

二维李代数的可裂表示与 矩阵群作用的轨道*

胡 志 广¹

提要 利用分层图, 给出二维非交换李代数可裂表示的完全分类. 作为应用, 给出矩阵群 $\mathrm{GL}(n_1, \mathbb{P}) \times \mathrm{GL}(n_2, \mathbb{P}) \times \cdots \times \mathrm{GL}(n_{s+1}, \mathbb{P})$ 在 $\mathbb{P}^{n_1 \times n_2} \times \mathbb{P}^{n_2 \times n_3} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_s \times n_{s+1}}$ 上作用 $(g_1 X_1 g_2^{-1}, g_2 X_2 g_3^{-1}, \cdots, g_s X_s g_{s+1}^{-1})$ 的轨道分类和标准形.

关键词 可裂表示, 李代数, 轨道, 群作用, 分层图

MR (2020) 主题分类 17B15, 17B30

中图法分类 O152.5

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2026)01-0067-10

1 引 言

李代数是一类重要的非结合代数, 其结构分类是代数学研究的核心课题之一. 根据特征为零的域上李代数的结构理论, 任何有限维李代数均可分解为半单子代数与极大可解理想的半直和. 这个结论表明, 李代数的分类问题可转化为半单李代数和可解李代数的分类研究. 约在一个世纪以前, Cartan 和 Killing 就完成了半单李代数的分类. 而可解李代数的分类极具挑战, 仍是一个公开问题. 注意到可解李代数的分类可归结为幂零李代数的分类, 目前仅得到 6 维以下的幂零李代数分类以及满足特定条件的幂零李代数分类, 可参考文 [1–4].

众所周知, 在复半单李代数的结构和分类理论中, 最低维数的半单李代数 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 的表示发挥了重要的作用. 自然期望的是, 简单可解李代数的研究, 特别是其表示理论的研究, 能够打开可解李代数分类的一个窗口. 而最简单的非交换可解李代数是二维的, 具有唯一的结构, 可由满足条件 $[x, y] = x$ 的向量对 x 和 y 张成. 并且易知, 任意非幂零李代数一定包含一个与二维非交换可解李代数同构的子代数. 故而我们开展二维非交换可解李代数表示的研究. 不幸的是, 目前没有得到很好的结果, 就是在低维数情形下的表示, 结论也极为复杂, 可见文 [5–6]. 于是, 一个自然的想法是考虑二维非交换李代数的特殊表示.

在线性李代数的范畴中, 可裂李代数是比半单李代数更广泛的一类李代数, 其可表为半单子代数、环面代数和幂零变换构成的幂零理想的直和, 其研究可见文 [7–10]. 本文考虑二维非交换李代数的可裂表示, 利用文中定义的分层图, 可以给出忠实可裂表示

本文 2025 年 10 月 14 日收到, 2026 年 2 月 11 日收到修改稿.

¹天津师范大学数学科学学院, 天津 300387. E-mail: nankaitaiji@mail.nankai.edu.cn

*本文受到国家自然科学基金项目 (No. 12131012) 的资助.

的完全分类. 并且, 考虑表示在不同基下的矩阵, 我们给出了多个矩阵在矩阵群作用的轨道分类及最简代表元. 这是熟知的矩阵在行列变换下的标准形结论在多个矩阵中的推广.

2 二维非交换李代数的可裂表示

设 $\mathcal{A}$ 是有限维复线性空间的线性变换, 则 $\mathcal{A}$ 有 Jordan-Chevalley 分解 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_s + \mathcal{A}_n$, 其中 $\mathcal{A}_s$ 半单, $\mathcal{A}_n$ 幂零, 且 $\mathcal{A}_s$ 和 $\mathcal{A}_n$ 交换, 即 $[\mathcal{A}_s, \mathcal{A}_n] = 0$. 称 $\mathcal{A}_s, \mathcal{A}_n$ 为 $\mathcal{A}$ 的半单部分和幂零部分.

定义 2.1 设 L 是一个复线性李代数, 若 $\forall x \in L$, 均有 L 包含 x 的半单部分, 则称 L 是一个可裂李代数.

关于可裂李代数, 我们有下面的结论 (见 [7]).

定理 2.1 设 $\mathfrak{g}$ 为一个复线性李代数, $\mathfrak{r}$ 为其根基. 则下列等价:

- (1) $\mathfrak{g}$ 可裂.
- (2) $\mathfrak{r}$ 可裂.
- (3) $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$, $[\mathfrak{s}, \mathfrak{a}] = 0$, 其中 $\mathfrak{s}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的极大半单子代数, $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{r}$ 中由半单元构成的交换子代数, $\mathfrak{n}$ 是 $\mathfrak{r}$ 中由幂零矩阵构成的理想.
- (4) $\mathfrak{g}$ 可由半单或幂零元生成.
- (5) $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数可裂.

