数 学 年 刊
3 (1) 1982

关于一类拟共形映照的偏差估计

谭德邻
(复旦大学)

1. 引 言

设 $B=\{t:|t-c|\leqslant k\}$, 其中 c 是复数, k 是非负实数, 且 $|c|+k<1$。设 $f(z)$ 是 $\overline{\mathbf{C}}$ 到 $\overline{\mathbf{C}}$ 上的拟共形映照,且适合如下条件: 在区域 $1<|z|<\infty$ 上它是单叶解析的,有展开式

$$f(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{z^n},$$

在区域 $|z|<1$ 上,它的复伸张 $\mu(z)=\dfrac{f_{\bar z}}{f_z}$ 几乎处处落在 B 中, (即 $|\mu(z)-c|\leqslant k$ a. e.). 记这样的 $f(z)$ 全体为 $\Sigma'(B)$. Schiffer, M. 和 Schober, G. [1]证明了 $\Sigma'(B)$ 是紧族,并对系数 b_1 获得了估计

$$|b_1-c|\leqslant k. \tag{1}$$

本文进一步研究了族 $\Sigma'(B)$. 设 $f(z)\in\Sigma'(B)$, $L\in H'(|z|>1)$, 我们对二次泛函 $L^2\left[\log\dfrac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right]$ 的取值域进行了准确的估计, 并改善了 Schiffer, M. 和 Schober, G. 对于 b_1 的估计. 实际上,我们得到了如下定理:

定理 1 设 $f\in\Sigma'(B)$, $L\in H'(|z|>1)$,则有

$$\left|L^2\left[\log\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right]-cL^2\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n}{n}(z\zeta)^{-n}\right]\right|\leqslant k|L|^2\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n}(z\bar\zeta)^{-n}\right], \tag{2}$$

其中
$$\alpha_n=\frac{(1-|b|^{2n})(1-|a^2b^2|)}{(1-|b|^2)(1-|a^2b^{2n}|)},\quad \beta_n=-\frac{b^{n-1}(1-|a^2b^2|)}{1-|a^2b^{2n}|},$$

并且当 $k=0$ 时,取 $a=0$; 当 $c=0$ 时,取 $b=0$; 其它情况取

$$a=\frac{1}{2k}\left[1+k^2-|c|^2-\sqrt{(1+k^2-|c|^2)^2-4k^2}\right],$$

$$b=\frac{1}{2c}\left[1-k^2+|c|^2-\sqrt{(1-k^2+|c|^2)^2-4|c|^2}\right].$$

定理 2 设 $f\in\Sigma'(B)$,则有

$$|b_1-c|^2+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{\alpha_n}|b_n|^2\leqslant k^2. \tag{3}$$

2. 定理的证明

定理 1 的证明: 任取实数 θ, 设 f 在族 $\Sigma'(B)$ 中使得如下的泛函

本文 1980 年 2 月 5 日收到.

$$\lambda(f)=\mathrm{Re}\left\{e^{i\theta}L^2\left[\log\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right]\right\} \tag{4}$$

达到最大值. 若 $f^*=f+\varepsilon h+O(\varepsilon^2)\in\Sigma'(B)\,(\varepsilon>0)$ 是 f 的任意一个变分, 其中 $h(z)$ 在 L 的表示测度的紧支集上关于此测度可积, 而 $\dfrac{O(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2}$ 在此紧支集上一致有界. 计算得

$$\lambda(f^*)=\lambda(f)+\varepsilon\mathrm{Re}\left\{e^{i\theta}L^2\left[\frac{h(z)-h(\zeta)}{f(z)-f(\zeta)}\right]\right\}+o(\varepsilon),$$

其中 $\dfrac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}$ 当 $\varepsilon\to0$ 时一致趋于零. 故知 $\lambda(f)$ 在 f 处的 Gâteaux 导数为

$$L(h,\ f)=e^{i\theta}L^2\left[\frac{h(z)-h(\zeta)}{f(z)-f(\zeta)}\right], \tag{5}$$

