

Hardy 空间上一类算子与函数方程的解*

陈 泳¹ 桑元琦²

提要 考虑在 Hardy 空间上解关于 u 的方程:

$$\begin{cases} u^2 + \beta u - 2P(u\tilde{u}) \text{ 为常数,} \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

其中 β 为常数, P 为 Riesz 投影. 证明了解析多项式、再生核的有限线性组合不是方程的非零解; 得到了当 $\beta = 0$ 时, 方程在 $H^\infty(\mathbb{T})$ 中无非零解, 在 $H^2(\mathbb{T})$ 中存在非零解; 当 $\beta \neq 0$ 时, 内函数不是方程的解.

关键词 Hardy 空间, Toeplitz 算子, Hankel 算子

MR (2020) 主题分类 30H10, 47B35

中图法分类 O177.1

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2026)01-0001-10

1 引 言

在本文中, 我们分别用符号 $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{T}$ 表示复平面 $\mathbb{C}$ 内的开单位圆盘和单位圆周. $\mathbb{D}^n$ 和 $\mathbb{T}^n$ 分别表示 n 维多圆盘和 n 维环面. 我们用 $L^2(\mathbb{T}^n)$ 表示 $\mathbb{T}^n$ 上的可测且平方可积函数的 Lebesgue 空间. Hardy 空间 $H^2(\mathbb{T}^n)$ 是 $L^2(\mathbb{T}^n)$ 的一个闭子空间. 通常情况下, $\mathbb{T}^n$ 中的元素表示为 $z = (z_1, \dots, z_n)$, 且 $z^{\mathbf{k}} := z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$, 这里 $\mathbb{Z}$ 表示所有整数构成的集合. 借助多变量 Fourier 级数, 有

$$L^2(\mathbb{T}^n) = \left\{ f \mid f: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} f_{\mathbf{k}} z^{\mathbf{k}}, \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} |f_{\mathbf{k}}|^2 < \infty \right\}$$

和

$$H^2(\mathbb{T}^n) = \{f \in L^2(\mathbb{T}^n) \mid f_{\mathbf{k}} = 0 \text{ 当且仅当 } \mathbf{k} \notin \mathbb{Z}_+^n\},$$

其中 $\mathbb{Z}_+$ 表示所有非负整数构成的集合. 此外, 我们需用到多圆盘上 Hardy 空间的定义, 设 dm 为 $\mathbb{T}^n$ 上的 Haar 测度,

$$H^p(\mathbb{D}^n) = \left\{ f \text{ 在 } \mathbb{D}^n \text{ 上全纯} \mid \sup_{0 < r < 1} \int_{\mathbb{T}^n} |f(rz)|^p dm(z) < \infty \right\}, \quad 0 < p < \infty.$$

当 $1 \leq p < \infty$ 时, $H^p(\mathbb{T}^n)$ 和 $H^p(\mathbb{D}^n)$ 是等距同构的, 因此我们将这两个空间看作同一个空间. $\{z^{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n}$ 和 $\{z^{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^n}$ 分别是 $L^2(\mathbb{T}^n)$ 和 $H^2(\mathbb{T}^n)$ 的一组标准正交基. 我们用 $L^\infty(\mathbb{T}^n)$ 表示 $\mathbb{T}^n$ 上的本性有界可测函数构成的空间, $H^\infty(\mathbb{T}^n) := L^\infty(\mathbb{T}^n) \cap H^2(\mathbb{T}^n)$.

本文 2026 年 1 月 15 日收到, 2026 年 3 月 2 日收到修改稿.

¹ 杭州师范大学数学学院, 杭州 311121. E-mail: ychen@hznu.edu.cn

² 通信作者. 西南财经大学数学学院, 成都 611130. E-mail: sangyq@swufe.edu.com

* 本文受到国家自然科学基金 (No. 12271134, No. 12201508) 的资助.

