数 学 年 刊
3 (1) 1982

# 方差可能无界的弱相依序列的收敛性

林 正 炎
(杭州大学)

在文 [1] 中我们考虑了平稳 $m$-相依序列在没有方差存在的限制下的中心极限定理. 本文将这一结果推广到函数空间 $D[0, 1]$ 的场合, 并且进一步考虑了更为一般的弱相依序列——满足强混合条件$(\alpha)$的序列——的中心极限定理及其不变原理.

## 一、$m$-相依序列的不变原理

设 $X_1, X_2, \cdots$ 是独立同分布具有零均值、有限正方差 $\sigma^2$ 的随机变量序列. 记

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n,$$

$$Y_n(t, \omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]}(\omega) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1), \tag{1}$$

它是空间 $D[0, 1]$中的随机函数. 我们有

$$Y_n \xrightarrow{\mathscr{D}} W, \tag{2}$$

其中 $W$ 是标准 Wiener 过程. 这就是著名的 Donsker 定理 (见[2; 定理 10.1 和定理 16.1]). 而且它已被拓广到 $\{X_n\}$ 是满足很一般的条件的混合序列的情形[2; 定理 20.1]. 但是在这些定理中对于 $X_n$ 都有方差有限的假设. 我们借助于[1]的结果, 对于平稳 $m$-相依序列, 在没有方差存在的限制下, 证明了上述结论.

在定理的证明过程中, 需要用到下列引理.

**引理 1** 设 $\{\xi_{nk}, k=1, 2, \cdots, k_n; n=1, 2, \cdots\}$ 是无穷小的随机变量组列, 它们在组内相互独立且有共同的分布函数. 如果 $\sum_{k=1}^{k_n} \xi_{nk} \xrightarrow{\mathscr{D}} W(1)$, 则

$$\sum_{k=1}^{[k_n t]} \xi_{nk} \xrightarrow{\mathscr{D}} W(t). \tag{3}$$

证 记 $\xi_{nk}(k=1, 2, \cdots, k_n)$的分布函数为 $F_n(x)$. 由引理的条件可知, [3; §26, 定理 2] 中的两个条件是满足的. 因而有

$$[k_n t] \int_{|x| \geqslant \varepsilon} dF_n(x) \to 0,$$

$$[k_n t] \left\{ \int_{|x| < \varepsilon} x^2 dF_n(x) - \left( \int_{|x| < \varepsilon} x dF_n(x) \right)^2 \right\} \to t.$$

也即

$$[k_n t] \int_{|y| \geqslant \varepsilon/\sqrt{t}} dF_n(\sqrt{t}\, y) \to 0,$$

$$[k_n t] \left\{ \int_{|y| < \varepsilon/\sqrt{t}} y^2 dF_n(\sqrt{t}\, y) - \left( \int_{|y| < \varepsilon/\sqrt{t}} y dF_n(\sqrt{t}\, y) \right)^2 \right\} \to 1.$$

本文 1980 年 3 月 10 日收到, 1980 年 8 月 12 日修改.

再次应用刚才引到的定理，我们有$\sum_{k=1}^{[k_n t]} \xi_{nk}/\sqrt{t} \xrightarrow{\mathscr{D}} W(1)$. 由此即证得(3)式.

**定理 1** 设$\{X_n, n=1, 2, \cdots\}$是平稳$m$-相依序列，$EX_n=0$. 如果它满足条件

(i) $M^2 \int_{|X_1|>M} dP \Big/ \int_{|X_1|<M} X_1^2 dP \to 0 \ (M\to\infty)$;

(ii) $\int_{\{|X_1|<M, |X_i|<M\}} X_1 X_i dP \Big/ \int_{|X_1|<M} X_1^2 dP \to 0 (M\to\infty)$, $i=2, 3, \cdots, m$,

那么存在常数序列$B_n>0$, 若记$W_n(t)=\dfrac{1}{B_n}\sum_{i=1}^{[nt]} X_i$, 则

$$W_n \xrightarrow{\mathscr{D}} W. \tag{4}$$

证 对任意的正整数$n$, 作[1]中的分解：$n=K_N p_{k_N}^{(N)}+K_N j+i$, 其中$K_N$由$n$决定 $(K'_N=K_N-m)$, $p_k^{(N)}$是$k$的函数，$j=0, 1, \cdots, \left[\dfrac{K_{N+1}p_{k_{N+1}}^{(N+1)}-K_N p_{k_N}^{(N)}}{K_N}\right]$, $i=0, 1, \cdots, K_N-1$. 为简单计，记$p=p_{k_N}^{(N)}+j$. 定义

$$Y_i=X_{(i-1)k_N+1}+X_{(i-1)k_N+2}+\cdots+X_{ik_N-m},$$
$$Z_i=X_{ik_N-m+1}+X_{ik_N-m+2}+\cdots+X_{ik_N}, \ i=1, 2, \cdots, p.$$

