数 学 年 刊
3 (1) 1982

Π_k 空间上自共轭算子的开根

严 绍 宗
(复旦大学)

在 Hilbert 空间中任何一个自共轭算子 A，如果 $A\geqslant 0$，则 A 有唯一的自共轭平方根 A_1：$A_1=A_1^*$，$A_1^2=A$，$\sigma(A_1)=\{\sqrt{\lambda}\,|\,\lambda\in\sigma(A)\}$. 在不定尺度空间 Π_k 上，一个正算子(即对任何 $x\in\Pi_k$，$(Ax, x)\geqslant 0$，此地$(\cdot, \cdot)$是 Π_k 上度规，显然当 A 是有界算子时，A 必是 Π_k 上自共轭的)是否能有自共轭的平方根呢？ 这是本文讨论的目标. 其次还讨论了 Π_k 上酉算子的平方根问题.

定义 设 A 是 Π_k 上的自共轭算子，如果存在自共轭算子 A_1，使得 $A_1^2=A$，就称 A_1 为 A 的自共轭平方根，简称为 A 的平方根.

引理 1 设 A 是 Π_k 上有界自共轭算子，如果 A_1 是 A 的平方根，则 A_1 必是有界的自共轭算子.

证 根据[1]的定理 2，Π_k 上自共轭算子 A 有界的充要条件是 $\sigma(A)$ 是有界的集合. 由于[2]的定理 2 的推论 1，$\sigma^2(A_1)=\{\lambda^2\,|\,\lambda\in\sigma(A_1)\}=\sigma(A)$，所以 $\sigma(A_1)$ 是有界集，又因为 A_1 是自共轭的，所以 A_1 是有界的算子(根据[1]的定理 2). 证毕.

引理 2 设自共轭算子 A 在某标准分解 $\Pi_k=N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P$ 之下为 $A=\{S, A_N, A_P, F, G, Q\}$[注]，则自共轭算子 $A^2=\{S^2, A_N^2, A_P^2, SF+FA_N, SG+GA_P, QS^*+SQ+GG^*-FF^*\}$.

直接计算可得引理 2 的结论.

从引理 2 知，对给定自共轭算子 A，要问是否有自共轭算子 A_1，使 $A_1^2=A$，就相当于要解算子方程

$$\begin{gathered}S=S_1^2,\ A_N=A_{N1}^2,\ A_P=A_{P1}^2,\\ F=S_1F_1+F_1A_{N1},\ G=S_1G_1+G_1A_{P1},\ Q=Q_1S_1^*+S_1Q_1+G_1G_1^*-F_1F_1^*.\end{gathered}\tag{1}$$

其中 $A_1=\{S_1, A_{N1}, A_{P1}, F_1, G_1, Q_1\}$.

讨论之前，给出两个不能有自共轭平方根的例子.

例 1 存在 Π_k 上正的线性有界算子 A，并且 $\sigma(A)\geqslant 0$，但不能有自共轭平方根的例：设 $\Pi_k=\{Z+Z^*\}\oplus P$，$\dim Z=K$，取 $A=\{S, A_P, G, Q\}=\{0, A_P, 0, \alpha I\}$，其中 A_P 是 P 上正算子(即 $\sigma(A_P)\geqslant 0$ 的有界自共轭算子)，但 $0\in\sigma_p(A_P)$. $\{z_i\}$，$\{z_i^*\}$ 是对偶基，$Iz_j^*=z_j$，$j=1, 2, \cdots, k$，α 是非零实数. 显然 A 是正的. 下面证明 A 没有自共轭的平方根.

本文 1980 年 1 月 2 日收到.

[注] 参看[1]. 这里 A_N, A_P, Q, F, G 相当于[1]中 $\mathscr{A}$, $\bar{\mathscr{A}}$, $\mathscr{K}$, $\mathscr{F}$ $\mathscr{G}$.

证 假如不对，有自共轭算子 A_1，使得 $A_1^2=A$. 容易算出，A 相应于 $\lambda=0$ 的特征子空间为 Z，又由于 A_1 与 A 可以交换，所以 Z 是 A_1 的一个 k 维非正不变子空间，从而 A_1 的形式为 $A_1=\{S_1, A_{P1}, G_1, Q_1\}$. 根据(1)，应该满足

$$\begin{aligned}&S_1^2=S=0,\ A_{P1}^2=A_P>0,\\&S_1G_1+G_1A_{P1}=G,\ S_1Q_1+Q_1S_1^*=\alpha I-G_1G_1^*.\end{aligned}\tag{2}$$

由于 $A_P>0$，A_{P1} 是 P 上自共轭的，所以 $\mathscr{N}(A_{P1})=\{0\}$. 从(2)又知 $\sigma(S_1)=0$，由于 Z 是 S_1 的相应于 $\lambda=0$ 的根子空间以及 $S_1^2=0$，所以 Z 中向量对 S_1 来说最高阶级为 2. 因而存在一组基 z'_i，$i=1, 2, \cdots, l_0-1$，z'_{l_0+j}，$j=0, \cdots, 2m$，$l_0+2m=k$，使得 $S_1z'_i=0$，$i=1, 2, \cdots, l_0-1$，l_0+2n-1，$n=1, 2, \cdots, m$，而 $S_1z'_{l_0+2n}=z'_{l_0+2n-1}$（即 S_1 在 $\{z'_i\}$ 下有 Jordan 标准形）. 设 $G_1p=\sum\limits_1^k(p, y_i)z'_i$，$p\in P$. 显然，算子 G 和 P 的共轭空间 P^*(=P，因为 P 是 Hilbert 空间)上一向量组 $(y_1, \cdots, y_k)$ 一一对应，记 $G_1=(y_1, \cdots, y_k)$，则(2)中有关 G_1 的方程便是