对于 $\phi \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$, $H^2(\mathbb{T}^n)$ 上的 Toeplitz 算子 T_ϕ 定义为

$$T_\phi f := P(\phi f), \quad \forall f \in H^2(\mathbb{T}^n),$$

Hankel 算子 H_ϕ 定义为

$$H_\phi f := P(\phi Jf), \quad \forall f \in H^2(\mathbb{T}^n),$$

其中 P 为从 $L^2(\mathbb{T}^n)$ 到闭子空间 $H^2(\mathbb{T}^n)$ 的正交投影, J 是翻转算子, 定义为

$$(Jf)(z) = \tilde{f}(z) := f(\bar{z}), \quad \forall f \in L^2(\mathbb{T}^n).$$

在 $n \geq 2$ 的情况, 通常称上面定义的 Hankel 算子为小 Hankel 算子.

Hankel 算子和 Toeplitz 算子在控制理论、逼近理论、Wiener-Hopf 分解、插值问题和扰动理论等不同领域中有广泛的应用.

1963 年, Brown 和 Halmos [1] 刻画了 $H^2(\mathbb{T})$ 上两个 Toeplitz 算子 T_f 和 T_g 的交换性, 即 $T_f T_g = T_g T_f$ 成立当且仅当 f 和 g 同时解析, 或者 f 和 g 同时共轭解析, 或者 f 和 g 的非平凡线性组合为常数. 这个结果被称为 Brown-Halmos 定理. 在接下来的几十年里, 如何将这个结果推广到多个复变量的全纯函数 Hilbert 空间的情况, 成为 Toeplitz 算子理论的一个研究主题.

在多复变量情形下, 情况要复杂得多. 关于 $H^2(\mathbb{T}^2)$ 上交换 Toeplitz 算子的研究, 先由 Lee [2] 开始, 后由 Ding, Sun 和 Zheng [3] 完全解决.

2000 年, Martínez-Avendaño 研究了 Hankel 算子和 Toeplitz 算子的交换性.

定理 1.1 (见 [4]) 设 $\psi \in L^\infty(\mathbb{T})$ 且 $\varphi \in H^\infty(\mathbb{T})$, T_ψ 和 H_φ 都不是单位算子的常数倍. 则

$$T_\psi H_\varphi = H_\varphi T_\psi$$

成立当且仅当 H_φ 是 $H_{z\psi}$ 的倍数, 并且 $\psi + \tilde{\psi}$ 与 $\psi\tilde{\psi}$ 都是常数.

为了进一步描述满足上述条件的函数和说明一定存在 ψ 满足定理的条件, Martínez-Avendaño 还得到了下面的定理.

定理 1.2 (见 [4]) 设 E 是 $\mathbb{T}$ 的一个可测子集, 记

$$E^* := \{\bar{z} : z \in E\}$$

为 E 中元素的复共轭构成的集合, 并记 E^c 为 E 在 $\mathbb{T}$ 中的补集. 对 $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, 函数 $\varphi + \tilde{\varphi}$ 与 $\varphi\tilde{\varphi}$ 都是常数函数, 当且仅当存在复数 a, b , 使得

$$\varphi(z) = a\chi_E(z) + b,$$

其中 χ_E 是 E 的特征函数, 并且 E^* 与 E^c 除了一个测度为 0 的集合外相等, 即

$$m(E^* \setminus E^c) + m(E^c \setminus E^*) = 0.$$

2003 年, Guo 和 Zheng [5] 完全刻画了 Hankel 算子和 Toeplitz 算子的本性交换性. 特别地, 研究多个变量情况下小 Hankel 算子和 Toeplitz 算子交换问题是非常重要和有趣的. 2024 年, Curto, Datt 和 Gupta [6] 获得了小 Hankel 算子和 Toeplitz 算子交换的

一些必要或充分条件. 2025 年, Chen, Liu, Shen 和 Wu [7] 研究了 $H^2(\mathbb{T}^2)$ 上小 Hankel 算子和 Toeplitz 算子的交换问题, 并且获得了如下结论.