定义 2.2 设 (ρ, V) 为复李代数 L 的一个表示, 若 $\rho(L)$ 是可裂的, 称 ρ 是 L 的一个可裂表示.

下面假定 L 为二维非交换复李代数, 则 L 中存在一组标准基 x, y , 其满足

$$[x, y] = x.$$

命题 2.1 设 L 为二维非交换复李代数, 有基 x, y 满足 $[x, y] = x$. 设 (ρ, V) 为 L 的一个忠实表示, 则 ρ 为可裂表示当且仅当 $\rho(y)$ 可对角化.

证 由 $[\rho(x), \rho(y)] = \rho(x)$, 知 $\rho(x)$ 幂零. 假设 $\rho(y)$ 可对角化, 则 $\rho(L)$ 的基 $\rho(x), \rho(y)$ 由半单或幂零构成. 由定理 2.1, 知 $\rho(L)$ 为可裂李代数. 充分性得证.

反之, 若 ρ 为可裂表示, 由 $\rho(L)$ 可解且非幂零, 知 $\rho(y)$ 非幂零. 若 $\rho(y)$ 非半单, 则其半单部分和幂零部分构成 $\rho(L)$ 的两维交换子代数, 这不可能. 因而 $\rho(y)$ 半单. 必要性得证.

定理 2.2 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上有限维线性空间 V 上的线性变换, 满足 $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{A}$, 且 $\mathcal{B}$ 可对角化. 则 V 上存在直和分解

$$V = W(v_1) \oplus W(v_2) \oplus \cdots \oplus W(v_s),$$

其中 v_i 为 $\mathcal{B}$ 的特征向量, $W(v_i)$ 是由 v_i 和 $\mathcal{A}$ 生成的循环子空间. 进一步地, 若 V 有两种这样的分解

$$V = W(v_1) \oplus W(v_2) \oplus \cdots \oplus W(v_s) = W(v'_1) \oplus W(v'_2) \oplus \cdots \oplus W(v'_t),$$

那么必有 $s = t$, 并且适当排列子空间的次序后, 有 v_i 和 v'_i 为 $\mathcal{B}$ 的属于同一特征值的特征向量且 $\dim W(v_i) = \dim W(v'_i)$, $i = 1, 2, \cdots, s$.

证 设 v 是 $\mathcal{B}$ 任一属于特征值 λ 的特征向量, 而 $W(v) = \text{span}\{v, \mathcal{A}v, \cdots, \mathcal{A}^m v\}$, 其中 $\mathcal{A}^m v \neq 0$, $\mathcal{A}^{m+1} v = 0$. 由条件, 有 $\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{B} - \text{id})$. 易知 $\forall k \geq 1$, 有 $\mathcal{B}\mathcal{A}^k = \mathcal{A}^k(\mathcal{B} - k\text{id})$, 从而 $\mathcal{B}\mathcal{A}^k v = (\lambda - k)\mathcal{A}^k v$. 这说明当 $k \leq m$ 时, $\mathcal{A}^k v$ 是 $\mathcal{B}$ 的属于 $\lambda - k$ 的特征向量. 因而 $W(v)$ 是 $\mathcal{B}$ -子空间, 其特征子空间维数都是一维的. 令

$$W = W(v_1) \oplus W(v_2) \oplus \cdots \oplus W(v_t),$$

其中

$$W(v_i) = \text{span}\{v_i, \mathcal{A}v_i, \cdots, \mathcal{A}^{m_i} v_i\},$$

我们证明 $W + W(v)$ 可分解为 $\mathcal{B}$ 的特征向量和 $\mathcal{A}$ 生成的循环子空间的直和. 若 $W \cap W(v) = \{0\}$, 结论已然成立. 下面假定 $W \cap W(v) \neq \{0\}$, 因 $W \cap W(v)$ 是 $\mathcal{A}$ -和 $\mathcal{B}$ -子空间, 则存在 $k_0 \leq m$, 使得 $W \cap W(v) = W(\mathcal{A}^{k_0} v)$. 又因 $\mathcal{A}^{k_0} v$ 为 $\mathcal{B}$ 的属于特征值 $\lambda - k_0$ 的特征向量, 不妨设

$$\mathcal{A}^{k_0} v = a_1 \mathcal{A}^{k_1} v_1 + a_2 \mathcal{A}^{k_2} v_2 + \cdots + a_{t_0} \mathcal{A}^{k_{t_0}} v_{t_0},$$

