

平面 n 次 Bézier 曲线的凸性定理

刘 鼎 元

(复旦大学数学研究所)

§ 1. 引 言

Bézier 曲线是计算几何中的常用曲线之一, 它是一种以逼近为基础的、适用于几何外形设计的代数参数曲线段, 已经在法国雷诺汽车公司的车身外形设计系统中首先得到成功的应用^[1].

平面上一条 n 次参数曲线段

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) P_i, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (1)$$

称为平面 n 次 Bézier 曲线. 式中向量族 $\{P_i\}$ 的终点组成多边形 $P_0P_1 \cdots P_n$, 是事先给定的, 叫做 Bézier 特征多边形. (1) 式中的

$$\begin{cases} B_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}, \\ C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!} \end{cases} \quad (i=0, 1, \dots, n) \quad (2)$$

是 Bernstein 基函数族.

Bézier 曲线(1)的每一个分量都是 Bernstein 多项式. 由于 Bernstein 多项式逼近具有变差减少性质(VD 性质), 因此人们期望 Bézier 曲线应当具备良好的光顺性, 例如, 当 Bézier 特征多边形为凸时, 对应的 Bézier 曲线必定是凸的. Pilcher, D. 在[3]中讲到他已经证明, 用 B 样条函数逼近一条参数曲线时, 保存了 VD 性质”, 这个结果载于他的博士论文^[7]中, 但是我们一直没有见到这篇文章的发表.

本文的目的在于证明平面 n 次 Bézier 曲线对其特征多边形而言是保凸的. 特别是, 对于三次 Bézier 曲线将作出完整的分类.

§ 2. 预备知识和凸性定理

为了证明定理的需要, 我们预先列出下面六条关于 Bernstein 基函数族 $\{B_{i,n}\}$ 的性质. 而且规定, 凡出现 $B_{-1,n}$, $B_{n,n-1}$, C_{n-1}^n 等无定义的项, 都等于零.

性质 1 $C_n^i C_{n-1}^j - C_n^j C_{n-1}^i = \frac{i-j}{n} C_n^i C_n^j \quad (i, j=0, 1, \dots, n).$

性质 2 $C_n^i C_{n-1}^{j-1} - C_n^j C_{n-1}^{i-1} = \frac{j-i}{n} C_n^i C_n^j \quad (i, j=0, 1, \dots, n).$

本文 1980 年 4 月 22 日收到.

性质 3 $B_{i,n}B_{j,n-1} - B_{j,n}B_{i,n-1} = \frac{i-j}{n(1-t)} B_{i,n}B_{j,n} \quad (i, j=0, 1, \dots, n).$

性质 4 $B_{i,n}B_{j-1,n-1} - B_{j,n}B_{i-1,n-1} = \frac{j-i}{nt} B_{i,n}B_{j,n} \quad (i, j=0, 1, \dots, n).$

性质 5 $B'_{i,n}(t) = n\{B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)\} \quad (i=0, 1, \dots, n).$

性质 6 $\sum_{k=i}^n B_{k,n} \left(\frac{t}{t_0}\right) B_{i,k}(t_0) = B_{i,n}(t), \quad 0 \leq t \leq t_0 \quad (i=0, 1, \dots, n).$

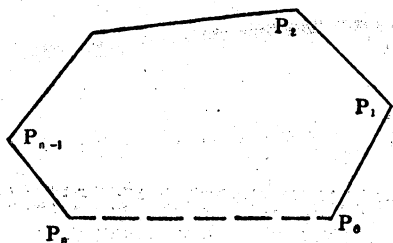


图 1

上述性质的证明方法是直接的. 性质 5 中的撇号代表对参数 t 求导.

以下的讨论都限制在平面上进行, 我们将不再一一说明.

定义 1 若闭多边形 $P_0P_1 \cdots P_n$ 为凸, 则称 Bézier 特征多边形 $P_0P_1 \cdots P_n$ 是凸的(图 1).

图 2 示意了非凸的 Bézier 特征多边形.

定义 2 若 Bézier 曲线上没有奇点和拐点, 则称为凸的 Bézier 曲线.

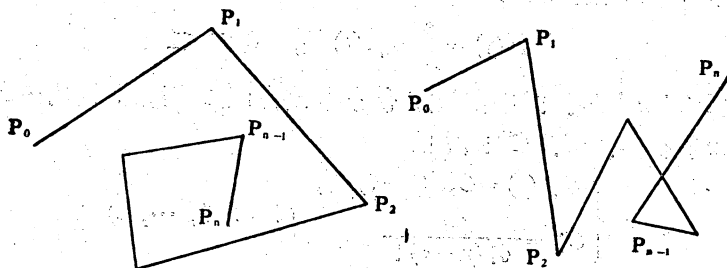


图 2

定理 若 Bézier 特征多边形 $P_0P_1 \cdots P_n$ 为凸, 则对应的 n 次 Bézier 曲线也是凸的.