定理 1.3 (见 [7, Theorem 10]) 设 ψ 是有界多重调和函数, 且 $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D}^2)$. 则

$$T_\psi H_\varphi = H_\varphi T_\psi$$

成立当且仅当下列情形之一成立:

- (1) $\varphi = 0$;
- (2) ψ 为常数;
- (3) $\varphi = \bar{z}u(z)\Phi(w) \neq 0$, 且

$$\psi = u(z) - \tilde{u}(z) + c,$$

其中 $c \in \mathbb{C}$, $u, \Phi \in H^\infty(\mathbb{D})$ 且 $u(0) = 0$, 并且

$$2P(u\tilde{u}) - u^2 \text{ 为常数};$$

- (4) $\varphi = \bar{w}v(w)\Psi(z) \neq 0$, 且

$$\psi = v(w) - \tilde{v}(w) + c,$$

其中 $c \in \mathbb{C}$, $v, \Psi \in H^\infty(\mathbb{D})$ 且 $v(0) = 0$, 并且

$$2P(v\tilde{v}) - v^2 \text{ 为常数};$$

- (5) $\varphi = \alpha zw u(z)v(w) \neq 0$, 且

$$\psi = u(z) + v(w) - \tilde{u}(z) - \tilde{v}(w) + c,$$

其中 $\alpha, c \in \mathbb{C}$, $u, v \in H^\infty(\mathbb{D})$ 且 $u(0) = v(0) = 0$, 并存在某个 $\beta \in \mathbb{C}$, 使得

$$2P(u\tilde{u}) - u^2 - \beta u \quad \text{与} \quad 2P(v\tilde{v}) - v^2 + \beta v$$

均为常数.

在定理 1.3 中, 条件 (3)–(5) 中的函数条件本质上是解关于 u 的方程:

$$\begin{cases} u^2 + \beta u - 2P(u\tilde{u}) \text{ 为常数}, \\ u(0) = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

解上面的方程类似于给出定理 1.2 形式的刻画. 目的是探索满足定理 1.3 中条件 (3)–(5) 的非平凡函数的存在性, 若存在进一步刻画它们的形式.

2 方程 (1.1) 的初步分析

由于解析多项式全体和再生核的有限线性组合全体都是 $H^2(\mathbb{T})$ 的稠密子集. 因此, 我们将考察这两类稠密子集中的元素是否为方程 (1.1) 的解.

首先, 我们来看解析多项式的情况.

命题 2.1 非零解析多项式不是方程 (1.1) 的解.

证 若 u 为非零解析多项式, 设它的表达式为

$$u(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_N z^N \quad (N \geq 1),$$

且 $a_N \neq 0$, 这样 $u(0) = 0$. 观察可知 $u^2 + \beta u - 2P(u\tilde{u})$ 的最高次项为 $a_N^2 z^{2N}$. 如果 $u^2 + \beta u - 2P(u\tilde{u})$ 为常数, 则 $a_N = 0$, 矛盾.

对于 Hardy 空间 $H^2(\mathbb{T})$ 的再生核

$$K_\alpha(z) = \frac{1}{1 - \bar{\alpha}z}, \quad \alpha \in \mathbb{D}$$

满足

$$f(\alpha) = \langle f, K_\alpha \rangle, \quad \forall f \in H^2(\mathbb{T}),$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 $H^2(\mathbb{T})$ 中的内积. 下面我们检查再生核的有限线性组合是否为方程 (1.1) 的解.

命题 2.2 $u(z) = \sum_{i=1}^N c_i K_{\alpha_i}$ ($0 < |\alpha_i| < 1$, c_i 为常数) 不是方程 (1.1) 的非零解.

证 由再生核函数的性质, 可得

$$\begin{aligned} P(K_{\alpha_i} \tilde{K}_{\alpha_j})(w) &= \left\langle \frac{1}{1 - \bar{\alpha}_i z} \frac{1}{1 - \bar{\alpha}_j \bar{z}}, \frac{1}{1 - \bar{w} z} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{1 - \bar{\alpha}_i z}, \frac{1}{1 - \alpha_j z} \frac{1}{1 - \bar{w} z} \right\rangle \\ &= \overline{\left\langle \frac{1}{1 - \alpha_j z} \frac{1}{1 - \bar{w} z}, \frac{1}{1 - \bar{\alpha}_i z} \right\rangle} \\ &= \overline{\frac{1}{1 - \alpha_j \alpha_i} \frac{1}{1 - \bar{w} \alpha_i}} \\ &= K_{\alpha_i}(\bar{\alpha}_j) K_{\alpha_i}(w). \end{aligned}$$

这样

$$P(u\tilde{u}) = \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^N c_j c_i K_{\alpha_j}(\bar{\alpha}_i) \right) K_{\alpha_j}.$$