再记$S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$, 于是可写

$$S_{[nt]}=\sum_{i=1}^{[pt]} Y_i+\sum_{i=1}^{[pt]} Z_i+Z', \tag{5}$$

其中$Z'=X_{[pt]k_N+1}+X_{[pt]k_N+2}+\cdots+X_{[nt]}$. 取$B_n>0$如文[1]所定义．记

$$W'_n(t)=\frac{1}{B_n}\sum_{i=1}^{[pt]} Y_i; \quad W''_n(t)=\frac{1}{B_n}\Big(\sum_{i=1}^{[pt]} Z_i+Z'\Big).$$

于是

$$W_n=W'_n+W''_n. \tag{6}$$

首先考虑$W''_n$. 对其中的第一项，我们把它写成$\dfrac{B_p^{(m)}}{B_n}\dfrac{1}{B_p^{(m)}}\sum_{i=1}^{[pt]} Z_i$, 其中$B_p^{(m)}$由[1]中(9)式定义．据引理1, $\dfrac{1}{B_p^{(m)}}\sum_{i=1}^{[pt]} Z_i \xrightarrow{\mathscr{D}} \sqrt{t}\,W(1)$. 而由[1]中的(16)及$n$与$K_N$、$p=p_{k_N}^{(N)}+j$等的关系，又有$\dfrac{B_p^{(m)}}{B_n}\to 0$. 于是对$t$一致地有$\dfrac{1}{B_n}\sum_{i=1}^{[pt]} Z_i \xrightarrow{P} 0$. 对$W''_n$中的第二项，由于$Z'$的被加项的数目是$[nt]-[pt]K_N \leqslant nt-(pt-1)K_N=(n-pK_N)t+K_N<(t+1)K_N \leqslant 2K_N$, 所以仿照[1]中(18)式的论证，对充分大的$n$

$$E\left|\frac{1}{B_n}Z'\right| \leqslant \frac{2K_N}{B_n}E|X_1| \leqslant \frac{2m^{\frac{1}{2}}}{K_N^{\frac{1}{2}}B_p^{(m)}}E|X_1| \to 0.$$

这样就证明了

$$W''_n \xrightarrow{P} 0. \tag{7}$$

由[2; 定理4.1], 为证(4)我们只需证明

$$W'_n \xrightarrow{\mathscr{D}} W \tag{8}$$

就够了．

先来讨论$W'_n$的有限维分布．对于一维情形，由于$K_N$和$p$的取法，我们有$W'_n(1)=\dfrac{1}{B_n}\sum_{i=1}^{p} Y_i \xrightarrow{\mathscr{D}} W(1)$; 据引理1, 进而又有$W'_n(t)\xrightarrow{\mathscr{D}} W(t)$. 对于二维情形，需要证明：对

$0\leqslant s<t\leqslant 1$, $(W'_n(s), W'_n(t))\xrightarrow{\mathscr{D}}(W(s), W(t))$. 而这等价于证明 $(W'_n(s), W'_n(t)-W'_n(s))\xrightarrow{\mathscr{D}}(W(s), W(t)-W(s))$. 注意到 $Y_i$ 间的独立性, 后者是一维情形的直接结果. 对于一般的多维情形, 可完全类似地处理. 这就证明了有限维分布的收敛性.

为证(8), 还需证明 $W''_n$ 是紧的. 由[2; 定理 15.5], 只须证明: 对任意的正数 $\varepsilon$ 和 $\eta$, 存在 $\delta$, $0<\delta<1$, 和正整数 $n_0$, 使当 $n\geqslant n_0$ 时有

$$P(w(W'_n, \delta)\geqslant\varepsilon)\leqslant\eta. \tag{9}$$

再根据[2; 定理 8.3], 为证(9), 又只须证明

$$\frac{1}{\delta}P(\sup_{t\leqslant s\leqslant t+\delta}|W'_n(s)-W'_n(t)|\geqslant\varepsilon)\leqslant\eta. \tag{10}$$

利用 $\{X_n\}$ 的平稳性

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\delta}P(\sup_{t\leqslant s\leqslant t+\delta}|W'_n(s)-W'_n(t)|\geqslant\varepsilon)\\&=\frac{1}{\delta}P\Big(\max_{[pt]<j\leqslant[p(t+\delta)]}\frac{1}{B_n}\Big|\sum_{i=[pt]+1}^{j}Y_i\Big|\geqslant\varepsilon\Big)\leqslant\frac{1}{\delta}P\Big(\max_{1\leqslant j\leqslant 2p\delta}\frac{1}{B_n}\Big|\sum_{i=1}^{j}Y_i\Big|\geqslant\varepsilon\Big).\end{aligned} \tag{11}$$