§ 3. 凸性定理的证明

证 记特征多边形的边向量为

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{i-1} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

我们将分两步来讨论:

I 从 $\mathbf{a}_1$ 到 $\mathbf{a}_n$ 的转角不超过 π (图 3).

这时,

$$[\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j] \geq 0 \quad (i < j; i, j=1, 2, \dots, n),$$

(3)

且其中至少有一项为正. 式中记号 $[\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j]$ 代表向量 $\mathbf{a}_i$ 与 $\mathbf{a}_j$ 的外积, 即 $\mathbf{a}_i$ 与 $\mathbf{a}_j$ 的坐标分量组成的行列式值, 它也等于以 $\mathbf{a}_i$ 和 $\mathbf{a}_j$ 为邻边的平行四边形的有向面积.

首先, 我们检查 Bézier 曲线的拐点情况.

沿用上述记号, n 次 Bézier 曲线(1)的相对曲率

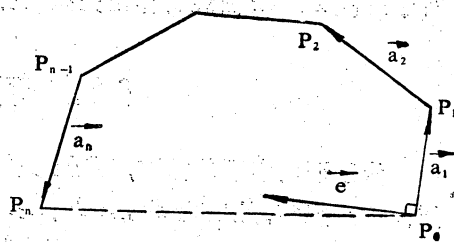


图 3

$$k(t) = \frac{[P'(t), P''(t)]}{|P'(t)|^3}, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (4)$$

由于

$$P'(t) = \sum_{i=0}^n B'_{i,n} P_i = n \sum_{i=1}^n B_{i-1,n-1} a_i, \quad (5)$$

$$P''(t) = n \sum_{j=1}^n B'_{j-1,n-1} a_j = n(n-1) \sum_{j=1}^n (B_{j-2,n-2} - B_{j-1,n-2}) a_j, \quad (6)$$

于是

$$\begin{aligned} [P'(t), P''(t)] &= (n-1)n^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (B_{j-2,n-2} - B_{j-1,n-2}) B_{i-1,n-1} [a_i, a_j] \\ &= (n-1)n^2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \{ (B_{i-1,n-1} B_{j-2,n-2} - B_{i-1,n-1} B_{j-1,n-2}) \\ &\quad - (B_{j-1,n-1} B_{i-2,n-2} - B_{j-1,n-1} B_{i-1,n-2}) \} [a_i, a_j] \\ &= (n-1)n^2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \left\{ \frac{j-i}{(n-1)t} B_{i-1,n-1} B_{j-1,n-1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{i-j}{(n-1)(1-t)} B_{i-1,n-1} B_{j-1,n-1} \right\} [a_i, a_j] \\ &= \frac{n^2}{t(1-t)} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n (j-i) B_{i-1,n-1} B_{j-1,n-1} [a_i, a_j]. \end{aligned} \quad (7)$$

当 $0 < t < 1$ 时, 上式中每项 $[a_i, a_j]$ 的系数都为正. 按照 (3) 式, 便有

$$[P'(t), P''(t)] > 0, \quad 0 < t < 1,$$

这表明 n 次 Bézier 曲线上无拐点.

其次, 我们检查 Bézier 曲线上的奇点情况.

我们把 Bézier 曲线 (1) 写成另外一种等价的表示式^[4]

$$P(t) = \sum_{j=0}^n f_{j,n}(t) a_j, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (8)$$

式中

$$\begin{cases} f_{0,n}(t) = 1, \\ f_{i,n}(t) = 1 - \sum_{j=0}^{i-1} B_{j,n}(t) \quad (i=1, 2, \dots, n), \end{cases}$$

且

$$a_0 = P_0.$$

由于

$$f'_{i,n}(t) = n B_{i-1,n-1}(t) > 0, \quad 0 < t < 1 \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (9)$$

函数族 $\{f_{i,n}(t)\} (i=1, 2, \dots, n)$ 在 $t \in [0, 1]$ 中是严格递增函数.

如所知, Bézier 曲线上如果存在奇点, 只可能是尖点或重点^[4]. 我们将分别加以考察.