计算可得

$$u^2 = \sum_{k=1}^N c_k^2 K_{\alpha_k}^2 + \sum_{i \neq j} c_i c_j K_{\alpha_i} K_{\alpha_j}.$$

设 $F(w) = u^2(w) + \beta u(w) - 2P(u\tilde{u})(w)$, 则 $F(w)$ 在 $\mathbb{C} - \{\frac{1}{\alpha_i} : 1 \leq i \leq N\}$ 上解析. 若 F 在单位圆周 $\mathbb{T}$ 上为常数, 那么 F 在 $\mathbb{C} - \{\frac{1}{\alpha_i} : 1 \leq i \leq N\}$ 上也是常数. 这时不妨假设 α_i 是两两互异的. 观察 $\frac{1}{\alpha_1}$ 为 F 的二阶极点, 且包含 $\frac{1}{(w - \frac{1}{\alpha_1})^2}$ 的项一定来自于 u^2 , 并且 $\frac{1}{(w - \frac{1}{\alpha_1})^2}$ 前面的系数为 $\frac{c_1^2}{\alpha_1^2}$. 由 F 为常数, 则 $c_1 = 0$. 依此类推, $c_i = 0$ ($2 \leq i \leq N$).

定义 2.1 设 $f \in L^2(\mathbb{T})$, 若 $f = \tilde{f}$, 我们称 f 为偶函数. 若 $f = -\tilde{f}$, 我们称 f 为奇函数.

引理 2.1 设 $f \in L^2(\mathbb{T})$ 为偶函数. 若 $P(f)$ 为常数, 则 f 为常数.

证 由于 $f \in L^2(\mathbb{T})$, 可设 f 的 Fourier 展开式为

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n.$$

又因 f 为偶函数, 所以有

$$a_n = a_{-n}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

计算可得 $P(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. 如果 $P(f)$ 为常数, 则 $a_n = 0, n \geq 1$. 从而 $f(z) \equiv a_0$.

引理 2.2 设 $u \in H^2(\mathbb{T})$, $u(0) = 0$ 且 $u^2 \in L^2(\mathbb{T})$. 则

$$u^2 - 2P(u\tilde{u}) + \beta u$$

等于常数 λ 当且仅当

$$(u - \tilde{u})^2 + \beta(u + \tilde{u})$$

等于常数 λ .

证 因为 $u, u^2 \in H^2(\mathbb{T})$, 且 $u(0) = 0$. 所以 $\tilde{u}, \tilde{u}^2 \in (H^2(\mathbb{T}))^\perp$. 根据不等式

$$|u|^2 |\tilde{u}|^2 \leq \frac{|u|^4 + |\tilde{u}|^4}{2},$$

可得 $u\tilde{u} \in L^2(\mathbb{T})$. 因此

$$\begin{aligned} u^2 - 2P(u\tilde{u}) + \beta u &= P(u^2 - 2u\tilde{u} + \tilde{u}^2 + \beta u + \beta \tilde{u}) \\ &= P((u - \tilde{u})^2 + \beta(u + \tilde{u})). \end{aligned}$$

注意 $(u - \tilde{u})^2 + \beta(u + \tilde{u})$ 为偶函数, 根据引理 2.1, 结论成立.

注 2.1 引理 2.2 为定理 1.3 中的条件 (3)–(5) 提供了一种等价刻画.

3 方程 (1.1) 中 $\beta = 0$ 的情况

引理 3.1 设 E 为 $\mathbb{T}$ 中的可测集, 且其测度 $|E|$ 满足 $0 < |E| < 2\pi$, 则特征函数 χ_E 的共轭调和函数 $\widehat{\chi_E}$ 是本性无界的.

证 由 [8, p. 110, Theorem 2.7] 可知, $\forall \lambda > 0$, $\widehat{\chi_E}$ 的分布函数满足

$$|\{t : |\widehat{\chi_E}(e^{it})| > \lambda\}| = 2\pi h\left(\frac{|E|}{2\pi}\right),$$

其中 $h(z)$ 是带状区域 $S = \{z : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ 上的调和函数, 边界值为 $\chi_{\{z : |\operatorname{Im} z| > \lambda\}}$. 由调和函数的极值原理,

$$0 < h(z) < 1, \quad \forall z \in S.$$

特别地, $\frac{|E|}{2\pi} \in S$. 因此 $h(\frac{|E|}{2\pi}) > 0$.