由[1]中的结果和本文的引理 1

$$\begin{aligned}\frac{1}{\delta}P\Big(\frac{1}{B_n}\Big|\sum_{i=1}^{2p\delta}Y_i\Big|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\Big)&\to\frac{1}{\delta}P\Big(|W(2\delta)|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\Big)\\&=\frac{1}{\delta}P\Big(|W(1)|\geqslant\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2\delta}}\Big)\leqslant\frac{16\sqrt{2}}{\varepsilon^3}\sqrt{\delta}E|W(1)|^3.\end{aligned}$$

取 $\delta>0$ 适当小, 即可使上式右端小于 $\frac{\eta}{4}$, 从而存在 $n_0$, 使当 $n\geqslant n_0$ 时

$$\frac{1}{\delta}P\Big(\frac{1}{B_n}\Big|\sum_{i=1}^{2p\delta}Y_i\Big|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\Big)<\frac{\eta}{2}.$$

因此如果我们能证明当 $n$ 充分大时, 对任意的 $1\leqslant j\leqslant 2p\delta$, 都有

$$P\Big(\frac{1}{B_n}\Big|\sum_{i=1}^{j}Y_i\Big|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\Big)\geqslant\frac{1}{2}, \tag{12}$$

则由 Ottaviani 不等式[6]

$$\frac{1}{\delta}P\Big(\max_{1\leqslant j\leqslant 2p\delta}\frac{1}{B_n}\Big|\sum_{i=1}^{j}Y_i\Big|\geqslant\varepsilon\Big)\leqslant\frac{2}{\delta}P\Big(\frac{1}{B_n}\Big|\sum_{i=1}^{2p\delta}Y_i\Big|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\Big)<\eta.$$

由(11)即知(10)式成立.

下面来证明(12). 先考虑 $j\leqslant p^a$, $0<a<\frac{1}{2}$. 由[1]之(14)等式

$$B_n^2=B_p^{(k_N)^2}\geqslant\frac{K'_N}{2m}B_p^{(m)^2}.$$

又据[4; 定理 2.1.1]有表示式 $B_p^{(m)^2}=ph^{(m)}(p)$, 其中 $h^{(m)}(x)$ 是缓变函数. 由缓变函数的性质[4; 504 页]可得, 对任给的 $\beta>0$, 存在 $n_1$, 当 $n\geqslant n_1$ 时

$$B_n^2\geqslant\frac{K'_N}{2m}ph^{(m)}(p)\geqslant\frac{K'_N}{2m}p^{1-\beta}. \tag{13}$$

不妨取 $\beta<1-2a$. 于是当 $n\geqslant n_1$ 时

$$P\Big(\frac{1}{B_n}\Big|\sum_{i=1}^{j}Y_i\Big|>\frac{\varepsilon}{2}\Big)\leqslant\frac{2jK'_N}{\varepsilon B_n}E|X_1|\leqslant\frac{2\sqrt{2m}\,p^aK'_N}{\varepsilon k_N'^{\frac{1}{2}}p^{\frac{1-\beta}{2}}}=\frac{2\sqrt{2m}}{\varepsilon}p^{a-\frac{1}{2}+\frac{\beta}{2}}k_N'^{\frac{1}{2}}. \tag{14}$$

由于我们总可以通过增大函数 $p_k^{(N)}=p^{(N)}(k)$ 取值的办法使得 $p_{K_N'}^{(N)}\geqslant k_N^{2/(1-2\alpha-\beta)}$，所以

$$P\left(\frac{1}{B_n}\left|\sum_{i=1}^{j}Y_i\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right)\to 0. \tag{15}$$

也即当 $j\leqslant p^\alpha$ 时(12)成立.

对 $p^\alpha<j\leqslant 2p\delta$，我们有

$$P\left(\frac{1}{B_n}\left|\sum_{i=1}^{j}Y_i\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right)=P\left(\left|\frac{1}{B_j^{(K_N')}}\sum_{i=1}^{j}Y_i\right|>\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{B_n}{B_j^{(K_N')}}\right). \tag{16}$$

增大函数 $p_k^{(N)}$ 的取值(例如，取新的 $p_k^{(N)}$ 为上面选定的 $p_k^{(N)}$ 的 $\frac{1}{\alpha}$ 次幂)，使得

$$\frac{1}{B_{[p^\alpha]}^{(K_N')}}\sum_{i=1}^{[p^\alpha]}Y_i\xrightarrow{\mathscr{D}}W(1).$$

从而对 $j>p^\alpha$，进一步有

$$\frac{1}{B_j^{(K_N')}}\sum_{i=1}^{j}Y_i\xrightarrow{\mathscr{D}}W(1). \tag{17}$$