1° Bézier 曲线 (1) 上出现尖点的充要条件是^[4] 存在某 $t_0 \in (0, 1)$, 使得

$$P'(t_0) = 0. \quad (10)$$

注意到 (7) 式, 易知这时 Bézier 曲线上不存在尖点.

2° Bézier 曲线 (8) 上出现重点的充要条件是^[4] 存在 $t_1, t_2 \in [0, 1]$, (不妨设 $t_1 < t_2$),

使得

$$P(t_1) = P(t_2).$$

也就是

$$\sum_{i=1}^n F_{i,n}(t_1, t_2) \alpha_i = 0, \quad (11)$$

这里

$$F_{i,n}(t_1, t_2) \equiv f_{i,n}(t_2) - f_{i,n}(t_1) > 0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (12)$$

我们取垂直于 α_1 方向的单位向量 e (见图 4), 并在 (11) 式两边点乘 e , 记

$$\alpha_i = \alpha_i \cdot e \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

便有

$$\sum_{i=1}^n F_{i,n}(t_1, t_2) \alpha_i = 0.$$

另一方面, 从 (12) 式以及 $\alpha_i (i=1, 2, \dots, n)$ 非负且至少有一项为正的性质, 得到

$$\sum_{i=1}^n F_{i,n}(t_1, t_2) \alpha_i > 0.$$

因此 Bézier 曲线上亦无重点出现. 从而证明了在情况 I 之下, Bézier 曲线上既无奇点, 又无拐点.

II 从 α_1 到 α_n 的转角超过 π .

这时, 在 Bézier 曲线上总找得到一点 $t=t_0$, 使得从 α_1 到 $P'(t_0)$ 的转角与从 $P'(t_0)$ 到 α_n 的转角都不超过 π . 从下述将要证明的引理知道, $P(t_0)$ 把曲线分成两段 n 次 Bézier 曲线, 它们分别以 $P_{0,0}P_{0,1}\dots P_{0,n}$ 和 $P_{0,n}P_{1,n-1}\dots P_{n,0}$ 为其特征多边形, 这些多边形顶点是按照 Bézier 曲线的几何作图法以 t_0 为分比逐次得到的^[4] (图 4). 由于 $P_0P_1\dots P_n$ 为凸多边形, 因此 $P_{0,0}P_{0,1}\dots P_{0,n}$ 和 $P_{0,n}P_{1,n-1}\dots P_{n,0}$ 也组成凸多边形, 而且除了 $P_{0,n}$ 外这两个凸多边形互不相交. 于是, 从 I 的结果, 这两段除了 $P_{0,n}$ 外互不相交的 Bézier 曲线上无奇点和拐点, 从而证明原 Bézier 曲线 $P(t)$ 是凸的^[4].

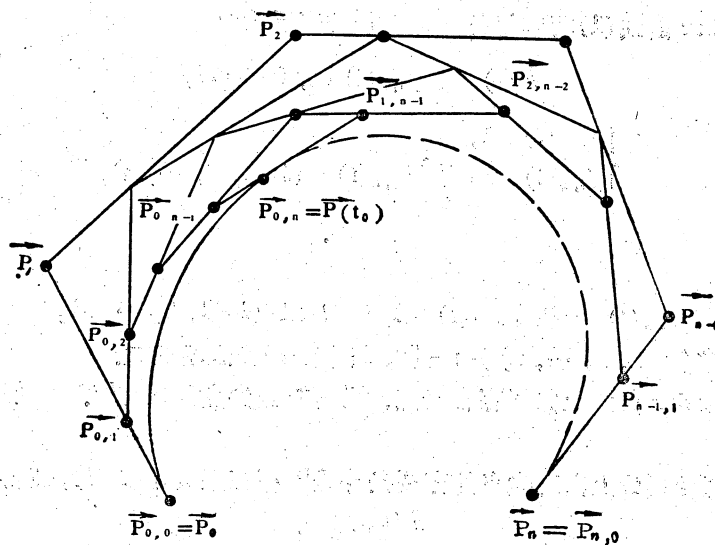


图 4

[注] 由于对区间 $(0, 1)$ 中任意一点 t_0 , 引理总成立, 且 $P_{0,0}P_{0,1}\dots P_{0,n}P_{1,n-1}\dots P_{n,0}$ 是凸多边形, 说明被 $P(t_0)$ 分成的两段曲线都在边 $P_{0,n-1}P_{1,n-1}$ 即 $P'(t_0)$ 的同一侧, 从而可直接证明 Bézier 曲线 $P(t)$ 是凸的.