$$\sum_1^k(p, y_i)S_1z'_i+\sum_1^k(A_{P1}p, y_i)z'_i=0,\ p\in P.\tag{3}$$

利用 $(A_{P1}p, y_i)=(p, A_{P1}y_i)$ 以及 S_1 的 Jordan 分解形式对一切 $p\in P$，$(p, A_{P1}y_i)=0$，$i=1, 2, \cdots, l_0-1, l_0+2n$，$n=1, 2, \cdots, m$. $(p, A_{P1}y_i+y_{i+1})=0$，$i=l_0+2n-1$，$n=1, 2, \cdots, m$. 利用 $\mathscr{N}(A_{P1})=\{0\}$，从 $(p, A_{P1}y_i)=0$ 推出 $y_i=0$，$i=1, 2, \cdots, l_0-1, l_0+2n$，$n=1, 2, \cdots, m$. 再从 $(p, A_{P1}y_i+y_{i+1})=0$ 推出 $y_i=0$，$i=l_0+2n-1$，$n=1, 2, \cdots, m$，即 $G_1=(y_1, \cdots, y_k)=0$.

进而在对偶基 $\{z'_i\}$、$\{z'^*_i\}$，并视 $z'_i\equiv z'^*_i$ 之下解(2)中的 Q_1 的方程. 先算 $S_1Q_1+Q_1S_1^*$ 的对角线元：对 $i=1, 2, \cdots, l_0-1, l_0+2n-1$，$n=1, 2, \cdots, m$.

$$\langle z'_i, (S_1Q_1+Q_1S_1^*)z_i\rangle=\langle S_1^*z'_i, Q_1z'_i\rangle+\langle z'_i, Q_1S_1^*z'_i\rangle^{[注1]}=0.\tag{4}$$

记 T 为基 $(z'_1, \cdots, z'_k)$ 到基 $(z_1, \cdots, z_k)$ 的变换，可以证明（参见下面引理 3）$Q\to Q'=\alpha T^*IT=\alpha T^*T$. 因为 T 是非奇的，所以 $\langle T^*Tz'_i, z'_i\rangle=\langle Tz'_i, Tz'_i\rangle\neq0$，这与(4)式矛盾. 从而不存在自共轭算子 A_1，满足 $A_1^2=A$.

例中需要下面引理

引理 3 设 A 在标准分解 $\Pi_k=N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P$ 下为 $A=\{S, A_N, A_P, F, G, Q\}$. 当对偶基 $\{z_i\}$，$\{z_i^*\}$ 换为 $\{z'_i\}$，$\{z'^*_i\}$，记 $z_i=Tz'_i$，$i=1, 2, \cdots, k$，则 Q 在 $\{z'_i\}$，$\{z'^*_i\}$ 下为阵 $Q'=T^*QT$.

证 记 $z_i^*=Lz'^*_i$，$i=1, 2, \cdots, k$. 利用

$$\delta_{ij}=\langle z_i, z_j^*\rangle=\langle z'_i, z'^*_j\rangle$$

得到 $L=(T^{-1})^*$. 再由

$$Qz'^*_i=QL^{-1}z_i^*=T^*_{ij}Qz_j^*=T^*_{ij}Q_{jl}z_l=T^*_{ij}Q_{jl}T_{lm}z'_m.^{[注2]}$$

由此可知，当 z'^*_i 与 z'_i 视为同一时，算子 Q 变为 T^*QT. 证毕.

例 1 说明 $\lambda=0$ 的特征子空间退化，根子空间不退化（此例中 $\lambda=0$ 的根子空间 $Z+Z^*$）的自共轭算子一般说来是不能有自共轭的平方根的.

[注 1] $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示由 $\{z'_i\}$，$\{z'^*_i\}$ 在 Z 中导出的内积，参见[3]

[注 2] 这里是哑指标和

例 2　Π_k 上含有负实谱的自共轭算子 A (注意 A 仍然可能是 Π_k 上正算子)，明显地，一般不能有自共轭的平方根．因为假如有自共轭平方根 A_1，显然从 $\sigma(A)$ 的负谱不可能是连续谱(下面将会看到，从 $\sigma^2(A_1)=\sigma(A)$ 便可推出自共轭算子 A_1 将有连续的虚谱，显然是不可能)．由此可知 $\sigma(A)$ 的负谱只可能是特征值．然而对每个负特征值，相应于它的特征子空间(以及根子空间)都必须是非退化的，而且维数是偶的．只有这样，才有可能被拆成两个对偶的零性子空间的和，即使如此也不能断言就有平方根．但相应于负特征值的特征子空间是非退化、维数是偶的，这一般说来已不满足了．由此可知具有负实谱时的情况较为复杂．

下面先讨论 $\sigma(A)$ 只有复谱和非负实谱的情况．

定理 1　设 A 是 Π_k 上有界自共轭算子，$\sigma(A)\subset[0,\infty)$，如果相应于 $\lambda=0$ 的特征子空间是空集(即 $0\overline{\in}\sigma_p(A)$)或非退化，那末 A 一定有自共轭的开根 A_1．如果要求 $\sigma(A_1)=\{\sqrt{\lambda}/\lambda\in\sigma(A)\}$，那末当 $0\overline{\in}\sigma_p(A)$ 时，自共轭的平方根是唯一的．

证　如果 $\lambda=0$ 是 A 的特征值，S_0 是特征子空间，由假设 S_0 非退化，所以 $\Pi_k=S_0\oplus S_0^\perp$．显然 $\mathscr{R}(A)\subset S_0^\perp$，因而只要在 S_0 上取 $A_1=0$，而证明 A 在 Π_k 型空间 $S_0^\perp$ 上有自共轭平方根即可．

