决定. 即, 假设 $f(z)$ 是上述方程的有穷级超越亚纯解, 且与亚纯函数 $g(z)$ CM 分担 $0, 1, \infty$, 那么可得 $f(z) \equiv g(z)$. 另外, 作者也研究了上述方程当 $M(z)$ 恒等于 $N(z)$ 的情形, 并得到同样的结论. 文中给出的例子说明了所得到两个结论的精确性.

关键词 非线性差分方程, 亚纯函数, 唯一性

MR (2020) 主题分类 39A10, 30D35

中图法分类 O174.52

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2025)03-0321-12

§1 引言和主要结论

2001 年, Grammaticos 等人研究了离散型可积系统的增长性质, 并完善了基于奇异约束性质下的增长准则. 应用上述结论可以提炼出已知的离散 Painlevé 方程的类型, 并证明在给定参数的情况下不可能存在新的方程类型. 他们还对 q - P_V 方程簇

$$(x_{n+1}x_n - 1)(x_nx_{n-1} - 1) = \frac{P(x_n)}{Q(x_n)} \quad (1.1)$$

进行了研究, 其中 P 和 Q 为常系数的多项式, 并得到了下述结论.

定理 A (见 [1]) 如果差分方程 (1.1) 有有穷级非有理亚纯函数解, 那么 $\deg P(x_n) \leq 4$ 且 $\deg Q(x_n) \leq 2$.

本文中, 我们假设读者熟悉亚纯函数 Nevanlinna 值分布理论的基本结论及标准记号 (见 [2–4]). 对亚纯函数 $f(z)$, 我们使用 $S(f)$ 表示亚纯函数 $\alpha(z)$ 的集合, 这里的 $\alpha(z)$ 满足 $T(r, \alpha) = S(r, f)$, 其中 $S(r, f) = o(T(r, f))$, $r \rightarrow \infty$, 且可能除去 r 的一个有穷对数测度集. 集合 $S(f)$ 中的函数称为 $f(z)$ 的小函数.

本文 2024 年 1 月 10 日收到, 2025 年 9 月 18 日收到修改稿.

¹仲恺农业工程学院数学与数据科学学院, 广州 510225. E-mail: chenchenxin@126.com

²通信作者, 广东第二师范学院数学学院, 广州 510303. E-mail: zhangranran@gdei.edu.cn

³广东海洋大学数学与计算机学院, 广东 湛江 524088. E-mail: cbqchen@gdou.edu.cn

*本文受到广东省特色创新项目 (No. 2024KTSCX022) 和国家自然科学基金 (No. 12101138) 的资助.

2019 年, 陈敏风、高宗升等人将离散方程 (1.1) 重新解释为形式如下的差分方程:

$$(f(z+1)f(z)-1)(f(z)f(z-1)-1) = \frac{P(z, f(z))}{Q(z, f(z))}, \quad (1.2)$$

其中 $z \in \mathbb{C}$, $P(z, f(z))$ 和 $Q(z, f(z))$ 是 $f(z)$ 的带有有理系数的多项式函数, 且没有公共零点. 他们研究方程 (1.2) 的非有理函数有穷级亚纯解的性质, 并得到两个定理, 其中一个定理如下.

定理 B (见 [5]) 假设 $f(z)$ 是差分方程

$$(f(z+1)f(z)-1)(f(z)f(z-1)-1) = \frac{M(z)}{N(z)} \quad (1.3)$$

的有穷级超越亚纯函数解, 其中 $M(z)$ 和 $N(z)$ 是次数分别为 $\deg M(z) = m$ 和 $\deg N(z) = n$ 的互素多项式. 那么

- (i) $\lambda(\frac{1}{f}) = \sigma(f) \geq 1$;
- (ii) 如果 $M(z) \not\equiv N(z)$, 那么 $\lambda(f) = \sigma(f)$ 且 $\lambda(\frac{1}{\Delta f(z)}) = \lambda(\frac{1}{\frac{\Delta f(z)}{f(z)}}) = \sigma(f)$.

注 1.1 通过仔细检查文 [5] 中定理的证明可知, 定理 B 中要求的条件“ $M(z)$ 和 $N(z)$ 是互素多项式”放宽为“ $M(z)$ 和 $N(z)$ 是两个互异的非零多项式”, 结论仍然成立.

亚纯函数唯一性理论是复分析的一个重要内容. 其基本概念如下: 令 f 和 g 是两个非常数亚纯函数, $a \in \mathbb{C}$. 我们说 f 和 g CM 分担 a 指的是 $f-a$ 和 $g-a$ 有相同的零点且每个零点的重级也相同, f 和 g CM 分担 ∞ 指的是 f 和 g 有相同的极点且极点的重级也相同.

早在 30 年前, 微分方程解的唯一性就引起了众多学者的兴趣. 例如, 1989 年 Brosch 在其博士论文中就证明了如下定理.

定理 C (见 [6]) 假设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是 CM 分担 3 个互异复数 $c_j (j = 1, 2, 3)$ 的非常数亚纯函数, n 是正整数. 假设 f 是微分方程

$$(f')^n = \sum_{j=0}^{2n} a_j f^j = P(z, f) \quad (1.4)$$

的解, 系数 $a_j (j = 0, 1, \dots, 2n)$ 是亚纯函数, 且满足

$$\sum_{j=0}^{2n} T(r, a_j) = S(r, f), \quad a_{2n} \neq 0.$$

如果 $P(z, c_j) \neq 0 (j = 1, 2, 3)$, 那么 $f(z) \equiv g(z)$.