引理 由特征多边形 $P_0P_1\cdots P_n$ 决定的 n 次 Bézier 曲线 $P(t)$, 对任一 $t_0 \in (0, 1)$, 点 $P(t_0)$ 把曲线分成两段 n 次 Bézier 曲线, 它们分别以 $P_{0,0}P_{0,1}\cdots P_{0,n}$ 和 $P_{0,n}P_{1,n-1}\cdots P_{n,0}$ 为其特征多边形(图 4), 这些多边形顶点是按照 Bézier 曲线的几何作图法以 t_0 为分比递推得到的, 其中^[4]

$$\begin{aligned} P_{0,k} &= \sum_{i=0}^k B_{i,k}(t_0) P_i \\ P_{k,n-k} &= \sum_{i=0}^{n-k} B_{i,n-k}(t_0) P_{i+k}. \end{aligned} \quad (k=0, 1, \dots, n) \quad (13)$$

证 我们只要证明关于前一段曲线(图 4 中的实线)命题成立, 即 $0 \leq t \leq t_0$ 时, 成立

$$P(t) = \sum_{k=0}^n B_{k,n}\left(\frac{t}{t_0}\right) P_{0,k}.$$

而由 Bézier 曲线关于两端点性质的对称性, 关于后一段(图 4 中的虚线)亦然成立, 从而引理得证. 事实上, 从(13)式并注意到 § 2 的性质 6, 上式的右手项为

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n B_{k,n}\left(\frac{t}{t_0}\right) P_{0,k} &= \sum_{k=0}^n B_{k,n}\left(\frac{t}{t_0}\right) \sum_{i=0}^k B_{i,k}(t_0) P_i = \sum_{i=0}^n \left\{ \sum_{k=i}^n B_{k,n}\left(\frac{t}{t_0}\right) B_{i,k}(t_0) \right\} P_i \\ &= \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) P_i = P(t), \quad 0 \leq t \leq t_0. \end{aligned}$$

证毕.

§ 4. 三次 Bézier 曲线的拐点和奇点分布

我们对于 $n=3$ 的场合将从另一方面验证凸性定理, 同时, 还分析一般三次 Bézier 曲线的拐点和奇点分布.

三次 Bézier 曲线方程是

$$P(t) = a_0 + a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + a_3 f_3(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (14)$$

式中已置

$$\begin{cases} f_1(t) = 3t - 3t^2 + t^3, \\ f_2(t) = 3t^2 - 2t^3, \\ f_3(t) = t^3. \end{cases}$$

(14)式又可表示成

$$P(t) = Q_0 + Q_1 t + \frac{1}{2} Q_2 t^2 + \frac{1}{6} Q_3 t^3, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

这里记

$$Q_0 = a_0, \quad Q_1 = 3a_1, \quad Q_2 = 6(-a_1 + a_2), \quad Q_3 = 6(a_1 - 2a_2 + a_3).$$

从此易得仿射不变量^[5]

$$\begin{cases} p \equiv [Q_2, Q_3] = 36(A_1 + A_2 + A_3), \\ q \equiv [Q_3, Q_1] = 18(A_2 + 2A_3), \\ r \equiv [Q_1, Q_2] = 18A_3, \end{cases}$$

其中

$$A_1 = [a_2, a_3], \quad A_2 = [a_3, a_1], \quad A_3 = [a_1, a_2],$$

表示三个有向面积.

首先,我们讨论三次 Bézier 曲线上出现拐点的条件.

记 $N(t) \equiv [\mathbf{P}'(t), \mathbf{P}''(t)] = 18\{A_3 - (A_2 + 2A_3)t + (A_1 + A_2 + A_3)t^2\}$.

于是 $N(0)N(1) = 18^2 A_1 A_3$.

的符号就表示三次 Bézier 曲线在两端点处曲率乘积的符号. 因此, 当 $A_1 A_3 < 0$ 时, 曲线上有一个拐点; 反之, 当 $A_1 A_3 > 0$ 时, 曲线上或无拐点, 或有两个拐点.

现设 $A_1 A_3 > 0$. 这时出现两个拐点的充要条件如下^[5]

$$\begin{cases} A_2^2 > 4A_1 A_3, \\ A_3, A_2 + 2A_3, A_1 + A_2 + A_3 \text{ 同符号}, \\ \frac{A_2 + 2A_3}{A_1 + A_2 + A_3} < 2. \end{cases} \quad (15)$$

在不失一般性之下, 可以假定 $A_1 > 0$ (必要时将特征多边形作一反射变换). 于是上述充要条件成为

$$A_2 > -2A_1, A_2 > -2A_3, A_2^2 > 4A_1 A_3. \quad (16)$$

从上式易知 $A_2 > 0$. 因此, 曲线上出现两个拐点的判别条件(15)等价于

$$\begin{cases} A_1, A_2, A_3 \text{ 同符号}, \\ A_2^2 - 4A_1 A_3 > 0. \end{cases} \quad (17)$$

其次, 考察三次 Bézier 曲线上出现奇点的条件.