设 $0\overline{\in}\sigma_p(A)$．$A$ 在 $\Pi_k=N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P$ 上为 $A=\{S, A_N, A_P, F, G, Q\}$．由假设 $0\overline{\in}\sigma(S)\cup\sigma(A_N)\cup\sigma_p(A_P)$，而且 $\sigma(S)$, $\sigma(A_N)$, $\sigma(A_P)$ 为非负数集．现证明在同一个标准分解下，有自共轭算子 $A_1=\{S_1, A_{N1}, A_{P1}, F_1, G_1, Q_1\}$，使得 $A_1^2=A$，并且 $\sigma(A_1)=\{\sqrt{\lambda}\,|\,\lambda\in\sigma(A)\}$．

自然，取 $A_{P1}=\sqrt{A_P}$, $A_{N1}=\sqrt{A_N}$．根据 Jordan 分解理论知道，对任何 Jordan 块 T，只要 $\sigma(T)\neq0$，必有 T_1，使得 $T_1^2=T$，且当 $\sigma(T)>0$ 时，可以做到 $\sigma(T_1)>0$，由此可知存在 S_1，使得 $S_1^2=S$，且 $\sigma(S_1)>0$．在 Z 中取一组基 $\{z_i'\}$，$\{z_i'\}$ 的编号是将 S_1 同一个特征值编在一起，向量按低阶到高阶顺序编，在这个基下，S_1 成为 Jordan 标准形．并在这个基下，设 $A=\{S, A_N, A_P, F, G, Q\}$，$A_1=\{S_1,\sqrt{A_N},\sqrt{A_P}, F_1, G_1, Q_1\}$．解 $A_1^2=A$，即解

$$F_1\sqrt{A_N}+S_1F_1=F,\quad G_1\sqrt{A_P}+S_1G_1=G;\tag{5}$$

$$S_1Q_1+Q_1S_1^*=Q-G_1G_1^*+F_1F_1^*.\tag{6}$$

解　$F_1\sqrt{A_N}+S_1F_1=F$，记 $Fn=\sum\limits_1^{k'}(n, y_i)z_i'$，[注] $F_1n=\sum\limits_1^{k'}(n, x_i)z_i'$，即

$$S_1\sum_1^{k'}(n, x_i)z_i'+\sum_1^{k'}(\sqrt{A_N}n, x_i)z_i'=\sum_1^{k'}(n, y_i)z_i',\ n\in N.\tag{7}$$

用 S_1 的 Jordan 块形式代入，易知 $\sum\limits_1^{k'}(n, x_i)S_1z_i'=\sum\limits_1^{k'}(n, S_1^*x_i)z_i'$，再利用 $\sqrt{A_N}$ 的自共轭性可知(7)等价于

$$S_1^*x_i+\sqrt{A_N}\,x_i=y_i,\ i=1, 2, \cdots, k',\tag{8}$$

从每个特征值的最高阶向量相应的指标，例如为 i 解起．由于 $S_1^*x_i=\sqrt{\lambda_j}\,x_i$ (λ_j 是 S 的某个特征值) 以及 $\sqrt{A_N}\geqslant0$，所以 $x_i=(\sqrt{A_N}+\sqrt{\lambda_j})^{-1}y_i$．利用 $S_1^*x_{i-1}=\sqrt{\lambda_j}\,x_{i-1}+x_i$，从而解出 x_{i-1}

[注]　将 $N\to Z$ 的算子 F 看成与 N 中向量组 $(y_1,\cdots,y_{k'})$ 相对应．F_1 与 $(x_1,\cdots,x_{k'})$ 相对应．

$$x_{i-1}=(\sqrt{A_N}+\sqrt{\lambda_j})^{-1}(y_{i-1}-x_i). \tag{9}$$

这样由方程 $F_1\sqrt{A_N}+S_1F_1=F$(即(8))唯一地解出$(x_1, \cdots, x_{k'})$,即给定 S_1,可唯一地解得 $F_1=(x_1, \cdots, x_{k'})$.

同样,对给定的 G,从方程 $G_1\sqrt{A_P}+S_1G_1=G$ 可唯一地解出 G_1.

由于 $\sigma(S_1)=\sigma(S_1^*)$,并且是正数集.易知对给定的 F_1, G_1, Q 从方程(6)中必可唯一地解出 Q_1,因为 Q_1^* 也适合(6),从唯一性 $Q_1=Q_1^*$.

综上所说就得到:自共轭算子 $A_1=\{S_1, \sqrt{A_N}, \sqrt{A_P}, F_1, G_1, Q_1\}$ 满足 $A_1^2=A$,而且 $\sigma(A_1)=\sigma(S_1)\cup\sigma(\sqrt{A_N})\cup\sigma(\sqrt{A_P})=\{\sqrt{\lambda}/\lambda\in\sigma(A)\}$.

下面证明唯一性,为此先证明几个引理.

引理4 在 Π_k 空间上单位算子 I 的自共轭平方根 A_1,如果 $\sigma(A_1)\geqslant 0$,则 $A_1=I$.