Nevanlinna 四值定理告诉我们, 如果两个非常数亚纯函数 f 和 g CM 分担 4 个复常数, 那么 $f \equiv g$ 或者 f 是 g 的一个 Möbius 变换. 但如今, 定理 C 告诉我们, 方程 (1.4) 的超越亚纯解可以由 3 个复数所决定.

近年来, 随着差分方程和复域差分的发展, 一些学者开始关注差分及差分方程亚纯解的唯一性, 见 [7-15]. 本文的目的是研究非线性差分方程 (1.3) 亚纯解的唯一性, 并得到类似定理 C 的结论.

定理 1.1 假设 $f(z)$ 是方程 (1.3) 的有穷级超越亚纯解, 其中 $M(z)$ 和 $N(z)$ 是两个互异的非零多项式. 如果亚纯函数 $g(z)$ 与 $f(z)$ CM 分担 $0, 1, \infty$, 那么 $g(z) \equiv f(z)$.

注 1.2 下述例子说明定理 1.1 中分担值的数量不能减少.

例 1.1 $f(z) = -\frac{i}{z} \frac{e^{i\pi z} - 1}{e^{i\pi z} + 1}$ 是方程

$$(f(z+1)f(z) - 1)(f(z)f(z-1) - 1) = \frac{z^4 + z^2 + 1}{z^4 - z^2} \quad (1.5)$$

的亚纯解. 显然 $f(z)$ 和 $g(z) := -f(z)$ CM 分担 $0, \infty$, 但 $f(z) \not\equiv g(z)$.

方程 (1.5) 右边是有理函数, 我们同样能得到 (1.5) 右边是多项式或常数的例子. 实际上, 如果我们将 $f(z) = -\frac{i}{z} \frac{e^{i\pi z} - 1}{e^{i\pi z} + 1}$ 代换成 $f(z) = -iz \frac{e^{i\pi z} - 1}{e^{i\pi z} + 1}$ 或 $f(z) = \sqrt{3} \frac{e^{i\pi z} - 1}{e^{i\pi z} + 1}$ 并代入 (1.5), 那么方程 (1.5) 的右边就可得到一个多项式或常数了.

定理 1.1 中, $M(z)$ 和 $N(z)$ 是两个不同的非零多项式, 于是我们在证明定理 1.1 的过程中可以使用引理 2.2 和定理 B (ii) 的结论. 然而, 当 $M(z) \equiv N(z)$ 时, 方程 (1.3) 就变成

$$f(z)f(z+1)f(z-1) - (f(z+1) + f(z-1)) = 0. \quad (1.6)$$

这时, 引理 2.2 和定理 B 的结论就无法起作用了. 因此我们自然会问: 在相同的前提下, 方程 (1.6) 是否仍旧会有同样的结论成立? 这里, 我们研究了该问题, 并证明了下面的结论.

定理 1.2 令 $f(z)$ 是方程 (1.6) 的有穷级超越亚纯解. 如果亚纯函数 $g(z)$ 和 $f(z)$ CM 分担 $0, 1, \infty$, 那么 $g(z) \equiv f(z)$.

注 1.3 下面的例子说明定理 1.2 中分担值的数量不能减少.

例 1.2 函数 $f(z) = \sqrt{2} \frac{e^{i\pi z} - 1}{e^{i\pi z} + 1}$ 是方程

$$f(z)f(z+1)f(z-1) - (f(z+1) + f(z-1)) = 0$$

的亚纯解. 明显地, $f(z)$ 和 $g(z) := -f(z)$ CM 分担 $0, \infty$, 但 $f(z) \not\equiv g(z)$.

§2 定理证明所需要的引理

引理 2.1 (见 [16-17]) 假设 $n \geq 2$ 且 $f_1(z), \dots, f_n(z)$ 是亚纯函数, $g_1(z), \dots, g_n(z)$ 是整函数且满足

$$(i) \sum_{j=1}^n f_j(z) \exp\{g_j(z)\} = 0;$$

(ii) 当 $1 \leq j < k \leq n$ 时, $g_j(z) - g_k(z)$ 不是常数;

(iii) 当 $1 \leq j \leq n, 1 \leq h < k \leq n$ 时,

$$T(r, f_j) = o\{T(r, \exp\{g_h - g_k\})\} \quad (r \rightarrow \infty, r \notin E),$$

其中集合 $E \subset (1, \infty)$ 具有有穷线测度或对数测度.

那么 $f_j(z) \equiv 0, j = 1, \dots, n$.

引理 2.2 假设 $f(z)$ 是方程 (1.3) 的有穷级超越亚纯函数解, 其中 $M(z)$ 和 $N(z)$ 是两个互异的非零多项式. 那么 $\lambda(f-1) = \sigma(f)$.

证 由方程 (1.3) 可得

$$N(z)(f(z+1)f(z)-1)(f(z)f(z-1)-1) - M(z) = 0. \quad (2.1)$$

设 $g(z) = f(z) - 1$, 那么 $\sigma(g) = \sigma(f)$. 将 $f(z) = g(z) + 1$ 代入方程 (2.1), 可以得到

$$A(z, g) := N(z)[(g(z+1)+1)(g(z)+1)-1][(g(z)+1)(g(z-1)+1)-1] - M(z) = 0,$$

从而 $A(z, 0) = -M(z) \neq 0$. 于是, 由文 [18-19] 中 Mohon'ko 引理的差分模拟, 可得

$$m\left(r, \frac{1}{g}\right) = O(r^{\sigma(g)-1+\varepsilon}) + S(r, g),$$

至多除去一个有穷对数测度例外集. 由文 [3] 中的引理 1.1.2, 可得 $\lambda(g) = \sigma(g)$, 从而 $\lambda(f-1) = \sigma(f)$.