若存在 $t_1 \neq t_2 \in (0, 1)$, 使得

$$\mathbf{P}(t_1) = \mathbf{P}(t_2), \quad (18)$$

则点 $\mathbf{P}(t_1)$ 是二重点. 当 $t_1 \rightarrow t_2$ 时, 我们得到尖点.

容易看出, 方程(18)的解是

$$t_1, t_2 = \frac{(A_2 + 2A_3) \pm \sqrt{3(4A_1 A_3 - A_2^2)}}{2(A_1 + A_2 + A_3)}.$$

现在, 我们将分两种情况进行讨论:

1° $A_1 + A_2 + A_3 > 0$, 则 $t_1, t_2 \in (0, 1)$ 等价于

$$\begin{cases} A_2 + 2A_3 - \sqrt{3(4A_1 A_3 - A_2^2)} > 0, \\ A_2 + 2A_3 + \sqrt{3(4A_1 A_3 - A_2^2)} < 2(A_1 + A_2 + A_3), \\ 4A_1 A_3 - A_2^2 \geq 0. \end{cases}$$

经过整理就是

$$\begin{cases} A_2^2 + A_3(A_2 + A_3 - 3A_1) > 0, \\ A_2^2 + A_1(A_1 + A_2 - 3A_3) > 0, \\ A_2 + 2A_3 > 0, \\ 2A_1 + A_2 > 0, \\ 4A_1 A_3 - A_2^2 \geq 0. \end{cases}$$

2° $A_1 + A_2 + A_3 < 0$, 则 $t_1, t_2 \in (0, 1)$ 等价于

$$\begin{cases} A_2 + 2A_3 + \sqrt{3(4A_1 A_3 - A_2^2)} < 0, \\ A_2 + 2A_3 - \sqrt{3(4A_1 A_3 - A_2^2)} > 2(A_1 + A_2 + A_3), \\ 4A_1 A_3 - A_2^2 \geq 0, \end{cases}$$

整理后得到

$$\begin{cases} A_2^2 + A_3(A_2 + A_3 - 3A_1) > 0, \\ A_2^2 + A_1(A_1 + A_2 - 3A_3) > 0, \\ A_2 + 2A_3 < 0, \\ 2A_1 + A_2 < 0, \\ 4A_1A_3 - A_2^2 \geq 0. \end{cases}$$

情况 1° 和 2° 可以合并成一组式子

$$\begin{cases} A_2^2 + A_3(A_2 + A_3 - 3A_1) > 0, \\ A_2^2 + A_1(A_1 + A_2 - 3A_3) > 0, \\ (A_2 + 2A_3)(2A_1 + A_2) > 0, \\ 4A_1A_3 - A_2^2 \geq 0, \end{cases} \quad (19)$$

这就是三次 Bézier 曲线上出现奇点的充要条件。当 (19)₄ 式等号成立时是尖点，否则便是二重点。

现在，我们在三次 Bézier 特征多边形上建立如图 5 的仿射坐标系 $\{O; x, y\}$ ，其中 x 轴 $\parallel a_1$ ， y 轴 $\parallel a_3$ ，而且 a_1 和 a_3 的起点及终点坐标分别是 $(0, 1)$ ， $(x, 1)$ ； $(1, y)$ ， $(1, 0)$ 。我们称点 $R(x, y)$ 为特征多边形的特征点。 x 轴和 y 轴之间的夹角记为 θ 。于是，有向面积

$$\begin{cases} A_1 = (x-1)y \sin \theta, \\ A_2 = xy \sin \theta, \\ A_3 = (y-1)x \sin \theta. \end{cases} \quad (20)$$