证 对 A_1 有标准分解 $\Pi_k=N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P$, $A_1=\{S_1, A_{N1}, A_{P1}, F_1, G_1, Q_1\}$,因此

$$\{S_1^2, A_M^2, A_P^2, S_1F_1+F_1A_{N1}, S_1G_1+G_1A_{P1}, Q_1S_1^*+S_1Q_1-F_1F_1^*+G_1G_1^*\}$$
$$=\{I, I, I, 0, 0, 0\}.$$

显然,$A_{N1}=I$, $A_{P1}=I$. 从线代数知道当 $S_1^2=I$ 时,且 $\sigma(S_1)\geqslant 0$ 的解只有 $S=I$. 再从定理1证明解存在时的方程(8)知道当 $y_i=0$, $i=1, 2, \cdots, k$ 时,解 $x_i=0$, $i=1, 2, \cdots, k$. 所以 $F_1=G_1=0$. 从 $F_1=G_1=Q=0$ 以及方程(6),易知 $Q_1=0$. 所以 $A_1=I$. 证毕.

引理5 设 A 是 Π_k 上自共轭算子,$1\in\sigma_p(A)$,L 为相应的特征子空间,并且 L 是退化的,$L=N\oplus Z\oplus P$,如果自共轭算子 A_1,满足 $A_1^2=A$,那末

(i) L 和 Z 都是 A_1 的不变子空间;

(ii) 如果 A_1 在 L 上的谱非负,那末 A_1 在 L 上为单位算子.

证 (i) 由于 $A_1^2=A$,所以 A_1 与 A 可交换.从而 L 是 A_1 的不变子空间.由 $A_1=A_1^\dagger$, $L^\perp$ 也是 A_1 的不变子空间,因而 $Z=L\cap L^\perp$ 也是 A_1 的不变子空间.

(ii) 视 A、A_1 为 L 上算子,它们在 L 上都保持自共轭性质,即 $(Ax, y)=(x, Ay)$, $(A_1x, y)=(x, A_1y)$ 对任何 $x, y\in L$ 成立.记 $L_1=N\oplus P$,它是非退化的闭子空间,并且 $L=L_1\oplus Z$. 记 $S_2=P_ZA_1P_Z$, $A_2=P_{L1}A_1P_{L1}$, $F_2=P_ZA_1P_{L1}$[注],又记 $A_1=\{S_2, A_2, F_2\}$,从 A_1 在 L 上的自共轭性推出 A_2 在 L_1 上也具有自共轭性,即视 A_2 为 L_1 上算子时,是 L_1 上自共轭算子. 又从 $\sigma(A_1)$ 的非负性推出 $\sigma(S_2)$ 与 $\sigma(A_2)$ 是非负的.显然,在 L 上,$A_1^2=\{S_2^2, A_2^2, S_2F_2+F_2A_2\}=A=I\{I, I, 0\}$,与引理4同样理由,从 $S_2^2=I$ 以及 $\sigma(S_2)$ 的非负性可以推出 $S_2=I$. 再由引理4以及 $A_2^2=I$, $\sigma(A_2)$ 非负推出 $A_2=I$ 在 L_1 上成立.再从方程 $S_2F_2+F_2A_2=0$ 推出 $F_2=0$. 因而 $A_1=\{I, I, 0\}=A=I$. 证毕.

定义 设 T 是 Π_k 上线性算子,λ 是特征值,x 是阶为 r 的向量,由$\{x, (T-\lambda)x, \cdots, (T-\lambda)^{r-1}x\}$ 张成的线性子空间称为 T 的由 x 产生的推移子空间,记为 $V(x, r)$. 如果 x 是阶为 r 的最高级向量,记 $V(x)=V(x, r)$. 如果一族推移子空间 $\{V(x_\lambda, r_\lambda)\}$ 的所有非零向量是线性无关的,那末称 $\{V(x_\lambda, r_\lambda)\}$ 是线性无关族.

引理6 设 A 是 Π_k 上自共轭算子,λ 是特征值,Φ_λ 为相应根子空间,那末

(i) Φ_λ 中向量最高阶不超过 $2k+1$;

[注] 记号 P_L 表示 Π_k 在闭子空间 L 上的投影;这里"投影"是把 Π_k 作为 Hilbert 空间.

(ii) Φ_λ 是闭子空间；

(iii) $\Phi_\lambda=\Phi_0\dotplus\Phi'_\lambda$, 这里 Φ_0 是某些特征向量张成的闭子空间，Φ'_λ 是 A 的有限维不变子空间；

(iv) 可以做到 Φ'_λ 是一族(实际上是有限个)线性无关的，并且是由最高级向量产生的推移子空间张成.

证 如果 λ 是复数, (i), (ii), (iii) 均显然. 所以不妨设 λ 是实数.

(i) 设 A 在某个标准分解 $\Pi_k=N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P$ 之下, $A=\{S, A_N, A_P, F, G, Q\}$. 易知 $N\oplus Z$ 中向量最高级不超过 k. 也容易证明 P 中向量最高级不超过 $k+1$. 根据表达式

$$(A-\lambda)^{k'}z^*=(S-\lambda)^{*k'}z^*+n+p+z,$$

其中 $n\in N$, $p\in P$, $z\in Z$, 容易知道 Z^* 中向量最高级不超过 $2k+1$.

(ii) 由(i) Φ_λ 闭性是显然的.

(iii) 由于 Z, N, Z^* 是有限维，记 E_λ 是 A_P 相应于 λ 的特征子空间，$E_{\lambda G}=\{p|Gp=0,\ p\in E_\lambda\}$, 由 G 的有界性，$E_{\lambda G}$ 是闭子空间，$E_{\lambda G}$ 中向量为 1 级向量，$E_\lambda=E_{\lambda G}\oplus E'_{\lambda G}$. 显然 $E'_{\lambda G}$ 也是有限维空间. 由此易知所有 2 级以上的向量中极大线性无关的个数是有限的. 对其中每个最高级向量 x, 作出相应的推移子空间 $V(x)$, 显然它关于 A 是不变的. 由此可知(iii)成立.