§3 定理 1.1 的证明

因为 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是 CM 分担 $0, 1, \infty$ 的两个亚纯函数, 对 $g(z)$ 应用 Nevanlinna 第二基本定理, 可得

$$\begin{aligned} T(r, g) &\leq N(r, g) + N\left(r, \frac{1}{g}\right) + N\left(r, \frac{1}{g-1}\right) + S(r, g) \\ &\leq N(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + S(r, g) \\ &\leq 3T(r, f) + S(r, g), \end{aligned}$$

这表明 $\sigma(g) \leq \sigma(f)$, 于是 $g(z)$ 也是有穷级亚纯函数.

由定理 1.1 的假设可知 $f(z)$ 和 $g(z)$ CM 分担 $0, 1, \infty$, 故有

$$\frac{g(z)}{f(z)} = e^{P(z)} \quad (3.1)$$

和

$$\frac{g(z)-1}{f(z)-1} = e^{Q(z)} \quad (3.2)$$

成立, 其中 $P(z), Q(z)$ 是次数分别为 $\deg P(z) = p$ 和 $\deg Q(z) = q$ 的两个多项式.

当 $e^{P(z)} \equiv e^{Q(z)}$ 或 $e^{P(z)} \equiv 1$ 或 $e^{Q(z)} \equiv 1$ 时, 由 (3.1)-(3.2) 可知 $f(z) \equiv g(z)$ 成立.

现假设 $e^{P(z)} \neq e^{Q(z)}, e^{P(z)} \neq 1$ 且 $e^{Q(z)} \neq 1$, 那么由 (3.1)-(3.2), 可得

$$f(z) = \frac{1 - e^{Q(z)}}{e^{P(z)} - e^{Q(z)}} \quad (3.3)$$

和

$$f(z) - 1 = \frac{1 - e^{P(z)}}{e^{P(z)} - e^{Q(z)}}. \quad (3.4)$$

由 (3.3)–(3.4), 可得

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{1 - e^{Q(z)}}\right) \leq T(r, e^{Q(z)}) + O(1)$$

和

$$N\left(r, \frac{1}{f-1}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{1 - e^{P(z)}}\right) \leq T(r, e^{P(z)}) + O(1).$$

因此

$$\lambda(f) \leq \sigma(e^{Q(z)}) = q, \quad \lambda(f-1) \leq \sigma(e^{P(z)}) = p. \quad (3.5)$$

如果 $p < q$, 那么有

$$N\left(r, \frac{1}{1 - e^{P(z)}}\right) \leq T(r, e^{P(z)}) + O(1) = S(r, e^{Q(z)}). \quad (3.6)$$

对 $e^{Q(z)}$ 应用 Nevanlinna 第二基本定理, 可以得到

$$N\left(r, \frac{1}{1 - e^{Q(z)}}\right) = T(r, e^{Q(z)}) + S(r, e^{Q(z)}). \quad (3.7)$$

如果 z_0 同时满足 $1 - e^{Q(z_0)} = 0$ 和 $e^{P(z_0)} - e^{Q(z_0)} = 0$, 那么有 $1 - e^{P(z_0)} = 0$. 于是, 由 (3.3) 和 (3.6)–(3.7), 可得

$$\begin{aligned} N\left(r, \frac{1}{f}\right) &= N\left(r, \frac{e^{P(z)} - e^{Q(z)}}{1 - e^{Q(z)}}\right) \\ &\geq N\left(r, \frac{1}{1 - e^{Q(z)}}\right) - N\left(r, \frac{1}{1 - e^{P(z)}}\right) = T(r, e^{Q(z)}) + S(r, e^{Q(z)}), \end{aligned}$$

由此知 $\lambda(f) \geq \sigma(e^Q) = q$. 于是, 由引理 2.2 和定理 B (ii) 的结论, 可得 $\lambda(f-1) = \sigma(f) = \lambda(f) \geq q > p$, 这与 (3.5) 中的第二个不等式矛盾.

如果 $q < p$, 那么有

$$N\left(r, \frac{1}{1 - e^{Q(z)}}\right) \leq T(r, e^{Q(z)}) + O(1) = S(r, e^{P(z)}). \quad (3.8)$$

对 $e^{P(z)}$ 应用 Nevanlinna 第二基本定理, 可以得到

$$N\left(r, \frac{1}{1 - e^{P(z)}}\right) = T(r, e^{P(z)}) + S(r, e^{P(z)}). \quad (3.9)$$

如果 z_0 同时满足 $1 - e^{P(z_0)} = 0$ 和 $e^{P(z_0)} - e^{Q(z_0)} = 0$, 那么有 $1 - e^{Q(z_0)} = 0$. 于是, 由 (3.4) 和 (3.8)–(3.9), 可得

$$\begin{aligned} N\left(r, \frac{1}{f-1}\right) &= N\left(r, \frac{e^{P(z)} - e^{Q(z)}}{1 - e^{P(z)}}\right) \\ &\geq N\left(r, \frac{1}{1 - e^{P(z)}}\right) - N\left(r, \frac{1}{1 - e^{Q(z)}}\right) = T(r, e^{P(z)}) + S(r, e^{P(z)}), \end{aligned}$$

由此知 $\lambda(f-1) \geq \sigma(e^P) = p$. 于是, 由引理 2.2 和定理 B (ii) 的结论, 可得 $\lambda(f) = \sigma(f) = \lambda(f-1) \geq p > q$, 这与 (3.5) 中的第一个不等式矛盾.