其中 $a_1, \cdots, a_{t_0}$ 均不为零, $\mathcal{A}^{k_j} v_j$ 均为 $\mathcal{B}$ 的属于特征值 $\lambda - k_0$ 的特征向量. 易知

$$W(v) + (W(v_{t_0+1}) \oplus \cdots \oplus W(v_t)) = W(v) \oplus W(v_{t_0+1}) \oplus \cdots \oplus W(v_t),$$

从而

$$W + W(v) = (W(v) + (W(v_1) \oplus \cdots \oplus W(v_{t_0}))) \oplus W(v_{t_0+1}) \oplus \cdots \oplus W(v_t).$$

因而只需证明 $W(v) + (W(v_1) \oplus \cdots \oplus W(v_{t_0}))$ 有满足条件的直和分解, 故不妨就假定 $t_0 = t$. 其次不妨设

$$k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_{t_1} \geq k_0 > k_j, \quad j = t_1 + 1, \cdots, t.$$

令

$$\tilde{v} = v - \sum_{i=1}^{t_1} a_i \mathcal{A}^{k_i - k_0} v_i,$$

由

$$\mathcal{A}^j \tilde{v} = \mathcal{A}^j v - \sum_{i=1}^{t_1} a_i \mathcal{A}^{k_i - k_0 + j} v_i,$$

可知当 $j < k_0$ 时, 有 $\mathcal{A}^j \tilde{v} \notin W$, 而

$$\mathcal{A}^{k_0} \tilde{v} = \sum_{i=t_1+1}^t a_i \mathcal{A}^{k_i} v_i.$$

类似于前面的讨论, 可得

$$W + W(v) = W + W(\tilde{v}) = (W(v_1) \oplus \cdots \oplus W(v_{t_1})) \oplus ((W(v_{t_1+1}) \oplus \cdots \oplus W(v_t)) + W(\tilde{v})).$$

由此不妨假定 $\forall i > 0$, 有 $k_i < k_0$. 再从 $\mathcal{A}^m v \neq 0$, $\mathcal{A}^{m+1} v = 0$, 知存在 i_0 , 使得 $\mathcal{A}^{k_{i_0}+m-k_0} v_{i_0} \neq 0$, 而 $\forall i$, 有 $\mathcal{A}^{k_i+m-k_0+1} v_i = 0$, 因而 $k_i + m - k_0 \geq m_i$. 综上讨论, 可以做如下假定

$$\mathcal{A}^{k_0} v = a_1 \mathcal{A}^{k_1} v_1 + a_2 \mathcal{A}^{k_2} v_2 + \cdots + a_t \mathcal{A}^{k_t} v_t,$$

其中 $a_1, \dots, a_t$ 均不为零; $k_i < k_0$, $\forall i > 0$; $m_i - k_i = m - k_0$, $0 < i \leq t_2$; 而 $m_i - k_i < m - k_0$, $t_2 + 1 < i \leq t$; 且 $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_{t_2}$. 令

$$\varepsilon = \mathcal{A}^{k_0-k_{t_2}} v - \sum_{j=1}^{t_2} a_j \mathcal{A}^{k_j-k_{t_2}} v_j.$$

显然 ε 为 $\mathcal{B}$ 的属于特征值 $\lambda - k_0 + k_{t_2}$ 的特征向量, 且

$$\mathcal{A}^{k_{t_2}} \varepsilon = \mathcal{A}^{k_0} v - \sum_{j=1}^{t_2} a_j \mathcal{A}^{k_j} v_j = \sum_{j=t_2+1}^t a_j \mathcal{A}^{k_j} v_j.$$

因此

$$\begin{aligned} W + W(v) &= (W(v_1) \oplus \cdots \oplus \widehat{W(v_{t_2})} \cdots \oplus W(v_t)) + W(v) + W(\varepsilon) \\ &= (W(v_1) \oplus \cdots \oplus \widehat{W(v_{t_2})} \cdots \oplus W(v_t) \oplus W(v)) + W(\varepsilon) \\ &= (W(v_1) \oplus \cdots \oplus W(v_{t_2-1})) \oplus (((W(v_{t_2+1}) \oplus \cdots \oplus W(v_t) \oplus W(v))) + W(\varepsilon)). \end{aligned}$$

因而只需考虑 $((W(v_{t_2+1}) \oplus \cdots \oplus W(v_t) \oplus W(v))) + W(\varepsilon)$ 的直和分解问题, 而此时 $\mathcal{A}^{k_{t_2}+m-k_0} \varepsilon = 0$, 且 $k_{t_2} + m - k_0 < m$, 对 $\dim W(v)$ 进行数学归纳可得结论成立. 由 v 的任意性, 可对 W 不断做直和扩充, 再由 V 的维数有限性, 有限步后必为 V . 存在性得证.