另一方面，再次应用[4; 定理 2.1.1]，有表示式 $B_p^{(K_N')}=ph^{(K_N')}(p)$. 因此如果 $\frac{j}{p}\to 0$，则由[5; 引理 1.7]

$$\frac{B_j^{(K_N')}}{B_n}=\frac{B_j^{(K_N')}}{B_p^{(K_N')}}=\frac{jh^{(K_N')}(j)}{ph^{(K_N')}(p)}=\frac{j}{p}\,\frac{h^{(K_N')}\left(\frac{j}{p}p\right)}{h^{(K_N')}(p)}\to 0.$$

如果 $\frac{j}{p}\to\alpha$，$0<\alpha\leqslant 2\delta$，利用缓变函数的性质有

$$\frac{B_j^{(K_N')}}{B_n}=\frac{j}{p}\,\frac{h^{(K_N')}(j)}{h^{(K_N')}\left(\frac{p}{j}j\right)}=\frac{j}{p}\,\frac{h^{(K_N')}(j)}{h^{(K_N')}\left(\left[\frac{1}{\alpha}\right]j\right)}\,\frac{h^{(K_N')}\left(\left[\frac{1}{\alpha}\right]j\right)}{h^{(K_N')}\left(\frac{p}{j}j\right)}\to\alpha.$$

因此存在 $n_2$，当 $n\geqslant n_2$ 时，$\frac{B_n}{B_j^{(K_N')}}\geqslant\frac{1}{3\delta}$. 取 $\delta$ 如此小，使得 $P\left(|W(1)|\geqslant\frac{\varepsilon}{6\delta}\right)<\frac{1}{4}$. 回顾(16)、(17)等式，即知存在 $n_3>n_2$，当 $n\geqslant n_3$ 时，对 $p^\alpha<j\leqslant 2p\delta$，(12)式也成立. 从而得证(10).

证毕.

注 当 $\{X_n\}$ 是独立同分布随机变量序列时，条件(ii)自动满足. 因此作为我们的定理的特例，对独立同分布随机变量序列，只要满足条件(i)，定理的结论就成立. 显然它还是必要的. 这一结果可以看作是 Donsker 定理在没有方差存在这一限制时的推广.

## 二、强混合序列的中心极限定理

考虑较 $m$-相依更为一般的弱相依条件. 常见的限制有强混合条件($\alpha$)，一致强混合条件($\varphi$)和极大相关条件($\rho$). 我们的定理是在较弱的强混合条件($\alpha$)下给出的:

$$(\alpha):\quad \sup_{A\in\mathfrak{M}_{-\infty}^{k},\,B\in\mathfrak{M}_{k+n}^{\infty}}|P(AB)-P(A)P(B)|\leqslant\alpha(n)\downarrow 0,\ n\to\infty,$$

其中 $\mathfrak{M}_a^b$ 表示由 $\{X_n,\ a\leqslant n\leqslant b\}$ 产生的 $\sigma$-代数. 关于这类过程的中心极限定理和不变原理，通常都需要方差有界的假设(参见 [4, 2]).

记 $X_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$ 共同的分布函数为 $F_1(x)$. 假设它属于正态分布的吸引场. 由

[3; §26, 定理 4], 存在常数列 $C_n\uparrow\infty$, 使得

$$n\int_{|X_1|\geq C_n} dP\to 0, \tag{18}$$

$$\frac{n}{C_n^2}\left\{\int_{|X_1|<C_n} X_1^2 dP-\left(\int_{|X_1|<C_n} X_1 dP\right)^2\right\}\to\infty. \tag{19}$$

在方差无界的假设下, 如[3; §35, 定理 1]的证明中所指出的, (19)又等价于

$$\frac{n}{C_n^2}\int_{|X_1|<C_n} X_1^2 dP\to\infty.$$

由于部分证明过程仿照文[1], 所以我们着重说明与它不同的部分, 相同之处只略述其梗概.

**定理 2** 设 $\{X_n, n=1, 2, \cdots\}$ 是满足强混合条件 ($\alpha$) 的平稳随机序列, $EX_n=0$. 假设:

(i) 存在满足下列条件的正整值函数 $p(n)=p, q(n)=q, k(n)=\left[\frac{n}{p+q}\right]$: 当 $n\to\infty$ 时

$$p=o(n),\ q=o(p),\ k\alpha(q)\to 0;$$

对它们存在常数序列 $C_n\uparrow\infty$, 成立

$$k\int_{|X_1|>C_k} dP=o\left(\frac{1}{p}\right), \tag{20}$$

$$\frac{C_k^2}{k\int_{|X_1|<C_k} X_1^2 dP}=o\left(\frac{1}{p}\right). \tag{21}$$

(ii) 记 $r(k)=q(n)$, 关于 $i\leqslant r(M^2)$ 一致地成立

$$\int_{(|X_1|<M, |X_i|<M)} X_1 X_i dP\Big/\int_{|X_1|<M} X_1^2 dP\to 0\ \ (M\to\infty),$$

那么, $\{X_n\}$ 服从中心极限定理.