因此, 我们证明了 $q = p$.

设 $n := q = p$, 则有 $n \geq 1$. 否则, 如果 $n = 0$, 那么由 (3.3), 可知 $f(z)$ 是一常数, 矛盾.

为简便起见, 接下来我们将 $Q(z+1), Q(z-1), P(z+1), P(z-1)$ 分别记作 $\overline{Q}, \underline{Q}, \overline{P}, \underline{P}$. 将 (3.3) 代入 (1.3), 可得

$$\begin{aligned} & N[(1 - e^{\underline{Q}})^2(1 - e^{\overline{Q}})(1 - e^{\underline{Q}}) - (1 - e^{\underline{Q}})(1 - e^{\overline{Q}})(e^{\underline{P}} - e^{\underline{Q}})(e^{\underline{P}} - e^{\underline{Q}}) \\ & - (1 - e^{\underline{Q}})(1 - e^{\underline{Q}})(e^{\underline{P}} - e^{\underline{Q}})(e^{\overline{P}} - e^{\overline{Q}})] \\ & + (N - M)(e^{\underline{P}} - e^{\underline{Q}})^2(e^{\overline{P}} - e^{\overline{Q}})(e^{\underline{P}} - e^{\underline{Q}}) = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

记 $D_i(z)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) 如下所述:

$$\begin{aligned} D_1(z) & := N(1 - e^{\underline{Q}})^2(1 - e^{\overline{Q}})(1 - e^{\underline{Q}}) \\ & = d_{00} + d_{11}e^{\underline{Q}} + d_{12}e^{2\underline{Q}} + d_{13}e^{3\underline{Q}} + d_{14}e^{4\underline{Q}}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

其中

$$\begin{cases} d_{00} = N, & d_{11} = -N(e^{\overline{Q}-Q} + e^{\underline{Q}-Q} + 2), \\ d_{12} = N(e^{\overline{Q}+\underline{Q}-2Q} + 2e^{\overline{Q}-Q} + 2e^{\underline{Q}-Q} + 1), \\ d_{13} = -N(2e^{\overline{Q}+\underline{Q}-2Q} + e^{\overline{Q}-Q} + e^{\underline{Q}-Q}), & d_{14} = Ne^{\overline{Q}+\underline{Q}-2Q}, \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} D_2(z) & := -N(1 - e^{\underline{Q}})(1 - e^{\overline{Q}})(e^{\underline{P}} - e^{\underline{Q}})(e^{\underline{P}} - e^{\underline{Q}}) \\ & = d_{21}e^{2\underline{P}} + d_{22}e^{\underline{P}+\underline{Q}} + d_{23}e^{2\underline{P}+\underline{Q}} + d_{24}e^{2\underline{Q}} + d_{25}e^{3\underline{Q}} + d_{26}e^{2\underline{P}+2\underline{Q}} \\ & + d_{27}e^{2\underline{Q}+\underline{P}} + d_{28}e^{4\underline{Q}} + d_{29}e^{\underline{P}+3\underline{Q}}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

其中

$$\begin{cases} d_{21} = -Ne^{\underline{P}-\underline{P}}, & d_{22} = N(e^{\underline{Q}-Q} + e^{\underline{P}-\underline{P}}), & d_{23} = N(e^{\underline{P}-\underline{P}} + e^{\underline{P}-\underline{P}+\overline{Q}-Q}), \\ d_{24} = -Ne^{\underline{Q}-Q}, & d_{25} = N(e^{\underline{Q}-Q} + e^{\underline{Q}+\overline{Q}-2Q}), & d_{26} = -Ne^{\underline{P}-\underline{P}+\overline{Q}-Q}, \\ d_{27} = -N(e^{\underline{Q}-Q} + e^{\underline{P}-\underline{P}} + e^{\overline{Q}-Q+\underline{P}-\underline{P}} + e^{\underline{Q}+\overline{Q}-2Q}), & d_{28} = -Ne^{\underline{Q}+\overline{Q}-2Q}, \\ d_{29} = N(e^{\underline{Q}+\overline{Q}-2Q} + e^{\underline{P}+\overline{Q}-\underline{P}-Q}), \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} D_3(z) & := -N(1 - e^{\underline{Q}})(1 - e^{\underline{Q}})(e^{\underline{P}} - e^{\underline{Q}})(e^{\overline{P}} - e^{\overline{Q}}) \\ & = d_{31}e^{2\underline{P}} + d_{32}e^{\underline{P}+\underline{Q}} + d_{33}e^{2\underline{P}+\underline{Q}} + d_{34}e^{2\underline{Q}} + d_{35}e^{3\underline{Q}} \\ & + d_{36}e^{2\underline{P}+2\underline{Q}} + d_{37}e^{2\underline{Q}+\underline{P}} + d_{38}e^{4\underline{Q}} + d_{39}e^{\underline{P}+3\underline{Q}}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