定理 3.1 设 $u \in H^\infty(\mathbb{T})$, 且 $u(0) = 0$. 若 $u^2 - 2P(u\tilde{u})$ 为常数, 则 $u \equiv 0$.

证 若 $u^2 - 2P(u\tilde{u})$ 为常数, 根据引理 2.2, 可知 $(u - \tilde{u})^2$ 为常数, 记为 C .

如果 $C = 0$, 则 $u = \tilde{u} \in (H^2(\mathbb{T}))^\perp \cap H^2(\mathbb{T})$. 这样 u 为常数, 又因 $u(0) = 0$, 所以 $u \equiv 0$.

如果 $C \neq 0$, 则存在非零常数 K 和可测集 $A \subset \mathbb{T}$, 使得

$$u - \tilde{u} = K\chi_A - K\chi_{\mathbb{T}-A} \quad \text{a.e.}$$

计算可得

$$K\chi_A - K\chi_{\mathbb{T}-A} = K(2\chi_A - 1).$$

设

$$A^* = \{e^{-it} : e^{it} \in A\}.$$

由于 $u - \tilde{u}$ 为奇函数, 则

$$\begin{aligned} 2\chi_A(e^{it}) - 1 &= -(2\chi_A(e^{-it}) - 1) \\ &= -(2\chi_{A^*}(e^{it}) - 1). \end{aligned}$$

这样

$$\chi_A(e^{it}) + \chi_{A^*}(e^{it}) = 1. \quad (3.1)$$

上式两边平方, 可得

$$\chi_A(e^{it})\chi_{A^*}(e^{it}) = 0. \quad (3.2)$$

综合 (3.1)–(3.2), 可得

$$\begin{aligned} |A \cap A^*| &= 0, \\ |A| &= |A^*| = \frac{1}{2}|\mathbb{T}| > 0. \end{aligned}$$

在 $u - \tilde{u} = K(2\chi_A - 1)$ 两边作用投影 P , 可得

$$u = K(2P(\chi_A) - 1).$$

对于 $f \in L^2(\mathbb{T})$, Riesz 投影和共轭调和函数有如下关系 (见 [8, p. 104, Theorem 1.5]):

$$P(f) = \frac{1}{2}(f + i\widehat{f} + a_0), \quad a_0 = \int_{\mathbb{T}} f(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}.$$

由上式可得

$$P(\chi_A) = \frac{1}{2}(\widehat{i\chi_A} + \chi_A + \frac{|A|}{2\pi}). \quad (3.3)$$

因此 $u \in H^\infty(\mathbb{T})$ 成立当且仅当 $\widehat{\chi_A} \in L^\infty(\mathbb{T})$. 根据引理 3.1, 矛盾. 因此 $C \neq 0$ 的情况不会发生.

例 3.1 定理 3.1 告诉我们当 $\beta = 0$ 时, 方程 (1.1) 在 $H^\infty(\mathbb{T})$ 中没有非零解, 但是在 $H^2(\mathbb{T})$ 中可以找到非零解.

由定理 3.1 的证明, 取 $A = \{e^{it} : t \in (0, \pi)\}$ 和 $K = \frac{\pi}{i}$. 设 $u(e^{it}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{int}$. 对于 $n \geq 1$, 可得

$$\begin{aligned} c_n &= \langle u, e^{int} \rangle \\ &= \langle u - \tilde{u}, e^{int} \rangle \\ &= \langle K\chi_A - K\chi_{\mathbb{T}-A}, e^{int} \rangle \\ &= K \left(\int_0^\pi e^{-int} \frac{dt}{2\pi} - \int_\pi^{2\pi} e^{-int} \frac{dt}{2\pi} \right) \\ &= \frac{K}{2\pi} \left(\frac{1 - (-1)^n}{in} - \frac{(-1)^n - 1}{in} \right) \\ &= \frac{K}{2\pi} \begin{cases} 0 & \text{若 } n \text{ 为偶数;} \\ \frac{4i}{n} & \text{若 } n \text{ 为奇数.} \end{cases} \end{aligned}$$

这样可以得到 u 的表达式

$$\begin{aligned} u(e^{it}) &= \frac{2iK}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{i(2k+1)t}}{2k+1} \\ &= \frac{iK}{\pi} \log \frac{1+e^{it}}{1-e^{it}} \\ &= \log \frac{1+e^{it}}{1-e^{it}}. \end{aligned}$$

注意 $\log \frac{1+e^{it}}{1-e^{it}} \in H^4(\mathbb{T})$, 但是 $\log \frac{1+e^{it}}{1-e^{it}} \notin H^\infty(\mathbb{T})$.