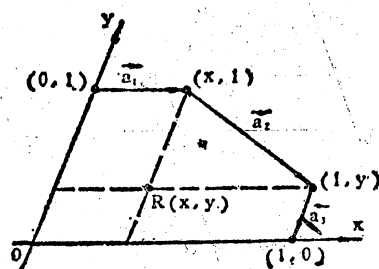


图 5

这样，在仿射坐标系中，曲线上存在一个拐点的条件 $A_1A_3 < 0$ ，它的坐标表示式是

$$xy(x-1)(y-1) < 0. \quad (21)$$

而出现两个拐点的条件 (17) 的坐标表示式成为

$$\begin{cases} x(x-1) > 0, \\ y(y-1) > 0, \\ xy \left\{ \left(x - \frac{4}{3} \right) \left(y - \frac{4}{3} \right) - \frac{4}{9} \right\} < 0. \end{cases} \quad (22)$$

出现一个奇点的条件 (19)，它的坐标表示就是

$$\begin{cases} x(3y^2 - 3y + x) > 0, \\ y(3x^2 - 3x + y) > 0, \\ xy \left\{ \left(x - \frac{4}{3} \right) \left(y - \frac{4}{3} \right) - \frac{4}{9} \right\} \geq 0, \\ xy(3x-2)(3y-2) > 0. \end{cases} \quad (23)$$

假定特征点 $R(x, y)$ 的坐标不满足 (21)，(22)，(23) 中任何一组时，相应的三次 Bézier 曲线上便不存在拐点和奇点。综合起来，我们得到三次 Bézier 曲线 L 的奇点和拐点分布定理 (参阅图 6)

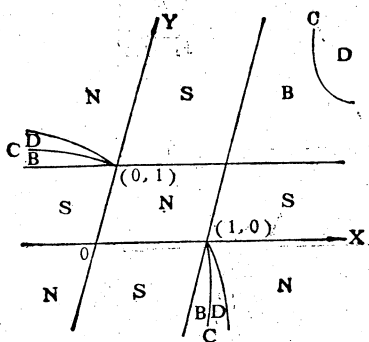


图 6

定理 如果特征点

$$R \in \begin{cases} N, & \text{则 } L \text{ 上无拐点和奇点;} \\ S, & \text{则 } L \text{ 上有一个拐点;} \\ B, & \text{则 } L \text{ 上有两个拐点;} \\ C, & \text{则 } L \text{ 上有一个尖点;} \\ D, & \text{则 } L \text{ 上有一个二重点.} \end{cases}$$

式中 C 代表双曲线 $(x - \frac{4}{3})(y - \frac{4}{3}) = \frac{4}{9}$ 的两支. 区域 D 的一侧边界是曲线 C , 另一侧边界分别是抛物线 $3y^2 - 3y + x = 0$ 和 $3x^2 - 3x + y = 0$.

此定理在[4]中已有证明,但用了不同的方法. 实际上, 这个结果仅仅是把苏步青教授在[5], [6]中关于三次参数曲线段的一个定理推广到 (x, y) 的全平面.

作为例子, 图 7 示意了代表几种典型情况的三次 Bézier 曲线.