其中

$$\begin{cases} d_{31} = -Ne^{\overline{P}-\underline{P}}, & d_{32} = N(e^{\overline{Q}-Q} + e^{\overline{P}-\underline{P}}), & d_{33} = N(e^{\overline{P}-\underline{P}} + e^{\overline{P}-\underline{P}+\underline{Q}-Q}), \\ d_{34} = -Ne^{\overline{Q}-Q}, & d_{35} = N(e^{\overline{Q}-Q} + e^{\underline{Q}+\overline{Q}-2Q}), & d_{36} = -Ne^{\overline{P}-\underline{P}+\underline{Q}-Q}, \\ d_{37} = -N(e^{\overline{Q}-Q} + e^{\overline{P}-\underline{P}} + e^{\overline{P}-\underline{P}+\underline{Q}-Q} + e^{\underline{Q}+\overline{Q}-2Q}), & d_{38} = -Ne^{\underline{Q}+\overline{Q}-2Q}, \\ d_{39} = N(e^{\underline{Q}+\overline{Q}-2Q} + e^{\underline{Q}+\overline{P}-Q-\underline{P}}), \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} D_4(z) & := (N - M)(e^{\underline{P}} - e^{\underline{Q}})^2(e^{\overline{P}} - e^{\overline{Q}})(e^{\underline{P}} - e^{\underline{Q}}) \\ & = d_{41}e^{4\underline{P}} + d_{42}e^{3\underline{P}+\underline{Q}} + d_{43}e^{2\underline{P}+2\underline{Q}} + d_{44}e^{3\underline{Q}+\underline{P}} + d_{45}e^{4\underline{Q}}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

其中

$$\begin{cases} d_{41} = (N - M)e^{\underline{P} + \overline{P} - 2P}, \\ d_{42} = -(N - M)(e^{\underline{Q} + \overline{P} - Q - P} + e^{\underline{P} + \overline{Q} - P - Q} + 2e^{\underline{P} + \overline{P} - 2P}), \\ d_{43} = (N - M)(e^{\underline{Q} + \overline{Q} - 2Q} + 2e^{\underline{Q} + \overline{P} - Q - P} + 2e^{\underline{P} + \overline{Q} - P - Q} + e^{\underline{P} + \overline{P} - 2P}), \\ d_{44} = -(N - M)(2e^{\underline{Q} + \overline{Q} - 2Q} + e^{\underline{Q} + \overline{P} - Q - P} + e^{\underline{P} + \overline{Q} - P - Q}), \\ d_{45} = (N - M)e^{\underline{Q} + \overline{Q} - 2Q}. \end{cases} \quad (3.18)$$

利用 (3.12), (3.14), (3.16) 和 (3.18), 可以将 (3.10) 改写成

$$\begin{aligned} & d_{00} + d_{11}e^Q + (d_{12} + d_{24} + d_{34})e^{2Q} + (d_{21} + d_{31})e^{2P} + (d_{22} + d_{32})e^{P+Q} \\ & + (d_{13} + d_{25} + d_{35})e^{3Q} + (d_{23} + d_{33})e^{2P+Q} + (d_{27} + d_{37})e^{P+2Q} \\ & + (d_{14} + d_{28} + d_{38} + d_{45})e^{4Q} + (d_{29} + d_{39} + d_{44})e^{P+3Q} \\ & + (d_{26} + d_{36} + d_{43})e^{2P+2Q} + d_{42}e^{3P+Q} + d_{41}e^{4P} = 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

考虑 $Q \pm P, Q \pm 2P, 2Q \pm P, 3Q \pm P, Q \pm 3P, 2Q - 3P, 3Q - 2P, Q - 4P, 3Q - 4P$ 的次数, 我们可以将证明分为以下几种情况来讨论.

情形 1 假设 $\deg(Q \pm P) = \deg(Q \pm 2P) = \deg(2Q \pm P) = \deg(3Q \pm P) = \deg(Q \pm 3P) = \deg(2Q - 3P) = \deg(3Q - 2P) = \deg(Q - 4P) = \deg(3Q - 4P) = n$. 那么, $e^{Q \pm P}, e^{Q \pm 2P}, e^{2Q \pm P}, e^{3Q \pm P}, e^{Q \pm 3P}, e^{2Q - 3P}, e^{3Q - 2P}, e^{Q - 4P}, e^{3Q - 4P}$ 都具有正则增长级 n . 容易得到 $\deg(\overline{Q} - Q) = \deg(\underline{Q} - Q) = \deg(\overline{Q} + \underline{Q} - 2Q) = \deg(\overline{P} - P) = \deg(\underline{P} - P) = \deg(\overline{P} + \underline{P} - 2P) = n - 1$ 和 $\max\{\deg(\overline{Q} - Q + \underline{P} - P), \deg(\underline{Q} - Q + \overline{P} - P)\} \leq n - 1$. 因此, (3.12), (3.14), (3.16) 和 (3.18) 中的所有 d_{ij} 都满足 $T(r, d_{ij}) = S(r, h)$, 其中 $h \in \{e^{Q \pm P}, e^{Q \pm 2P}, e^{2Q \pm P}, e^{3Q \pm P}, e^{Q \pm 3P}, e^{2Q - 3P}, e^{3Q - 2P}, e^{Q - 4P}, e^{3Q - 4P}\}$. 对 (3.19) 应用引理 2.1, 可得 (3.19) 的所有系数都恒等于 0, 故 $N = d_{00} \equiv 0$, 矛盾.

对 $\deg(Q - P) < n, \deg(Q - 2P) < n, \deg(2Q - P) < n, \deg(3Q - P) < n, \deg(Q - 3P) < n, \deg(2Q - 3P) < n, \deg(3Q - 2P) < n, \deg(Q - 4P) < n$ 和 $\deg(3Q - 4P) < n$ 这些情形, 使用类似于上面的证明同样可以得到 $N = d_{00} \equiv 0$, 矛盾.