下面证明分解的唯一性. 记 E_λ 为 $\mathcal{B}$ 的属于特征值 λ 的特征子空间. 现假定 λ 是 $\mathcal{B}$ 的任一极大特征值, 即 $\lambda + 1$ 不是 $\mathcal{B}$ 的特征值. 令 $\mathcal{V}(\lambda)$ 为由 E_λ 生成的 $\mathcal{A}$ -子空间, 易知

$$\mathcal{V}(\lambda) = W(v_{i_1}) \oplus W(v_{i_2}) \oplus \cdots \oplus W(v_{i_l}) = W(v'_{j_1}) \oplus W(v'_{j_2}) \oplus \cdots \oplus W(v'_{j_l}),$$

其中 $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_l}$ 和 $v'_{j_1}, v'_{j_2}, \dots, v'_{j_l}$ 均为 E_λ 的基. 注意到上式为 $\mathcal{V}(\lambda)$ 关于幂零变换 $\mathcal{A}|_{\mathcal{V}(\lambda)}$ 的两种 Jordan 分解, 因而可适当调整秩序, 使得对应的循环子空间的维数相等. 接着考虑 $\mathcal{V}(\lambda - 1)$, 由

$$\mathcal{V}(\lambda - 1) = \bigoplus_{v_i \in E_\lambda} W(\mathcal{A} v_i) \oplus \bigoplus_{v_i \in E_{\lambda-1}} W(v_i) = \bigoplus_{v'_i \in E_\lambda} W(\mathcal{A} v'_i) \oplus \bigoplus_{v'_i \in E_{\lambda-1}} W(v'_i)$$

及 Jordan 分解的唯一性, 知 $\{v_i \mid v_i \in E_{\lambda-1}\}$ 和 $\{v'_i \mid v'_i \in E_{\lambda-1}\}$ 有相同的元素个数, 且经适当调序后, 对应元素生成的循环子空间的维数相等. 如此进行下去, 我们得到, 对任意的自然数 k 和 $v_i \in E_{\lambda-k}$, 可找到满足条件的 v'_i . 唯一性得证.

推论 2.1 设 L 为二维非交换复李代数, 有基 x, y 满足 $[x, y] = x$. 设 (ρ, V) 为 L 的一个忠实可裂表示, 则 V 中存在基, 使得

$$\rho(x) = \text{diag}(J(0, n_1), \dots, J(0, n_s)),$$

$$\rho(y) = \text{diag} \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_1 - 1 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_1 - n_1 + 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \lambda_s & & \\ & \lambda_s - 1 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_s - n_s + 1 \end{pmatrix} \right).$$

证 由命题 2.1 和定理 2.2 可得.

下面我们建立二维非交换李代数的忠实可裂表示与一类图的一个对应.

定义 2.3 一个分层图, 指的是一个简单有向图, 其每个点的出入度都不超过 1, 且顶点集有一个有序的划分, 每一个子集称为层, 而边仅位于相邻的层间, 从低层指向高层.

设一个分层图有 s 层, 第 i 层有 n_i 个点, 则称之为具有顶点 $(n_1, \dots, n_s)$ 的分层图. 对于 $1 \leq i < j \leq s$, 第 i 层到第 j 层的路径数记为 r_{ij} , 则 $\Delta r_{ij} := r_{ij} - r_{i-1, j}$ 为图的极大路径中, 从第 i 层出发经过第 j 层的路径数. 约定 $r_{0i} = 0$. 显然, 若 $1 \leq i \leq i' < j' \leq j \leq s$, 则 $r_{ij} \leq r_{i'j'}$, 称之为路径条件. 第 $i-1$ 层到第 i 层的边, 按所在的极大路径的出发层数, 自然分为从 $1, 2, \dots, i-1$ 层出发, 有 $i-1$ 类, 其边数分别为 $\Delta r_{1i}, \Delta r_{2i}, \dots, \Delta r_{i-1, i}$. 易知相邻层级的边由此唯一确定. 因此, 一个分层图与满足路径条件的一组数 $n_1, \dots, n_s, r_{ij}, 1 \leq i < j \leq s$ 一一对应.