而 f 在 ξ 处关于 $\Sigma'(B)$ 的变分导数[2]为

$$\psi(\xi,\ w)=\frac{1}{w-\xi}, \tag{6}$$

那末

$$\begin{aligned}A(\xi)&=L(\psi(\xi,f),f)=L\left(\frac{1}{f(z)-f},\ f\right)=e^{i\theta}L^2\left[\frac{\dfrac{1}{f(z)-\xi}-\dfrac{1}{f(\zeta)-\xi}}{f(z)-f(\zeta)}\right]\\&=-e^{i\theta}L^2\left[\frac{1}{(f(z)-\xi)(f(\zeta)-\xi)}\right]=-e^{i\theta}\left[L\left(\frac{1}{f(z)-\xi}\right)\right]^2.\end{aligned} \tag{7}$$

由于 f 在 $\Sigma'(B)$ 中使 $\lambda(f)$ 达到最大值, 则根据 Schiffer, M. 和 Schober, G. 的定理[1] 知当 $|z|<1$ 时, f 适合微分方程

$$\left|\frac{f_{\bar z}}{f_z}-c\right|=k \quad 及 \quad -e^{i\theta}\left(\frac{f_{\bar z}}{f_z}-c\right)\left[L\left(\frac{1}{f(\zeta)-f(z)}\right)\right]^2(f_z)^2\geqslant0,\ \text{a. e.} \tag{8}$$

解之得

$$f_{\bar z}=cf_z-ke^{-i\theta}\frac{|L|^2}{L^2}\bar f_z, \tag{9}$$

其中 $L=L\left(\dfrac{1}{f(\zeta)-f(z)}\right)$ 是关于 ζ 取泛函的.

根据 $H'(|z|>1)$ 的表示定理[2], 存在数 $\rho>1$ 及 $|z|\leqslant\rho$ 中的解析函数 $l(z)$, 使对一切 $g\in H(|z|>1)$ 有 $L(g)=\int_{|\zeta|=\rho}g(\zeta)l(\zeta)d\zeta$. 故

$$L\left(\frac{1}{f-w}\right)=\int_{|\zeta|=\rho}\frac{1}{f(\zeta)-w}l(\zeta)d\zeta, \tag{10}$$

所以 $L\left(\dfrac{1}{f-w}\right)$ 是闭曲线 $\Gamma=f(|z|=\rho)$ 内关于 w 的解析函数.

设
$$J(w)=\int^w L\left(\frac{1}{f-w}\right)dw$$

是 $L\left(\dfrac{1}{f-w}\right)$ 的任意一个不定积分, 则 J 在 Γ 内关于 w 解析, 且有 $J_w=L\left(\dfrac{1}{f-w}\right)$. 令

$$I(\eta)=e^{i\theta}J\circ f(\eta-b\bar\eta)+a\overline{J\circ f(\eta-b\bar\eta)},$$

其中常数 a 和 b 的选取要使得 $I(\eta)$ 在椭圆 $|\eta-b\bar\eta|<1$ 的内部成为 η 的解析函数. 根据(9)式, 计算可得

$$I_{\bar\eta}=e^{i\theta}Lf_z(c-b+abk)+\bar L\bar f_z(a-ab\bar c-k).$$

故 a, b 必须满足方程 $abk+c-b=0$ 及 $ab\bar{c}+k-a=0$. 当 $c=0$ 时, 取 $b=0$; 当 $k=0$ 时, 取 $a=0$; 其它情况选取

$$a=\frac{1}{2k}[1+k^2-|c|^2-\sqrt{(1+k^2-|c|^2)^2-4k^2}],$$

$$b=\frac{1}{2c}[1-k^2+|c|^2-\sqrt{(1-k^2+|c|^2)^2-4|c|^2}],$$

那末对任何非负整数 m 有

$$\int_{|\eta-b\bar{\eta}|=1} I(\eta)\eta^m d\eta=0.$$

设 $z=\eta-b\bar{\eta}$, 在 $|z|=1$ 上有 $\eta=\dfrac{z+b\bar{z}}{1-|b|^2}=\dfrac{z+\dfrac{b}{z}}{1-|b|^2}$, $d\eta=\dfrac{\left(1-\dfrac{b}{z^2}\right)dz}{1-|b|^2}$, 故得

$$\int_{|z|=1}\left\{e^{i\theta}J\circ f(z)+a\overline{J\circ f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}\right\}\left(z+\frac{b}{z}\right)^m\left(1-\frac{b}{z^2}\right)dz=0, \tag{11}$$

由(10)知 $J\circ f(z)$ 在圆环 $1<|z|<\rho$ 中解析, 设其罗朗展开式为

$$J\circ f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n z^n.$$

因 $J\circ f(z)$ 在 $|z|=1$ 上连续, 所以可把其展开式代入(11)中去逐项积分.