情形 2 假设 $\deg(Q + P) < n$. 那么 (3.19) 可以改写成

$$\begin{aligned} & [d_{00} + (d_{22} + d_{32})e^{P+Q} + (d_{26} + d_{36} + d_{43})e^{2P+2Q}] \\ & + [d_{11}e^Q + (d_{27} + d_{37})e^{P+2Q}] \\ & + [(d_{12} + d_{24} + d_{34})e^{2Q} + (d_{29} + d_{39} + d_{44})e^{P+3Q}] \\ & + [(d_{21} + d_{31})e^{2P} + d_{42}e^{3P+Q}] + (d_{13} + d_{25} + d_{35})e^{3Q} + (d_{23} + d_{33})e^{2P+Q} \\ & + (d_{14} + d_{28} + d_{38} + d_{45})e^{4Q} + d_{41}e^{4P} = 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

类似情形 1 中的分析, 可以看出 (3.20) 满足引理 2.1 的条件. 因此, 可以得到 (3.20) 的所有系数都恒等于 0, 因此, 有 $d_{41} \equiv 0$, 由 (3.18) 可得 $N \equiv M$, 矛盾.

对 $\deg(Q + 2P) < n, \deg(2Q + P) < n, \deg(3Q + P) < n$ 和 $\deg(Q + 3P) < n$ 这几种情形, 使用类似于上面的证明得到 $N \equiv M$, 矛盾.

于是, 我们证明了定理 1.1.

§4 定理 1.2 的证明

根据定理 1.2 的假设, 可知 (3.1)–(3.3) 仍旧成立. 将 (3.3) 代入 (1.6), 为简便起见, 我们仍将 $Q(z+1), Q(z-1), P(z+1), P(z-1)$ 分别记作 $\overline{Q}, \underline{Q}, \overline{P}, \underline{P}$, 则有

$$\begin{aligned} & (1 - e^{\underline{Q}})(1 - e^{\overline{Q}})(1 - e^{\underline{Q}}) - (1 - e^{\overline{Q}})(e^{\underline{P}} - e^{\underline{Q}})(e^{\underline{P}} - e^{\underline{Q}}) \\ & - (1 - e^{\underline{Q}})(e^{\underline{P}} - e^{\underline{Q}})(e^{\overline{P}} - e^{\overline{Q}}) = 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

记 $A_i(z)$ ($i = 1, 2, 3$) 如下所述:

$$\begin{aligned} A_1(z) & := (1 - e^{\underline{Q}})(1 - e^{\overline{Q}})(1 - e^{\underline{Q}}) \\ & = a_{00} + a_{11}e^{\underline{Q}} + a_{12}e^{2\underline{Q}} + a_{13}e^{3\underline{Q}}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

其中

$$\begin{cases} a_{00} = 1, & a_{11} = -(e^{\overline{Q}-\underline{Q}} + e^{\underline{Q}-\underline{Q}} + 1), \\ a_{12} = (e^{\overline{Q}+\underline{Q}-2\underline{Q}} + e^{\overline{Q}-\underline{Q}} + e^{\underline{Q}-\underline{Q}}), \\ a_{13} = -e^{\overline{Q}+\underline{Q}-2\underline{Q}}, \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} A_2(z) & := -(1 - e^{\overline{Q}})(e^{\underline{P}} - e^{\underline{Q}})(e^{\underline{P}} - e^{\underline{Q}}) \\ & = a_{21}e^{2\underline{P}} + a_{22}e^{\underline{P}+\underline{Q}} + a_{23}e^{2\underline{P}+\underline{Q}} + a_{24}e^{2\underline{Q}} \\ & \quad + a_{25}e^{2\underline{Q}+\underline{P}} + a_{26}e^{3\underline{Q}}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

其中

$$\begin{cases} a_{21} = -e^{\underline{P}-\underline{P}}, & a_{22} = e^{\underline{Q}-\underline{Q}} + e^{\underline{P}-\underline{P}}, & a_{23} = e^{\underline{P}-\underline{P}+\overline{Q}-\underline{Q}}, \\ a_{24} = -e^{\underline{Q}-\underline{Q}}, & a_{25} = -(e^{\overline{Q}-\underline{Q}+\underline{P}-\underline{P}} + e^{\underline{Q}+\overline{Q}-2\underline{Q}}), & a_{26} = e^{\underline{Q}+\overline{Q}-2\underline{Q}}, \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} A_3(z) & := -(1 - e^{\underline{Q}})(e^{\underline{P}} - e^{\underline{Q}})(e^{\overline{P}} - e^{\overline{Q}}) \\ & = a_{31}e^{2\underline{P}} + a_{32}e^{\underline{P}+\underline{Q}} + a_{33}e^{2\underline{P}+\underline{Q}} + a_{34}e^{2\underline{Q}} \\ & \quad + a_{35}e^{2\underline{Q}+\underline{P}} + a_{36}e^{3\underline{Q}}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

其中

$$\begin{cases} a_{31} = -e^{\overline{P}-\underline{P}}, & a_{32} = e^{\overline{Q}-\underline{Q}} + e^{\overline{P}-\underline{P}}, & a_{33} = e^{\overline{P}-\underline{P}+\underline{Q}-\underline{Q}}, \\ a_{34} = -e^{\overline{Q}-\underline{Q}}, & a_{35} = -(e^{\overline{P}-\underline{P}+\underline{Q}-\underline{Q}} + e^{\underline{Q}+\overline{Q}-2\underline{Q}}), & a_{36} = e^{\underline{Q}+\overline{Q}-2\underline{Q}}. \end{cases} \quad (4.7)$$

利用 (4.3), (4.5) 和 (4.7), (4.1) 可以改写成

$$\begin{aligned} & a_{00} + a_{11}e^{\underline{Q}} + (a_{12} + a_{24} + a_{34})e^{2\underline{Q}} + (a_{21} + a_{31})e^{2\underline{P}} + (a_{22} + a_{32})e^{\underline{P}+\underline{Q}} \\ & + (a_{23} + a_{33})e^{2\underline{P}+\underline{Q}} + (a_{25} + a_{35})e^{\underline{P}+2\underline{Q}} + (a_{13} + a_{26} + a_{36})e^{3\underline{Q}} = 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

如果 $Q(z) \equiv P(z)$, 那么, 由 (3.1)–(3.2) 立即可得 $f(z) \equiv g(z)$.