证 由[4; 定理 17.2.1], 我们有

$$\left|\int_{(|X_1|<M, |X_i|<M)} X_1 X_i dP\right|\leqslant (EX_1 I_{(|X_1|<M)})^2+4M^2\alpha(i-1).$$

注意到 $EX_1=0$, 上式右端第一项当 $M\to\infty$ 时趋于 0. 再由 $k\alpha(q)\to 0$, 对 $i>r(M^2)$, 上式右端第二项当 $M\to\infty$ 时关于 $i$ 一致地趋于 0. 因此(ii)中的极限关系对于 $i=2, 3, \cdots$ 是一致地成立的.

对定理中的 $p$、$q$ 和 $k$, 记

$$\xi_j=\sum_{i=jp+jq+1}^{(j+1)p+jq} X_i,\quad \eta_j=\sum_{i=(j+1)p+jq+1}^{(j+1)p+(j+1)q} X_i\ \ (j=0, 1, \cdots, k-1),$$

$$\eta_k=\sum_{i=k(p+q)+1}^{n} X_i.$$

由(20)、(21)可得

$$C_k^2\int_{|X_1|>C_k} dP\Big/\int_{|X_1|\leq C_k} X_1^2 dP=o\left(\frac{1}{p^2}\right), \tag{22}$$

结合条件(ii), 类似于[1]中推得的(6)、(7)两式, 我们有

$$\int_{|\xi_0|<pC_k}\xi_0^2 dP=(1+o(1))p\int_{|X_1|<C_k} X_1^2 dP, \tag{23}$$

$$\int_{|\xi_0|>pC_k} dP \leqslant p\int_{|X_1|>C_k} dP. \tag{24}$$

再利用(21)和(20),得到

$$\frac{k}{(pC_k)^2}\int_{|\xi_0|<pC_k} \xi_0^2 dP \to \infty, \tag{25}$$

$$k\int_{|\xi_0|>pC_k} dP \to 0. \tag{26}$$

由(23), $\int_{|\xi_0|<pC_k} \xi_0^2 dP \to \infty$, 仿照[3; §35, 定理1]中的证明,我们有

$$\left(\int_{|\xi_0|<pC_k} \xi_0 dP\right)^2 = o\left(\int_{|\xi_0|<pC_k} \xi_0^2 dP\right).$$

因此(25)等价于

$$\frac{k}{(pC_k)^2}\left\{\int_{|\xi_0|<pC_k} \xi_0^2 dP - \left(\int_{|\xi_0|<pC_k} \xi_0 dP\right)^2\right\} \to \infty. \tag{27}$$

假设 $\xi'_j$, $j=0, 1, \cdots, k-1$ 是相互独立且与 $\xi_0$ 有相同分布的随机变量, 随着 $n$ 的变化, 它们构成一随机变量组列. 由于详细考察[3; §26, 定理4]的证明过程可以发现, 该定理讨论的独立随机变量序列 $\{\xi_n\}$ 换作组内独立的随机变量组列 $\{\xi_{nk}, k=1, \cdots, k_n; n=1, 2, \cdots\}$ 后该定理仍然成立,因此从(26)、(27)两式即知,存在常数序列 $B_k^{(p)}>0$, 使

$$\frac{1}{B_k^{(p)}}\sum_{j=0}^{k-1}\xi'_j \xrightarrow{\mathscr{D}} N(0, 1), \tag{28}$$

而且可取

$$B_k^{(p)2} = k\left\{\int_{|\xi_0|<pC_k} \xi_0^2 dP - \left(\int_{|\xi_0|<pC_k} \xi_0 dP\right)^2\right\} = (1+o(1))k\int_{|\xi_0|<pC_k} \xi_0^2 dP.$$

由(23)又有

$$B_k^{(p)2} = (1+o(1))kp\int_{|X_1|<C_k} X_1^2 dP. \tag{29}$$

在条件($\alpha$)下,仍由[4; 定理17.2.1],成立着

$$\begin{aligned}&\left|E\exp\left[it\left(\frac{1}{B_k^{(p)}}\sum_{j=0}^{k-1}\xi_j\right)\right] - E\exp\left[it\left(\frac{1}{B_k^{(p)}}\sum_{j=0}^{k-1}\xi'_j\right)\right]\right| \\ &= \left|E\exp\left[it\left(\frac{1}{B_k^{(p)}}\sum_{j=0}^{k-1}\xi_j\right)\right] - \prod_{j=0}^{k-1} E\exp\left[it\left(\frac{1}{B_k^{(p)}}\xi_j\right)\right]\right| \leqslant 4(k-1)\alpha(q) \to 0.\end{aligned} \tag{30}$$