(iv) 因为 Φ'_λ 关于 A 不变，Φ'_λ 是有限维空间，利用 A 在 Φ'_λ 上 Jordan 标准形理论，立即知道存在满足推论要求的推移子空间. 证毕.

引理 7 设 A 是 Π_k 上的自共轭算子，$1\in\sigma_p(A)$, Φ_1 是相应的根子空间，如果有 $A_1=A_1^{\dagger}$, $A_1^2=A$, 并且 $\sigma(A_1)$ 非负，那末 A_1 在 Φ_1 中是唯一的.

证 由于 $A_1^2=A$, 显然，Φ_1、S_1 (相应于 $\lambda=1$, A 的特征子空间)是 A_1 的不变子空间. 根据引理 5, A_1 在 S_1 上为单位算子. 根据引理 6, $\Phi_1=\Phi_0\dotplus\Phi'_1$, $\Phi_0\subset S_1$, 而 Φ'_1 是由 A 的最高级向量产生的线性无关的推移子空间张成. 显然只要证明 Φ'_1 必是 A_1 的不变子空间，并且在 Φ'_1 上是唯一的就可以了.

记 $\Phi_1^q=\{x|(A-1)^q x=0\}$, 显然 $A_1\Phi_1^q\subset\Phi_1^q$, 即 A_1 不提高根子空间 Φ_1 中向量的级. 由于 Φ'_1 是有限维，而 A_1 在 S_1 上为单位算子，显然可以在 Φ_0 中适当选取有限个向量张成一个子空间 $\Phi'_0\subset\Phi_0$, 使得有限维子空间 $L_1=\Phi'_0\dotplus\Phi'_1$ 关于 A_1 是不变的. 现将 A, A_1 限制在 L_1 上证明 $A_1\Phi'_1\subset\Phi'_1$, 且 A_1 在 Φ'_1 上唯一.

令

$$B_1=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{\lambda^{\frac{1}{2}}d\lambda}{(\lambda-A)}, \tag{10}$$

这里围道取在复平面上点(1, 0)的近旁，但不包含原点(0, 0). 从 $\lambda^{\frac{1}{2}}$ 在(1, 0)近旁解析性，知 $B_1^2=A$. 当 $\lambda\neq1$ 时，易知 $(\lambda-A)^{-1}L_1\subset L_1$ (对 Φ'_1 中每个向量 x, $(\lambda-A)^{-1}x$ 可以算出来的，算法可以从低级到高级向量依次算起), 所以 $B_1L_1\subset L_1$. 从而 B_1 是 L_1 中算子. 又从 $\sigma^2(B_1)=\sigma(A)=\{1\}$, 易知 $\sigma(B_1)=\{-1, 1\}$. 但由于 $(1+\lambda^{\frac{1}{2}})$ 在(1, 0)点近旁单值可逆的解析函数，所以 $(B_1+1)^{-1}$ 存在，并且

$$(B_1+1)^{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{1+\lambda^{\frac{1}{2}}}{\lambda-A}\,d\lambda.$$

所以 $\sigma(B)=\{1\}$. 如果 $A_1^2=A$, 从 A_1 与 A 可交换性推知 A_1 与 B_1 可交换. 现在证 A_1+B_1 是 L_1 上非奇的. 假如不对, 必有非零向量 x, $(A_1+B_1)x=0$. 记 (A_1+B_1) 相应于 $\lambda=0$ 的特征子空间为 S_0, 显然从 A_1, B_1 可交换性得到 $A_1S_0\subset S_0$, $B_1S_0\subset S_0$. 因为 S_0 是有限维空间, B_1 在 S_0 中必有特征向量 x_0, 因为 $\sigma(B_1)=1$, 易知 $A_1x_0+B_1x_0=A_1x_0+x_0=0$, 即 -1 是 A_1 的特征值. 这与假设矛盾. 所以 $(A_1+B_1)^{-1}$ 存在. 但 $0=A_1^2-B_1^2=(A_1-B_1)(A_1+B_1)$. 由 $(A_1+B_1)^{-1}$ 存在, 得到 $A_1=B_1$.

但必须注意, 如果在一组线性基之下,

当 $A=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&1&1&&\\&&&&\ddots&\ddots&\\&&&&&\ddots&1\\&&&&&&1\end{pmatrix}$ 时,

$$B_1=\begin{pmatrix}1&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&\\&&1&&&&&\\&&&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{8}&&\\&&&&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&&&&\ddots&\ddots&-\frac{1}{8}\\&&&&&&\ddots&\frac{1}{2}\\&&&&&&&1\end{pmatrix},\tag{11}$$

这是 Φ_1' 中只有一个最高级向量产生的推移子空间的情况. 当 Φ_1' 中不只一个推移子空间, 从(11)易知同样有满足 $\sigma(A_1)=\{1\}$, 并且 $A_1^2=A$ 的算子在 Φ_1' 上形式是由 A 在 Φ_1' 上所确定, 并且 $A_1\Phi_1'\subset\Phi_1'$. 从而 A_1 在 Φ_1 中是唯一的.　　　　证毕.

现在证明定理 1 中的唯一性: 根据引理 7, 对每个 $\lambda\in\sigma_p(A)$, $\lambda>0$, 如果 $A_1^2=A$, $\sigma(A_1)$ 非负, $A_1=A_1^\dagger$, 那末 A_1 在 Φ_λ 中是唯一的. 从而在 A 的一切根子空间 Φ_λ, $(\lambda>0)$ 中, A_1 是唯一的. 自然 A_1 在 A 的一切 K 维非正不变子空间中是唯一的. 因此假如有两个这样的平方根 A_1, A_2, 在证明存在性时所用的标准分解 $\Pi_k=N\oplus\{Z+Z^*\}\oplus P$ 下, $A_1=A_2$ 在 $N\oplus Z$ 中成立, 从而这个标准分解也可作为 A_1, A_2, A 的公共标准分解, 并且 A_1, A_2 有相同的 S. 由解的存在性证明中可知当 S 确定以后, 其余的 F_i, G_i, Q_i 皆唯一确定. 至此定理证毕.