如果 $Q(z) \not\equiv P(z)$ 且 $\deg Q = \deg P = 0$, 那么, 由 (3.3) 可知 $f(z)$ 是常数, 矛盾.

如果 $Q(z) \not\equiv P(z)$ 且 $\deg Q = \deg P = n \geq 1$, 那么我们讨论下面几种情形.

情形 1 假设

$$\deg(Q \pm P) = \deg(Q \pm 2P) = \deg(2Q \pm P) = \deg(3Q - 2P) = n.$$

那么对 (4.8) 应用引理 2.1, 可以得到 (4.8) 的所有系数都恒等于 0, 因此 $a_{00} \equiv 0$, 矛盾.

类似地, 对情形 $\deg(Q - P) < n$, $\deg(Q - 2P) < n$, $\deg(2Q - P) < n$ 和 $\deg(3Q - 2P) < n$, 我们同样可以推得 $a_{00} \equiv 0$, 矛盾.

情形 2 假设

$$\deg(Q + P) < n.$$

那么 (4.8) 可以改写成

$$\begin{aligned} & [a_{00} + (a_{22} + a_{32})e^{P+Q}] + [a_{11} + (a_{25} + a_{35})e^{P+Q}]e^Q + (a_{12} + a_{24} + a_{34})e^{2Q} \\ & + (a_{23} + a_{33})e^{2P+Q} + (a_{21} + a_{31})e^{2P} + (a_{13} + a_{26} + a_{36})e^{3Q} = 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

类似情形 1 中的分析, 可知 (4.9) 满足引理 2.1 的条件. 因此, 可以得到 (4.9) 的所有系数都恒等于 0, 于是, 有

$$a_{13} + a_{26} + a_{36} \equiv 0,$$

即 $e^{Q+\bar{Q}-2Q} \equiv 0$, 矛盾.

类似地, 对 $\deg(Q + 2P) < n$ 和 $\deg(2Q + P) < n$ 这两种情形, 我们同样可以推得 $e^{Q+\bar{Q}-2Q} \equiv 0$, 矛盾.

如果 $\deg Q \neq \deg P$, 那么我们可以将证明分为以下几种情况来讨论.

情形 A 假设

$$\deg Q > \deg P \geq 0.$$

那么, (4.8) 可以改写成

$$\begin{aligned} & [a_{00} + (a_{21} + a_{31})e^{2P}] + [a_{11} + (a_{22} + a_{32})e^P + (a_{23} + a_{33})e^{2P}]e^Q \\ & + [(a_{12} + a_{24} + a_{34}) + (a_{25} + a_{35})e^P]e^{2Q} + (a_{13} + a_{26} + a_{36})e^{3Q} = 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

于是, 对 (4.10) 应用引理 2.1, 可以得到 (4.10) 的所有系数都恒等于 0, 从而有

$$a_{13} + a_{26} + a_{36} = e^{Q+\bar{Q}-2Q} \equiv 0,$$

矛盾.

情形 B 假设

$$\deg P > \deg Q \geq 0.$$

那么, (4.8) 可以改写成

$$\begin{aligned} & [a_{00} + a_{11}e^Q + (a_{12} + a_{24} + a_{34})e^{2Q} + (a_{13} + a_{26} + a_{36})e^{3Q}] \\ & + [(a_{22} + a_{32})e^Q + (a_{25} + a_{35})e^{2Q}]e^P \\ & + [(a_{21} + a_{31}) + (a_{23} + a_{33})e^Q]e^{2P} = 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

于是, 对 (4.11) 应用引理 2.1, 可以得到 (4.11) 的所有系数都恒等于 0, 则有

$$a_{00} + a_{11}e^Q + (a_{12} + a_{24} + a_{34})e^{2Q} + (a_{13} + a_{26} + a_{36})e^{3Q} \equiv 0, \quad (4.12)$$

$$(a_{22} + a_{32}) + (a_{25} + a_{35})e^Q \equiv 0 \quad (4.13)$$

且

$$(a_{21} + a_{31}) + (a_{23} + a_{33})e^Q \equiv 0. \quad (4.14)$$

情形 B.1 如果 $\deg Q = 0$, 那么记 $e^Q = c_1$. 若 $c_1 = 1$, 则由 $c_1 = 1$ 及 (3.2) 可得 $f(z) \equiv g(z)$. 如果 $c_1 \neq 1$, 那么由 (4.5) 和 (4.7), (4.14) 可以改写成

$$(c_1 - 1)(e^{P-\bar{P}} + 1) = 0,$$

从而有

$$e^P + e^{\bar{P}} = 0. \quad (4.15)$$

由 (4.5) 和 (4.7), (4.13) 可以改写成

$$(c_1 - 1)(e^{P-P} + e^{\bar{P}-P} + 2) = 0,$$

于是有

$$e^{P-P} + e^{\bar{P}-P} + 2 = 0.$$

结合前式及 (4.15), 可得 $e^P \equiv 0$, 矛盾.