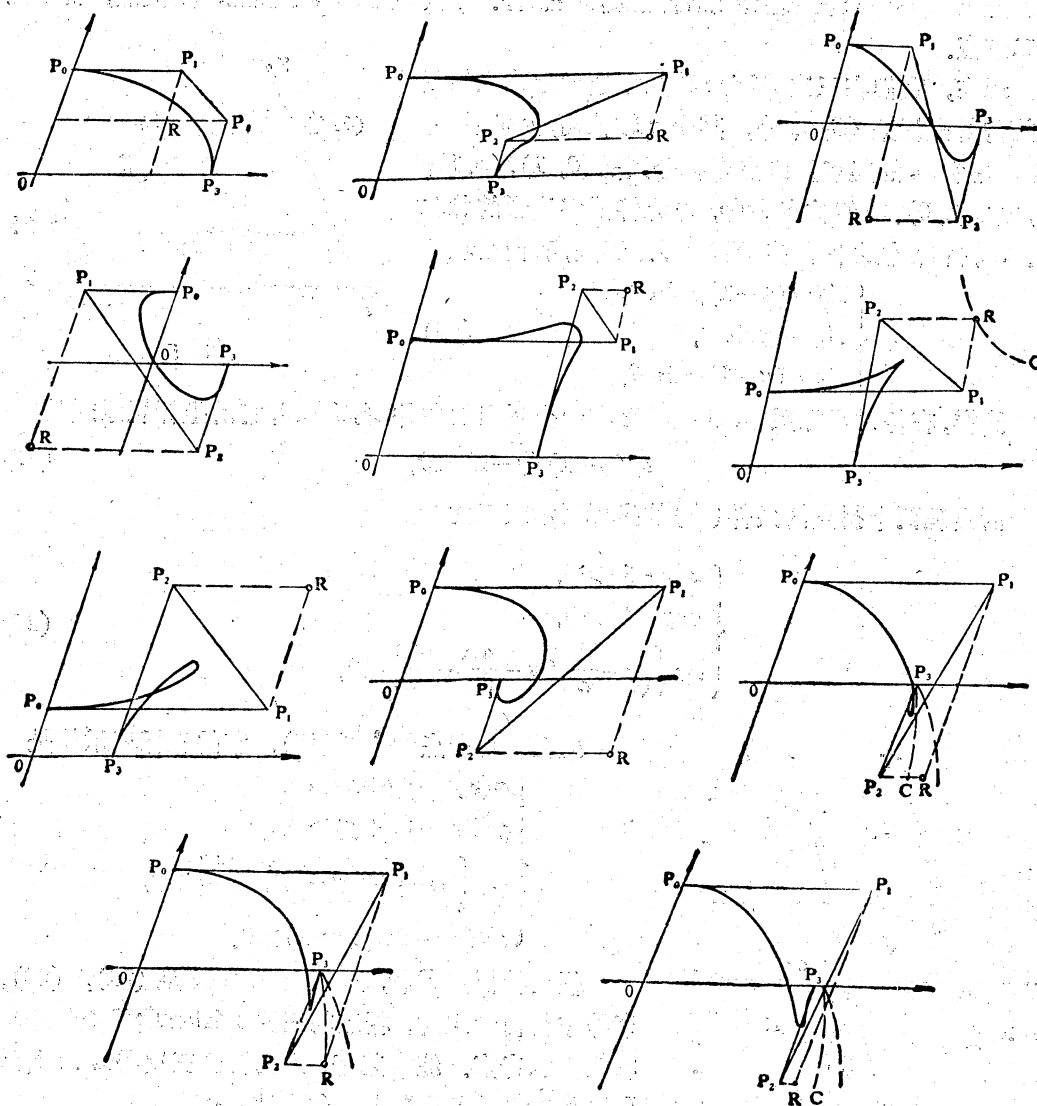


图 7

从图中容易看出, 当三次 Bézier 特征多边形为凸时, 特征点 R 一定落在无拐点和奇点的区域 N 中, 因此三次 Bézier 曲线是保凸的.

事实上, 三次 Bézier 曲线的保凸性也可以直接证明如下.

我们把三次特征多边形的始点和终点连起来, 得到向量

$$C = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3).$$

现在设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 和 C 组成一个凸闭四边形. 而且不失一般性地假定这些向量按逆时针决定它们的指向, 因此

$$[\alpha_1, \alpha_2], [\alpha_2, \alpha_3], [\alpha_3, C], [C, \alpha_1]$$

全部为正, 即

$$A_3 > 0, A_1 > 0, A_1 > A_2, A_3 > A_2.$$

进而, 按照 A_2 的符号分成两种情况分别加以考察, 不难证明这时判别条件 (17) 和 (19) 都不成立, 而且 $A_1 A_3 > 0$, 因此曲线是凸的.

最后我们指出, 一般的三次 Bézier 特征多边形都能建立如图 5 所示的仿射标架, 但是还有三种例外情形需要补充讨论:

1° $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 共线.

我们从 Bézier 曲线的凸包性质知道, 这时必是一条直线段.

2° $\alpha_1 \parallel \alpha_3$.

这时 $A_2 = 0$. 当 $A_1 A_3 < 0$ 时, 曲线上有一个拐点 (图 8). 当 $A_1 A_3 > 0$ 时, 由于 (17), 不成立而曲线上无拐点; 由于 (19)₁ 和 (19)₂ 不能同时成立而曲线上无奇点. 因此这时曲线上无奇点和拐点 (图 9).

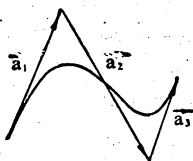


图 8

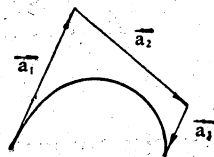


图 9

3° $\alpha_3 \parallel \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

我们记

$$\alpha_3 = \mu(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3). \quad (24)$$

如果 $\mu = 0$, 则有 $A_1 = A_2 = 0$. 从判别条件 (17) 和 (19) 知道, 这时曲线上无奇点和拐点.