当 $m=0$ 时得

$$\int_{|z|=1}\left\{e^{i\theta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n z^n+a\sum_{n=-\infty}^{\infty}\bar{a}_n\frac{1}{z^n}\right\}\left(1-\frac{b}{z^2}\right)dz=0.$$

这给出
$$e^{i\theta}(a_{-1}-a_1 b)+a(\bar{a}_1-b\bar{a}_{-1})=0.$$

解之得
$$e^{i\theta}a_{-1}=\frac{-a\bar{a}_1(1-|b^2|)+e^{i\theta}a_1 b(1-|a|^2)}{1-|a^2b^2|}=-k\bar{a}_1+ce^{i\theta}a_1.$$

当 $m=1$ 时得

$$\int_{|z|=1}\left\{e^{i\theta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n z^n+a\sum_{n=-\infty}^{\infty}\bar{a}_n\frac{1}{z^n}\right\}\left(z-\frac{b^2}{z^3}\right)dz=0,$$

这给出
$$e^{i\theta}(a_{-2}-a_2b^2)+a(\bar{a}_2-b^2\bar{a}_{-2})=0,$$

解之得
$$e^{i\theta}a_{-2}=\frac{-a\bar{a}_2(1-|b|^4)+e^{i\theta}a_2b^2(1-|a|^2)}{1-|a^2b^4|}.$$

由归纳法易知对任何正整数 m 有

$$\int_{|z|=1}\left\{e^{i\theta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n z^n+a\sum_{n=-\infty}^{\infty}\bar{a}_n\frac{1}{z^n}\right\}\left(z^{m-1}-\frac{b^m}{z^{m+1}}\right)dz=0.$$

这给出
$$e^{i\theta}(a_{-m}-a_m b^m)+a(\bar{a}_m-b^m\bar{a}_{-m})=0,$$

解之得
$$e^{i\theta}a_{-2}=\frac{-a\bar{a}_m(1-|b|^{2m})+e^{i\theta}a_m b^m(1-|a|^2)}{1-|a^2b^{2m}|}.$$

如设
$$\alpha_n=\frac{(1-|b|^{2n})(1-|a^2b^2|)}{(1-|b|^2)(1-|a^2b^{2n}|)},\quad \beta_n=-\frac{b^{n-1}(1-|a^2b^2|)}{1-|a^2b^{2n}|},$$

则对于 $n=1, 2, 3, \cdots$ 有

$$e^{i\theta}a_{-n}=-k\alpha_n\bar{a}_n-ce^{i\theta}\beta_n a_n, \tag{12}$$

而
$$J(w)=\int^w\left[\int_{|\zeta|=\rho}\frac{1}{f(\zeta)-w}l(\zeta)d\zeta\right]dw=-\int_{|\zeta|=\rho}[\log(f(\zeta)-w)]l(\zeta)d\zeta$$
$$=-L[\log(f(\zeta)-w)].$$

故当 $1<|z|<\rho$ 时

$$J\circ f(z)=-L[\log(f(\zeta)-f(z)]=-L\left[\log\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}+\log\zeta+\log\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)\right]$$

$$=-L\left[\log\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\right]-L(\log\zeta)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L\left(\frac{1}{\zeta^n}\right)}{n}z^n.$$

比较 $J\circ f(z)$ 的罗朗展开式得

$$L\left[\log\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\right]=-\sum_{n=-\infty}^{-1}a_nz^n$$