显然定理中 $0\in\sigma_p(A)$ 条件不能去掉, 否则唯一性不能保证. 下面就是一例.

例 3　设 $\Pi_k=\{Z+Z^*\}$, $\dim Z=2$. A 在 Π_k 上为 0. A 有一个自共轭平方根 0. 但还有一个自共轭平方根 $A_1=\{S,\ 0\}$, 其中 $S=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ (在 Z 中基 z_1, z_2 之下的矩阵表示).

比定理 1 更一般的结果如下.

定理 1′ 设 A 是 Π_k 上有界自共轭算子, 记 $\sigma_0(A)=\sigma(A)\cap(-\infty,\ \infty)$. 如果 $\sigma_0(A)\subset[0,\ \infty)$, 并且相应于特征值 $\lambda=0$ 的特征子空间是空集(即 $\lambda=0$ 不是特征值)或非退化, 那末 A 一定有自共轭的平方根 A_1, 如果 $0\in\sigma_p(A)$, 并要求

(i) $\sigma_0(A_1)=\sigma(A_1)\cap(-\infty,\ \infty)$是非负的;

(ii) $\sigma(A_1)$中复数 $\lambda=\rho e^{i\theta}$, 满足 $0<|\theta|<\dfrac{\pi}{2}$.

那末 A_1是唯一的.

证 因为 A 在实轴外的上半平面每个谱点 λ_0 的根子空间 Φ_{λ_0} 是零性的有限维子空间, 如果 A_1 是 A 的平方根, 那末 $A_1\Phi_{\lambda_0}\subset\Phi_{\lambda_0}$, 即在 Φ_{λ_0} 上应满足 $A_1^2=A$. 根据代数学或类似于引理 7 的(10), A_1 在 Φ_λ 上

$$A_1^{\lambda}=\pm\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{\lambda^{\frac{1}{2}}}{\lambda-A}\,d\lambda \tag{12}$$

围道取在 λ_0 点近旁. 如要求复数谱满足 $0<|\theta|<\dfrac{\pi}{2}$, (12)式取 + 号. 同样对 $\Phi_{\bar\lambda_0}$, $A_{\bar 1}$ 在 $\Phi_{\bar\lambda_0}$ 上,

$$A_1^{\bar\lambda}=\pm\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{\bar\lambda^{\frac{1}{2}}}{\bar\lambda-A}\,d\bar\lambda \tag{13}$$

围道(用 $\bar\lambda$ 来说)取在 $\bar\lambda_0$ 点近旁. 如要求复数谱满足 $0<|\theta|<\dfrac{\pi}{2}$, (13)式取 + 号, 易知对任何 $z_i\in\Phi_\lambda$, $z_i'\in\Phi_{\bar\lambda}(i=1,\ 2)$

$$(A_1^{\lambda}z_1,\ z_2)=0=(z_1A_1^{\lambda}z_2),\ (A_1^{\lambda}z_1',\ z_2')=0=(z_1',\ A_1^{\bar\lambda}z_2'),$$

$$(A_1^{\lambda}z_1,\ z_1')=(z_1(A_1^{\lambda})^{\dagger}z_1')=(z_1,\ A_1^{\bar\lambda}z_2').$$

上式中最后等式是利用 $A=A^\dagger$, 从而 $(A_1^{\lambda})^{\dagger}=A_1^{\bar\lambda}$ 的事实. 由此可知在非退化的有限维空间 $\Phi_\lambda\dotplus\Phi_{\bar\lambda}$ 上取 $A_1=A_1^{\lambda}\dotplus A_1^{\bar\lambda}$(同时取 + 或 − 号)便是自共轭算子. 如要求 $\sigma(A_1)$ 的谱满足 $0<|\theta|<\dfrac{\pi}{2}$, 应同时取 + 号.

令 $\Phi=\sum\limits_{\theta_\lambda\neq0}(\Phi_\lambda\dotplus\Phi_{\bar\lambda})$是有限维非退化的, $\Pi_k=\Phi\oplus\Phi^\perp$, 而 $A\Phi^\perp\subset\Phi^\perp$. A 在 $\Phi^\perp$ 没有复谱, 用定理 1, A 在 $\Phi^\perp$ 上有自共轭平方根. 如果有另一个自共轭算子 B, 根据复谱满足 $0<|\theta|<\dfrac{\pi}{2}$ 的要求, B 在 $\Phi_\lambda\dotplus\Phi_{\bar\lambda}$ 中只能由(12), (13)所确定, 即 $B=A_1$. 又由于 $B^\dagger=B$, 所以 $B\Phi^\perp\subset\Phi^\perp$, 即 $B^2=A$ 在 $\Phi^\perp$ 上成立. 由定理 1, 在 $\Phi^\perp$ 上, $B=A_1$. 证毕.

显然定理 1′ 可以推广到 A 为无界自共轭算子的情况.

类似定理 1′, 还可以讨论酉算子的平方根.

定理 2 设 U 是 Π_k 上酉算子, 必存在 Π_k 上酉算子 U_1, 使得 $U_1^2=U$. 如果要求

(i) $\sigma(U_1)$在单位圆周上的谱只落在上半圆周上, 但 −1 不是特征值;

(ii) $\sigma(U_1)$中不在单位圆周上的特征值 $\lambda=\rho e^{i\theta}$满足 $-\dfrac{\pi}{2}<\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$,

那末 U_1 是唯一的.