当 $\mu \neq 0$ 时, 从 (24) 得到

$$A_1 = A_2, \quad A_3 = \frac{\mu-1}{\mu} A_1.$$

其中 $A_1 \neq 0$, 因为否则便是情况 1°. 经直接计算, 我们得到

$$A_1 A_3 = \frac{\mu-1}{\mu} A_1^2,$$

$$A_2^2 + A_3(A_2 + A_3 - 3A_1) = \frac{1}{\mu^2} A_1^2,$$

$$A_2^2 + A_1(A_1 + A_2 - 3A_3) = \frac{3}{\mu} A_1^2,$$

$$(A_2 + 2A_3)(2A_1 + A_2) = \frac{3(3\mu - 2)}{\mu} A_1^2,$$

$$4A_1A_3 - A_2^2 = \frac{3\mu - 4}{\mu} A_1^2.$$

因此我们有结论:

曲线段上 $\left\{ \begin{array}{l} \text{无奇点和拐点, 当 } \mu \leq 0; \\ \text{有一个拐点, 当 } 0 < \mu \leq 1; \\ \text{有两个拐点, 当 } 1 < \mu < \frac{4}{3}; \\ \text{有一个尖点, 当 } \mu = \frac{4}{3}; \\ \text{有一个二重点, 当 } \mu > \frac{4}{3}. \end{array} \right.$

对应的图形见图 10.

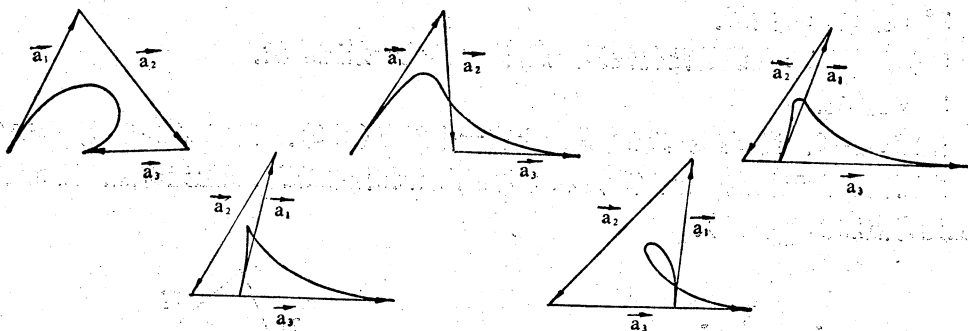


图 10

本节的讨论容易搬到三次 B 样条曲线的场合.

本文在苏步青教授指导下完成, 谨致深切谢意. 作者还得到华宣积同志的帮助, 特此致谢.

参 考 文 献

- [1] Bézier, P. E., Numerical Control-Mathematics and Applications, John Wiley & Sons, 1972.
- [2] Gordon, W. J., Riesenfeld, R. F., Bernstein-Bézier methods for the computer-aided design of free form curves and surfaces, *J. ACM.*, **21** (1974), 293—310.
- [3] Pilcher, D., Smooth parametric surfaces, Computer Aided Geometric Design, *Academic Press*, 1974.
- [4] 苏步青、刘鼎元, 计算几何, 上海科学技术出版社, 1981 年 1 月.
- [5] 苏步青, 关于三次参数样条曲线的一些注记, *应用数学学报*, **1** (1976), 49—58.
- [6] 苏步青, 关于三次参数样条曲线的一个定理, *应用数学学报*, **1** (1977), 49—54.
- [7] Pilcher, D., Smooth approximation of parametric curves and surfaces, Ph. D. Thesis, Mathematics Department, University of Utah, 1973.

A THEOREM ON THE CONVEXITY OF PLANAR BÉZIER CURVES OF DEGREE n

LIU DINGYUAN

(*Institute of Mathematics, Fudan University*)

ABSTRACT

The purpose of this paper is to prove the following

Theorem. If the polygon $P_0P_1\cdots P_nP_0$ formed by the characteristic polygon $P_0P_1\cdots P_n$ of a planar Bézier curve is convex, then so is the Bézier curve.

In the case that the angle of rotation from $\overrightarrow{P_0P_1}$ to $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$ is not larger than π , we obtained the theorem by using certain properties of Bernstein polynomials. On the contrary, if the above angle of rotation is larger than π , then we cut the original Bézier curve into two new Bézier curves, and prove that the new corresponding characteristic polygons are convex and angles of rotation between the first edge and last edge of the both polygons are not larger than π , so that we reduce the latter case into the former discussed case. The theorem is proved.

In the present paper we also discuss the distribution of the singular points and inflection points of a planar cubic Bézier curve in details, and thence give a classification of planar cubic Bézier curves.

This paper is prepared under the guidance of Professor Su Buchin.