设 (ρ, V) 为 L 的一个忠实可裂表示, 则 $\rho(y)$ 半单, 且 $\rho(x)$ 和 $\rho(y)$ 满足定理 2.2 的条件. 关于 $\rho(y)$ 的极大特征值 λ , 我们可以得到一个分层图. 设 $\lambda, \lambda-1, \dots, \lambda-s+1$ 为 $\rho(y)$ 的特征值, 而 $\lambda-s$ 不是 $\rho(y)$ 的特征值. 易知 $\mathcal{E}(\lambda) \doteq E_\lambda \oplus \dots \oplus E_{\lambda-s+1}$ 为 $\rho(x)$ -和 $\rho(y)$ -子空间, 由定理 2.2, 知

$$\mathcal{E}(\lambda) = W(v_1) \oplus W(v_2) \oplus \dots \oplus W(v_t).$$

将 $\mathcal{E}(\lambda)$ 的基 $v_1, \rho(x)v_1, \dots, v_t, \rho(x)v_t, \dots$ 按所属的 $\rho(y)$ 的特征子空间分层, 第 i 层为属于 $\lambda-i+1$ 的特征向量, 而 (u, v) 为边当且仅当 $v = \rho(x)u$. 易知这是一个分层图, 记为 $G(\lambda)$, 第 i 层有 $n_i = \dim E_{\lambda-i+1}$ 个点. 对于 $1 \leq i < j \leq s$, 有

$$r_{ij} = |\{v_k \mid W(v_k) \text{ 同时包含属于 } \rho(y) \text{ 的 } \lambda-i+1 \text{ 和 } \lambda-j+1 \text{ 的特征向量}\}|,$$

这个数恰是线性映射 $\rho(x)^{j-i}|_{E_{\lambda-i+1}} : E_{\lambda-i+1} \rightarrow E_{\lambda-j+1}$ 的秩. 由 $\rho(x)$ 为非零变换, 知分层图有边. 反过来, 给定一个分层图, 对每一层赋予一个数, 使之成为公差为 -1 的等差数列, 不妨设首层为 λ . 对于图的任一连通分支, 设为从第 i 层到第 j 层的一条路径, 我们可定义两个线性变换, 使得其在一组基下的矩阵为 $J(0, j-i+1)$ 和 $\text{diag}(\lambda-i+1, \lambda-i, \dots, \lambda-j+1)$. 易知它们线性生成一个二维可裂李代数. 将所有连通分支得到的李代数直和成一个李代数, 取对角线得到一个二维可裂李代数, 其对应的分层图就是

给定的图. 因此我们得到下面的定理.

定理 2.3 二维非交换李代数的忠实可裂表示, 在等价意义下, 与分层图一一对应, 且在给定特征值 $\lambda(n_1\text{重})$, $(\lambda-1)(n_2\text{重})$, $\dots$, $(\lambda-s+1)(n_s\text{重})$ 下, 忠实可裂表示的个数为具有顶点 $(n_1, \dots, n_s)$ 的有边分层图个数.

3 矩阵的标准形

利用二维非交换李代数的可裂表示和分层图, 我们给出矩阵在群作用下的轨道. 为得到矩阵的标准形. 我们给出分层图点上的一个序, 其满足: 首先第 i 层的点大于第 $i+1$ 层的点; 其次, 两条边上, 终点间与起始点间有相同的大小关系; 最后, 在同一层没有序关系的点中, 与上一层有边相连的大于没有边相连的, 又在与上一层没有边相连的点中, 以位于路径长中的点为大, 而对于相同长度的路径随意取定一个序. 这样的序称为正则序. 易知, 分层图的正则序在图同构下是唯一的. 如分层图有点集 $((1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8), (9))$, 边集 $(2, 5), (3, 4), (4, 8), (6, 7), (7, 9)$, 则从首层出发的极大路径有两条: 长度为 2 的路径 $(3, 4), (4, 8)$ 和长度为 1 的路径 $(2, 5)$. 同一层中依所在路径长的点为大原则, 容易得到序 321456879.