因此

$$\frac{1}{B_k^{(p)}}\sum_{j=0}^{k-1}\xi_j \xrightarrow{\mathscr{D}} N(0, 1). \tag{31}$$

注意到 $q=o(p)$, 所以若将(20)、(21)两式中的 $p$ 换作 $q$ 后, 它们仍然成立. 重复刚才的论证,又有常数序列 $B_k^{(q)}>0$, 使得

$$\frac{1}{B_k^{(q)}}\sum_{j=1}^{k-1}\eta_j \xrightarrow{\mathscr{D}} N(0, 1).$$

类似于(29),又有 $B_k^{(q)2} = (1+o(1))kq\int_{|X_1|<C_k} X_1^2 dP$. 因此

$$\left(\frac{B_k^{(q)}}{B_k^{(p)}}\right)^2 = (1+o(1))\frac{q}{p} \to 0. \tag{32}$$

从而

$$\frac{1}{B_k^{(p)}}\sum_{j=0}^{k-1}\eta_j=\frac{B_k^{(q)}}{B_k^{(p)}}\frac{1}{B_k^{(q)}}\sum_{j=0}^{k-1}\eta_j\xrightarrow{P}0. \tag{33}$$

进一步考虑 $\frac{1}{B_k^{(p)}}\eta_k$. 因为 $n-k(p+q)\leqslant p+q$, 所以对任意 $\varepsilon>0$, 利用(29)和(21),

$$P\left(\left|\frac{1}{B_k^{(p)}}\eta_k\right|>\varepsilon\right)\leqslant\frac{(p+q)E|X_1|}{\varepsilon B_k^{(p)}}\leqslant\frac{2pE|X_1|}{\varepsilon\left(kp\int_{|X_1|<C_k}X_1^2dP\right)^{1/2}}=\frac{o(1)}{C_k}\to0. \tag{34}$$

记 $B_n=B_k^{(p)}$, 综合(31)、(33)、(34)诸式, 即得

$$\frac{1}{B_n}\sum_{j=1}^{n}X_j\xrightarrow{\mathscr{D}}N(0,1).$$

证毕.

## 三、强混合序列的不变原理

**引理 2**(拓广的 Ottaviani 不等式)　设 $Y_j(j=0,1,\cdots,k-1)$ 关于 $\mathfrak{M}_{jp+jq+1}^{(j+1)p+jq}$ 可测, 若

$$P(|Y_{l+1}+\cdots+Y_{k-1}|\leqslant C)\geqslant\frac{1}{2}\quad(l=0,1,\cdots,k-2),$$

则

$$P(\max_{0\leqslant l\leqslant k-1}|Y_0+\cdots+Y_l|>2C)\leqslant2P(|Y_0+\cdots+Y_{k-1}|>C)+2k\alpha(q)$$

证　记事件

$$A=\{\max_{0\leqslant l\leqslant k-1}|Y_0+\cdots+Y_l|>2C\},\ B=\{|Y_0+\cdots+Y_{k-1}|>C\},$$

$$A_l=\{\max_{0\leqslant r\leqslant l-1}|Y_0+\cdots+Y_r|\leqslant2C;\ |Y_0+\cdots+Y_l|>2C\}\ (0\leqslant l\leqslant k-1),$$

$$B_l=\{|Y_{l+1}+\cdots+Y_{k-1}|\leqslant C\}\quad(0\leqslant l\leqslant k-2),$$

则

$$A_iA_j=\emptyset(i\neq j),\ A=\bigcup_{l=0}^{k-1}A_l,$$

$$\bigcup_{l=0}^{k-1}A_lB_l\subseteq B(\text{其中 }B_{k-1}\text{ 表样本空间}).$$

因 $A_l\in\mathfrak{M}_{-\infty}^{(l+1)p+lq}$, $B_l\in\mathfrak{M}_{(l+1)(p+q)+1}^{\infty}$, 所以由条件($\alpha$)

$$P(A_lB_l)\geqslant P(A_l)P(B_l)-\alpha(q)\geqslant\frac{1}{2}P(A_l)-\alpha(q),$$

进一步

$$P(B)\geqslant\sum_{l=0}^{k-1}P(A_lB_l)\geqslant\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{k-1}P(A_l)-k\alpha(q)=\frac{1}{2}P(A)-k\alpha(q).$$