证 基本步骤与定理 1, 1′ 的证明一样. 只简述如下: 设在标准分解 $\Pi_k=N\oplus\{Z+$

$Z^*\}\oplus P$ 下，$U=\{S, U_N, U_P, C, D, T\}$（参见[3]）为了和自共轭算子对照方便，将独立变量 C、D 换为 $F=SC^*U_N$, $G=-SD^*U_P$. 根据[3]，从而 $U=\{S, U_N, U_P, F, G, T\}$. 在这个标准分解下，令 $U_1=\{S_1, U_{N1}, U_{P1}, F_1, G_1, T_1\}$. 方程 $U_1^2=U$ 经计算易知等价于

$$S_1^2=S,\ U_{N1}^2=U_N,\ U_{P1}^2=U_P; \tag{14}$$

$$F_1U_{N1}+S_1F_1=F,\ G_1U_{P1}+S_1G_1=G; \tag{15}$$

$$S_1^{-1}T_1S_1^{-1*}+T_1$$
$$=T+\frac{1}{2}(S_1^{-2}GU_PG^*S_1^{-1*}-S_1^{-1}GU_P^{-1}G^*S_1^{-2*}+S_1^{-1}FU_N^{-1}F^*S_1^{-2*}-S_1^{-2}FU_NF^*S_1^{-1*}). \tag{16}$$

先将 U 不在单位圆周上的特征值相应的根子空间和定理 1′ 一样处理，即在(12)、(13)中用 U 代替 A. 利用 $U^\dagger=U^{-1}$ 就可以得到 U_1 是 $\Phi_\lambda\dotplus\Phi_{\frac{1}{\bar\lambda}}$ 上酉算子. 并且 U 的任何其它平方根在满足本定理中条件(ii)时，在 $\Phi_\lambda\dotplus\Phi_{\frac{1}{\bar\lambda}}$ 上必唯一.

对于 $(\sum_{|\lambda|\neq 1}(\Phi_\lambda\dotplus\Phi_{\frac{1}{\bar\lambda}}))^\perp$ 部分用定理 1 的办法处理. 先给出适合 $S_1^2=S$ 的解，并且满足 $\sigma(S_1)$ 在上半圆周，$-1\bar\in\sigma(S_1)$. 这种 S_1 显然存在. 取 $U_{N1}=\int e^{i\frac{\theta}{2}}dE_{N\theta}$, $U_{P1}=\int e^{i\frac{\theta}{2}}dE_{P\theta}$, 其中 $\int e^{i\theta}dE_{N\theta}$、$\int e^{i\theta}dE_{P\theta}$ 是 U_N、U_P 分别在 N、P 上的谱分解 (Hilbert 空间上酉算子的平方根如果是酉算子，并且满足本定理中的(i)要求是唯一的). 当 S_1, U_{N1}, U_{P1} 取定后，对给定的 F, G, 从(15)中可唯一地解出 F_1, G_1, 然后解方程(16). 用 S^{-1} 的 Jordan 标准形来解，易知从(16)可唯一地解出 T_1. 由于 $T=-T^*$, 显然(16)的右边是反自共轭的，易知解出的 T_1 必是反自共轭的. 这说明满足本定理的(i)、(ii)要求的酉算子 U_1 存在. 用类似引理 4–7 证明，可知解是唯一的. 证毕.

注 显然在定理 1, 1′, 2 中为保证唯一性，谱的范围限制方式可以多种多样.

下面是具有负实谱的情况.

定理 3 设 A 是 Π_k 上自共轭算子，存在自共轭平方根 A_1 的充要条件是

(i) A 的负实谱必是特征值;

(ii) 对每个负特征值 λ, 相应的根子空间 Φ_λ 必不退化，Φ_λ 作为 Π_k 型空间时，它的极大正、负子空间维数相等(从而 A 的负实特征值是有限个);

(iii) 存在分解 $\Phi_\lambda=\{Z+Z^*\}$, Z, Z^* 是两个零性子空间，并且对 A 是不变的. 使得

(iv) A 在 $(\sum_{\lambda<0}\oplus\Phi_\lambda)^\perp$ 上具有自共轭的平方根.

证 假如 A 有自共轭的平方根 A_1. 由[2]，$\sigma(A_1^2)=\sigma(A)$. 由此可知 $\sigma(A)$ 不能有负的连续谱，否则自共轭算子 A_1 将有连续的虚谱，这是不可能的. 既然负实谱是孤立点，因此必是特征值，即(i)成立.

因为 A_1 与 A 可交换，所以对每个 λ, $A_1\Phi_\lambda\subset\Phi_\lambda$. 把 A, A_1 限制在 Φ_λ 上，$\sigma(A_1/\Phi_\lambda)^2=\lambda$, 所以 $\sigma(A_1/\Phi_\lambda)$ 是虚数谱. 然而 Π_k 上自共轭算子虚数谱必是共轭成对地出现. 记 A_1 相应于 $\pm\sqrt{|\lambda|}\,i$ 的根子空间为 $\Phi_\pm$. 显然，对任何 $x\in\Phi_+\dotplus\Phi_-$, 必有充分大的 q, 使得

$$0=(A_1-\sqrt{|\lambda|}i)^q(A_1+\sqrt{|\lambda|}i)^qx=(A-\lambda)^qx,$$

即 $\Phi_+\dotplus\Phi_-\subset\Phi_\lambda$. 反之,对任何 $0\neq y\in(\Phi_+\dotplus\Phi_-)^\perp$,对一切 q, 总有

$$0\neq(A_1-\sqrt{|\lambda|}i)^q(A_1+\sqrt{|\lambda|}i)^q y=(A-\lambda)^q y.$$

所以 $\Phi_\lambda\subset\Phi_+\dotplus\Phi_-$, 即 $\Phi_\lambda=\Phi_+\dotplus\Phi_-$. 因为 Φ_+、Φ_- 是零性子空间, 并且 $\Phi_+\dotplus\Phi_-$ 不退化, 因此(ii)成立. 从而 A 的每个负特征值 λ 中必有负性向量, 所以 A 的特征值个数不超过 k.