定理 3.1 设 $\mathcal{G} = \{(g_1, \dots, g_{s+1}) \mid g_i \in \text{GL}(n_i, \mathbb{P})\}$ 在 $\mathcal{X} = \{(X_1, \dots, X_s) \mid X_i \in \mathbb{P}^{n_i \times n_{i+1}}\}$ 上有作用 $(g_1 X_1 g_2^{-1}, \dots, g_s X_s g_{s+1}^{-1})$, 则

(1) $(X_1, \dots, X_s)$ 和 $(Y_1, \dots, Y_s)$ 属于同一条轨道当且仅当对任意 $1 \leq i \leq j \leq s$, 有

$$r\left(\prod_{i \leq k \leq j} X_k\right) = r\left(\prod_{i \leq k \leq j} Y_k\right).$$

(2) $(X_1, \dots, X_s)$ 一定在形如 $(Y_1, \dots, Y_s)$ 的轨道上, 其中 Y_j 是在 $(r_{i-1,j}+1, r_{i-1,j+1}+1)$ 处有阶为 $\Delta r_{i,j+1}$ 的单位阵 $I_{\Delta r_{i,j+1}}$, $i = 1, \dots, j$ 的矩阵, 即

$$Y_j = \begin{pmatrix} I_{\Delta r_{1,j+1}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_{\Delta r_{2,j+1}} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_{\Delta r_{j,j+1}} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

这里 $r_{ij} = r\left(\prod_{i \leq k \leq j-1} X_k\right)$, $\Delta r_{ij} = r_{ij} - r_{i-1,j}$. 约定 $r_{0j} = 0$.

(3) 所有的轨道个数等于具有顶点 $(n_1, \dots, n_{s+1})$ 的分层图个数.

证 在数域 $\mathbb{P}$ 上的 $n := n_1 + n_2 + \dots + n_{s+1}$ 维线性空间 V 中, 定义 3 个线性变

换 $\mathcal{B}, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$, 使得它们在一组基下的矩阵分别为

$$B = \text{diag}(sI_{n_1}, (s-1)I_{n_2}, \dots, I_{n_s}, O_{n_{s+1}}),$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ X_1^T & 0 & & & \\ & X_2^T & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & X_s^T & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ Y_1^T & 0 & & & \\ & Y_2^T & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & Y_s^T & 0 \end{pmatrix}.$$

则有 $[\mathcal{A}_i, \mathcal{B}] = \mathcal{A}_i$ 且 $\mathcal{B}$ 可对角化. 令 $L_i = \text{span}\{\mathcal{A}_i, \mathcal{B}\}$, $i = 1, 2$, 那么 L_1 和 L_2 都是数域 $\mathbb{P}$ 上的二维非交换可裂李代数. 由定理 2.2, 有对应的分层图. 易知 L_1 和 L_2 是二维非交换李代数的等价表示当且仅存在可逆矩阵 P , 使得

$$PBP^{-1} = B, \quad PA_1P^{-1} = A_2.$$

从上式知 $P = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_{s+1})$, 且 $p_{i+1}X_i^T p_i^{-1} = Y_i^T$. 由此 $(p_i^T)^{-1}X_i p_{i+1}^T = Y_i$, 即 $(X_1, \dots, X_s)$ 与 $(Y_1, \dots, Y_s)$ 属于同一条轨道. 这说明其在同一轨道与 L_1 和 L_2 等价等同. 显然 L_1 和 L_2 都对应于具有顶点 $(n_1, \dots, n_{s+1})$ 的分层图. 记 E_i 为 $\mathcal{B}$ 的属于 i 的特征子空间. 由线性变换 $\mathcal{A}_1$ 的定义, 其限制 $\mathcal{A}_1|_{E_{s-i+1}} : E_{s-i+1} \rightarrow E_{s-i}$ 的矩阵为 X_i^T , 以及 $\mathcal{A}_1^{j-i}|_{E_{s-i+1}} : E_{s-i+1} \rightarrow E_{s-j+1}$ 的矩阵为 $X_{j-1}^T \cdots X_{i+1}^T X_i^T$. 因而 L_1 所对应的分层图中, $r_{ij} = r(X_{j-1}^T \cdots X_i^T) = r(X_i \cdots X_{j-1})$. 利用等价的表示对应相同的分层图, 知 (1) 成立.

在 L_1 对应的分层图中, 选定一个正则序. 在正则序对应的基下, E_i 的基中前 $\Delta r_{1,i}$ 个向量为与第 1 层相连, 其中仅有 $\Delta r_{1,i+1}$ 个向量与下一层相连, 位于前面; 接着为 $\Delta r_{2,i}$ 个向量, 位于从第 2 层出发的极大路径中, 其中前列的 $\Delta r_{2,i+1}$ 个向量与下一层相连; 如此排列. 在此基下, $E_{s-i+1} \rightarrow E_{s-i}$ 的矩阵为 Y_i^T , 其中 Y_i 为 (2) 中所示, 因而 (2) 得证.