即

$$P(A)\leqslant2P(B)+2k\alpha(q).$$

**定理 3**　假设平稳序列 $\{X_n, n=1,2,\cdots\}$ 满足定理 2 的条件, 而且其中选定的正整值函数 $p(n)=p$, $k(n)=k$ 还满足: 存在常数 $a>0$, 使得 $p\leqslant k^a$, 且 $k^{2+a}\alpha(q)\to0$, 那么存在常数序列 $B_n>0$, 若记 $W_n(t)=\frac{1}{B_n}\sum_{j=1}^{[nt]}X_j$, 就有

$$W_n\xrightarrow{\mathscr{D}}W.$$

证　记 $k_a=[k^{2+a}]$. 对任意的正整数 $N$, 有 $n$, 使 $k_a(p+q)\leqslant N<(k_a+1)(p+q)$. $\xi_j$ 和 $\eta_j$ 如定理 2 所设, 只是扩大它们的足标的范围成 $j=0,1,\cdots,k_a-1$. 回顾(31)的证明

过程易知：在条件 $k_a\alpha(q)\to 0$ 下，存在常数 $B_m^{(p)}>0\,(m=k, k+1, \cdots, k_a)$，使得

$$\frac{1}{B_m^{(p)}}\sum_{j=0}^{m-1}\xi_j\xrightarrow{\mathscr{D}}N(0,1),\tag{35}$$

其中 $B_m^{(p)}$ 是相互独立与 $\xi_0$ 有相同分布的随机变量序列($p$ 看作固定)所对应的正则化系数．如果与该序列对应的[3; §26, 定理 4]中的常数序列记作 $C'_m$(参见(18)、(19))，那么仿照(29)，可写

$$B_m^{(p)2}=(1+o(1))mp\int_{|X_1|<C'_m}X_1^2\,dP.\tag{36}$$

类似地又有

$$\frac{1}{B_{k_a}^{(q)}}\sum_{j=0}^{k_a-1}\eta_j\xrightarrow{\mathscr{D}}N(0,1).\tag{37}$$

定义 $B_N=B_{k_a}^{(p)}$，记

$$S_{[Nt]}=\sum_{j=0}^{[(k_a-1)t]}\xi_j+\sum_{j=0}^{[(k_a-1)t]}\eta_j+\eta_{N,t},$$

其中 $\eta_{N,t}=X_{([(k_a-1)t]+1)(p+q)+1}+\cdots+X_{[Nt]}$，它的被加项的项数

$$[Nt]-([(k_a-1)t]+1)(p+q)<(k_a+1)(p+q)t-(k_a-1)(p+q)t\leqslant 2(p+q).$$

又记

$$W'_N(t)=\frac{1}{B_N}\sum_{j=0}^{[(k_a-1)t]}\xi_j,\quad W''_N(t)=\frac{1}{B_N}\Big(\sum_{j=0}^{[(k_a-1)t]}\eta_j+\eta_{N,t}\Big).$$

由定理 2 的证明过程可知，$\xi_j$ 的正则化和与 $\xi'_j$ (相互独立随机变量)的正则化和(对应同样的正则化系数列)有相同的收敛性(对 $\eta_j$ 也如此)．因此对 $\xi_j$ 和 $\eta_j$ 仍可应用引理1．所以由(35)、(37)有

$$W'_N(t)\xrightarrow{\mathscr{D}}W(t),\tag{38}$$

$$\frac{1}{B_{k_a}^{(q)}}\sum_{j=0}^{[(k_a-1)t]}\eta_j\xrightarrow{\mathscr{D}}W(t).\tag{39}$$

由(39)并利用类似于(32)的结果，可得对 $t$ 一致地成立 $\frac{1}{B_N}\sum_{j=0}^{[(k_a-1)t]}\eta_j\xrightarrow{p}0$；仿照(34)又有 $\frac{1}{B_N}\eta_{N,t}\xrightarrow{p}0$ (关于 $t$ 一致)，因此得

$$W''_N\xrightarrow{p}0.\tag{40}$$

于是问题归结为证明

$$W'_N\xrightarrow{\mathscr{D}}W.\tag{41}$$

先考虑 $W'_N$ 的有限维分布．一维分布的收敛性已由(38)给出．对于二维情形，需要证明 $(W'_N(s), W'_N(t)-W'_N(s))\xrightarrow{\mathscr{D}}(W(s), W(t)-W(s))\ (0\leqslant s<t\leqslant 1)$．由[2; 定理 3.1]及 Wiener 过程的性质，只须证明对直线上的任意 Borel 集 $A_1$ 和 $A_2$，

$$P(W'_N(s)\in A_1, W'_N(t)-W'_N(s)\in A_2)\to P(W(s)\in A_1)P(W(t)-W(s)\in A_2).\tag{42}$$

仍由强混合性

$$|P(W'_N(s)\in A_1, W'_N(t)-W'_N(s)\in A_2)-P(W'_N(s)\in A_1)P(W'_N(t)-W'_N(s)\in A_2)|$$
$$\leqslant\alpha(q).$$