及 $n>0$ 时

$$a_n=\frac{L\left(\frac{1}{\zeta^n}\right)}{n},$$

那末

$$\begin{aligned}e^{i\theta}L^2\left[\log\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\right]&=e^{i\theta}L\left[-\sum_{n=-\infty}^{-1}a_nz^n\right]=-L\left[\sum_{n=1}^{\infty}e^{i\theta}a_{-n}\frac{1}{z^n}\right]\\&=L\left[\sum_{n=1}^{\infty}(k\alpha_n\bar{a}_n+ce^{i\theta}\beta_na_n)\frac{1}{z^n}\right]\\&=k|L|^2\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n}(z\bar{\zeta})^{-n}\right]+ce^{i\theta}L^2\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n}{n}(z\zeta)^{-n}\right].\end{aligned}\tag{13}$$

所以对任意的 $f\in\Sigma'(B)$ 成立着

$$\mathrm{Re}\left\{e^{i\theta}L^2\left[\log\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\right]\right\}$$
$$\leqslant k|L|^2\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n}(z\bar{\zeta})^{-n}\right]+\mathrm{Re}\left\{ce^{i\theta}L^2\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n}{n}(z\zeta)^{-n}\right]\right\}.$$

由 θ 的任意性即推出(2). 证毕.

取 L 为特殊的泛函便得到如下的几个推论:

推论 1 设 $f\in\Sigma'(B)$, 则对任何 $|z|>1$ 有

$$\left|\log f'(z)-c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n}{n}z^{-2n}\right|\leqslant k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n}|z|^{-2n}.\tag{14}$$

推论 2 设 $f\in\Sigma'(B)$, 则对任何 $|z|>1$ 有

$$\left|\{f,z\}-6c\sum_{n=1}^{\infty}n\beta_nz^{-2n-2}\right|\leqslant 6k\sum_{n=1}^{\infty}n\alpha_n|z|^{-2n-2}.\tag{15}$$

推论 3 设 $f\in\Sigma'(B)$ 有 Grunsky 阵 $[\gamma_{mn}]$, 它由下式

$$\log\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}=\sum_{m,n=1}^{\infty}\gamma_{mn}z^{-m}\zeta^{-n},\ |z|>1,\ |\zeta|>1$$

所定义. 则对任何复数列 $\{x_n\}$, 只要 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|x_n|}<1$, 就有

$$\left|\sum_{m,n=1}^{\infty}\gamma_{mn}x_mx_n-c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n}{n}x_n^2\right|\leqslant k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n}|x_n|^2.\tag{16}$$

推论 4 设 $f\in\Sigma'(B)$, $L\in H'(|z|>1)$, l 为复数, 则有

$$\left|L^2\left(\left[\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right]^l\right)\right|\leqslant|L|^2\left[\exp\left\{|l|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k\alpha_n+|c\beta_n|}{n}(z\bar{\zeta})^{-n}\right\}\right].\tag{17}$$

定理 2 的证明：在(16)式中，如我们设

$$y_n = \sqrt{k\alpha_n}\, x_n$$

及

$$\gamma'_{mn} = \begin{cases} \dfrac{\gamma_{mn}}{k\sqrt{\alpha_m\alpha_n}}, & \text{当 } m \neq n \text{ 时;} \\ \dfrac{1}{k\alpha_n}\left(\gamma_{nn} - \dfrac{c\beta_n}{n}\right), & \text{当 } m = n \text{ 时,} \end{cases}$$

便得到

$$\left|\sum_{m,n=1}^{\infty} \gamma'_{mn} y_m y_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |y_n|^2.$$

由 $\{y_n\}$ 的任意性知，对任何正整数 N 有

$$\sum_{n=1}^{N} n \left|\sum_{m=1}^{N} \gamma'_{mn} y_m\right|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} |y_n|^2,$$

取 $y_1 = k,\ y_2 = y_3 = \cdots = y_N = 0$ 便得

$$|b_1 - c|^2 + \sum_{n=2}^{N} \frac{n}{\alpha_n} |b_n|^2 \leqslant k^2,$$

令 $N \to \infty$ 便得到了(3)．　　证毕．

本文是在任福尧同志、何成奇同志指导下完成的，在此谨致谢意．

参 考 文 献

[1] Schiffer, M. and Schober, G., A variation's mathod for general families of quasiconformal mappings, *J. Analyse Math.*, **34** (1978), 240—263.