由轨道与表示一一对应, 表示与分层图一一对应, 知 (3) 成立.

记具有顶点 $(n_1, \dots, n_s)$ 的分层图个数为 $f(n_1, \dots, n_s)$. 考虑 (2, 2, 2) 的情形, 我们得到二阶矩阵对 (X_1, X_2) 在作用 $(g_1 X_1 g_2^{-1}, g_2 X_2 g_3^{-1})$ 下的标准形为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} 0, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} 0, \quad 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 00.$$

下面我们计算 $f(n_1, n_2, n_3)$ 的值. 前面我们证明了, 此值为具有顶点 (n_1, n_2, n_3) 的三层图个数. 显然, 一个分层图, 颠倒层级, 改变边的方向, 也得到一具有同样层数的分

层图. 故而, 知 n_1 与 n_3 对称, 不妨设 $n_1 \leq n_3$. 又相邻两层的边数不会大于其两层的点数, 因而若 $n_3 > n_2$, 则有 $f(n_1, n_2, n_3) = f(n_1, n_2, n_2)$. 故我们可假定 $n_3 \leq n_2$. 同样地, 与一层相连的边数不会多余其上下两层的点数之和, 于是我们还可假定 $n_2 \leq n_1 + n_3$. 现考虑从第一层出发的极大路径, 根据长度是否为 3 进行分类讨论. 若长度为 3, 则有 $f(n_1 - 1, n_2 - 1, n_3 - 1)$ 个. 若长度都小于 3, 则长度为 2 的边可能有 $j = 0, 1, \dots, n_1$ 个. 对于 j 个的情况, 有 $f(0, n_2 - j, n_3)$ 种. 显然有

$$f(0, n_2 - j, n_3) = \min\{n_2 - j, n_3\} + 1.$$

因此, 得到

$$f(n_1, n_2, n_3) = f(n_1 - 1, n_2 - 1, n_3 - 1) + \sum_{j=0}^{n_1} (\min\{n_2 - j, n_3\} + 1).$$

类似地, 对 $0 \leq i \leq n_1 - 1$, 有

$$\begin{aligned} f(n_1 - i, n_2 - i, n_3 - i) \\ = f(n_1 - i - 1, n_2 - i - 1, n_3 - i - 1) + \sum_{j=0}^{n_1 - i} (\min\{n_2 - i - j, n_3 - i\} + 1). \end{aligned}$$

因此

$$f(n_1, n_2, n_3) = f(0, n_2 - n_1, n_3 - n_1) + \sum_{i=0}^{n_1-1} \sum_{j=0}^{n_1-i} (\min\{n_2 - i - j, n_3 - i\} + 1).$$

显然

$$\min\{n_2 - i - j, n_3 - i\} = \begin{cases} n_3 - i, & j \leq n_2 - n_3, \\ n_2 - i - j, & j > n_2 - n_3. \end{cases}$$

因而, 当 $i \geq n_1 + n_3 - n_2$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{n_1-i} (\min\{n_2 - i - j, n_3 - i\} + 1) \\ &= \sum_{j=0}^{n_1-i} (n_3 - i + 1) \\ &= i^2 - (n_1 + n_3 + 2)i + (n_1 + 1)(n_3 + 1) \\ &=: \triangle_1; \end{aligned}$$

当 $i < n_1 + n_3 - n_2$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{n_1-i} (\min\{n_2 - i - j, n_3 - i\} + 1) \\ &= \sum_{j=0}^{n_2-n_3} (n_3 - i + 1) + \sum_{j=n_2-n_3+1}^{n_1-i} (n_2 - i - j + 1) \\ &= \frac{1}{2}i^2 - \frac{1}{2}(2n_2 + 3)i + \frac{1}{2}(n_1(2n_2 - n_1 + 1) - (n_2 - n_3)^2 + n_2 + n_3 + 2) \end{aligned}$$

$$=: \Delta_2.$$

于是, 当 $n_1 + n_3 \leq n_2$ 时, 结合前提假设, 即 $n_1 + n_3 = n_2$, 有

$$f(n_1, n_2, n_3) = n_3 - n_1 + 1 + \sum_{i=0}^{n_1-1} \Delta_1 = \frac{1}{6}(n_1 + 1)(n_1 + 2)(-n_1 + 3n_3 + 3).$$

当 $n_1 + n_3 > n_2$ 且 $n_3 \geq n_2$ 时, 即 $n_2 = n_3$, 有

$$f(n_1, n_2, n_3) = n_3 - n_1 + 1 + \sum_{i=0}^{n_1-1} \Delta_2 = \frac{1}{6}(n_1 + 1)(n_1 + 2)(-2n_1 + 3n_3 + 3).$$