情形 B.2 如果 $\deg Q \geq 1$, 那么由 (4.3), (4.5) 和 (4.7), (4.12) 可以改写成

$$1 - (e^{\bar{Q}-Q} + e^{Q-Q} + 1)e^Q + e^{\bar{Q}+Q-2Q}e^{2Q} + e^{\bar{Q}+Q-2Q}e^{3Q} \equiv 0. \quad (4.16)$$

于是, 对 (4.16) 应用引理 2.1, 可以得到 (4.16) 的所有系数都恒等于 0, 从而

$$e^{\bar{Q}+Q-2Q} \equiv 0,$$

矛盾.

致谢 感谢审稿人提出的宝贵意见和建议!

参 考 文 献

- [1] Grammaticos B, Tamizhmani T, Ramani A, Tamizhmani K M. Growth and integrability in discrete systems [J]. *J Phy A: Math Gen*, 2001, 34:3811–3821.
- [2] Hayman W K. Meromorphic functions [M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.
- [3] Laine I. Nevanlinna theory and complex differential equations [M]. Berlin: Walter de Gruyter, 1993.
- [4] Yang L. Value distribution theory [M]. Beijing: Science Press, 1993.

- [5] Chen M F, Gao Z S, Zhang J L. Value distribution of meromorphic solutions of certain non-linear difference equations [J]. *Acta Mathematica Scientia Ser B*, 2019, 39(4):1173–1184.
- [6] Brosch G. Eindeutigkeitssätze für meromorphe funktionen [D]. Thesis, Technical University of Aachen, 1989.
- [7] Chen Z X. Complex differences and difference equations [M]. Beijing: Science Press, 2014.
- [8] 崔宁, 陈宗煊. 一类线性差分方程的亚纯解与一个亚纯函数分担 3 个值的唯一性 [J]. *数学年刊 A 辑*, 2017, 38(1):13–22.
- [9] Hu P C, Wang Q Y. On unicity of meromorphic solutions of differential-difference equations [J]. *J Korean Math Soc*, 2018, 55(4):785–795.
- [10] Chen Z X, Yi H X. On sharing values of meromorphic functions and their difference [J]. *Results Math*, 2013, 63(1–2):557–565.
- [11] Halburd R G, Korhonen R. Nevanlinna theory for the difference operator [J]. *Ann Acad Sci Fenn Math*, 2006, 31(2):463–478.
- [12] Heittokangas J, Korhonen R, Laine I, et al. Value sharing results for shifts of meromorphic functions, and sufficient conditions for periodicity [J]. *J Math Anal Appl*, 2009, 355(1):352–363.
- [13] Li P, Wang W J. Entire functions that share a small function with its derivative [J]. *J Math Anal Appl*, 2007, 328(1):743–751.
- [14] Lü F, Han Q, Lü W R. On unicity of meromorphic solutions to difference equations of malmquist type [J]. *Bull Aust Math Soc*, 2016, 93:92–98.
- [15] Qi X G, Li N, Yang L Z. Uniqueness of meromorphic functions concerning their differences and solutions of difference painlevé equations [J]. *Comput Methods Funct Theory*, 2018, 18(4):567–582.
- [16] Gross F. Factorization of meromorphic functions [M]. Washington: U S Government Printing Office, 1972.
- [17] Yang C C, Yi H X. Uniqueness theory of meromorphic functions [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 2003.
- [18] Halburd R G, Korhonen R J. Difference analogue of the Lemma on the Logarithmic Derivative with applications to difference equations [J]. *J Math Anal Appl*, 2006, 314:477–487.
- [19] Laine I, Yang C C. Clunie theorems for difference and q-difference polynomials [J]. *J Lond Math Soc*, 2007, 76:556–566.

Uniqueness of Meromorphic Functions Sharing Values with Meromorphic Solutions of Certain Non-linear Difference Equations

CHEN Chuangxin¹ ZHANG Ranran² Chen Baoqin³

¹College of Mathematics and Data Science, Zhongkai University of Agriculture and Engineering, Guangzhou 510225, China.

E-mail: chenchxin@126.com

²Corresponding author. School of Mathematics, Guangdong University of Education, Guangzhou 510303, China. E-mail: zhangranran@gdei.edu.cn

³Faculty of Mathematics and Computer, Guangdong Ocean University, Zhanjiang 524088, Guangdong, China. E-mail: cbqchen@gdou.edu.cn

Abstract In this paper, the authors discuss a class of nonlinear difference equations, which originated from the q - P_V equation family, whose form is

$$(f(z+1)f(z)-1)(f(z)f(z-1)-1) = \frac{M(z)}{N(z)},$$

where $M(z)$ and $N(z)$ are two distinct non-zero polynomials. The authors prove that its transcendental meromorphic solutions with finite order can be determined by their zeros, 1 value points, and poles. That is, if $f(z)$ is a transcendental meromorphic solution with finite order of the above equation and sharing $0, 1, \infty$ CM with a meromorphic function $g(z)$, then $f(z) \equiv g(z)$. In addition, the authors also study the case of the above equation where $M(z)$ is identical to $N(z)$, which leads to the same conclusion. Examples for the sharpness of the two conclusions obtained are given in the paper.

Keywords Non-linear difference equations, Meromorphic function, Uniqueness

2020 MR Subject Classification 39A10, 30D35

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 46 No. 3, 2025

by ALLERTON PRESS, INC., USA