下面我们来检验 $u(e^{it}) = \log \frac{1+e^{it}}{1-e^{it}}$ 是 $\beta = 0$ 时方程 (1.1) 的解. 计算可得

$$\frac{1+e^{it}}{1-e^{it}} = i \cot \frac{t}{2}.$$

利用这个恒等式, 我们得到 (取对数的主值分支) u 在单位圆周上的边界值

$$u(e^{it}) = \log \left| \cot \frac{t}{2} \right| + \begin{cases} i \frac{\pi}{2}, & t \in (0, \pi), \\ -i \frac{\pi}{2}, & t \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

因此

$$\tilde{u}(e^{it}) = u(e^{-it}) = \log \left| \cot \frac{t}{2} \right| + \begin{cases} -i \frac{\pi}{2}, & t \in (0, \pi), \\ i \frac{\pi}{2}, & t \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

于是

$$(u - \tilde{u})(e^{it}) = \begin{cases} i\pi, & t \in (0, \pi), \\ -i\pi, & t \in (\pi, 2\pi), \end{cases}$$

从而

$$(u - \tilde{u})^2(e^{it}) = -\pi^2, \quad \text{a.e.}$$

由引理 2.2, 可得

$$u^2 - 2P(u\tilde{u}) \equiv -\pi^2.$$

4 方程 (1.1) 中 $\beta \neq 0$ 的情况

定理 4.1 不存在内函数 u 且 $u(0) = 0$, 满足 $u^2 + \beta u - 2P(u\tilde{u})$ 为常数, 且 $\beta \neq 0$.

证 由于 u 为内函数, 且 $u(0) = 0$, 计算可得

$$\begin{aligned} \langle u^2 + \beta u - 2P(u\tilde{u}), u \rangle &= \langle u^2, u \rangle + \beta \langle u, u \rangle - 2\langle P(u\tilde{u}), u \rangle \\ &= \langle u, 1 \rangle + \beta - 2\langle \tilde{u}, 1 \rangle \\ &= u(0) + \beta - 2u(0) \\ &= \beta \neq 0. \end{aligned}$$

若 $u^2 + \beta u - 2P(u\tilde{u})$ 为常数, 记为 λ , 则

$$\langle \lambda, u \rangle = \lambda \overline{u(0)} = 0,$$

矛盾.

例 4.1 由引理 2.2 可知, 当要求 $u\tilde{u} \in L^2(\mathbb{T})$ 时, 方程 (1.1) 等价于

$$\begin{cases} (u - \tilde{u})^2 + \beta(u + \tilde{u}) \text{ 为常数,} \\ u(0) = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

下面我们找到了当 $\beta \neq 0$ 时, 方程 (4.1) 的解, 但这个解不满足 $u^2 \in L^2(\mathbb{T})$ 的条件. 设

$$u(z) = \frac{8\lambda^2}{\beta} \frac{z}{(1-z)^2} + 2i\lambda \frac{z}{1-z}, \quad \lambda \neq 0.$$

u 在单位圆周上除 $z = 1$ 这一点外都有定义.

令 $T(z) = i \frac{1+z}{1-z}$, 在单位圆周上有 $T(\bar{z}) = -T(z)$. 对于非零复数 λ , 都有

$$u(z) = -\frac{2\lambda^2}{\beta}(T(z)^2 + 1) + \lambda(T(z) - i).$$

计算可得

$$\tilde{u}(z) = u(\bar{z}) = -\frac{2\lambda^2}{\beta}(T(z)^2 + 1) + \lambda(-T(z) - i).$$

因此

$$u(z) - \tilde{u}(z) = 2\lambda T(z)$$

且

$$u(z) + \tilde{u}(z) = 2 \left[-\frac{2\lambda^2}{\beta} (T(z)^2 + 1) - \lambda i \right].$$