当 $n_1 + n_3 > n_2$ 且 $n_3 < n_2$ 时, 可得

$$\begin{aligned} f(n_1, n_2, n_3) &= n_3 - n_1 + 1 + \sum_{i=0}^{n_1+n_3-n_2-1} \Delta_2 + \sum_{i=n_1+n_3-n_2}^{n_1-1} \Delta_1 \\ &= \frac{1}{6}(n_1 + 1)(n_1 + 2)(-n_1 + 3n_3 + 3) \\ &\quad - \frac{1}{6}(n_1 - n_2 + n_3)(n_1 - n_2 + n_3 + 1)(n_1 - n_2 + n_3 + 2). \end{aligned}$$

容易验证, 此表达式对前两种特殊情形也对. 因此我们得到下面的定理.

定理 3.2 设 $n_1 \leq n_3 \leq n_2 \leq n_1 + n_3$, 则 $\mathcal{G} = \{(g_1, g_2, g_3) \mid g_i \in \text{GL}(n_i, \mathbb{P})\}$ 在 $\mathcal{X} = \{(X_1, X_2) \mid X_1 \in \mathbb{P}^{n_1 \times n_2}, X_2 \in \mathbb{P}^{n_2 \times n_3}\}$ 上作用 $(g_1 X_1 g_2^{-1}, g_2 X_2 g_3^{-1})$ 的轨道数为 $\frac{1}{6}(n_1 + 1)(n_1 + 2)(-n_1 + 3n_3 + 3) - \frac{1}{6}(n_1 - n_2 + n_3)(n_1 - n_2 + n_3 + 1)(n_1 - n_2 + n_3 + 2)$.

参 考 文 献

- [1] Cicalò S, Graaf W A, Schneider C. Six-dimensional nilpotent Lie algebras [J]. *Linear Algebra Appl*, 2012, 436:163–189.
- [2] Alvarez M A. Degenerations of 8-dimensional 2-step nilpotent Lie algebras [J]. *Algebra Represent Theory*, 2021, 24(5):1231–1243.
- [3] Shamsaki A, Johari F, Niroomand P. Nilpotent Lie algebras of class 3 with 1-dimensional center and 3-dimensional derived subalgebra [J]. *Commun Algebra*, 2022, 50(10):4536–4548.
- [4] Ladra M, Cunha B L, Lopes S A. A classification of nilpotent compatible Lie algebras [J]. *Rend Circ Mat Palermo* (2), 2025, 74:70.
- [5] Makedonskii E. On wild and tame finite-dimensional Lie algebras [J]. *Funct Anal Appl*, 2013, 47(4):271–283.
- [6] 曹新昌, 胡志广. 二维非交换李代数的低维表示 [J]. 天津师范大学学报 (自然科学版), 2022, 42(1):1–5.

- [7] Bourbaki N. Lie groups and Lie algebras: Chapters 7–9 [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2005.
- [8] Tôgô S. On splittable linear Lie algebras [J]. *J Sci Hiroshima Univ*, 1955, 18:289–306.
- [9] Wüstner M. Splittable Lie groups and Lie algebras [J]. *J Algebra*, 2000, 226:202–215.
- [10] Hu Z G, Bai H C. A note on splittable linear Lie algebras [J]. *Linear Algebra Appl*, 2024, 700:26–34.

Splittable Representations of Two-Dimensional Lie Algebra and Orbits of Matrix Group Actions

HU Zhiguang¹

¹School of Mathematical Sciences, Tianjin Normal University, Tianjin 300387, China. E-mail: nankaitaiji@mail.nankai.edu.cn

Abstract A complete classification of the splittable representations of the two-dimensional nonabelian Lie algebra is given by layered graphs. As an application, the classification and standard forms of the orbits under the action of the matrix group $\mathrm{GL}(n_1, \mathbb{P}) \times \mathrm{GL}(n_2, \mathbb{P}) \times \cdots \times \mathrm{GL}(n_{s+1}, \mathbb{P})$ on $\mathbb{P}^{n_1 \times n_2} \times \mathbb{P}^{n_2 \times n_3} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_s \times n_{s+1}}$ as $(g_1 X_1 g_2^{-1}, g_2 X_2 g_3^{-1}, \cdots, g_s X_s g_{s+1}^{-1})$ are determined.

Keywords Splittable representations, Lie algebras, Orbits, Group action, Layered graphs

2020 MR Subject Classification 17B15, 17B30