所以(42)仍可由一维分布的收敛性得到．对于一般的多维情形，也可完全类似地讨论．

为证 $W'_N$ 的紧性，由拓广的 Ottaviani 不等式，如同定理 1 中所说明的，只须证明：当 $n$ 充分大时，对任意的 $0\leqslant j\leqslant 2k_a\delta$：

$$P\left(\frac{1}{B_N}\left|\sum_{i=0}^{j}\xi_i\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right)<\frac{1}{2},$$

此处 $\varepsilon$、$\delta$ 如定理 1 中所给．先考虑 $0\leqslant j\leqslant k$ 的情形．利用(36)并注意到 $p\leqslant k^a$

$$P\left(\frac{1}{B_N}\left|\sum_{i=0}^{j}\xi_i\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right)\leqslant\frac{2jpE|X_1|}{\varepsilon B_N}\leqslant\frac{2kpE|X_1|}{\varepsilon\left(k_ap\int_{|X_1|<Ck_a}X_1^2dP\right)^{1/2}}\to 0.$$

而当 $k<j\leqslant 2k_a\delta$ 时，由于 $B_m^{(p)}$(当 $p$ 看作固定时)是独立同分布随机变量序列的正则化系数，所以可表成

$$B_m^{(p)*}=mh^{(p)}(m),$$

其中 $h^{(p)}(x)$ 是缓变函数．余下的证明可仿照定理 1 的证明的最后部分进行．

## 参考文献


[1] 林正炎，一类弱相依序列的极限定理，数学年刊，**2**:2 (1981), 181—186.
[2] Billingsley, P., Convergence of probability measures, Wiley, New York, 1968.
[3] Гнеденко, Б. В., Колмогоров, А. Н., 相互独立随机变数之和的极限分布(王寿仁译), 1949.
[4] Ибрагимов, И. А., Линник, Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, *ИЗД-ВО «Наука»*, *М.*, 1965.
[5] Ибрагимов, И. А., Теор. вероятн. и ее примен., **7**:4 (1962), 361—392.
[6] 伊藤清，随机过程(中译本，刘璋温译)，1961.


# CONVERGENCE OF WEAKLY DEPENDENT SEQUENCES WITH POSSIBLY UNBOUNDED VARIANCES


LIN ZHENGYAN

(*Hangzhou University*)


## ABSTRACT


The paper first generalizes the result in [1] to space D [0, 1]:

**Theorem 1.** Let $\{X_n,\ n\geqslant 1\}$ be a sequence of stationary $m$-dependent random variables with means zero. Suppose that the following conditions are satisfied:

(i) $M^2\int_{|X_1|>M}dP\Big/\int_{|X_1|<M}X_1^2dP\to 0\ \ (M\to\infty)$;

(ii) $\int_{\{|X_1|<M,|X_i|<M\}}X_1X_idP\Big/\int_{|X_1|<M}X_1^2dP\to 0\ \ (M\to\infty)$,

then there exist constants $B_n>0$, such that

$$W_n\xrightarrow{\mathscr{D}}W,$$

where $W_n(t)=\frac{1}{B_n}\sum_{j=1}^{[nt]}X_j$, and $W$ is the standard Wiener process in $D[0,\ 1]$.

Next, we consider the central limit theorem and invariance principle for stationary mixing sequence. We have succeed in getting rid of the condition of finite variance, a condition generally imposed upon in the past.

**Theorem 2.** Let $\{X_n, n\geqslant 1\}$ be a stationary sequence satisfying the strong mixing condition $(\alpha)$, and $EX_n=0$. Suppose that

(i) There exist functions $p(n)=p$, $q(n)=q$, $k(n)=\left[\frac{n}{p+q}\right]$ assuming only positive-integral values, and constants $C_n\uparrow\infty$, such that

$$p=o(n),\ q=o(p),\ k\alpha(q)\to 0,$$

$$k\int_{|X_1|>C_k} dP=o\left(\frac{1}{p}\right),$$

$$\frac{C_k^2}{k\int_{|X_1|<C_k} X_1^2 dP}=o\left(\frac{1}{p}\right)$$

as $n\to\infty$.

(ii) Put $r(k)=q(n)$. Suppose that

$$\int_{(|X_1|<M,\ |X_i|<M)} X_1X_i dP\Big/\int_{|X_1|<M} X_1^2 dP\to 0\ (M\to\infty)$$

hold uniformly for $i\leqslant r(M)$.

Then there are constants $B_n>0$, such that $\frac{1}{B_n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ converges in distribution to $N(0, 1)$.

**Theorem 3.** Suppose that in addition to conditions of theorem 2, the functions $p(n)=p$, $k(n)=k$ mentioned above satisfy the conditions $p\leqslant k^a$ and $k^{2+a}\alpha(q)\to 0$ for some constant $a>0$.

Then there exist constants $B_n>0$ such that

$$W_n\xrightarrow{\mathscr{D}} W,$$

where $W_n(t)=\frac{1}{B_n}\sum_{j=1}^{[nt]} X_j$.