从而

$$\begin{aligned} (u - \tilde{u})^2 + \beta(u + \tilde{u}) &= (2\lambda T(z))^2 + \beta \cdot 2 \left[-\frac{2\lambda^2}{\beta} (T^2(z) + 1) - \lambda i \right] \\ &= 4\lambda^2 T^2(z) - 4\lambda^2 (T^2(z) + 1) - 2\beta \lambda i \\ &= -4\lambda^2 - 2\beta \lambda i. \end{aligned}$$

设 $A = \frac{8\lambda^2}{\beta}$, $B = 2i\lambda$, 则

$$|u(re^{it})|^p \leq |A|^p |1 - re^{it}|^{-2p} + |B|^p |1 - re^{it}|^{-p} \quad \left(0 < p < \frac{1}{2}\right).$$

根据

$$\sup_{0 < r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} |1 - re^{it}|^{-s} dt < \infty \quad (0 < s < 1),$$

可得

$$\sup_{0 < r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{it})|^p dt < \infty \quad \left(0 < p < \frac{1}{2}\right),$$

即 $u \in H^p(\mathbb{T})$ ($0 < p < \frac{1}{2}$).

由

$$\frac{z}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n, \quad \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n.$$

可得 $u(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (An + B)z^n$, 并且

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \geq \sum_{n \geq \frac{2|B|}{|A|}}^{\infty} \left(\frac{|A|}{2} n\right)^2 = \frac{|A|^2}{4} \sum_{n \geq \frac{2|B|}{|A|}}^{\infty} n^2 = \infty.$$

这样 $u \notin H^2(\mathbb{T})$.

致谢 非常感谢评审专家提出的宝贵意见!

参 考 文 献

- [1] Brown A, Halmos P R. Algebraic properties of Toeplitz operators [J]. *J Reine Angew Math*, 1963–1964, 213:89–102.
- [2] Lee Y J. Commuting Toeplitz operators on the Hardy space of the bidisk [J]. *J Math Anal Appl*, 2008, 341(1):738–749.

- [3] Ding X H, Sun S H, Zheng D C. Commuting Toeplitz operators on the bidisk [J]. *J Funct Anal*, 2012, 263(11):3333–3357.
- [4] Martínez-Avendaño R A. When do Toeplitz and Hankel operators commute? [J]. *Integr Equ Oper Theory*, 2000, 37(3):341–349.
- [5] Guo K Y, Zheng D C. Essentially commuting Hankel and Toeplitz operators [J]. *J Funct Anal*, 2003, 201(1):121–147.
- [6] Curto R E, Datt G, Gupta B. Commutativity of Hankel and Toeplitz operators on the Hardy space of the n -torus [J]. *Bull Sci Math*, 2024, 194:103466.
- [7] Chen Y, Liu Y, Shen J Y, Wu Q. Some product problem of Toeplitz and Hankel operators on the bidisk [J]. *J Math Anal Appl*, 2025, 551(1):129646.
- [8] Garnett J. Bounded analytic functions [M]. New York: Springer Science & Business Media, 2006.

Solutions to a Class of Operator-Involved Functional Equations on Hardy Spaces

CHEN Yong¹ SANG Yuanqi²

¹School of Mathematics, Hangzhou Normal University, Hangzhou 311121, China. E-mail: ychen@hznu.edu.cn

²Corresponding author. School of Mathematics, Southwestern University of Finance and Economics, Chengdu 611130, China.
E-mail: sangyq@swufe.edu.cn

Abstract This paper studies solutions u on the Hardy space to the equation

$$\begin{cases} u^2 + \beta u - 2P(u\tilde{u}) \text{ is a constant,} \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

where β is a constant and P denotes the Riesz projection. The authors prove that neither analytic polynomials nor finite linear combinations of reproducing kernels can be nonzero solutions of the equation. They also find that when $\beta = 0$, the equation has no nonzero solution in $H^\infty(\mathbb{T})$, while it does admit nonzero solutions in $H^2(\mathbb{T})$. When $\beta \neq 0$, inner functions are not solutions of the equation.

Keywords Hardy space, Toeplitz operator, Hankel operator

2020 MR Subject Classification 30H10, 47B35