记 A_1 在 Φ_+ 上为 S_1, 根据[3], A_1 在 Φ_- 上为 S_1^*. S_1、S_1^* 在 $\Phi_+\Phi_-$ 中不属任何二阶以上 Jordan 块向量全体正是 Φ_0, 属于二阶以上 Jordan 块向量全体正是 Φ'_λ. 由此可知(iii)成立.

由于 $\Sigma\oplus\Phi_\lambda$ 非退化, A 在 Π_k 型空间 $(\Sigma\oplus\Phi_\lambda)^\perp$ 是不含负谱的自共轭算子.

反之是显然的,主要是因为这时规定 A_1 在 Z、Z^* 上为

$$A_1\Big|_Z=S_1=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{\lambda^{\frac{1}{2}}}{\lambda-A}d\lambda,\quad A_1\Big|_{Z^*}=S_1^*.$$

利用(iv)易知即为所求.　　证毕.

参 考 文 献

[1] 严绍宗,关于 Π_k 空间上的自共轭算子,复旦学报,**19**: 2 (1980), 171—180.

[2] 严绍宗、童裕孙,Π_k 空间上的无界自共轭算子,数学年刊,**2**: 2 (1981), 157—180.

[3] 严绍宗,关于不定尺度空间上酉算子,复旦学报,**18**: 1 (1979), 22—31.

[4] J. Bognar, Magyar Tud. *Akad. Mat. Kutató Int. Közl*, **6** (1961), 351—363.

SQUARE ROOTS OF SELF ADJOINT OPERATORS ON Π_k

YAN SHAOZONG

(*Fudan University*)

ABSTRACT

Let Π_k be a Pontrjagin space. Suppose that A is a self adjoint operator on Π_k. The self adjoint operator A_1 on Π_k is called a self adjoint square root of A, if $A_1^2=A$.

The aim of this paper is to discuss the existence and uniqueness of square root of a self adjoint operator on Π_k. We get the main results as follows.

Theorem 1. Let A be a bounded self adjoint operator on Π_k. Suppose $[\sigma(A)\cap(-\infty,\infty)]\subset[0,\infty)$. If the eigen space S_0 corresponding to $\lambda=0$ is non degenerate or void, then there exists a self adjoint operator A_1, such that $A_1^2=A$, and in addition $0\bar{\in}\sigma_p(A)$, then the square root A_1 with $\sigma(A_1)=\{\sqrt{\rho}\,e^{i\frac{\theta}{2}}/\rho e^{i\theta}\in\sigma(A)\}$ is unique.

Remark. 1. In the Theorem 1, we only discuss that A has non-negative real spectra. 2. The hypothesis "S_0 is non-degenerate or void" is necessary for the existence of self adjoint square root. For example, let $\Pi_k=\{Z+Z^*\}\oplus P$ (dim $Z=k$)

be a standard decomposition of the space Π_k, put $A=\{S, A_P, G, Q\}$, where $S=0$, $G=0$; A_P is a positive bounded operator on the Hilbert space P, but $0\overline{\in}\sigma_p(A_P)$; $\{Z_i\}$, $\{Z_i^*\}$ are chosen as the dual bases of Z and Z^*, $Q=\alpha I$, $IZ_j^*=Z_j$, $j=1, 2, \cdots, k$, and α is a nonzero real number. This operator A not only is a bounded self adjoint, but also (i) $\sigma(A)\subset[0, \infty)$, (ii) for any $x\in\Pi_k$, $(Ax, x)\geqslant 0$, where $(\cdot, \cdot)$ is the indefinite metric of Π_k, and yet has no self adjoint square root. 3. It is easily to see that the hypothesis $0\overline{\in}\sigma_p(A)$ is also necessary for the uniqueness. 4. For the unitary operators on Π_k, we have a similar theorem too (it is omitted). 5. About the restriction of spectra $\sigma(A_1)=\{\sqrt{\rho}\, e^{i\frac{\theta}{2}}/\rho e^{i\theta}\in\sigma(A)\}$, of course, it may be changed to another certain form too.

Theorem 2. Suppose that A is a bounded self adjoint operator on Π_k, then the self adjoint square root of A exists iff:

(i) any negative real spectrum of A must be eigen value;

(ii) the radical subspace Φ_λ corresponding to a negative eigenvalue λ must be nondegenerate, and the dimensions of maximum negative and maximum positive subspaces of Φ_λ are equal;

(iii) for every negative eigenvalue λ, there is a standard decomposition $\Phi_\lambda=\{Z+Z^*\}$, such that Z and Z^* both are isotropic subspaces and invariant for A;

(iv) in the Pontrjagin space $(\sum\limits_{\lambda<0}\oplus\Phi_\lambda)^\perp$, A has a self adjoint square root.

Remark. In fact, the subspace $(\sum\limits_{\lambda<0}\oplus\Phi_\lambda)^\perp$ of Π_k reduces A, and A satisfies $\sigma(A)\cap(-\infty, \infty)\subset[0, \infty)$ on $(\sum\limits_{\lambda<0}\oplus\Phi_\lambda)^\perp$. Hence the condition (iv) of Theorem 2 has just been discussed in Theorem 1.