[2] Schober, G., Univalent Functions-Selected Topics, *Lecture Notes in Math.*, **478** (1975).

ON DISTORTION ESTIMATES FOR GENERAL FAMILIES OF QUASICONFORMAL MAPPINGS

TAN DELIN
(*Fudan University*)

Let $B = \{t: |t-c| \leqslant k\}$, where $c \in \mathbf{C}$ and $k \geqslant 0$ are constants satisfying $|c| + k < 1$. Let $\Sigma'(B)$ be the family of all homeomorphisms $f: \overline{\mathbf{C}} \to \overline{\mathbf{C}}$, whose restriction to $|z| > 1$ belongs to Σ' and has an expansion of form

$$f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}, \quad |z| > 1,$$

and whose complex dilatation $\mu(z)$ assumes valuas in B for almost all z, $|z| < 1$. Schiffer, M. and Schober, G. proved that $\Sigma'(B)$ is a compact family and obtained the estimation $|b_1 - c| \leqslant k$.

In this paper, we futher study the family $\Sigma'(B)$. Let $L \in H'(|z| > 1)$, we have estimated $L^2\left[\log \dfrac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}\right]$ and improved the result of Schiffer, M. and Schober, G. In fact, we have obtained the following theorems:

Theorem 1. If $f\in\Sigma'(B)$, $L\in H'(|z|>1)$, then

$$\left|L^2\left[\log\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right]-cL^2\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n}{n}(z\zeta)^{-n}\right]\right|\leqslant k|L|^2\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n}(z\bar{\zeta})^{-n}\right],$$

where
$$\alpha_n=\frac{(1-|b|^{2n})(1-|a^2b^2|)}{(1-|b|^2)(1-|a^2b^{2n}|)},\quad \beta_n=-\frac{b^{n-1}(1-|ab|^2)}{1-|a^2b^{2n}|},$$

and
$$a=\frac{1}{2k}[1+k^2-|c|^2-\sqrt{(1+k^2-|c|^2)^2-4k^2}],$$

$$b=\frac{1}{2c}[1-k^2+|c|^2-\sqrt{(1-k^2+|c|^2)^2-4|c|^2}],$$

if $k=0$, define $a=0$, and if $c=0$, define $b=0$.

Corollory 1. If $f\in\Sigma'(B)$, then for $|z|>1$,

$$\left|\log f'(z)-c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n}{n}z^{-2n}\right|\leqslant k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n}|z|^{-2n}.$$

Corollory 2. If $f\in\Sigma'(B)$, then for $|z|>1$,

$$\left|\{f,z\}-6c\sum_{n=1}^{\infty}n\beta_n z^{-2n-2}\right|\leqslant 6k\sum_{n=1}^{\infty}n\alpha_n|z|^{-2n-2}.$$

Corollory 3. Let $f\in\Sigma'(B)$ has Grunsky matrix $[\gamma_{mn}]$ generated by

$$\log\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}=\sum_{m,n=1}^{\infty}\gamma_{mn}z^{-m}\zeta^{-n},\quad |z|>1,\quad |\zeta|>1,$$

then for all complex sequences $\{x_n\}$ with $\limsup\limits_{n\to\infty}|x_n|^{\frac{1}{n}}<1$,

$$\left|\sum_{m,n=1}^{\infty}\gamma_{mn}x_m x_n-c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n}{n}x_n^2\right|\leqslant k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n}|x_n|^2.$$

Corollory 4. If $f\in\Sigma'(B)$, $L\in H'(|z|>1)$ and $l\in\mathbf{C}$, then

$$\left|L^2\left[\left(\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right)^l\right]\right|\leqslant|L|^2\left[\exp\left\{|l|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k\alpha_n+|c\beta_n|}{n}(z\bar{\zeta})^{-n}\right\}\right].$$

Theorem 2. If $f\in\Sigma'(B)$, then

$$|b_1-c|^2+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{\alpha_n}|b_n|^2\leqslant k^2.$$